arXiv:2611.29959v1 [math.RA] 23 Nov 2026

LV-代数的分式除环

Huynh Viet Khanh[1] 和 Vo Hoang Thanh[1]

[1]胡志明市教育大学数学与信息学系，越南胡志明市， khanhhv@hcmue.edu.vn, thanhvh@hcmue.edu.vn

摘要

设 K 为一个域，且 $A = L_K(E, \omega)$ 是一个行有限加权图的 LV-代数。我们证明， A 可嵌入某个除环，当且仅当 E 只有一个顶点，且其有序环路权重满足 $w_n = n$ 和 $w_j > j$ ，其中 $1 \leq j < n$。在这些条件下， A 存在一个泛分式除环，我们将其认定为由 $2\sum_{j=1}^{n} w_j - n^2$ 个生成元在 K上的自由域。我们通过分解生成元矩阵，显式构造了一个自由生成集。我们对 K 上的相应除环进行分类，并给出判定可逆矩阵所需稳定化的界。这些结果涵盖混合权情形，此时 LV-代数不一定是半自由理想环。

关键词 . LV-代数、加权 Leavitt 路径代数、投射秩函数、泛局部化 n, 分式除环 、自由域。
2020 年数学主题分类。主要分类 16S88。次要分类 16K40、16S85。

1 引言

不存在零因子是环能够嵌入除环的必要条件。正如 Cohn 在 [C，第 1.2 节，第 9], 页所指出的，非交换整环未必存在这样的嵌入。我们研究 LV-代数中的这一差异；LV-代数是满足 Hazrat 和 Preusser 的 LV 条件 [HP、定义 38，第 1077]页的图的加权 Leavitt 路径代数。全文中， K 表示一个交换域。设 $A = L_K(E, \omega)$是一个行有限的 LV-代数。根据 Preusser 的规范形 [P，注释 7(e)，第 129]页， E 中的顶点在 A 中均非零。不同顶点彼此正交，因此 A 只有在E 只有一个顶点时才可能是整环。在这种情况下，由于行有限性， E 是一个有限 LV-玫瑰图，而根据 Hazrat 和 Preusser 的结果 [HP，定理41，第 1079]页， A 是一个整环。例 1 给出了一个权重为（2，2，4，4）的整环，但它不能嵌入除环。我们确定哪些权重允许这种嵌入，并描述由泛性质刻画的分式除环。

对于一个环 R 以及其上的矩阵集合 Σ，Cohn 通过为这些矩阵 [添加逆元，构造了泛局部化 R_Σ（C，定理 4.1.3，第 156]页）。该局部化对于使这些矩阵可逆的同态具有泛性质。关键步骤是选取 Σ ，使得 R_Σ 是一个除环，且 $R \to R_\Sigma$ 是单射。对于一个带有忠实的取整数值的 pro- 的右遗传环

.....射秩函数，因此根据 Cohn 关于秩和局部化的结果 [C，第 4.6.11 和 4.6.13 命题，第 193–195] 页，可取 Σ 为相对于该秩而言满的方阵。局部化保持由此得到的矩阵秩。因此，关于

有限生成投射模的信息能够确立嵌入的存在性，并内在地构造一个包含它的除环。

对于有限加权玫瑰图，Preusser 证明了 A 是遗传的，并在 [P 的定理 14（第 134] 页）中描述了 $V(A)$。对于这样的玫瑰图，每个嵌入 $\lambda\colon A \hookrightarrow F$ 都会诱导一个忠实整数值投射秩函数，其定义为 $\rho_F([P]) = \dim_F(P \otimes_A F)$。因此， $V(A)$中的关系对权重施加了数值条件。反过来，当这些条件定义了忠实秩函数时，Cohn 局部化会构造出一个嵌入。更确切地说，定理 1 指出，A可嵌入除环，当且仅当 E 只有一个顶点，并且其 n 结构化环路的权重按 $w_1 \le \cdots \le w_n$排列后满足

$$w_n = n \quad \text{and} \quad w_j > j \quad \text{for } 1 \le j < n.$$

在这些 条件下， A 上的投射秩函数 ρ 是唯一的、取整数值的且忠实的 ul.

混合权解释了投射秩函数在构造中的作用。推论 2 表明，LV-代数是半自由理想环，当且仅当其图是一个玫瑰图，具有 n 个环，且每个环的权重均为n。权重为 (2，3，3) 的玫瑰图满足嵌入判据，但不能定义半自由理想环。例 4 还给出了该代数上的一个满方阵，它不是稳定满的。因此，一般而言， ρ 所选取的矩阵不能仅用满性来描述。在半自由理想环的情形下，Cohn 构造 [C（推论 4.5.9，第 182] 页）会将每个满方阵求逆。

另一个问题是应当选择哪个分式除环。正如 Cohn 在 [C, §4.1, p. 156], 中指出的，即使是由给定环的像生成的除环，也未必彼此同构。按照 Cohn 的术语 [C, §4.4, p. 176], , 泛 A-域可以特化到由 A 的某个同态像生成的每个除环。令 Σ_ρ 为 A 上关于 ρ 是满的方阵集合。在定理 2 中，我们证明局部化 $D_K(E, \omega) = A_{\Sigma_\rho}$ 是 A 的泛分式除环，且在唯一同构意义下唯一。证明利用 ρ 的唯一性来比较奇异核，然后应用 Cohn 特化定理 [C, Theorem 4.4.1, p. 172]。

对于 $r \ge 1$，令 $\mathcal{F}_K(r)$ 表示由 r 个生成元生成的自由结合 K-代数的泛分式除环。定理 3 证明

$$D_K(E,\omega) \cong_K \mathcal{F}_K(r), \quad \text{where} \quad r = 2\sum_{j=1}^{n} w_j - n^2.$$

引理 2 构造了第 2 节中生成元矩阵的分解 $X = LPT^{-1}$。 p_j 中对应 $1 \le j \le n$ 的元素，以及 l_{ij}, t_{ji} 中对应 $1 \le j < i \le w_j$ 的元素，构成了 $D_K(E, \omega)$ 在 K 上的自由生成集。它们的个数为 $n + 2\sum_j(w_j - j) = r$。我们构造一个从 A 到由相应生成元生成的自由域的同态，并利用 Cohn 特化定理得到所需的同构。因此，这一识别既用到了图生成元之间的关系，也用到了 $V(A)$ 的计算。

根据 Cohn [C，推论 5.8.14，第 258], 页，自由生成集的基数是 K 上自由域的不变量。鉴于上述同构， r 将所得除环按 K-同构分类。命题 2 确定了 r 所能取的所有值。例 2 展示了两个非同构的 LV-代数，它们的泛除环却是 K-同构的。在例 3 中，存在一个幺半群同构 $\varphi\colon V(A) \to V(A')$，满足 $\varphi([A]) = [A']$，尽管这些泛除环并非 K-同构。因此，射影幺半群揭示了嵌入的秩障碍，而显式的自由生成元则决定了所得除环。

矩阵局部化还使我们能够描述 $D_K(E,\omega)$ 中的算术。命题 3 通过 A 上的稳定满性刻画该除环上的可逆性。命题 4 根据权重，给出了检验稳定满性所需单位块大小的上界。命题 5 将每个元素表示为 $uM^{-1}v$，其中 $M \in \Sigma_\rho$，这与 Cohn 的分式矩阵表示法一致[C，定理 4.2.1(d)，第 158] 页。当 K 由一个字问题可解的表示给出时，显式的自由生成元使我们能够利用 Cohn 关于自由域字问题的结果 [C，推论 6.6.8，第 323] 页，从而判定有理表达式是否相等，以及 $D_K(E,\omega)$ 中 A 上方阵的可逆性。

第 2 节介绍 LV-代数，并回顾 Preusser 对其投射模的描述。第 3 节证明嵌入判据，并刻画半自由理想环的情形。第 4 节构造泛除环，并证明其特化性质。第 5 节确定自由生成元，并对 K 上由此得到的除环进行分类。第 6 节讨论矩阵和有理表达式。

2 LV-代数及其投射模

加权图 (E,ω) 的顶点集为 E^0，结构边集为 E^{st}，源映射与值域映射为$s,r\colon E^{\mathrm{st}}\to E^0$，权函数为 $\omega\colon E^{\mathrm{st}}\to\mathbb{N}$，如 Preusser [P，定义 1–2 和注 3，第 127] 页所述。我们假设 E 是行有限的，因此对每个 $v\in E^0$，$s^{-1}(v)$ 都是有限集。若顶点 v 满足$s^{-1}(v)=\varnothing$，则称其为汇点。非汇点 v 的权定义为 $\omega(v)=\max\{\omega(e): s(e)=v\}$。我们采用 Hazrat 和 Preusser [HP 的 LV 条件（定义 38，第 1077] 页），并称 (E,ω) 为 LV-图，若它是连通的，且对每个 $e\in E^{\mathrm{st}}$ 均有 $E^{\mathrm{st}}\neq\varnothing$, $\omega(e)\geq 2$，并且

$$\big|\{e\in s^{-1}(v):\omega(e)=\omega(v)\}\big|\geq 2$$

对于每个不是汇点的顶点 v。对于每条结构边 e，将相应的边记为 e_1、……、$e_{\omega(e)}$，并将其幽灵边记为 e_1^*、……、$e_{\omega(e)}^*$。

定义 1。按照 Preusser [P，定义 4，第 128]，页，加权 Leavitt 路径代数 $L_K(E,\ \omega)$ 是由顶点以及符号 e_i、e_i^*生成的泛 K-代数，其中 $e\in E^{\mathrm{st}}$和 $1\leq i\leq\omega(e)$，并满足以下关系。

(W1) $uv=\delta_{uv}u$ 对所有 $u,\ v\in E^0$。

(W2) $s(e)e_i=e_i=e_ir(e)$ 且 $r(e)e_i^*=e_i^*=e_i^*s(e)$，对每个 $e\in E^{\mathrm{st}}$ 和 $1\leq i\leq\omega(\ \ e)$.

(W3) 对于每个不是汇点的顶点 v 以及所有 $1\leq i,\ j\leq\omega(v)$,

$$\sum_{e\in s^{-1}(v)}e_ie_j^*=\delta_{ij}v.$$

（W4）对于每个不是汇点的顶点 v 以及所有 $e,\ f\in s^{-1}(v)$,

$$\sum_{i=1}^{\omega(v)}e_i^*f_i=\delta_{ef}r(e).$$

H当 $e_i=e_i^*=0$ 只要 $i>\omega(e)$。对于一个 LV-图 (E,ω)，*LV*-代数 是 $L_K(E,\omega)$.

代数 $L_K(E,\omega)$ 是幺代数，当且仅当 E^0 是有限的；在这种情况下 $1=\sum_{v\in E^0} v$

.

