arXiv:2611.29971v1 [econ.TH] 23 Nov 2026

训练数据销售*

Jingmin Huang† Wei Zhao‡ Renjie Zhong§

此版本：2026年11月22日首
次发布版本：2024年11月26日

摘要

本文研究了通过销售补充训练数据集来改进预测模型的问题。买方不仅拥有关于其自身数据集的私人信息，还可以选择合并这两个数据集的方式。这种灵活性对菜单提出了新的约束，要求买方的总净效用关于私人数据集上的Blackwell 序保持单调。基于这一点，我们证明，在微分虚拟价值条件下，对于假设检验，完全信息数据集的单一标价是最优的。该结果还可推广至多类别分类：在这种情况下，私人数据集共享一个纯净成分，但其标签受到污染的方式不同。

关键词：多维筛选、信息与筛选的联合设计、数据市场、序贯筛选、多类别分类

*我们由衷感谢 Laura Doval 一直以来的指导与支持，也感谢 Yeon- Koo Che、Jacopo Perego、Andreas Kleiner、Frank Yang 和 Kai-Hao Yang 在本项目各个阶段所进行的有益讨论。我们还感谢 Daniel Chen 、 Sulagna Dasgupta 、 Zhimin Feng 、 Nima Haghpanah 、 Nicole Immorlica 、Shachar Kariv、Navin Kartik、Jan Knoepfle、Zihao Li、Xiao Lin、Elliot Lipnowski、Axel Niemeyer、Alessandro Pavan、Chris Shannon、Ali Shourideh、Alex Smolin、Tristan Tomala、Maren Vario、Cole Wittbrodt、Kun Zhang、Jidong Zhou 和 Weijie Zhong，以及参加2026年NBER/NSF/CEME数学经济学会议、2026年计量经济学会IF-AIML会议、哥伦比亚理论午餐会、2025年北大—新加坡国立大学量化金融与经济学会议、2025年CES年会、伯克利理论午餐会、第七届博弈论学会世界大会（GAMES 2024）、2024年石溪大学博弈论会议和2024年GAIMSS会议的研讨会与会议参与者，感谢他们提出的宝贵意见。感谢 ChatGPT 提供研究协助。Jingmin Huang 感谢耶鲁大学和莫纳什大学接待其访问。Renjie Zhong 感谢加州大学伯克利分校和波恩大学的豪斯多夫数学研究所（德国研究基金会（DFG）在德国卓越战略下的资助项目 EXC-2047/2—390685813）接待其访问。文中如有错误，概由我们自行承担。本论文的早期版本编于2024年11月26日，可在 Google Scholar 上找到。该版本由 CES学会 于2025年1月5日发布。

†中国人民大学经济学院，中国。电子邮件：jingmin.huang@ruc.edu.cn
‡ 清华大学经济与管理学院，中国。电子邮箱：wei.zhao@outlook.fr§美国哥伦比亚大学经济学系。电子邮箱：renjiezhongecon@gmail.com

1 引言

人工智能已被委托作出越来越多的决策，包括医学诊断、人工智能内容安全审核、信用评估和自动驾驶。人工智能与自动化的区别在于其学习能力。这种能力以缩放定律为基础，即大量高质量数据为模型提供动力。由此，规模庞大的上游训练数据产业应运而生，涵盖数据收集、标注和去污染。[1] 例如，Wayve将自有车队采集的驾驶数据与车队合作伙伴和汽车制造商提供的数据集结合起来。[2] 在人工智能内容安全领域，OpenAI聘请Sama为分类器标注文本，该分类器用于检测ChatGPT中的有害内容。[3]

训练数据作为一种经济品，具有两个区别性特征。一方面，数据集本质上是多维的。它们的差异不仅在于错误的数量，还在于预测中出现的错误类型。另一方面，买方可以选择如何将补充数据集与其私人数据合并。[4]这两个特征对数据销售具有相互冲突的影响。前者扩大了卖方在买方之间进行差别化的能力，而后者则限制了这种能力。本文试图考察这两个影响在补充数据集的设计与定价中的作用。

一名买方（男性）私下了解基于其私人数据训练的模型的统计性能。他还可以从一名垄断者（女性）处购买补充训练数据，以改进其预测模型。每个数据集都由其生成的预测进行概括，并且我们假设，在给定状态的条件下，两个数据集产生的预测相互独立。卖方设计了一份补充

[1]在实践中，企业可以通过许可现有数据集、借助合作关系获取数据，或委托供应商收集或标注样本，来补充自己的训练数据。[2]参见Wayve 的网站介绍（https://wayve.ai/thinking/multi-country-generalization/）。[3]参见Billy Perrigo 在《时代》杂志 2023 年 1 月 18 日的文章。[4]在将其模型适配到美国道路时，Wayve 使用额外的美国驾驶数据对模型进行了微调，以处理四向停车路口等情形（参见Wayve 的网站介绍）。在一次内容审核中，OpenAI 使用现有分类器从其生产流量中选取分类器不确定的样本。他们为这些样本获取标签，并在扩展后的数据集上重新训练分类器（Markov 等人，2023 年）。在这两种情况下，现有模型所学到的内容都会影响哪些额外数据值得获取，以及企业如何使用这些数据。

数据集菜单，每个数据集均附有相应的价格。买方首先从菜单中选择一个数据集，并支付相应的价格。随后，他决定在训练模型时如何将补充数据集与其私人数据结合起来。换言之，模型投入使用后，买方必须在每种情形下决定如何将从两个数据集中得出的两项预测汇总为最终预测。

首先，在不失一般性的前提下，我们聚焦于直接机制。在这类机制中，卖方获知买方报告的私人数据集后，会同时推荐一个补充数据集和一条聚合预测的规则。这里的一个难点是，买方可能进行双重偏离，即同时谎报自己的私人数据集并选择不同的聚合规则。在聚合相互矛盾的预测时，如果买方降低私人数据集所产生预测的权重，他的行为就仿佛自己的私人数据集信息量更低。为了排除这类偏离，我们施加一项不同于如实报告和服从性的约束，要求总净效用随私人数据集的信息量单调变化。在这一额外约束下，我们将其称为*Blackwell* 单调性，并建立了显示原理。这一刻画将数据销售重新表述为一个捆绑问题。具体而言，假设检验可以被视为销售两种商品，即减少假阳性（α，第一类错误）和假阴性（β，第二类错误）。

我们继续考察 Blackwell 单调性对最优菜单的含义。一个经典结论是，即使满足微分虚拟价值的条件（称为正则性条件），在多商品销售中，总捆绑的标价也不再是最优的（见 McAfee and McMillan（1988））。[5] 其非最优性源于未能将横向差异纳入价格歧视。在数据销售中，完全信息数据集是总捆绑的对应物，因为它同时消除了假阳性和假阴性。然而，我们证明，在相同的正则性条件下，这种简单机制在假设检验中是最优的。该论证的核心正是 Blackwell 单调性。首先，对于拥有完全无信息私人数据集的买方，他们的预测可能包含不同比例的假阳性和假阴性。然而，每个预测都可以通过随机切换其默认模型来复现其他预测