只有一个顶点的加权图称为加权玫瑰图。在本节其余部分，固定一个 LV-玫瑰图 (E,ω)，其顶点为 v，并令 $A=L_K(E,\omega)$。它的结构边都是环，且环的数量n有限，满足 $n\geq 2$。将这些环排序为 $e^{(1)},\dots,e^{(n)}$，使其权重满足 $w_1\leq\cdots\leq w_n$，并令 $d=w_n$。记 $x_{ij}=e_i^{(j)}$ 和 $y_{ji}=(e_i^{(j)})^*$ 为 $1\leq i\leq w_j$。令 $x_{ij}=y_{ji}=0$ 表示 $i>w_j$，并构造

$$X=(x_{ij})\in M_{d\times n}(A)\quad\text{and}\quad Y=(y_{ji})\in M_{n\times d}(A).$$

这里 $v=1_A$，而 A 的表示为

$$A=K\langle x_{ij},y_{ji}:1\leq j\leq n,\ 1\leq i\leq w_j\rangle/(XY-I_d,\ YX-I_n).$$

以下所有模均为右模。向量为列向量，矩阵从左侧作用。设 R 为含幺环。对于有限生成射影 R-模 P，记 $[P]$ 为其同构类，因此 $[P]=[Q]$ 当且仅当 $P\cong_R Q$。这些同构类构成的集合 $V(R)$ 上的加法定义如下：

$$[P]+[Q]=[P\oplus Q].$$

直和保持同构，并且在同构意义下满足结合律和交换律。因此，该运算使 $V(R)$ 成为一个交换幺半群，其单位元为 $[0]$, 零模的类。特别地，$[R^n]=n[R]$ 对每个 $n\in\mathbb{N}_0$ 都成立。

格罗滕迪克群 $K_0(R)$ 是 $V(R)$ 的群完备化，其典范映射为 $\iota\colon V(R)\to K_0(R)$ [C，第 4.6 节，第 186] 页。每个从 $f(V)\to H$ 到阿贝尔群的加法映射都唯一地分解为 $_f=f\circ\iota$，其中 $f\colon K_0(R)\to H$ 是群同态。

我们采用 Cohn 对投射秩函数 的定义 [C，第 4.6 节，第 187] 页。这样的函数定义在 R 上，是满足以下条件的映射 $\rho\colon V(R)\to\mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\rho([0])=0,\qquad \rho([P\oplus Q])=\rho([P])+\rho([Q])\quad\text{and}\quad \rho([R])=1.$$

由于 ρ 定义在同构类上，$P\cong_R Q$ 意味着 $\rho([P])=\rho([Q])$。我们记 $\rho(P)=\rho([P])$；特别地，$\rho(R^n)=n$。若对每个非零有限生成射影模 P，$\rho(P)>0$ 成立，则秩是 忠实 的；若对每个有限生成射影模 P，$\rho(P)\in\mathbb{N}_0$ 成立，则秩是 取整数值的 。

对于上面的玫瑰图，令 $d_1<\cdots<d_k=d$ 为不同的权重，令 a_i 为权重为 d_i 的环的数量，并设 $N_i=a_1+\cdots+a_i$，其中 $d_0=N_0=0$ 和 $N_k=n$。LV 条件蕴含 $d_1\geq 2$ 和 $a_k\geq 2$。

命题 1。 对于上文固定的 LV-玫瑰图 (E,ω)，代数 $A=L_K(E,\omega)$ 是左遗传且右遗传的，并且存在一个同构

$$V(A)\cong\big\langle v,q_1,\dots,q_{k-1}\ \big|\ q_{i-1}+(d_i-d_{i-1})v=q_i+a_iv\quad \textit{for } 1\leq i\leq k\big\rangle,$$

其中 $v=[A]$ 和 $q_0=q_k=0$。若 $k>1$，则对于每个 $1\leq i<k$ 和每个 $m\in\mathbb{N}_0$，都有 $q_i\neq 0$ 和 $q_i\neq mv$。

证明。 由于玫瑰图是有限的，由 Preusser 定理 [P、定义 11，第 132 页，以及定理 14，第 134] 页可知，A 是左遗传且右遗传的，并且 $V(A)$ 具有所示的表示。为了考察生成元，令 F 为以符号 $v,q_1,\dots,q_{k-1}$ 为生成元的自由交换幺半群。令 $\ell\colon F\to\mathbb{N}_0$ 为由下式定义的函数

$$\ell\big(cv+\sum_{j=1}^{k-1}b_jq_j\big)=c+\sum_{j=1}^{k-1}b_j,\qquad \text{where } c,b_j\in\mathbb{N}_0.$$

置 $q_0 = q_k = 0$，并将第 i 个关系的两边写作

$$u_i = q_{i-1} + (d_i - d_{i-1})v \quad \text{and} \quad t_i = q_i + a_i v.$$

对于第一个关系，$\ell(u_1) = d_1 \geq 2$；对于最后一个关系，$\ell(t_k) = a_k \geq 2$。其余每一边都包含一个q_j 和 v的正倍数。因此，对所有 i，$\ell(u_i)\ \ell(t_i) \geq 2$。

F 中的两个元素在 $V(A)$中的像相同，当且仅当其中一个可以通过有限次将 $a + u_i$ 替换为 $a + t_i$（或反向替换）而得到，且每一步都满足 $a \in F$和 $1 \leq i \leq k$。由于 $\ell(a + u_i)\ \ell(a + t_i) \geq 2$ 且 $\ell(q_j) = 1$，因此无法从 q_j开始替换。于是，q_j 的等价类是 $\{q_j\}$，其中既不包含 0，也不包含任何 $m \in \mathbb{N}_0$的 mv。因此，$q_j \neq 0$ 和$q_j \neq mv$ 属于 $V(A)$。 □

生成元 q_i 可以用显式幂等元表示。对于 $1 \leq i < k$，令 U_i 为 X中由前 N_i 列和前 d_i 行组成的$d_i \times N_i$ 块，并令 V_i 为 Y中由前 N_i 行和前 d_i 列组成的 $N_i \times d_i$块。X 在第 d_i 行以下的前 N_i 列中的元素均为零，因此 $YX = I_n$ 意味着 $V_i U_i = I_{N_i}$。令

$$\epsilon_i = I_{d_i} - U_i V_i \quad \text{and} \quad P_i = \epsilon_i A^{d_i}.$$

那么 $\epsilon_i^2 = I_{d_i} - 2U_iV_i + U_i(V_iU_i)V_i = \epsilon_i$，并且 $V_i\epsilon_i = 0$，$\epsilon_i U_i = 0$ 和 $U_iV_i + \epsilon_i = I_{d_i}$。令$\phi_i$：$A^{N_i} \oplus P_i \to A^{d_i}$和 ψ_i：$A^{d_i} \to A^{N_i} \oplus P_i$为如下定义的映射：

$$\phi_i(a, p) = U_i a + p \quad \text{and} \quad \psi_i(z) = (V_i z, \epsilon_i z).$$

Then

$$\psi_i\phi_i(a, p) = (V_iU_ia + V_ip, \epsilon_iU_ia + \epsilon_ip) = (a, p),$$
$$\phi_i\psi_i(z) = (U_iV_i + \epsilon_i)z = z.$$

Thus

$$A^{N_i} \oplus P_i \cong A^{d_i} \quad \text{and} \quad [P_i] = q_i.$$

Preusser 的同构将 q_i 映射到 $[\epsilon_i] = [P_i]$，具体见 [P，第 I 部分定理 14 的证明，第 136]页。

3 嵌入判据

对于 LV-玫瑰图的代数 A，命题 1 中的关系 $V(A)$ 决定了何时存在忠实整数值投射秩函数。同一命题还表明 A是右遗传的，因此一旦找到这样的秩函数，引理 1 即可应用。

设 ρ 是含幺环 R上的整数值投射秩函数。对于有限生成投射模之间的映射 α：$P \to Q$，令 r_ρ 为如下定义的函数：

$$r_\rho(\alpha) = \min\{\rho(H) : \alpha = \gamma\beta,\ \beta\colon P \to H,\ \gamma\colon H \to Q,\ H \text{ finitely generated projective}\}.$$

可能的秩 $\rho(H)$ 构成 $\mathbb{N}_0$ 的非空子集，因为可以取 $H = P$。Cohn 将$r_\rho(\alpha)$ 称为内 ρ-秩 [C，第 4.6 节，第 192–193] 页。对于方阵，令

$$\Sigma_\rho = \bigcup_{m \geq 1} \{M \in M_m(R) : r_\rho(M) = m\}.$$

Σ_ρ 中的矩阵称为 ρ-满矩阵。对于幂等元 $E \in M_s(R)$，令 $P = ER^s$。投影E经由 P 分解，因此 $r_\rho(E) \leq \rho(P)$。若 $E = \gamma\beta$经由 H 分解，则 $E|_P = \mathrm{id}_P$推出 $\mathrm{id}_P = (E\gamma)(\beta|_P)$。因此，$P$是 H 的直和项，从而 $\rho(P) \leq \rho(H)$。由于对于每个使 E 经由其分解的有限生成投射模 H，都有 $\rho(P) \leq \rho(H)$，定义 r_ρ 推出$\rho(P) \leq r_\rho(E)$。结合 $r_\rho(E) \leq \rho(P)$，可得 $r_\rho(E) = \rho(P) = \rho(ER^s)$。

引理 1。设 R 是右遗传的，且 ρ 是忠实整数值投射秩函数。则泛局部化 $\lambda\colon\ R \to R_{\Sigma_\rho}$ 是单射的，R_{Σ_ρ} 是除环，并且对于 R上的每个矩形矩阵 B，秩$_{R_{\Sigma_\rho}}\lambda(B) = r_\rho(B)$。

证明。设 $\alpha\colon\ P \to Q$ 和 $\beta\colon\ Q \to T$ 是有限生成投射模之间的映射，且满足 $\beta\alpha = 0$。令 $N =$为 β的核，$I =$为 β的像，并令 $\beta_0\colon\ Q \to I$ 为由 β诱导的映射。由于 R是右遗传的，I是投射的。取 $s\colon\ I \to Q$，使得 $\beta_0 s = \mathrm{id}_I$。对于 $q \in Q$，$q = (q - s\beta_0(q)) + s\beta_0(q)$，以及 $\beta_0(q - s\beta_0(q)) = 0$。由于 $\ker\beta_0 = N$，$Q = N + s(I)$。若 $x \in I$ 且 $s(x) \in N$，则 $x = \beta_0 s(x) = 0$。因此 $Q = N \oplus s(I) \cong N \oplus I$，所以 N和 I都是有限生成投射模。

令 $\iota_N\colon\ N \to Q$ 和 $\iota_I\colon\ I \to T$ 为包含映射。由于 $\beta\alpha = 0$，令 $\alpha_0\colon\ P \to N$ 为由 $\alpha_0(p) = \alpha(p)$ 定义的映射。于是

$$\alpha = \iota_N\alpha_0 \quad \text{and} \quad \beta = \iota_I\beta_0.$$

这些分解意味着

$$r_\rho(\alpha) + r_\rho(\beta) \leq \rho(N) + \rho(I) = \rho(Q).$$

这验证了 ρ 满足 Cohn 零度条件，从而成为 Sylvester 秩函数 [C，第 4.6 节，第 193] 页。由于 ρ 取整数值，Cohn 关于局部化的结果 [C，命题 4.6.13，第 194–195] 页，推出 R_{Σ_ρ} 是一个除环，且秩 $_{R_{\Sigma_\rho}}\lambda(B) = r_\rho(B)$。此外，

$$\ker\lambda = \left\langle e_{ij} : E = (e_{ij}) \in M_s(R),\ E^2 = E,\ \rho(ER^s) = 0 \right\rangle.$$

对于此处出现的幂等元 E，$\rho(ER^s) = 0$，且 ρ 忠实，因此 $ER^s = 0$。若 $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_s$ 是 R^s 的标准列，则

$$E\mathsf{e}_j \in ER^s = 0 \quad \text{for } 1 \leq j \leq s, \quad \text{hence} \quad E = \begin{pmatrix} E\mathsf{e}_1 & \cdots & E\mathsf{e}_s \end{pmatrix} = 0.$$

因此，$\ker\lambda$ 的每个生成元都为零，且 $\ker\ \lambda = 0$。 □

定理 1. 设 $A = L_K(E, \omega)$ 是一个行有限加权图的 LV-代数。以下条件等价：

(i) A 可嵌入一个除环。

(ii) E 只有一个顶点，且其 n 结构化环路的有序权重满足 $w_n = n$ 和 $w_j > j$（对 $1 \leq j < n$）。(iii) E 只有一个顶点，并且根据第 *2* 节中的不同权重及其重数，$d_k = N_k = n$和 $d_i > N_i$（对 $1 \leq i < k$）。

当这些条件成立时，A上的投射秩函数是唯一的。它取整数值且忠实，并由 $\rho(v) = 1$ 和 $\rho(q_i) = d_i - N_i$ 定义，其中 $1 \leq i < k$。

证明。 首先假设 $\lambda\colon A \hookrightarrow F$ 是到一个除环中的嵌入。 E 的每个顶点都属于 Preusser [P 中的标准形基，见注 7(e)，第 129] 页，因此在 A 中非零。若 u, v 是不同的顶点，则

$$\lambda(u) \neq 0, \qquad \lambda(v) \neq 0 \quad \text{and} \quad \lambda(u)\lambda(v) = \lambda(uv) = 0,$$

这在 F 中是不可能的。因此 $E^0 = \{v\}$。由于 E 是行有限的，该玫瑰图是有限的，其中有 $1_A = v$。此外， $\lambda(v)^2 = \lambda(v) \neq 0$，因此 $\lambda(v) = 1_F$。

令 $\rho_F\colon V(A) \to \mathbb{N}_0$ 为如下定义的函数：对于每个有限生成射影 A-模 P， $\rho_F([P]) = \dim_F(P \otimes_A F)$。由于 $(P \oplus Q) \otimes_A F \cong (P \otimes_A F) \oplus (Q \otimes_A F)$ 且 $A \otimes_A F \cong F$，我们有

$$\rho_F(P \oplus Q) = \dim_F\big((P \otimes_A F) \oplus (Q \otimes_A F)\big) = \rho_F(P) + \rho_F(Q) \quad \text{and} \quad \rho_F(A) = \dim_F F = 1.$$

因此， ρ_F 是一个整数值投射秩函数。为验证其忠实性，写作 $P \cong EA^s$，其中 $E^2 = E \in M_s(A)$，并令 e_j 为标准列。令 $\Phi_E\colon (EA^s) \otimes_A F \to \lambda(E)F^s$ 以及 $\Psi_E\colon \lambda(E)F^s \to (EA^s) \otimes_A F$ 为如下定义的映射

$$\Phi_E(z \otimes f) = \lambda(z)f \quad \text{and} \quad \Psi_E(\xi) = \sum_{j=1}^{s} E\mathsf{e}_j \otimes \xi_j.$$

映射 Φ_E 和 Ψ_E 互为逆映射。这里， λ 逐项作用于列向量。事实上， $Ez = z$ 和 $\lambda(E)\xi = \xi$ 推出

$$\Phi_E\Psi_E(\xi) = \lambda(E)\xi = \xi \text{ and } \Psi_E\Phi_E(z \otimes f) = \sum_j E\mathsf{e}_j \otimes \lambda(z_j)f = \sum_j E\mathsf{e}_j z_j \otimes f = Ez \otimes f = z \otimes f.$$

若 $P \neq 0$，则 $E \neq 0$。由于 λ 是单射， $\lambda(E) \neq 0$。因此， $P \otimes_A F \cong \lambda(E)F^s \neq 0$ 和 $\rho_F(P) \geq 1$。

令 $s_i = \rho_F(q_i)$ 和 $s_0 = s_k = 0$。将 ρ_F 应用于命题 1 中的关系，并求和

ng the 逆推关系，我们得到

$$s_i - s_{i-1} = d_i - d_{i-1} - a_i,$$
$$s_i = \sum_{h=1}^{i}(d_h - d_{h-1} - a_h) = d_i - \sum_{h=1}^{i} a_h = d_i - N_i.$$

对于 $i < k$， $q_i \neq 0$ 和 ρ_F 是忠实的，因此 $d_i - N_i = s_i > 0$。对于 $i = k$，

$$0 = s_k = d_k - N_k = d_k - n.$$

因此 (iii) 成立。

反过来，假设 (iii)。令 ρ 为生成元上的映射，其定义为 $\rho(v) = 1, \rho(q_i) = d_i - N_i$，其中 $i < k$，且 $\rho(q_0) = \rho(q_k) = 0$。对于每个 $1 \leq i \leq k$，

$$\begin{aligned}\rho(q_{i-1}) + d_i - d_{i-1} &= d_{i-1} - N_{i-1} + d_i - d_{i-1} \\ &= d_i - N_i + a_i = \rho(q_i) + a_i.\end{aligned}$$

由于这些正是命题 1 中给出 $V(A)$ 的关系，因此该映射诱导出一个加法映射 $\rho\colon V(A) \to \mathbb{N}_0$，满足 $\rho([A]) = 1$。若 $[P] = cv + \sum_{i=1}^{k-1} b_i q_i \neq 0$，其中 $c,\ b_i \in \mathbb{N}_0$，则$c + \sum_i b_i \geq 1$，因此

$$\rho(P) = c + \sum_{i=1}^{k-1} b_i(d_i - N_i) \geq c + \sum_{i=1}^{k-1} b_i \geq 1.$$

由命题 1，ρ 是忠实的且 A 是右遗传的；由引理 1 可知，$A \to A_{\Sigma_\rho}$ 是单射的，且 A_{Σ_ρ} 是一个除环。

对于任意投射秩函数 $\delta\colon V(A) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，同一递推关系给出

$$\delta(v) = 1 = \rho(v) \quad \text{and} \quad \delta(q_i) = \sum_{h=1}^{i}(d_h - d_{h-1} - a_h) = d_i - N_i = \rho(q_i).$$

因此，对于每个 $x = cv + \sum_i b_i q_i \in V(A)$，我们都有

$$\delta(x) = c + \sum_i b_i \delta(q_i) = c + \sum_i b_i \rho(q_i) = \rho(x).$$

因此 $\delta = \rho$。

还需比较 (ii) 和 (iii)。假设 (iii) 成立，并令 $w_j = d_i$，其中 $j < n$。那么

$$w_j - j = \begin{cases} d_i - j \geq d_i - N_i > 0, & i < k, \\ n - j > 0, & i = k. \end{cases}$$

此外 $w_n = d_k = n$，因此 (ii) 成立。反过来，若 (ii) 成立，对于 $i < k$，我们有 $N_i < n$ 一个 d

$$d_i - N_i = w_{N_i} - N_i > 0, \quad \text{while} \quad d_k = w_n = n.$$

因此 (iii) 成立。 □

推论 1. 假设 *LV*-代数 A 嵌入某个除环，并令 ρ 为定理 *1* 中给出的投射秩函数。那么每个有限生成投射 A-模都是稳定自由的。更准确地说，若 $[P] = cv + \sum_{i=1}^{k-1} b_i q_i$，且 $c, b_i \in \mathbb{N}_0$，则 $P \oplus A^s \cong A^{\rho(P)+s}$，其中 $s = \sum_{i=1}^{k-1} b_i N_i$。

证明. $[P]$ 的表达式意味着 $P \cong A^c \oplus \bigoplus_i P_i^{b_i}$。利用第 2 节中构造的同构 $P_i \oplus A^{N_i} \cong A^{d_i}$，我们得到

$$\begin{aligned} P \oplus A^s &\cong A^c \oplus \bigoplus_i (P_i \oplus A^{N_i})^{b_i} \\ &\cong A^{c + \sum_i b_i d_i}. \end{aligned}$$

指数为

$$c + \sum_i b_i d_i = c + \sum_i b_i(d_i - N_i) + \sum_i b_i N_i = \rho(P) + s,$$

所以 $P \oplus A^s \cong A^{\rho(P)+s}$。 □

根据 Cohn [C，定理 1.6.1，第 35], 页，我们称非零含幺环为 半自由理想环，如果每个有限生成的左理想或右理想都是具有唯一秩的自由理想。

对于含幺环 R 上的方阵 $M \in M_m(R)$， M 的 内秩 是满足以下条件的最小 $q \geq 0$： $M = BC$，其中 $B \in M_{m\times q}(R)$ 且 $C \in M_{q\times m}(R)$。若矩阵 M 的内秩为 m [，则称其为 满 的。参见 C，第 4.5 节，第 179] 页。

推论 2。 *LV*-代数 $A = L_K(E,\omega)$ 是半自由理想环，当且仅当 E 是一个玫瑰图，具有 n 个结构化环路，且每个环路的权均为 n。在此情形下， Σ_ρ 是所有满方阵的集合，而所得的局部化就是 *Cohn* 的 *semifir* 嵌入定理中的局部化 *[C，推论 4.5.9，第 182]* 页。

证明。 Cohn 证明了半自由理想环可嵌入除环 [，参见 C，推论 4.5.9，第 182] 页。定理 1 中的嵌入判据随即推出 E 是一个玫瑰图。我们先证明每个有限生成射影右模都是自由模。这样的模是某个 A^r 的直和项，因此只需对有限生成射影 $P \subseteq A^r$ 的 r 进行归纳。对于 $r = 0$， $P = 0$; 对于 $r = 1$， P 是有限生成右理想，因而是自由的。