[5]这一条件是密度加权虚拟价值非递减（Myerson，1981年）在多维情形下的类比。McAfee and McMillan（1988年）认为，在两种商品的垄断定价中，确定性机制最优的充分条件就是这一条件。Thanassoulis（2004年）给出了一个反例，其中彩票能严格提高收入。

。Blackwell 单调性要求这些买方获得相同的净效用，而他们共同的外部选项使其获得相同的租金。其次，对于拥有信息量更高的数据集的买方，激励约束和参与约束的结合为租金给出了一个下界。完全信息的单一价格可以同时达到所有这些下界。第三，正则性条件意味着，降低这些租金会使收入弱增。在我们的广义污染类型空间下，同样的论证可以推广到多类分类；在该空间中，私人数据集共享一个纯净成分，但其标签受到污染的方式不同。它涵盖了许多重要的数据训练实际应用。

超越正则性，我们为假设检验问题建立了强对偶，并推导出标价实现最优的认证条件。Blackwell 单调性还将 Pavlov（2011）以及 Daskalakis、Deckelbaum和 Tzamos（2017）研究的典型菜单结构简化为标价机制。我们将 Blackwell 单调性追溯至买方选择一组基于数据集训练的可行预测模型的能力。随后，我们讨论 Blackwell 单调性如何约束分配、租金提取和对偶测度设计。最后，我们将事前数据销售模型与 Bergemann、Bonatti 和 Smolin（2018）的中间信息销售模型进行比较。

示例：人工智能内容安全。

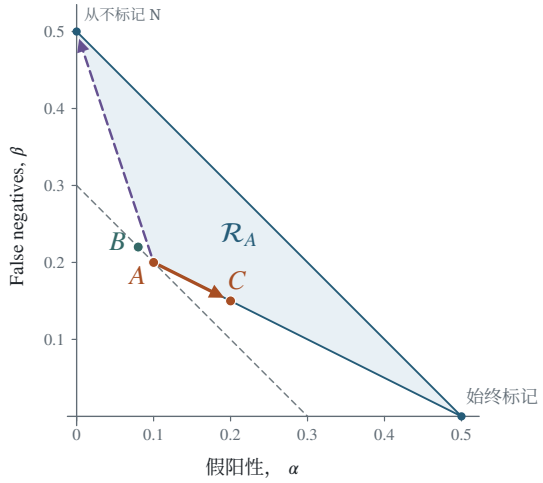
一家人工智能提供商正在考虑购买额外的带标签数据，以改进其用于在发布前对响应进行分类的安全分类器。[6] 我们利用这一示例说明：分类器准确率相同的服务提供商为何会对同一数据集有不同的估值，以及它们将新数据与现有数据相结合的能力如何塑造卖方的菜单。为便于理解，我们仅提供直观解释，并在将数据销售重新表述为多种商品销售时略去具体细节。

以潜在提供商的分类器 A 为例。单独使用私人数据训练时，A 会将 100 条安全响应中的 20 条标记出来，并放过 100 条有害响应中的 40 条。其准确率为 70%。另一家提供商的分类器 B 准确率相同，但会将 100 条安全响应中的 16 条标记出来，并放过 100 条有害响应中的 44 条。我们可以用标记安全响应的无条件概率来表示提供商的私人数据

[6]有关使用带标签的提示—响应对训练的安全分类器示例，请参见Inan 等人（2023年）。

（α，假阳性）和放过有害响应的概率（β，假阴性）。获取补充数据后，人工智能提供商可以进一步降低这两类统计误差。设 q_α （q_β）为买方按照卖方建议的方式进行数据集合并时，补充数据集能够减少的假阳性（假阴性）比例。

然而，人工智能提供商可能会选择不同的数据集合并方式。当这两个数据集得出的预测存在冲突时，如果人工智能提供商降低私人数据集所得预测的权重，那么他的行为就好像他拥有信息量较低的私人数据集，并采用了推荐的数据集合并方式。我们将这种方法称为模型重新调整。例如，在图1中，人工智能提供商 A 可以将模型重新调整到$\mathcal{R}_A$中的任意一点。考虑补充训练数据 $q = (0.55, 1)$，这些数据可以纠正55%的假阳性和全部假阴性。在 A的原始规则下，这些数据将其正确分类率从70%提高到95.5%。现在假设 A 通过最初允许每个响应，将模型重新调整到(0, 0.50)。其私有分类器的准确率从70%下降到50%，但其所有错误现在都是假阴性。补充数据纠正了其中的每一个错误，使最终正确分类率提高到100%。



如实报告和参与条件下的最优菜单

无需重新调整 收入 0.31

数据集	(q^α, q^β)	价格	类型
面向A	(0.20, 0.40)	0.10	A
面向B	(0.55, 1)	0.26	B
完全信息	(1, 1)	0.35	C

带有重新调整 收入 0.30

数据集	(q^α, q^β)	价格	类型
完全信息	(1, 1)	0.30	A、B、C

图1. 重新调整与最优菜单。

考虑一个由三种服务提供商类型构成的市场： A、 B和 C，其概率分别为（Pr(A)、Pr(B)、Pr(C)） =(0.025，0.375，0.600)。当服务提供商无法重新调整时，卖方会针对两种

错误减少方式，为每种类型提供个性化合同。[7] 尽管 A 和 B 的准确率相同，且错误率仅有细微差异，但它们的菜单却大不相同。若不进行重新调整， A在自己的合同下的收益（以正确分类率减去价格计算）为0.700，在 B的合同下则为0.695。因此，如果 A 继续以原有方式使用私人数据，它就没有动机报告 B 。但是， A 可以先报告 B ，然后重新调整其分类器，使其从不标记 $N = (0, 0.50)$。这种双重偏离将 A 的净收益提高到0.740。卖方将重新调整纳入考量后，转而通过向所有三种类型提供同一份合同、以0.30的价格出售完全信息来实现收入最大化。

相关文献

我们的论文与多个方向的文献相关。它主要与信息市场的文献相关，[8] 尤其是关于面向决策者的信息结构的垄断定价的研究。与本文最接近的论文是 Bergemann、Bonatti 和 Smolin（2018），他们研究了向拥有私人后验信念的买方进行信息的中间阶段销售。我们在第 6.3 节中进一步展开这一比较。Yang（2022）研究了向利用消费者信息实行价格歧视的生产者出售消费者信息的问题。Segura-Rodríguez（2022）研究了向拥有私人预测目标和信息估值的企业出售统计数据的问题。Eliaz 和 Spiegler （ 2026 ）研究了向具有不同预测期限的买方存储并销售当前数据和历史数据的问题。据我们所知，我们是首个研究以下问题的文献：当买方的私人类型本身就是一种信息结构时，如何最优地销售信息结构。买方在观察任何信号实现值之前选择合同，并且在给定状态的条件下，信号彼此独立。这种事前时序刻画了一家企业购买训练数据、以改进分类器，然后将其应用于未来案例的情形。