对于 $r > 1$，令 $\pi\colon\ P \to A$ 为由 $\pi(x) = x_r$ 定义的映射，其中 $x = (x_1, \ldots, x_r)^T \in P$，并令 $I = \pi(P)$。由于 I 是有限生成右理想，取 I 的一个自由基 $a_1, \ldots, a_t$，以及满足 $\pi(p_j) = a_j$ 的元素 $p_1, \ldots, p_t \in P$。令 $\sigma\colon\ I \to P$ 为由 $\sigma(\sum_{j=1}^t a_j c_j) = \sum_{j=1}^t p_j c_j$ 定义的映射，其中 $c_j \in A$。于是，对于 $x \in I$，有 $\pi\sigma(x) = x$。令 $N =$ 为 π 的核。对于每个 $p \in P$， $p = (p - \sigma\pi(p)) + \sigma\pi(p)$，且 $\pi(p - \sigma\pi(p)) = 0$。若 $x \in I$ 且 $\sigma(x) \in N$，则 $x = \pi\sigma(x) = 0$。因此 $P = N \oplus \sigma(I) \cong N \oplus I$。模 N 是有限生成的投射模，并且 $N \subseteq A^{r-1}$。根据归纳法，存在某个 s 使得 $N \cong A^s$，从而

$$P \cong N \oplus I \cong A^s \oplus A^t \cong A^{s+t}.$$

特别地， $P_i \cong A^{m_i}$ 对于某个 $m_i \in \mathbb{N}_0$ 成立，因此 $q_i = [P_i] = m_i v$。命题 1 排除了 $q_i = m_i v$ 对于 $i < k$ 的情形，因此 $k = 1$。于是，定理 1 中的等式 $d_k = n$ 可化为 $d_1 = n$。

反之，若所有 n 权重都等于 n，则命题 1 中 $V(A)$ 的表示可化为 to

$$V(A) \cong \langle v \mid nv = nv \rangle \cong \mathbb{N}_0,$$

其中第二个同构将 v 映为 1。因此，每个有限生成射影右模 P 都满足 $[P] = mv$，其中 m 唯一，故 $P \cong A^m$。特别地，

$$A^m \cong A^{m'} \implies mv = m'v \implies m = m'.$$

由于 A 是右遗传的，每个有限生成右理想都是投射的，因此是秩唯一的自由模。

对于有限生成左投射模 L，令 $L^\vee = \mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(L, A)$。由于 L 是有限生成投射模，由 $\ell \mapsto (f \mapsto f(\ell))$ 定义的映射 $L \to \mathrm{Hom}_A(L^\vee, A)$ 是一个同构。因此

$$L \cong \mathrm{Hom}_A(L^\vee, A) \cong \mathrm{Hom}_A(A^m, A) \cong {}_A A^m$$

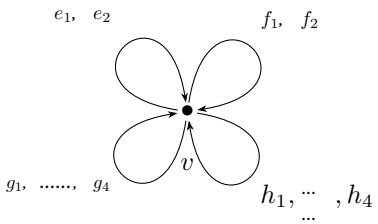
对于具有唯一 m 的 $L^\vee \cong A^m$。由于 A 也是左遗传的，每个有限生成左理想都是具有唯一秩的自由模。因此， A 是半自由理想环。

最后，每个有限生成投射模 H 都同构于具有 $\rho(H) = t$ 的 A^t。对于 $M \in M_m(A)$， r_ρ 的定义因此变为

$$r_\rho(M) = \min\{t : M = BC,\ B \in M_{m\times t}(A),\ C \in M_{t\times m}(A)\}.$$

Thus $r_\rho(M)$ 等于 M 的内秩，而 Σ_ρ 恰好由完整的方阵组成 s. □

例 1。 考虑权重为 (2，2，4，4) 的 LV-玫瑰图。如 Hazrat 的图示 [H、《例 5.5》第 876], 页所示, 我们用相应的边标记每个结构化环。



对于这些权重，命题 1 中的表示为

$$V(A) \cong \langle v, q \mid 2v = q + 2v,\ q + 2v = 2v \rangle.$$

此处 $q \neq 0$ 属于 $V(A)$。关系 $2v = q + 2v$ 意味着，对于每个投射秩函数 ρ， $\iota(q) = 0$ 属于 $K_0(A)$，且 $\rho(q) = 0$。假设 $\lambda\colon\ A \hookrightarrow F$ 是到除环中的一个嵌入。令 $\rho_F\colon\ V(A) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为由 $\rho_F([Q]) = \dim_F(Q \otimes_A F)$ 定义的投射秩函数。选取一个幂等元 $E \in M_s(A)$，使得 $[EA^s] = q$。由于 $q \neq 0$，我们有 $E \neq 0$，而 λ的单射性意味着 $\lambda(E) \neq 0$。因此

$$0 = \rho_F(q) = \dim_F((EA^s) \otimes_A F) = \dim_F\big(\lambda(E)F^s\big) > 0,$$

这导致矛盾。因此， A 不能嵌入除环。由于该图只有一个顶点，Hazrat 和 Preusser 的判据 [HP，定理41，第 1079] 页表明， A 是一个整环。特别是，仅有整环条件是不充分的。

4 万有分式除环

在本文其余部分，除非另有说明，固定一个满足定理 1 的嵌入判据的 LV-代数 $A = L_K(E,\ \omega)$，以及其唯一的投射秩函数 ρ。由于根据命题 1， A 是右遗传的，且 ρ 是忠实的并取整数值，故引理 1 表明， A_{Σ_ρ} 是一个包含 A的除环。

我们按照 Cohn [C, 《定理 4.1.3》，第 156]页中的方法，通过对 Σ_ρ中的矩阵添加逆元来描述这一局部化。对于每个 $M = (m_{ij}) \in \Sigma_\rho \cap M_m(A)$，我们引入一个由新符号组成的 $m \times m$ 矩阵 $Z_M = (z_{ij}^M)$。令 $\mathcal{J}$为由 $MZ_M - I_m$ 的元素以及对所有此类 M的$Z_M M - I_m$生成的双边理想，并令

$$D_K(E,\omega) = \big(A *_K K\langle z_{ij}^M : M \in \Sigma_\rho \cap M_m(A),\ m \geq 1,\ 1 \leq i,j \leq m\rangle\big)\big/\mathcal{J}.$$

自由积取在 K 上，因此 $cz_{ij}^M = z_{ij}^M c$当 $c \in K$ 时。方程 $MZ_M = Z_M M = I_m$可写为

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij} z_{j\ell}^M = \delta_{i\ell} \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^{m} z_{ij}^M m_{j\ell} = \delta_{i\ell} \quad \text{for } 1 \leq i,\ell \leq m.$$

设 $f\colon A \to B$是一个含幺同态，使得每个 $f(M)$、 $M \in \Sigma_\rho$ 都可逆。对于 $c \in K$和 $M \in \Sigma_\rho \cap M_m(A)$，$M$ 的元素与 c 可交换，因此

$$(f(c)I_m)f(M) = f(M)(f(c)I_m), \quad \text{hence} \quad (f(c)I_m)f(M)^{-1} = f(M)^{-1}(f(c)I_m).$$

因此， $f(M)^{-1}$的元素与 $f(K)$中的元素可交换。令 $f\colon D_K(E,\ \omega) \to B$为由下式定义的同态

$$\widetilde{f}(a) = f(a) \quad \text{for } a \in A \quad \text{and} \quad \widetilde{f}(Z_M) = f(M)^{-1} \quad \text{for } M \in \Sigma_\rho.$$

事实上，这些代换保持了 $D_K(E,\ \omega)$的关系，因为对于 $M \in \Sigma_\rho \cap M_m(A)$，有 $f(M)f(M)^{-1} = I_m = f(M)^{-1}f(M)$。反过来， f的任何扩张都必须取这些值，因此它是唯一的。于是 $D_K(E,\ \omega) = A_{\Sigma_\rho}$。此后，我们将 A 与其在典范嵌入 $\lambda\colon A \hookrightarrow D_K(E,\ \omega)$下的像等同。

一个本原 A-域是一个除环 F，带有一个含幺同态 $f\colon A \to F$，其像生成 F 作为除环。该同态 f 不必是单射。它的奇异核为

$$\mathcal{P}_f = \bigcup_{m \geq 1} \{M \in M_m(A) : f(M) \text{ is singular over } F\}.$$

对于两个本原 A-域$(F_1,\ f_1)$和$(F_2,\ f_2)$，从$(F_1,\ f_1)$到$(F_2,\ f_2)$的一个特化由一个局部同态 $h\colon S \to F_2$ 表示，该同态来自子环 $f_1(A) \subseteq S \subseteq F_1$，其中 $h \circ f_1 = f_2$。这里，若对每个 $s \in S$， $h(s) \neq 0$ 蕴含 $s^{-1} \in S$，则称 h 为局部的。两个这样的同态表示同一个特化，当且仅当它们在一个包含 $f_1(A)$的公共子环上相等，且其公共限制是局部的 [C，第4.1节，第 154]页。

根据 Cohn 特化定理 [C，定理 4.4.1，第 172], 页，当且仅当 $\mathcal{P}_{f_1} \subseteq \mathcal{P}_{f_2}$时，存在这样的特化。按照 Cohn [C，第 4.4 节，第 176], 页的说法，我们称一个本原 A-域（$F,\ f$）为泛 A-域，如果它可以特化到每个本原 A-域。若 f 是单射，则 F 是 A的泛分式除环。

定理 2。上文构造的除环 $D_K(E,\omega)$ 是 A的泛分式除环。它在唯一的 A-同构意义下唯一。对于映入某个除环的含幺同态 $f\colon A \to F$，存在一个将 f 延拓的同态 $D_K(E,\omega) \to F$，当且仅当 f 将 Σ_ρ中的每个矩阵都映为可逆矩阵。若该同态存在，则它唯一且为单射。

证明。设 F_0 是 $D_K(E,\ \omega)$中由 A 生成的除环子环。对于 $M \in \Sigma_\rho \cap M_m(A)$，选取$U,\ V \in \mathrm{GL}_m(F_0)$ 和 $0 \leq r \leq m$，对 F_0进行行列约化，使得 $UMV = \mathrm{diag}(I_r,\ 0)$。由于 $U,\ M,\ V$在 $D_K(E,\ \omega)$ 上可逆，我们得到

$$r = \mathrm{rank}_{D_K(E,\omega)} \mathrm{diag}(I_r, 0) = \mathrm{rank}_{D_K(E,\omega)}(UMV) = m.$$

因此 $UMV = I_m$和 $M^{-1} = VU \in M_m(F_0)$。由于 F_0包含 A以及所有添加的逆元的元素，表示意味着 $F_0 = D_K(E,\ \omega)$。特别地， $D_K(E,\ \omega)$ 是一个满射 A-域。

令 $f\colon A \to F$定义任意满射 A-域。对每个有限生成的投射 A-模 P，令 $P_F = P \otimes_A F$，并令 $\delta_f\colon V(A) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$为由 $\delta_f([P]) = \dim_F P_F$定义的函数。这些同构

$$(P \oplus Q)_F \cong P_F \oplus Q_F \quad \text{and} \quad A_F \cong F$$

蕴含

$$\delta_f(P \oplus Q) = \delta_f(P) + \delta_f(Q) \quad \text{and} \quad \delta_f(A) = 1.$$

因此， δ_f 是一个投射秩函数。定理 1 的唯一性断言蕴含 $\delta_f = \rho$。假设对于某个 $M \in M_m(A)$, $f(M)$ 是可逆的。经由有限生成射影模 H 的分解 $M = \gamma\beta$诱导出

$$F^m \xrightarrow{\beta\otimes 1} H_F \xrightarrow{\gamma\otimes 1} F^m, \quad \text{with} \quad f(M) = (\gamma\otimes 1)(\beta\otimes 1).$$

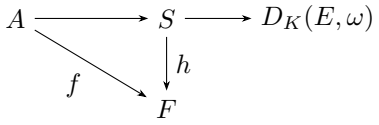
因此

$$m = \operatorname{rank}_F f(M) \le \dim_F H_F = \delta_f(H) = \rho(H).$$

对于每个这样的 H, $m \le \rho(H)$, 所以 $m \le r_\rho(M)$。此外, ${}^r\rho(M) \le m$, 因为 M经由 A^m分解。因此 $M \in \Sigma_\rho$。用奇异核来表述，这证明了

$$M \notin \mathcal{P}_f \implies M \notin \mathcal{P}_\lambda, \quad \text{and therefore} \quad \mathcal{P}_\lambda \subseteq \mathcal{P}_f.$$

由 Cohn 特化定理 [C, 定理 4.4.1, 第 172] 页可知，存在一个特化$D_K(E, \omega) \to F$。它由一个局部同态 $h\colon S \to F$表示，其中 $A \subseteq S \subseteq D_K(E, \omega)$, 且 $h|_A = f$。下方未标注的箭头表示包含映射。



因此 $D_K(E, \omega)$ 作为一个 A-域是泛的。按照 Cohn 的术语， $\mathcal{P}_\lambda$ 是 A的最小素矩阵理想。

若 (D', λ') 是 A的另一个泛分式除环，则特化 $D_K(E,\omega) \to D'$和 $D' \to D_K(E,\omega)$ 蕴含 $\mathcal{P}_\lambda \subseteq \mathcal{P}_{\lambda'}$ 和 $\mathcal{P}_{\lambda'} \subseteq \mathcal{P}_\lambda$。根据 Cohn 定理 [C, 定理 4.4.1, 第 172], 页中的最后一个断言，这些奇异核相等意味着存在一个 A-同构$D_K(E,\omega) \to D'$。为验证它的唯一性，设 $\theta_1, \theta_2\colon D_K(E,\omega) \to D'$是 A-同态。它们在 A上相同，而集合 $\{a \in D_K(E,\omega)\colon \theta_1(a) = \theta_2(a)\}$ 在加法、乘法和取逆运算下封闭，因为

$$\theta_i(a+b) = \theta_i(a) + \theta_i(b), \quad \theta_i(ab) = \theta_i(a)\theta_i(b) \quad \text{and} \quad \theta_i(a^{-1}) = \theta_i(a)^{-1} \quad \text{whenever } a \ne 0.$$

由于 $D_K(E,\omega)$ 是由 A 生成的除环，因此可得 $\theta_1 = \theta_2$。

最后，若 $g\colon D_K(E,\omega) \to F$扩张含幺同态 $f\colon A \to F$，则

$$f(M)g(M^{-1}) = I_m = g(M^{-1})f(M) \quad \text{for } M \in \Sigma_\rho,$$

因此 f 使 Σ_ρ 可逆。反之，每当 f 使 Σ_ρ 可逆时，将 $a \in A$ 替换为 $f(a)$、将 Z_M 替换为 $f(M)^{-1}$ 后， $D_K(E,\omega)$ 的关系仍成立。因此， f 有唯一的扩张 $g\colon D_K(E,\omega) \to F$，定义为

$$g(a) = f(a) \quad \text{for } a \in A \quad \text{and} \quad \left(g(z_{ij}^M)\right)_{ij} = f(M)^{-1} \quad \text{for } M \in \Sigma_\rho.$$

由于 $g(1) = 1$，其核是除环 $D_K(E,\omega)$ 的真理想；因此 $\ker g = 0$。 □

注 1. 设 $\theta\colon A \to A'$ 由加权图同构诱导。 A 上的投射秩函数是唯一的，因此 $\rho'(P \otimes_A A') = \rho(P)$。将 θ 和 θ^{-1} 应用于经有限生成投射模分解，可得 ${}^r\rho'(\theta(M)) = {}^r\rho(M)$。因此 $\theta(\Sigma_\rho) = \Sigma_{\rho'}$, 故存在唯一的 K-同构 $D_K(E,\omega) \to D_K(E',\omega')$, 它扩张 θ，并定义为

$$a \longmapsto \theta(a) \quad \text{for } a \in A \quad \text{and} \quad M^{-1} \longmapsto \theta(M)^{-1} \quad \text{for } M \in \Sigma_\rho.$$

对于玫瑰图，这尤其适用于具有相同权重的任意环的重新标记 .

5 自由生成元与分类

定理 1 中的等式 $w_n = n$ 使第 2 节中的矩阵 X 和 Y 成为方阵，其中 $XY = YX = I_n$。我们对 X 进行分解，以找出 $D_K(E,\ \omega)$ 在 K 上的生成元，并利用定理 2 中的特化性质证明它们是自由的。令 $\mathcal{I} = \{(i,\ j) : 1 \le j < i \le w_j\}$。

引理 *2.* 每个顺序主子矩阵 $X[q] = (x_{ij})_{1 \le i,j \le q}$ 在 $D_K(E, \omega)$ 上可逆。存在唯一的分解 $X = LPU$，其中 $L = (l_{ij})$ 是下单位三角矩阵，$U = (u_{ij})$ 是上单位三角矩阵，而 $P = \mathit{diag}(p_1, \ldots, p_n)$ 的对角元均非零。若 $T = (t_{ij}) = U^{-1}$，则当 $i > w_j$ 时，$l_{ij} = 0$ 和 $t_{ji} = 0$。元素 p_j（$1 \le j \le n$ 和 l_{ij}），以及 t_{ji}（i, j）$\in \mathcal{I}$，连同 K，作为除环生成 $D_K(E, \omega)$。

证明。由于根据定理 1，$w_j \ge j$ 对 $1 \le j \le n$ 成立，定义一个含幺 K-代数同态 $\varepsilon\colon A \to K$，如下所示

$$\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij} \quad \text{and} \quad \varepsilon(y_{ji}) = \delta_{ij}.$$

事实上，这些赋值保持了规定的零元，并满足 $\varepsilon(X)\varepsilon(Y) = \varepsilon(Y)\varepsilon(X) = I_n$。由 $[H] \mapsto \dim_K(H \otimes_{A,\varepsilon} K)$ 定义的函数 $V(A) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 是一个投射秩函数。定理 1 的唯一性表明该函数就是 ρ。若 $X[q]$ 经由有限生成射影模 H 分解，则 $\varepsilon(X[q])$ 经由 $H \otimes_{A,\varepsilon} K$ 分解，因此

$$q = \operatorname{rank}_K \varepsilon(X[q]) \le \dim_K(H \otimes_{A,\varepsilon} K) = \rho(H).$$

经由 A^q 的分解可得 ${}^r\rho(X[q]) \le q$，从而得到 ${}^r\rho(X[q]) = q$。应用 Cohn 秩公式 [C（命题 4.6.13，第 194–195] 页），如引理 1 中所示，可得 $\operatorname{rank}_{D_K(E,\ \omega)}(X[q]) = q$。因此，$X[q]$ 在 $D_K(E,\ \omega)$ 上可逆。

我们通过归纳法构造这些因子。第一个主元是 $p_1 = x_{11} \ne 0$。对于 $q \ge 2$，令 $B = X[q-1]$，并写作

$$X[q] = \begin{pmatrix} B & c \\ a & x_{qq} \end{pmatrix}.$$

令 $p_q = x_{qq} - aB^{-1}c$。直接相乘可得

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -aB^{-1} & 1 \end{pmatrix} X[q] \begin{pmatrix} I & -B^{-1}c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & p_q \end{pmatrix}.$$

因此 $p_q \ne 0$。若 $X[q-1] = L_{q-1}P_{q-1}U_{q-1}$，令

$$\ell = aU_{q-1}^{-1}P_{q-1}^{-1} \quad \text{and} \quad u = P_{q-1}^{-1}L_{q-1}^{-1}c.$$

这些恒等式

$$L_{q-1}P_{q-1}u = c, \qquad \ell P_{q-1}U_{q-1} = a \quad \text{and} \quad \ell P_{q-1}u + p_q = aB^{-1}c + p_q = x_{qq}$$

验证分块乘法

$$\begin{pmatrix} L_{q-1} & 0 \\ \ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{q-1} & 0 \\ 0 & p_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{q-1} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X[q].$$

这构造了 L, P, U。它们的元素通过 $p_j = x_{jj} - \sum_{k<j} l_{jk}p_k u_{kj}$ for$1 \le j \le n$递归恢复，并通过 $l_{ij} = \big(x_{ij} - \sum_{k<j} l_{ik}p_k u_{kj}\big)p_j^{-1}$ and $u_{ji} = p_j^{-1}\big(x_{ji} - \sum_{k<j} l_{jk}p_k u_{ki}\big)$ for $j < i \le n$ 恢复。如果 $LPU = L'P'U'$ 是另一个这样的分解，那么

$$L'^{-1}L = P'U'U^{-1}P^{-1}.$$

矩阵 $H = L'^{-1}L = P'U'U^{-1}P^{-1}$ 是下单位三角矩阵，也是上三角矩阵，so

$$H_{ij} = 0 \quad \text{for } i \ne j \quad \text{and} \quad H_{jj} = 1 = p'_j p_j^{-1} \quad \text{for } 1 \le j \le n.$$

因此 $H = I_n$、$L' = L$、$P' = P$和 $U' = U$。

对于 $i > w_j$，在 l_{ij} 的公式中对 j 进行归纳可证明 $l_{ij} = 0$。在第 j步，由前面的步骤可知，不等式$k < j$ 和 $i > w_j \ge w_k$ 推出 $l_{ik} = 0$。由于 $x_{ij} = 0$,

$$l_{ij} = \big(0 - \sum_{k<j} 0 \cdot p_k u_{kj}\big)p_j^{-1} = 0.$$

由于 $Y = X^{-1}$，我们有

$$Y = TP^{-1}L^{-1} \quad \text{and} \quad T = YLP.$$

对于 $i > w_j$,

$$t_{ji} = \sum_{k=1}^{n} y_{jk}l_{ki}p_i = \sum_{k \le w_j} y_{jk}l_{ki}p_i = 0.$$

H其中 $y_{jk} = 0$ 适用于 $k > w_j$，而 $k \le w_j < i$ 推出 $l_{ki} = 0$，因为 L 是下三角矩阵。

令 D_0 为 $D_K(E, \omega)$ 的除环子环，由 K、p_j（$1 \le j \le n$）以及 l_{ij}，t_{ji}（i，j）$\in \mathcal{I}$ 生成。单位三角矩阵的有限逆公式表明

$$X = LPT^{-1} \in M_n(D_0) \quad \text{and} \quad Y = TP^{-1}L^{-1} \in M_n(D_0).$$