我们的结果还为多维机制设计和最优捆绑销售带来了新的洞见。相关文献可追溯至 Adams 和 Yellen（1976）以及 McAfee、

[7]在这个例子中，基准仅施加如实报告和个体理性。施加服从性所得到的最高收入为 0。30，与允许重新调整时相同。在具有完整类型空间的假设检验中，给定如实报告，服从性与 Blackwell 单调性是等价的（见附录 B.4）。[8]这方面有大量文献，其历史可追溯至 Admati 和 Pfleiderer（1986）以及 Admati 和 Pfleiderer （ 1990 ）。关于综述以及 Ali 等（ 2022 ）、 Doval 和 Skreta （ 2026 ）、Dworczak 等（2026）和 Haghpanah 等（2026）中的最新进展，请参见 Bergemann 和 Bonatti（2019）。

McMillan 和 Whinston（1989）。[9] 在多商品垄断问题中，Lahr 和 Niemeyer（2025）表明，在激励相容且满足个体理性的机制中，那些能够被某种类型分布合理化为唯一收入最大化机制的机制是稠密的。现有文献中的一部分研究致力于施加某些结构，以保证简单菜单的最优性。[10] Riley 和 Zeckhauser（1983）将一维“无讨价还价”结果推广到多种商品的早期尝试之一，是 McAfee and McMillan（1988）提出的主张：微分虚拟价值条件足以保证总捆绑标价菜单的最优性。该微分虚拟价值条件是 Myerson式非递减虚拟价值的多维版本。然而，Thanassoulis（2004）表明，彩票可能是必要的；Pavlov（2011）则将满足该条件时的最优两商品菜单限制为部分配置。训练数据是一种特殊的多维商品，买方可以将其与自身数据结合，并灵活地用于模型训练。这种灵活性施加了 Blackwell 单调性，并使最优菜单变得更粗。在这一额外约束下，微分虚拟价值条件得出“无讨价还价”结果。

事前时序也将我们的模型与序贯筛选联系起来。在 Courty 和 Li（2000）中，买方起初知道其估值的分布，随后才得知实现估值。Eső 和 Szentes（2007）以及 Li 和 Shi（2017）允许卖方设计关于这些估值的信息披露。在本文中，买方的初始类型规定了其了解不确定状态的方式；即使在二元状态下，该类型也是多维的。

在方法上，我们遵循 Rochet（1987年）以及 Rochet 和 Choné（1998）的做法，以买方的间接租金来表述卖方的问题，并直接对其进行优化。然而，《面向决策者的信息结构定价》带来了三项挑战。[11] 首先，卖方的分配和买方的私人类型都是信息结构，因此形成了一个针对信息结构的多维筛选问题。

[9]关于综述，参见 Lahr 和 Niemeyer（2025）。[10]在模糊集上的稳健性可以证明分开销售或分类捆绑的合理性（Carroll，2017；Che 和 Zhong，2025）。关于价值分布或相对估值的条件可以证明纯捆绑销售的合理性（Daskalakis、Deckelbaum 和 Tzamos，2017；Haghpanah 和 Hartline，2021）。在一维消费者异质性下，关于捆绑需求的条件可以证明嵌套菜单的合理性（Yang，2025）。围绕核心商品的足够强的互补性可以证明将核心商品与可选附加品一同销售的合理性（Zhong，2026）。[11]由于我们存在依赖类型的外部选项，因此使用间接租金而非间接效用，以避免将其与间接总净效用混淆。

其次，买方的私人信息决定了他在不购买的情况下能够获得什么，因此个体理性约束取决于类型。第三，补充信息的价值取决于买方观察信号后采取的行动。因此，在直接建议机制中，买方可以同时通过虚报类型并偏离建议行动来进行联合偏离（Myerson，1982年）。

我们确立了一个显示原理：买方可以通过将其私人信号进行信息模糊化，然后遵循建议，来重现其在误报后的最优后续策略所获得的收益。这一论证与 Eső 和 Szentes（2007）中的补偿性第二份报告，以及 Bull 和 Watson（2007）和 Gan 和 Li（2026）中的模仿可行技术相似。在微分虚拟价值条件下，我们得到标价结果。超越正则性，我们在关于垄断定价的对偶方法基础上，为假设检验建立了强对偶性（Daskalakis、Deckelbaum和Tzamos，2017；Kleiner 和 Manelli，2019；Zhong，2026）。Blackwell 单调性通过允许在 Blackwell 等价类型之间重新分配收入权重，改变了对偶中的随机序。因此，Blackwell 单调性将由耦合问题（Daskalakis、Deckelbaum和Tzamos，2017；Kleiner 和 Manelli，2019；Zhong，2026）得到的测度优化问题，转化为广义说服问题（Yang and Yang，2026）。

第 2 节介绍模型，第 3 节确立启示原理。第 4 节确立标价的最优性，第 5 节进一步将标价的最优性推广到一般类型空间。第 6 节构建对偶框架，将其与中间信息销售进行比较，并讨论 Blackwell 单调性的影响。

2 模型

决策问题与私人数据集。 状态 $\Omega = \{1, \ldots, m\}$ 和行动 $A = \{1, \ldots, J\}$ 均为有限集。先验 $\pi \in \text{int } \Delta(\Omega)$ 和决策收益 $v : A \times \Omega \to \mathbb{R}$ 是共同知识，且对所有买方都相同。数据集是关于状态的信息结构。买方的私人数据集具有信号集

$S = \{1, \ldots, n\}$，并由一个联合分布表示

$$P \in \Theta_{m,n} := \left\{ P \in \Delta(\Omega \times S) : \sum_{s \in S} P(\omega, s) = \pi_\omega \text{ for every } \omega \in \Omega \right\}. \tag{2.1}$$

其条件似然为 $P(s \mid \omega) = P(\omega, s)/\pi_\omega$。类型域是一个 Borel 集$\Theta \subseteq \Theta_{m,n}$。卖方知道其分布 F，但既未观察到买方的数据集P，也不知道他的私人信号。在预测应用中，s 是由私人数据集训练的预测机器的输出。联合分布 P 描述了该机器的统计性能。

签约时，买方知道 P，但尚未观察到 s。每种类型对状态都有相同的先验：$\pi \in \Delta(\Omega)$。因此，买方的私人信息描述了他将如何获知状态。私人已知的分布与其后续实现值之间的区别，使我们的模型与序贯筛选（Courty 和 Li，2000）相关联。在我们的设定中，私人类型 $\{P(\cdot \mid \omega)\}_\omega$ 是多维的。我们将在第 3 节回到这一关联。

示例：多类分类。买方将目标划分为 m 个组别，$\Omega = A = \{1、2、\ldots\ldots、m\}$。每个组别出现的概率相同，$\pi_\omega = 1/m$ 买方在分类正确时获得 1，否则获得 0，$v(a, \omega) = \mathbf{1}\{a = \omega\}$。买方由私人数据集训练的模型会生成 n 个标签，$S = \{1、2、\ldots\ldots、n\}$。假设检验是一种 $n = 2$ 的二元分类。[12]