因此 $A \subseteq D_0$。定理 2 将 $D_K(E, \omega)$ 确定为 A 的泛分式除环。由于 A 将其生成为一个除环，故 $D_0 = D_K(E, \omega)$。 □

令 $r(E, \omega)$ 为$= n + 2|\mathcal{I}| = 2\sum_{j=1}^{n} w_j - n^2$。

定理 3。引理 *2* 中的元素 p_j（$1 \le j \le n$）和 l_{ij}、t_{ji}（$(i, j) \in \mathcal{I}$）构成 $D_K(E, \omega)$ 在 K 上的自由生成集。特别地，$D_K(E, \omega) \cong_K \mathcal{F}_K(r(E, \omega))$。

证明。令 B 为由符号 π_j（$1 \le j \le n$）和 λ_{ij}，θ_{ji}（i，j）$\in \mathcal{I}$ 构成的自由 K-代数。根据 Cohn [C, 第 5.4 节，第 224] 页，B 是一个 fir。由他关于 semifir 的嵌入定理[C，推论 4.5.9，第 182] 页可知，B 有一个泛分式除环 $F = U(B)$。在 F 中，构造一个下三角酉矩阵 L_0 和一个上三角酉矩阵 T_0，定义如下:

$$(L_0)_{ij} = \lambda_{ij} \quad \text{and} \quad (T_0)_{ji} = \theta_{ji} \qquad \text{for } (i, j) \in \mathcal{I},$$

其余所有严格三角元素均为零。令

$$P_0 = \operatorname{diag}(\pi_1, \dots, \pi_n), \qquad X_0 = L_0P_0T_0^{-1} \quad \text{and} \quad Y_0 = T_0P_0^{-1}L_0^{-1}.$$

T元素π_j 均非零。单位三角因子由有限恒等式可知是可逆的

$$V^{-1} = \sum_{a=0}^{n-1} (-1)^a (V - I_n)^a.$$

特别是,

$$X_0 Y_0 = L_0 P_0 (T_0^{-1} T_0) P_0^{-1} L_0^{-1} = I_n \quad \text{and} \quad Y_0 X_0 = T_0 P_0^{-1} (L_0^{-1} L_0) P_0 T_0^{-1} = I_n.$$

由于 T_0^{-1} 是上三角的，对于 $i > w_j$，我们有

$$(X_0)_{ij} = \sum_{k \le j} (L_0)_{ik} \pi_k (T_0^{-1})_{kj} = 0,$$

因为对于每个 $k \le j$, $i > w_j \ge w_k$。此外

$$(Y_0)_{ji} = \sum_{k \ge i} (T_0)_{jk} \pi_k^{-1} (L_0^{-1})_{ki} = 0,$$

因为 $k \ge i > w_j$。令 j: $A \to F$ 为由 b 定义的含幺 K-代数同态 y

$$j(X) = X_0 \quad \text{and} \quad j(Y) = Y_0.$$

对于每个 q，顺序主子矩阵具有如下分解

$$X_0[q] = L_0[q] P_0[q] (T_0[q])^{-1}.$$

这三个因子都是可逆的。令 F_0 为由 j（A）生成的 F 的除环子环。将引理 2 的证明中的递推应用于 $X_0 \in M_n$（F_0），可得 L_0, P_0, $U_0 \in M_n$（F_0），其中$U_0 = T_0^{-1}$。因此，根据有限逆公式, $T_0 = U_0^{-1} \in M_n$（F_0）。于是

$$\pi_j \in F_0 \quad \text{for } 1 \le j \le n, \qquad \lambda_{ij}, \theta_{ji} \in F_0 \quad \text{for } (i,j) \in \mathcal{I}.$$

因此 $B \subseteq F_0 \subseteq F$，且 $F_0 = F$，因为 $F = U(B)$ 作为除环由 B 生成。因此，(F, j) 是一个 epic A-域。

由定理 2 的泛性质断言可知, $D_K(E, \omega)$ 特化到这个 epic$A$-域。用局部同态表示这一特化:

$$h : S \longrightarrow F, \qquad A \subseteq S \subseteq D_K(E, \omega), \qquad h|_A = j.$$

我们验证，对于 $1 \le j \le n$, $p_j \in S$，且对于 (i, j), l_{ij}, $t_{ji} \in S$ $\in \mathcal{I}$。在第一阶段, $p_1 = x_{11} \in S$，且 $h(p_1)$ $= \pi_1 \neq 0$。由于 h 是局部的, $p_1^{-1} \in S$。因此, L 的第一列元素和 U 的第一行元素都属于 S，并映射到 L_0, U_0 中对应的元素。

假设在第 j 阶段之前构造的 L, U 的主元和元素属于 S，并且在 h 的映射下对应于 P_0, L_0, U_0 中相应的元素。主元公式表明

$$p_j = x_{jj} - \sum_{k<j} l_{jk} p_k u_{kj} \in S \quad \text{and} \quad h(p_j) = \pi_j \neq 0.$$

因此 $p_j^{-1} \in S$。递推关系意味着 $l_{ij}, u_{ji} \in S$。将 h 应用于递推关系，可通过归纳法证明

$$h(p_j) = \pi_j, \qquad h(l_{ij}) = (L_0)_{ij} \quad \text{and} \quad h(u_{ji}) = (U_0)_{ji}.$$

由于 $T = U^{-1}$ 是关于 $U - I_n$的有限多项式，因此其元素也属于 S和 $h(T) = T_0$.

设 β: $B \to D_K(E,\omega)$是由下式定义的 K-代数同态

$$\beta(\pi_j) = p_j, \qquad \beta(\lambda_{ij}) = l_{ij} \quad \text{and} \quad \beta(\theta_{ji}) = t_{ji}.$$

记 $\iota_B : B \hookrightarrow F$ 为典范嵌入。坐标恒等式推出

$$\beta(B) \subseteq S, \qquad h \circ \beta = \iota_B \quad \text{and} \quad \ker\beta \subseteq \ker(h \circ \beta) = \ker \iota_B = 0.$$

因此 β 是单射。像 $\beta(B)$包含 K 和引理 2 中的生成元，因此它作为除环生成$D_K(E,\omega)$。因此，$(D_K(E,\omega)\ \beta)$是一个满射的 B-域。映射 h 表示一个到 F的B-特化，而 $F = U(B)$的泛性质给出了反方向的特化。这两个特化推出

$$\mathcal{P}_\beta \subseteq \mathcal{P}_{\iota_B} \quad \text{and} \quad \mathcal{P}_{\iota_B} \subseteq \mathcal{P}_\beta.$$

由于奇异核相等，Cohn 定理 [C，第 4.4.1 定理，第 172] 页推出存在一个 B-同构 Φ： $F \to D_K(E,\omega)$，满足 $\Phi \circ \iota_B = \beta$。它是唯一的，因为 F 由$\iota_B(B)$作为除环生成。此外，

$$\Phi(j(X)) = LPT^{-1} = X \quad \text{and} \quad \Phi(j(Y)) = TP^{-1}L^{-1} = Y.$$

最后，

$$n + 2|\mathcal{I}| = n + 2\sum_{j=1}^{n}(w_j - j) = 2\sum_{j=1}^{n} w_j - n^2.$$

因此 $D_K(E,\ \omega) \cong_K \mathcal{F}_K(r(E,\ \omega))$。 □

推论 3。 对于两个 LV-玫瑰图，其在同一 K 域上的代数满足定理 *1* 的嵌入判据，

$$D_K(E,\omega) \cong_K D_K(E',\omega') \quad \Longleftrightarrow \quad r(E,\omega) = r(E',\omega').$$

此外， $Z\left(D_K\left(E,\ \omega\right)\right) = K$。

证明。 令 $r = r(E,\ \omega)$ 和 $r' = r(E',\ \omega')$。定理 3 中的自由生成集确定了K-同构

$$\Phi : \mathcal{F}_K(r) \longrightarrow D_K(E,\omega) \quad \text{and} \quad \Phi' : \mathcal{F}_K(r') \longrightarrow D_K(E',\omega').$$

若 $r = r'$，则复合映射 $\Phi'\Phi^{-1}$： $D_K(E,\ \omega) \to D_K(E',\ \omega')$ 是一个 K-同构。

反过来，假设 ψ: $D_K(E,\omega) \to D_K(E',\omega')$ 是一个 K-同构。令 Θ: $\mathcal{F}_K(r) \to \mathcal{F}_K(r')$ 为由 $\Theta = (\Phi')^{-1}\psi\Phi$ 定义的映射。那么 Θ 是一个 K-同构。若 $s_1, \ldots, s_r$ 和 $s'_1, \ldots, s'_{r'}$ 是这些自由域的标准自由生成集，那么 $\{\Theta(s_1) \ldots, \Theta(s_r)\}$ 和 $\{s'_1, \ldots, s'_{r'}\}$ 是 $\mathcal{F}_K(r')$ 的自由生成集。Cohn 的不变性结果 [C，推论 5.8.14，第 258] 页，推出 $r = r'$。最后，由于 $r \geq n \geq 2$，由 Cohn 关于自由域中心的定理 [C，定理 5.5.11，第 238] 页可知

$$Z(D_K(E,\omega)) = \Phi\big(Z(\mathcal{F}_K(r))\big) = \Phi(K) = K.$$

□

命题 2. 对于固定的 $n \geq 2$，由具有 n 个环且其代数可嵌入某个除环的 LV-玫瑰所产生的自由生成元个数恰为

$$\{r \in \mathbb{N} : 3n-2 \leq r \leq n^2, \quad r \equiv n \pmod 2\}.$$

当 n 变化时，$r(E,\omega)$ 的可能取值恰为

$$\{4,7,9,10\} \cup \{r \in \mathbb{N} : r \geq 12\}.$$

证明。对于这样的玫瑰图，由定理 1 中的嵌入判据可知，$w_n = n$和$w_j > j$ 对于 $j < n$。由于权重是有序整数，$j+1 \leq w_j \leq n$ 对于 $j < n$。因此

$$\sum_{j=1}^{n-1}(j+1) + n = \frac{n(n+1)}{2} + n - 1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n^2.$$

代入 $r(E,\omega) = 2\sum_j w_j - n^2$，得到

$$3n-2 \leq r(E,\omega) \leq n^2 \quad \text{and} \quad r(E,\omega) \equiv n \pmod 2.$$

要实现此范围内具有所述奇偶性的每个值，从由$w_i^{(0)} = i+1$对于 $i < n$和 $w_n^{(0)} = n$定义的元组开始。若 $w \neq (n,\ldots,n)$，则选取 $j = \max\{i : w_i < n\}$，并将 w替换为$w + e_j$，其中 e_j 是 $\mathbb{Z}^n$ 的第 j个标准基向量。由于 $w_{n-1} = w_n = n$，我们有 $j \leq n-2$。唯一被修改的坐标满足

$$j+1 \leq w_j < w_j + 1 \leq n = w_{j+1},$$

并且，如果 $j > 1$，则也有 $w_{j-1} \leq w_j < w_j + 1$。因此，权重仍保持非递减，$w_i > i$对于 $i < n$，最后两个权重仍为 n。从 $w^{(0)}$ 到 $(n, \ldots\ldots, n)$ 的增量次数为

$$h_n = n^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2} + n - 1\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