数据集合约。卖方在买方选择合同之前承诺提供一个菜单。合同规定了一个补充数据集 $E : \Omega \to \Delta(Y)$，其具有有限信号集 Y，以及一笔支付 $t \geq 0$。卖方可以零成本提供任何此类数据集。在给定状态的条件下，私有信号与补充信号相互独立。因此，如果类型为 P 的买方购买了 E，则联合分布为

$$\Pr(\omega, s, y \mid P, E) = P(\omega, s) E(y \mid \omega). \tag{2.2}$$

买方在观察（s，y）之前付款，然后选择一项行动。状态、两个信号或行动都不能写入合同。拒绝合同的买方观察到

[12]注意，任何具有一般效用 $v(a, \omega)$、无支配行动和均衡先验 π的二元状态决策问题 $\Omega = A = \{1, 2\}$，都可以规范化为二元分类。

只有 s，并使用自己的私人数据集选择一项行动。因此，外部选项取决于类型。

直接机制与建议。继 Myerson（1982年）之后，直接建议机制为每个报告 $r \in \Theta$ 指定一份合同和一项决策规则：

$$M = \{(E_r, \sigma_r, t_r)\}_{r\in\Theta}, \qquad \sigma_r : S \times Y \to A, \qquad t_r \geq 0. \tag{2.3}$$

规则 σ_r 规定了对两个数据集的服从性使用。买方在观察到两个信号后，仍可自由选择任何行动。[13] 等价地，机制可以在信号到达后要求进行第二次报告 $\hat{s}$，并建议采取 $\sigma_r(\hat{s},\ y)$，同时保持 E_r 和t_r 不变。

时序总结于图2中。

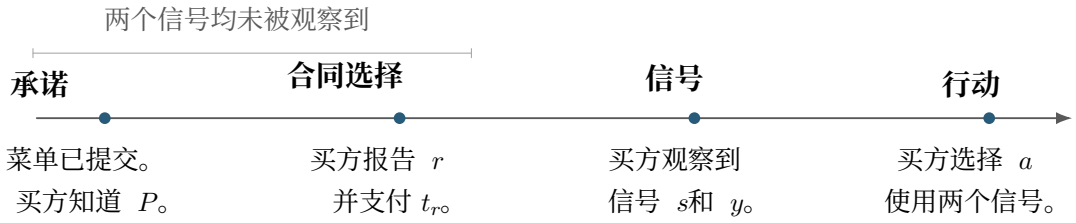


图2。时序。

收益和分配。对于真实类型 P 和报告 r，令

$$W^o(P,r) = \sum_{\omega,s,y} P(\omega,s)E_r(y \mid \omega)v(\sigma_r(s,y),\omega), \tag{2.4}$$

$$W(P,r) = \sum_{s,y} \max_{a\in A} \sum_{\omega} P(\omega,s)E_r(y \mid \omega)v(a,\omega). \tag{2.5}$$

服从性收益 W^o 评估推荐决策规则。优化收益W 允许买方在每个信号对下选择其偏好行动。因此 $W^o(P,r) \leq W(P,r)$。

[13]在 Bergemann、Bonatti 和 Smolin（2018年，第二节 B）中，补充数据集向已经知晓其私人信念的买方提出行动建议。在本文中，私人信号在签约后到达，因此该建议为信号对的每一种实现指定了一项策略（s，y）。

设计者问题。 依赖类型的外部选项是私人数据集的价值

$$\underline{u}(P) = \sum_{s} \max_{a \in A} \sum_{\omega} P(\omega, s) \upsilon(a, \omega). \tag{2.6}$$

收益最大化问题为

$$\begin{aligned} \sup_{M} \quad & \mathrm{Rev}_F(M) = \int_{\Theta} t_P \, dF(P) \\ \text{subject to} \quad & W^o(P,P) - t_P \geq W(P,r) - t_r \quad (P, r \in \Theta), \qquad \text{(IC)} \\ & W^o(P,P) - t_P \geq \underline{u}(P) \qquad\qquad (P \in \Theta), \qquad \text{(IR)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

训练数据销售面临三项挑战。第一，买方的私人类型和卖方配置都是数据集，因此该问题属于针对信息结构的多维筛选。第二，外部选项取决于类型。第三，激励相容必须排除报告和后续数据使用中的联合偏离。在第 3 节中，我们建立一个启示原理，以处理联合偏离。在第 4 节中，我们聚焦于假设检验中的完整类型空间 $\Theta = \Theta_{2,2}$。随后在第 5 节中，我们将标价的最优性扩展到广义污染类型空间，该空间保留了上述三项挑战，并且在现实中的训练数据场景中具有广泛应用。

3 数据销售的启示原理

本节首先介绍 Blackwell 单调性。随后，我们建立一个启示原理，刻画这一限制条件与如实报告和服从性相结合时，何时能够排除所有联合偏离。在第 4 节中，我们将应用该启示原理，把假设检验中的设计者问题重新表述为垄断销售两种商品。我们在第6.2节讨论 Blackwell 单调性的来源及其含义。

将 $\mathcal{G}_n$ 写作随机矩阵集合 $G\colon\ S \to \Delta(S)$。对于给定的 G，定义

$$(PG)(\omega, s') = \sum_{s} P(\omega, s) G(s' \mid s). \tag{3.1}$$

若存在某个 $G \in \mathcal{G}_n$，使得 $P \succeq_B Q$ if $Q = PG$ （Blackwell，1953）。对于任意合同 r，类型P 都可以通过 G 将信息模糊化为 Q，并遵循 σ_r（s'，y）。条件独立性给出

联合分布 $Q(\omega,\ s')E_r(y \mid \omega)$，因此，这重现了类型 Q 在合同 r 下的服从性收益，如图3所示。因此，（IC）意味着 Blackwell 单调性（BM）：

$$U(P) \geq U(Q) \qquad (P, Q \in \Theta,\ P \succeq_B Q). \tag{BM}$$

其中 $U(P) := W^o(P,\ P) - t_P$是真实且服从的总效用。

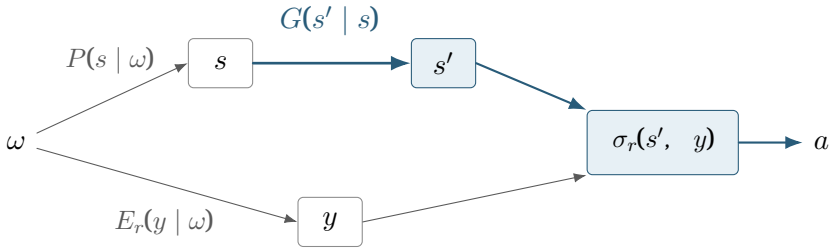


图3。 通过信息模糊化私人预测进行模仿。

注意到，(IC) 还意味着如实报告 (TT) 和服从性 (OB)，

$$U(P) \geq W^o(P, r) - t_r \qquad (P, r \in \Theta), \tag{TT}$$

$$W^o(P, P) = W(P, P) \qquad (P \in \Theta), \tag{OB}$$

如实报告 (TT) 比较服从行为下的报告；服从性 (OB) 要求在真实报告之后采取最优行动。Blackwell 单调性 (BM) 要求只要 $P \succeq_B Q$，就有 $U(P) \geq U(Q)$。

记 $\mathcal{M}_C$ 为满足约束 C 且支付非负的机制。假设每个行动都在某个全支持信念下具有唯一最优性。[14] 我们考虑二元决策，其中 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$，$A = \{a_1, a_2\}$，重新标记 $a_i \in \arg\max_a v(a, \omega_i)$。令类型空间为 $\Theta = \Theta_{2,n}$。

对于二元决策，考虑一个带有$\{(E_r,\ \sigma_r,\ t_r)\}_{r\in\Theta}$ 规范化合同的直接机制。补充数据集 E_r 包含信号标签 y_0，……，y_n。每当这些信号出现时，y_0 揭示状态 1，y_n 揭示状态 2。每个中间标签 y_j、$1 \leq j \leq n-1$要么是活跃的，即在两种状态下都以正概率出现；要么是无效的，即在两种状态下出现的概率均为零。似然比 $\ell_j = E_r(y_j \mid 2)/E_r(y_j \mid 1)$ 随活跃中间信号中的j 弱递增。

[14]形式化地说，对于每个 $a \in A$，存在 $\mu^a \in \operatorname{int}\Delta(\Omega)$，使得对于每个 $b \neq a$，$\sum_\omega \mu^a_\omega v(a, \omega) > \sum_\omega \mu^a_\omega v(b, \omega)$。

对于每种类型 r，按照在 r下状态 2 的后验概率递增的顺序排列非无效私人信号，并将无效信号置于最后。将所得列表记为 s_1^r，……，s_n^r。对于固定的私人信号，在能够与之共同出现的补充信号中，状态 2 的后验概率随 j 弱递增。因此，最优后续策略至多切换一次：随着 j 增加，从 a_1 切换到 a_2。规范化推荐规则为每个私人信号分配一个截止点：

$$\sigma_r(s_i^r, y_j) = \begin{cases} a_1 & \text{if } j \le n-i, \\ a_2 & \text{if } j > n-i. \end{cases}$$

附录A.3给出了标准化的详细内容。表1展示了针对 $n = 3$的一个规范化合同。三行包含两个不完美信号上的全部三个截止点，而每一行在揭示信号下都建议采取匹配行动。一般而言，n 行包含全部 n 个截止点。服从性要求分配给每个私人信号的行对预期类型而言都是最优的。将具有归一化合同的机制记为$\mathcal{N}_n$。

	揭示状态 1	不完美：$\ell_1 \le \ell_2$		揭示状态 2
私人信号	y_0	y_1	y_2	y_3
s_1^r	a_1	a_1	a_1	a_2
s_2^r	a_1	a_1	a_2	a_2
s_3^r	a_1	a_2	a_2	a_2

表1。规范化合同中的建议策略。每个条目都是 $\sigma_r(s_i^r, y_j)$。

定理 1 (显示原理)。对于二元决策，将注意力限制在 $\mathcal{N}_n \cap \mathcal{M}_{\text{IC,IR}}$ 上不会造成收入损失。[15] 此外，

$$\mathcal{N}_n \cap \mathcal{M}_{\text{IC,IR}} = \mathcal{N}_n \cap \mathcal{M}_{\text{TT,OB,BM,IR}}. \tag{3.2}$$

我们利用 Blackwell 单调性，将一类最优菜单中的报告与遵从所涉及的联合偏离加以区分。类似的分解也见于序贯筛选文献

[15]每个 $M \in \mathcal{M}_{IC,IR}$ 都存在一个 $M' \in \mathcal{M}_{IC,IR} \cap \mathcal{N}_n$，使真实效用保持不变，且支付弱增。

（Courty 和 Li，2000；Eső 和 Szentes，2007）。[16] 这里的分解源自买方的一种策略性偏离，即重新调整 其模型，对预测进行信息模糊化。[17] 附录 A.4 运用显示原理，给出了该问题的捆绑表示。在第 4 节所述的假设检验设定中，该表示将问题化简为标准的两种商品销售问题。附录 A 证明定理 1。

启示原理为何成立。考虑类型为 Q、针对 $n = 3$ 的规范化合同，如图 4 所示。我们仅保留两个按似然比排序的不完美y_1，y_2 以作说明。

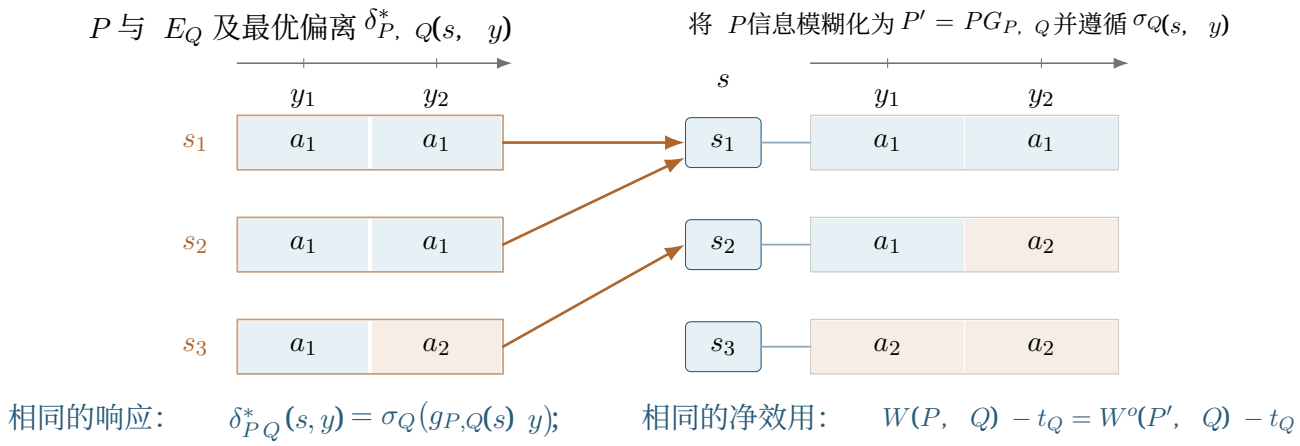


图 4. 双重偏离与响应编码。

我们可以通过对私人信号进行信息模糊化，为任意 s 的虚报编码最优延续，因为最优响应可以从(a_1, a_1)、(a_1, a_2)和(a_2, a_2)中选取，而这些都出现在 $\sigma_Q(s, y)$的行中。我们省略了 s^r中信号标签上的报告上标。例如，假设类型 P 虚报为 Q，并选择最优延续$\delta^*_{P,Q}(s, y)$，其中$\delta^*_{P,Q}(s_1, y) = \delta^*_{P,Q}(s_2, y) = \sigma_Q(s_1, y) = (a_1, a_1)$,$\delta^*_{P,Q}(s_3, y) = \sigma_Q(s_2, y) = (a_1, a_2)$。设 $g_{P,Q}$ 将 s_1, s_2 映射到 s'_1，并将 s_3 映射到 s'_2。记