将连续元组写作 $w^{(t)}$，我们有

$$2\sum_{i=1}^{n} w_i^{(t)} - n^2 = 3n - 2 + 2t \quad \text{for } 0 \leq t \leq h_n \quad \text{and} \quad 3n-2+2h_n = n^2.$$

这就证明了对固定 n 时的断言。

令 $\mathcal{R}_n = \{3n-2+2t : \ t \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leq t \leq h_n\}$。对于 $n \geq 4$,

$$\min \mathcal{R}_{n+2} = 3(n+2) - 2 \leq n^2 + 2 = \max \mathcal{R}_n + 2,$$

以及 $\mathcal{R}_n$, $\mathcal{R}_{n+2}$ 由具有相同奇偶性的整数构成。由于它们的上端点趋于无穷大 ,

$$\bigcup_{\substack{n \geq 4 \\ n \text{ even}}} \mathcal{R}_n = \{2a : a \in \mathbb{N}, \ a \geq 5\} \quad \text{and} \quad \bigcup_{\substack{n \geq 5 \\ n \text{ odd}}} \mathcal{R}_n = \{2a+1 : a \in \mathbb{N}, \ a \geq 6\}.$$

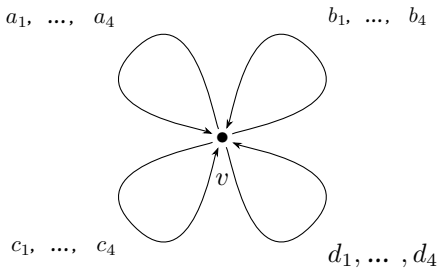
与 $\mathcal{R}_2 = \{4\}$ 和 $\mathcal{R}_3 = \{7,9\}$ 一起，这些等式意味着

$$\bigcup_{n \geq 2} \mathcal{R}_n = \{4,7,9,10\} \cup \{r \in \mathbb{N} : r \geq 12\}.$$

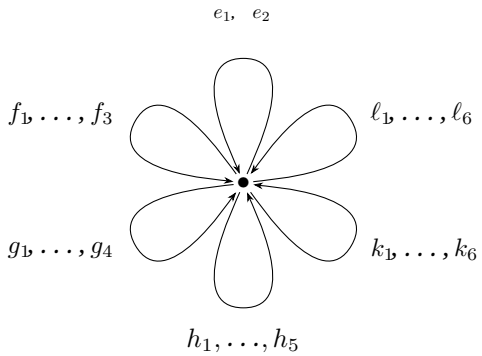
□

例 2. 权重为 (4,4, 4, 4) 和 (2, 3,4, 5, 6,6) 的玫瑰图的 LV-代数具有 K-同构的泛除环，且二者都同构于 $\mathcal{F}_K$(16)，因为

$$2(4+4+4+4)-4^2=16 \quad \text{and} \quad 2(2+3+4+5+6+6)-6^2=16.$$



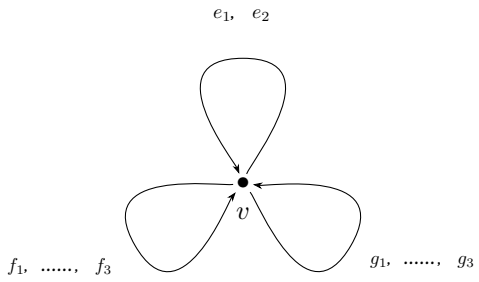
(4, 4, 4, 4)



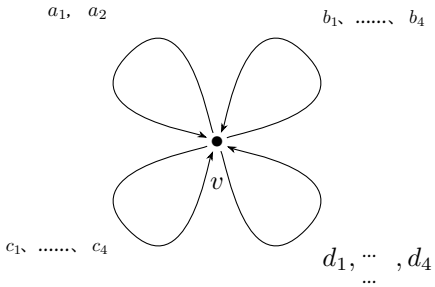
(2、3、4、5、6、6)

只有第一个玫瑰图的所有权重都等于其环的数量。因此，推论 2 中的半自由理想环判据表明，这两个代数中恰有一个是半自由理想环，所以它们非同构。

例 3。 幺半群 $V(A)$ 及其特 distinguished 类 $[A]$ 不能确定泛除环。



A: (2,3, 3)



A': (2, 4, 4, 4)

对于权重为（2，3，3）的玫瑰图，命题 1 中的表示为

$$V(A) \cong \langle v, q \mid 2v = v + q \rangle.$$

对于权重为 (2,4, 4, 4) 的玫瑰图，相应的表示为

$$V(A') \cong \langle v, q \mid 2v = q + v,\ q + 2v = 3v \rangle.$$

第二个关系可通过将 v 加到第一个关系上得到，因此存在幺半群同构 φ: $V(A) \to V(A')$，满足 $\varphi([A]) = [A']$。A 和 A' 的泛除环分别为 $\mathcal{F}_K$(7) 和 $\mathcal{F}_K$(12)。由于 $7 \neq 12$，推论 3 表明这些除环并不同构于 K。

6 矩阵和有理表达式

设 $M \in M_m(A)$。如果 M 经由有限生成射影模 A-模 H 分解，推论 1 表明，对于某个 $s \geq 0$，有 $H \oplus A^s \cong A^{\rho(H)+s}$。因此，$M \oplus I_s$ 经由 $A^{\rho(H)+s}$ 分解。按照 Cohn [C06, §0.1, p. 5]，的说法，若对每个 $s \geq 0$，$M \oplus I_s$ 都在第 3 节的意义下是满的，则称 M 稳定满。

命题 3. 对于每个 $M \in M_m(A)$，以下条件等价：

(i) $r_\rho(M) = m$. (ii) M 是稳定满的。(iii) M 在 $D_K(E,\omega)$上可逆。

证明。假设 $M = \gamma\beta$ 经由有限生成投射模 H分解，其中$h = \rho(H) < m$。对于某个 $t \geq 0$，存在一个同构 $\sigma\colon H \oplus A^t \to A^{h+t}$，如推论 1 所示。令$B\colon A^{m+t} \to A^{h+t}$和 $C\colon A^{h+t} \to A^{m+t}$为如下定义的映射

$$B = \sigma(\beta \oplus \mathrm{id}_{A^t}) \quad \text{and} \quad C = (\gamma \oplus \mathrm{id}_{A^t})\sigma^{-1}.$$

Then $CB = (\gamma \oplus \mathrm{id}_{A^t})(\beta \oplus \mathrm{id}_{A^t}) = M \oplus I_t$，其中 $h + t < m + t$。因此 M不是稳定满的。

反过来，假设对于某些 $s \geq 0$ 和 $q < m + s$，存在一个分解

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$$

通过 A^q，其中 $B_1\colon A^m \to A^q$，$B_2\colon A^s \to A^q$，$C_1\colon A^q \to A^m$以及 $C_2\colon A^q \to A^s$。比较 g 分块，we 得到

$$C_1B_1 = M, \qquad C_2B_1 = 0 \quad \text{and} \quad C_2B_2 = I_s.$$

令 $H =$核 C_2。设 $\phi\colon H \oplus A^s \to A^q$和 $\psi\colon A^q \to H \oplus A^s$为定义的映射

$$\phi(h, z) = h + B_2z \quad \text{and} \quad \psi(a) = (a - B_2C_2a, C_2a).$$

T $\psi(a)$ 的第一分量属于 H，因为 $C_2(a - B_2C_2a) = C_2a - C_2a = 0$。此外 ，

$$\begin{aligned} \psi\phi(h, z) &= (h + B_2z - B_2C_2(h + B_2z), C_2h + C_2B_2z) = (h, z), \\ \phi\psi(a) &= a - B_2C_2a + B_2C_2a = a. \end{aligned}$$

因此 $H \oplus A^s \cong A^q$，所以 H是有限生成射影模，且 $\rho(H) = q - s < m$。由于 $C_2B_1 = 0$，令 $\beta_0\colon A^m \to H$和 $\gamma_0\colon H \to A^m$为由 $\beta_0(x) = B_1x$和 $\gamma_0 = C_1|_H$定义的映射。于是

$$A^m \xrightarrow{\beta_0} H \xrightarrow{\gamma_0} A^m, \quad \text{with} \quad \gamma_0\beta_0(x) = C_1B_1x = Mx.$$

因此 $r_\rho(M) \leq \rho(H) < m$。这证明了 (i) 和 (ii) 的等价性。对于第二个等价性，利用引理 1 中的秩公式，我们得到

$$M \in \mathrm{GL}_m(D_K(E,\omega)) \iff \mathrm{rank}_{D_K(E,\omega)}(M) = m \iff r_\rho(M) = m,$$

这就证明了剩余的等价性。 □

命题 4. 令

$$\kappa = \max_{1 \le i < k} \frac{N_i}{d_i - N_i} \quad and \quad b_m = \lfloor (m-1)\kappa \rfloor,$$

当 $\kappa = 0$ *if* $k = 1$ 时。对于每个 $M \in M_m(A)$，其中 $m \ge 1$,

$$M \in \Sigma_\rho \quad \Longleftrightarrow \quad M \oplus I_{b_m} \text{ is full.}$$

证明。假设 $M \in \Sigma_\rho$。对于每个 $b \ge 0$, $M \oplus I_b$ 在 $D_K(E,\omega)$ 上可逆。若 $M \oplus I_b = CB$ 经由 A^q 分解，其中 $q < m + b$，则延拓到 $D_K(E,\omega)$ 将推出

$$m + b = \operatorname{rank}_{D_K(E,\omega)}(M \oplus I_b) = \operatorname{rank}_{D_K(E,\omega)}(CB) \le q < m + b.$$

这个矛盾证明了 $M \oplus I_{b_m}$ 是满的。

反过来，假设 $M \notin \Sigma_\rho$。取满足 β 的 $M = \gamma\beta\colon\ A^m \to H$, $\gamma\colon\ H \to A^m$，且$h = \rho(H) \le m - 1$。记 $[H] = cv + \sum_{i<k} c_i q_i$，并令 $s = \sum_{i<k} c_i N_i$。于是

$$h = c + \sum_{i<k} c_i(d_i - N_i) \quad \text{and} \quad s \le \kappa \sum_{i<k} c_i(d_i - N_i) \le \kappa h \le \kappa(m-1).$$

由于 s 是整数, $s \le b_m$。对于这个 s 的取值，推论 1 保证存在一个同构$\sigma\colon\ H \oplus A^s \to A^{h+s}$。令 $b = b_m$，并令 $\sigma_b\colon\ H \oplus A^b \to A^{h+b}$ 为由$\sigma_b = \sigma \oplus \mathrm{id}_{A^{b-s}}$定义的同构。令 $B\colon\ A^{m+b} \to A^{h+b}$ 和 $C\colon\ A^{h+b} \to A^{m+b}$ 为由下式定义的映射

$$B = \sigma_b(\beta \oplus \mathrm{id}_{A^b}) \quad \text{and} \quad C = (\gamma \oplus \mathrm{id}_{A^b})\sigma_b^{-1}.$$

Then

$$CB = (\gamma\beta) \oplus I_b = M \oplus I_b, \quad \text{with} \quad h + b < m + b.$$

因此, $M \oplus I_{b_m}$ 不是满的。 □

按照 Cohn [C，第 6.6 节，第 317–318], 页的说法，如果某个表示存在可解字问题，则称其具有可解字问题；也就是说，存在一种算法能够判定其生成元中的任意两个定义良好的表达式是否表示同一个元素。

对于给定表示的除环，任务是为 $u - v = 0$寻找一种有效测试，其中 u 和v 是在该除环中定义的有理表达式。对于半自由理想环 R，Cohn 将其泛分式域中的字问题归约为判定 R 上的方阵是否为满的 [C，即定理 6.6.2，第 319]页。对于交换域上的自由域，他证明：只要系数域由一个具有可解字问题的表示给出，字问题就是可解的 [C，即推论 6.6.8，第 323]页。

定理 3 中构造的同构将 $D_K(E,\omega)$ 与一个自由域对应起来，并将 X 和 Y 的元素表示为自由生成元中的有理表达式。如果 K的给定表示具有可解字问题，这些公式便使我们能够对 A上的有理表达式应用 Cohn 的零测试。同一测试还可用于在自由域上进行高斯消元时选取主元。引理 1 中的秩公式将为 M 计算出的秩与 $^r\rho(M)$ 对应起来。

推论 4. 假设 K 由一个具有可解字问题的表示给出。那么可以判定 $D_K(E,\omega)$ 中的两个有理表达式是否相等，以及 A 上的方阵是否为 ρ-满的。

证明。设 $r = r(E,\omega)$ 和 $F = \mathcal{F}_K(r)$。令 $\Phi\colon F \to D_K(E,\omega)$ 为定理 3 的同构，并令 $\tau\colon D_K(E,\omega) \to F$ 为由 $\tau = \Phi^{-1}$ 定义的同构。F 的自由生成元是 τ 下元素 p_j（$1 \le j \le n$）以及 l_{ij}, t_{ji}（$(i,j) \in \mathcal{I}$）的像，并且

$$\tau(X) = \tau(L)\tau(P)\tau(T)^{-1} \quad \text{and} \quad \tau(Y) = \tau(T)\tau(P)^{-1}\tau(L)^{-1}.$$

这里的单位上三角逆矩阵是有限的多项式表达式，而 $\tau(P)^{-1}$ 是对角矩阵，其元素是相应自由生成元的逆元。这些公式在 A 的生成元上计算 τ。对于 A 上的有理表达式，递归地应用

$$\tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b), \qquad \tau(ab) = \tau(a)\tau(b) \quad \text{and} \quad \tau(a^{-1}) = \tau(a)^{-1} \quad \text{whenever } a \neq 0.$$

K 的给定表示具有可解字问题，因此 K 中的算术是可计算的。由 Cohn 关于自由域 [C 的结果（推论 6.6.8，第 323] 页）可知，可以判定 $\tau(x) - \tau(y) = 0$，等价地，可以判定 $D_K(E,\omega)$ 中的 $x = y$。

对于 $M \in M_m(A)$，在 F 上进行高斯消元时，使用这些零判定来选择主元，并计算 $U, V \in \mathrm{GL}_m(F)$，使得

$$U\tau(M)V = \mathrm{diag}(I_q, 0) \qquad \text{with } 0 \le q \le m.$$

因此，$\mathrm{rank}_{D_K(E,\omega)}(M) = \mathrm{rank}_F(\tau(M)) = q$。根据引理 1 中的秩恒等式，

$$M \in \Sigma_\rho \iff r_\rho(M) = m \iff q = m.$$

□

命题 5。 每个 $x \in D_K(E,\omega)$ 都有一个表达式 $x = uM^{-1}v$，其中 $M \in \Sigma_\rho \cap M_m(A)$、$u \in M_{1\times m}(A)$ 和 $v \in M_{m\times 1}(A)$。如果 $y = pN^{-1}q$ 是另一个这样的表达式，那么

$$x + y = \begin{pmatrix} u & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix} \quad \textit{and} \quad xy = \begin{pmatrix} u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & -vp \\ 0 & N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

对于 $B = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & M \end{pmatrix}$，当且仅当 $B \notin \Sigma_\rho$ 时，我们有 $x = 0$。若 $x \neq 0$，则 $x^{-1} = -\eta_1^T B^{-1} \eta_1$，其中 $\eta_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T \in A^{m+1}$。

证明。和与积中的两个分块矩阵都有逆

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} M & -vp \\ 0 & N \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} M^{-1} & M^{-1}vpN^{-1} \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix}.$$

由于这两个分块矩阵在 $D_K(E,\ \omega)$ 上可逆，根据命题 3 中的判据，它们属于 Σ_ρ。所示乘积为

$$\begin{pmatrix} u & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix} = uM^{-1}v + pN^{-1}q = x + y$$

and

$$\begin{pmatrix} u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^{-1} & M^{-1}vpN^{-1} \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} = uM^{-1}vpN^{-1}q = xy.$$

令 $\mathcal{R} \subseteq D_K(E,\ \omega)$ 由满足 $M,\ u,\ v$ 的元素 $uM^{-1}v$ 组成，其中各项如陈述中所述。这些公式意味着 $\mathcal{R}+\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$。此外，

$$a = a(1)^{-1}1, \qquad (M^{-1})_{ij} = \mathsf{e}_i^T M^{-1}\mathsf{e}_j \quad \text{and} \quad -(uM^{-1}v) = (-u)M^{-1}v,$$

其中 $\mathsf{e}_i = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{mi})^T \in A^m$，对于 $1 \le i \le m$。因此，$\mathcal{R}$ 是一个包含 A 以及所有 $M \in \Sigma_\rho$ 对应的 M^{-1} 的元素的子环。根据第 4 节中的表示，这些元素与 A 作为环生成 $D_K(E,\omega)$。因此，$\mathcal{R} = D_K(E,\omega)$。

对于 $x = uM^{-1}v$，令 $B = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & M \end{pmatrix}$。直接相乘可验证

$$\begin{pmatrix} 1 & -uM^{-1} \\ 0 & I_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -M^{-1}v & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

因此

$$B \in \Sigma_\rho \quad \Longleftrightarrow \quad B \in \mathrm{GL}_{m+1}(D_K(E,\omega)) \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 0.$$

对于 $x \neq 0$，逆恒等式为

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -M^{-1}v & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -uM^{-1} \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

特别地，$\eta_1^T B^{-1} \eta_1 = -x^{-1}$，这就证明了逆公式。 □

这些表示并不唯一，因为

$$uM^{-1}v = \begin{pmatrix} u & 0 \end{pmatrix} (M \oplus I_1)^{-1} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

要检验 $x = y$，写作 $x - y = uM^{-1}v$并令 $B = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & M \end{pmatrix}$。命题 5 中的零判据指出，$x = y$ 当且仅当 $B \notin \Sigma_\rho$。如果 K 由一个具有可解字问题的表示给出，那么推论 4 中的 ρ-满性检验可以判定 B 是否属于 Σ_ρ。

例 4. 令 (E,ω) 为例 3 中权重为 $(2,3,3)$ 的 LV-玫瑰图，并令 $A = L_K(E,\omega)$。那么

$$V(A) \cong \langle v, q \mid 2v = v + q \rangle \quad \text{with} \quad \rho(v) = \rho(q) = 1.$$

由于对于 $j < 3$，$w_3 = 3$ 且 $w_j > j$，定理 1 中的嵌入判据意味着 A 嵌入于一个除环中。与推论 2 的证明一样，A 不可能是半自由理想环，因为对每个$m \in \mathbb{N}_0$都有 $q \neq mv$。设 e, f, g 为它的环，其中 e的权重为 2。那么

$$X = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \\ 0 & f_3 & g_3 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Y = \begin{pmatrix} e_1^* & e_2^* & 0 \\ f_1^* & f_2^* & f_3^* \\ g_1^* & g_2^* & g_3^* \end{pmatrix}.$$

令 $u = (e_1, e_2)^T$, $u^* = (e_1^*, e_2^*)$，以及 $\epsilon = I_2 - uu^*$。我们有 $u^*u = 1$、$\epsilon^2 = \epsilon$ 和 $P = \epsilon A^2$ satisfies

$$[P] = q, \qquad P \oplus A \cong A^2 \quad \text{and} \quad P \ncong A.$$

矩阵 ϵ 是满的。事实上，由于 $P \neq 0$，它非零。若 $\epsilon = ab$ 满足 $a \in M_{2\times 1}(A)$ 且 $b \in M_{1\times 2}(A)$，则

$$a(ba-1)b = \epsilon^2 - \epsilon = 0.$$

代数 A 是一个整环，因为它嵌入于 $D_K(E,\ \omega)$。对于非零元素 a_i 和 b_j，最后一个等式的 $(i,\ j)$ 项为 $a_i(ba-1)b_j = 0$。因此 $ba = 1$。由 $z \mapsto az$ 和 $p \mapsto bp$分别定义的从 A到 P以及从P 到 A 的映射将互为逆映射，这与 $P \ncong A$ 矛盾。因此 ϵ 无法通过 A^1 进行分解。

相反， $\epsilon u = 0$、 $u^*\epsilon = 0$ 和 $u^*u = 1$ 推出

$$\epsilon \oplus I_1 = \begin{pmatrix} \epsilon \\ u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & u \end{pmatrix}.$$

这使一个 3×3 矩阵经由 A^2进行分解，因此 $\epsilon \oplus I_1$ 不是满的。因此 ϵ 不是稳定满的，并且$^r\rho(\epsilon) = \rho(P) = 1 < 2$。因此 ϵ 是满的，但 $\epsilon \notin \Sigma_{\rho\infty}$

资助

H. V. Khanh 获得越南国家科学技术发展基金会（NAFOSTED）资助，资助编号为 101.04-2025.41。

参考文献

[C] P. M. Cohn, 《斜域：一般除环理论》, 《数学及其应用百科全书》第 57 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1995年。DOI[C06] P. M. Cohn, 《自由理想环与一般环中的局部化》, 《新数学专著》第 3 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2006年。DOI[H] R. Hazrat，Leavitt 路径代数的分次结构，《Israel J. Math.》*195* （2013年），第 2 期，833–895。DOI[HP] R. Hazrat 和 R. Preusser，加权 Leavitt 路径代数正规形的应用：单环与整环，《Algebr. Represent. Theory 》*20* （2017年），第 5 期，1061–1083。DOI[P] R. Preusser，加权 Leavitt 路径代数的 V-幺半群，《Israel J. Math. 》*234* （2019年），第 1 期，125–147。DOI