[16]序贯行动减少或简化了双重偏离。在 Courty 和 Li（2000）中，初始私人信息描述了未来估值的分布。因此，第二阶段私人信息具有相同的偏好顺序。在 Eső 和 Szentes（2007，引理 4）中，买方会调整其第二次报告，使得错误报告的类型对能够推导出其真实的实现估值。[17]这种模仿关系类似于带证据的机制设计（Bull 和 Watson，2007）。在这里，信息模糊化可以在任何固定合同下完美地再现另一类型的服从性收益。

$G_{P,Q}(s'|s) = 1_{s'=g_{P,Q}(s)}$ 为该映射的矩阵。我们有

$$W(P,Q) = W^o(PG_{P,Q}, Q). \tag{3.3}$$

因此，类型 P 通过将其私人数据集进行信息模糊化为 $P' = PG_{P,\,Q}$ 并遵循服从规则，在合同 Q 下获得相同的响应和收益。信息模糊化后的数据集属于类型空间。在 $(P',\ Q)$ 处的真实性约束和在 $(P,\ P')$ 处的 Blackwell 单调性意味着

$$W(P,Q) - t_Q = W^o(P',Q) - t_Q \overset{\text{TT}}{\leq} U(P') \overset{\text{BM}}{\leq} U(P). \tag{3.4}$$

联合偏离中的每个最优延续都可以用这种形式编码。因此，真实性约束和 Blackwell 单调性排除了所有这些情况。当行动或收益相关状态更多时，最优延续可能不在推荐行中，从而这一分解可能失效。

4 假设检验

本节关注最优菜单：数据买方使用训练数据集来提升假设检验中的预测性能，正如第 2 节所介绍的那样。状态 1 是负例，状态 2 是正例；私人信号 1 和 2 分别是负预测和正预测。定义 $\alpha = \Pr(\omega = 1,\ s = 2)$ 和 $\beta = \Pr(\omega = 2,\ s = 1)$，即假阳性和假阴性的联合概率。[18] 这些概率决定私人数据集 P_x，其中 $x = (\alpha,\ \beta)$（图5）。对信号进行标记，使得每个具有正概率的预测都是弱最优的。这要求 $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}$，从而得到类型域

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : s(x) := \alpha + \beta \leq \tfrac{1}{2}\}, \qquad H = \{x \in D : s(x) = \tfrac{1}{2}\}. \tag{4.1}$$

外部价值是正确预测的概率，即 $u(x) = 1 - s(x)$。在 H 上，私人数据集没有信息量，买方只会在模型的默认错误（$\alpha,\ \beta$）之间切换。完全信息会消除这两个错误，因此其增量价值为 $s(x)$。

设 f 是 D 上错误对 $X = (\alpha,\ \beta)$ 的严格为正的 C^1 密度。将正则性条件（McAfee and McMillan，1988年）定义为

$$g(x) := 3f(x) + x \cdot \nabla f(x) \geq 0 \qquad (x \in D). \tag{4.2}$$

[18]这些是第一类错误和第二类错误事件。它们的传统条件率分别为 2α 和 2β。

私人数据集 P_x

	$s=1$	$s=2$
$\omega=1$	$\frac{1}{2}-\alpha$	α
$\omega=2$	β	$\frac{1}{2}-\beta$

行：状态。列：预测。

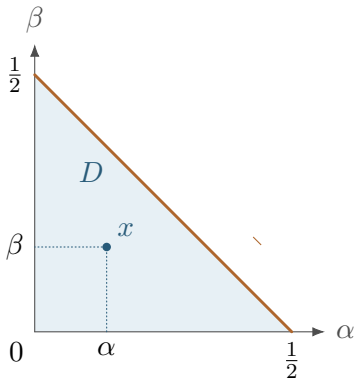


图5。 私人数据集与类型空间。

定理2。 在(4.2)条件下，完全信息数据集的标价是最优的。

根据定理 1，在不损失收入的情况下，我们可以将注意力限制在归一化合同上。在这一类别中，我们分别在真实性约束、Blackwell 单调性和个体理性下界定收入，并证明完全信息下的单一标价可以达到该界。在 D的假设检验中，事实上，在给定真实性约束和归一化合同的条件下，Blackwell 单调性等价于激励相容或服从性。我们将在第6.1节回到对偶框架。

正则性条件。 条件（4.2）是多维垄断定价中的微分虚拟价值条件（McAfee and McMillan，1988年；Pavlov，2011；Zhong，2026年）。正如 Pavlov（2011）所解释的，它与 Myerson（1981年）的联系在于密度加权的虚拟价值。仅凭这一条件，并不能推出多维筛选中的单一总捆绑价格。一维“不讨价还价”向确定性菜单的扩展未必成立（McAfee and McMillan，1988年；Thanas-soulis，2004年）。我们将在第6.1.2节讨论 Blackwell 单调性如何将那些规范菜单（Pavlov，2011；Daskalakis、Deckelbaum和Tzamos，2017）粗化为不讨价还价。

4.1 证明概要

定理2的证明。 我们首先将问题重新表述为两种商品销售问题：向拥有私人错误对（α，β）的买方捆绑销售统计误差 $q=(q_1,\ q_2)$ 的消除比率。然后，我们确定了 Blackwell 单调性施加的前沿处无扭曲 约束。该值决定了标价菜单的候选价格。效用

该菜单所产生的效用给出了收入上界，并且在激励相容条件下可行。证明见附录 B。

步骤 1：将数据集表示为两类错误的减少量。根据显示原理，在不损失收入的情况下，我们总可以将补充数据集 E_x表示为 $q(x) = (q_1(x)\ q_2(x))$，并将增量租金 $u(x)$ 表示为：$= U(P_x) - u(P_x)$。

$$E_x = \begin{pmatrix} q_1(x) & 1-q_1(x) & 0 \\ 0 & 1-q_2(x) & q_2(x) \end{pmatrix}, \qquad u(x) = x \cdot q(x) - t(x), \qquad q \in [0,1]^2. \tag{4.3}$$

向量 $q = (q_1,\ q_2)$ 记录了在推荐决策规则下得到纠正的假阳性错误和假阴性错误的比例。第一个和第三个结果分别揭示状态 1 和状态 2；在中间结果下，建议保留私人预测所对应的决策。在状态 1 的条件下，以概率 q_1 出现揭示性结果，从而纠正买方假阳性错误中的该比例。同样，q_2 是得到纠正的假阴性错误的比例。因此，条件独立性意味着，两类错误的概率分别从 α 和 β 降至 $\alpha(1-q_1)$ 和 $\beta(1-q_2)$。由此带来的决策收益改善为 $\alpha q_1 + \beta q_2 = x \cdot q$.

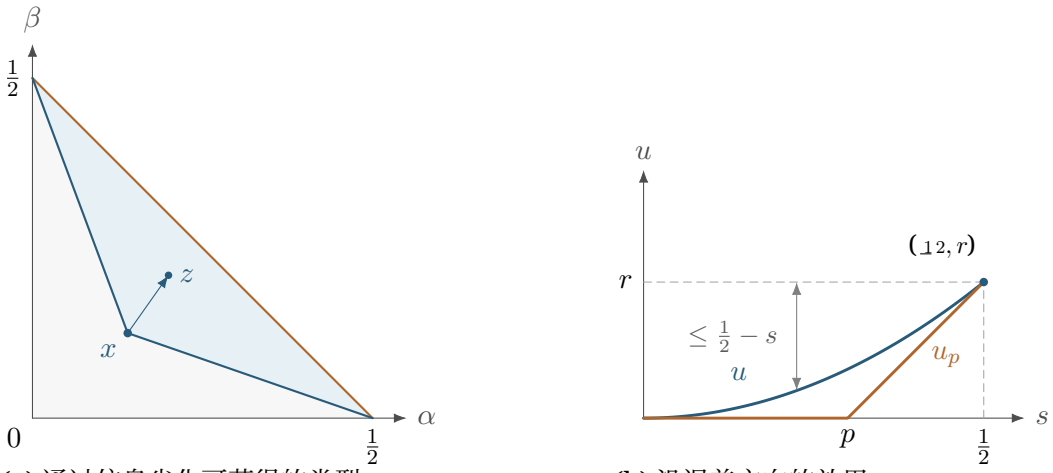
这给出了销售两种商品的解释：这两种商品分别是对两种统计误差的降低，而买方的初始错误概率（α，β）决定了他对这些降低的价值。他因按建议使用合同（q，t）而获得的增量收益为 $x \cdot q - t$。在这些建议收益满足真实性约束和个体理性的条件下，Rochet（1987）的刻画适用：间接租金 u 是凸的、按坐标非递减的，并且关于 ℓ^1 范数是 1-利普希茨的，同时满足 $u(0) = 0$。在几乎每个类型处，分配为 $q(x) = \nabla u(x)$ 。

步骤 2：将 Blackwell 单调性替换为前沿限制。通过信息模糊化得到的类型P_x 构成

$$\{z : P_x \succeq_B P_z\} = \mathrm{co}\{x, (\tfrac{1}{2}, 0), (0, \tfrac{1}{2})\}. \tag{4.4}$$

图6展示了这个集合。特别是，所有前沿类型都 Blackwell 等价，且每个私人数据集都支配它们。由于它们的外部价值相同，Blackwell 单调性要求

$$u|_H = r, \qquad 0 \le r - u(x) \le d(x) := \tfrac{1}{2} - s(x). \tag{4.5}$$



(a) 通过信息劣化可获得的类型 x　　(b) 沿误差方向的效用

图6。 Blackwell 单调性与前沿。在（a）中，阴影三角形是通过信息劣化 x 可获得的类型集合。在（b）中，边界租金 r 和界限 $r - u \leq \frac{1}{2} - s$ 将效用置于$u_p = (s - p)^+$之上，其中 $p = \frac{1}{2} - r$。

第一个不等式由 x 与 H上的类型之间的坐标单调性得出。第二个不等式由 x 与 H上的类型之间的 Blackwell 单调性得出。

条件（4.5）是一个**边界无扭曲条件**。 $u(x) \leq r$ 意味着，在任何可行机制中，前沿类型都具有最高的间接租金。由于设计者总是在其最优菜单中加入完全信息数据集以实现收益最大化， $x \in H$ 将选择菜单中的这一选项。因此，其分配从不发生扭曲，这与一维筛选问题中的“顶部无扭曲”相一致。[19] 该条件足以保证 Blackwell 单调性、 l_1 1-利普希茨连续性和服从性；我们将在第6.1节回到这一讨论。

步骤 3：固定前沿效用并最小化内部租金。对于可行效用，散度定理给出期望收益

$$\begin{aligned} R_f(u) &:= \int_D [x \cdot \nabla u(x) - u(x)] f(x)\, dx \\ &= Br - \int_D u(x) g(x)\, dx, \qquad B := \int_0^{1/2} \tfrac{1}{2} f(a, \tfrac{1}{2} - a)\, da. \end{aligned} \tag{4.6}$$

[19]在乘积定义域 $[0,1]^n$上，通常的顶部无扭曲条件涉及最大类型 **1**；而在这里，Blackwell 单调性要求整个前沿具有共同的值。

这是多维筛选中使用的收入表示（Rochet，1987年；Daskalakis、Deckelbaum和Tzamos，2017）。对于固定的前沿效用 r，内部租金以权重 $-g$计入收入。当 $g \geq 0$ 时，降低这些租金会使收入不减。

令 $p = \frac{1}{2} - r$。个体理性和垂直界意味着

$$u(x) \geq \max\{0, r - d(x)\} = (s(x) - p)_+ = u_p(x). \tag{4.7}$$

下包络 u_p 本身是可行的，并且具有相同的前沿值。因此

$$R_f(u_p) - R_f(u) = \int_D g(x)[u(x) - u_p(x)]\, dx \geq 0. \tag{4.8}$$

因此，每个可行菜单都被具有相同前沿效用的完全信息标价收入支配。该菜单满足激励相容，并达到由真实性约束、Blackwell 单调性和个体理性所得到的界。

□

5 多类分类

在本节中，我们将标价的最优性扩展到第 2 节所引入的广义污染空间中的私人数据集多类分类问题。买方使用标签质量不同的数据集，为同一任务训练分类器。我们采用一个共同的干净标签基准 C，并通过两阶段混淆过程对预测噪声的差异进行建模：当预测受到噪声影响时，分类器首先选择一个可能错误的组，然后在该组内抽取一个标签。[20] 图7展示了这两个阶段。

将标签集 S划分为非空的正确组 S_1、……、S_k，[21]，并令 $R\colon\ Z \to \Delta(Z)$ 为定义在组集 $Z = \{1$、……、$k\}$ 上的固定正规混淆矩阵。[22] 买方私下知晓污染率 $\varepsilon \in [0, 1]$ 以及组内分布$h = (h_1$、……、$h_k)$，其中 $h_r \in \Delta(S_r)$。

[20] $C \in \Theta_{m,\ n}$ 是真实类别与干净标签的联合分布。$\{\mathrm{Supp}\, C(\cdot \mid \omega)\}_\omega$ 是 S 的一个划分，因此干净标签可以识别真实类别。一个类别可能有多个干净标签。[21]每个真实类别都属于唯一的组，而多个类别可能共享同一个组。令 $\ell(\omega)$ 表示类别 ω 所属的组。类别 ω 的所有干净标签都属于该组：$\mathrm{supp}\, C(\cdot \mid \omega) \subseteq S_{\ell(\omega)}$对每个 $\omega \in \Omega$。[22] R 是非奇异的，并且对于 $\ell \neq r$ 有 $(R^{-1})_{\ell r} \leq 0$。

给定真实类别 ω，从 $C(\cdot \mid \omega)$ 中抽取一个干净标签 j。以 $1-\varepsilon$ 的概率，分类器输出 j。以 ε 的概率，输出分两个阶段抽取。首先，如果 j 属于组 S_ℓ，则以 $R_{\ell r}$ 的概率抽取目标组 r。其次，从 h_r 中抽取输出标签 j'。因此，同一组中的所有干净标签都经历相同的混淆过程。在污染条件下，从干净标签 j 的转移

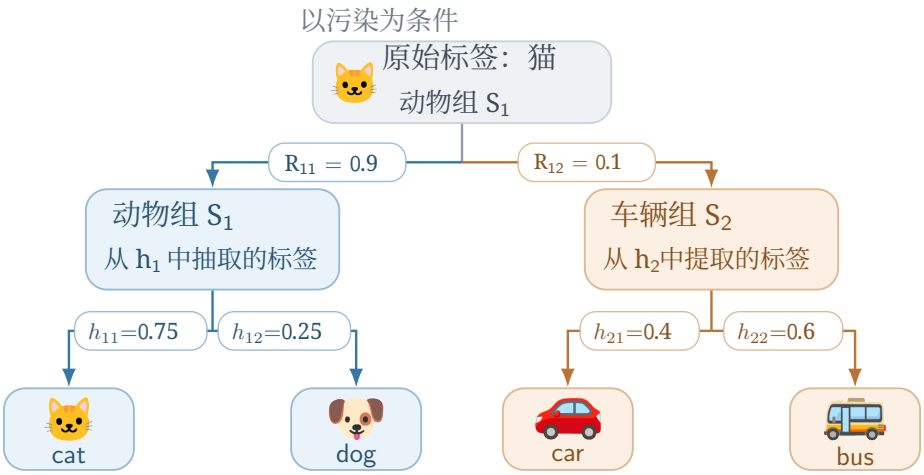


图7。 两阶段污染：R 选择一个目标组，h_r 选择其中的一个标签。

输出标签 j' 为

$$\Gamma_h(j' \mid j) = R_{\ell r} h_r(j'), \qquad j \in S_\ell, \quad j' \in S_r. \tag{5.1}$$

买方只能观察分类器的输出 j。它与真实类别 ω 的联合分布为

$$P_{\varepsilon,h} = C\Big[(1-\varepsilon) I_n + \varepsilon \Gamma_h\Big] \in \Delta(\Omega \times S). \tag{5.2}$$

对于 $j \in S_r$，设 $x_j = \varepsilon h_r(j)$，并令$\mathcal{D}$ 表示 x的定义域。每个组具有相同的总质量 $\varepsilon = \sum_{j \in S_r} x_j \in [0,1]$，因此该定义域的维数为 $d = n - k + 1$。令 f 为 X 在$\mathcal{D}$上的严格正密度。现在正则性条件变为

$$g(x) := (d+1) f(x) + x \cdot \nabla f(x) \geq 0 \qquad (x \in \mathcal{D}). \tag{5.3}$$

定理 m 3. 在(5.3)条件下，完全信息数据集的标价是最优的 .

应用。 广义污染空间涵盖以下环境。

假设检验/二元分类。 某平台购买经过验证的安全标签，以改进一个专有的内容分类器；该分类器的假阳性和假阴性错误率为私有信息。对于 $m = n = 2$，取 $C = I_2/2$、 $k = 1$ 和 $h_1 = h \in \Delta(S)$。然后$\Gamma_h(j' \mid j) = h(j')$。重新标注信号后，每个二元数据集都具有以下形式

$$P_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \alpha & \alpha \\ \beta & \frac{1}{2} - \beta \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta \leq \frac{1}{2}. \tag{5.4}$$

它等于 $(1-\varepsilon)C+\varepsilon \mathbf{1}_2 h/2$ 与 $\varepsilon = 2(\alpha+\beta)$ 以及 $h = (\beta,\ \alpha)/(\alpha+\beta)$，当 $\alpha+\beta > 0$ 时。因此，该定理涵盖 $\Theta_{2,\ 2}$ 环境以及定理2。[23] 这种二元标签噪声表述在 Natarajan 等人（2013年）的工作中是标准形式。

污染。 一名图像识别开发者购买专家标注，以补充一个私有语料库，其中包含由不知情的标注者提供的标签。取$k = 1$、 $R = (1)$ 和 $h_1 = h \in \Delta(S)$。那么， $\Gamma_h(j' \mid j) = h(j')$，且与 j 相互独立。记 $a_j^{\omega} = mC(\omega,\ j)$，得到

$$P_{\varepsilon,h}(j \mid \omega) = (1 - \varepsilon) a_j^{\omega} + \varepsilon h_j. \tag{5.5}$$

一条记录要么是干净的，要么被一个独立于其真实类别的标签替换。在这里， $d = n$ 和$g = (n + 1)f + x \cdot \nabla f \geq 0$。替换成分是 Raykar 和 Yu（2012年）提出的垃圾标注者模型。

类别依赖标签噪声。 买方购买经验证的图像标签，以补充部分由存在系统性类别混淆错误的自动化工具标注的数据。取$n = m = k$、 $C = I_m/m$和单元素组别 $S_r = \{r\}$。每个 h_r 随后都以概率 1 取值为 r，因此

$$\Gamma_h = R, \qquad P_{\varepsilon,h} = \frac{1}{m}\Big[(1 - \varepsilon) I_m + \varepsilon R\Big]. \tag{5.6}$$

相对混淆模式是固定的，而 ε 衡量对自动化标签的依赖程度。类别依赖噪声的转移矩阵表述沿用了 Patrini 等人（2017）的做法。

粗粒度标签与含噪粗粒度标签。 买方购买犬种等细粒度标签，以便用粗略或不精确的标注补充数据。以 $k < m$ 为例，该分组将一些真实类别汇集在一起。当 $R = I_k$ 时，污染会保留粗类别

[23]允许纯净成分变化后，标价结果也可扩展到条件价格收益凹性条件下的完整 $\Theta_{2,\ n}$ 定义域。请参见附录 C.3。

，并在其中重新绘制私人标签：

$$\Gamma_h(j' \mid j) = h_\ell(j') \quad \text{for } j, j' \in S_\ell, \qquad \Gamma_h(j' \mid j) = 0 \text{ otherwise.} \tag{5.7}$$

受污染的记录恰好包含粗类别中的信息，例如“狗”而非品种。 R 的非对角元素允许粗类别之间发生混淆。情形 $R = I_k$ 嵌套了由 Fotakis 等人（2021）研究的固定划分粗标签模型。

多种噪声源。 买方从多个标注服务提供商处汇集训练记录，并购买精选补充数据。假设源 i 具有组内分布 $h^{(i)}$，并采用相同的分组和混淆矩阵 R。对于私有权重 $\varepsilon_i \geq 0$ 且满足 $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \leq 1$，

$$\begin{aligned} P &= C\left[\left(1 - \sum_i \varepsilon_i\right) I_n + \sum_i \varepsilon_i \Gamma_{h^{(i)}}\right] \\ &= C\Big[(1-\varepsilon) I_n + \varepsilon \Gamma_{\bar{h}}\Big], \qquad \bar{h}_r = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} h_r^{(i)} \quad (\varepsilon > 0). \end{aligned} \tag{5.8}$$

对于 $k = 1$，这些来源可以是具有不同与状态无关的标注倾向的多个标注池。对于 $k > 1$，它们在记录如何分布于相同粗类别中这一点上可能存在差异。Raykar 等人（2010）研究了这种来自异质标注者的学习。

6 讨论

6.1 超越正则性

6.1.1 对偶性框架

现在我们放弃微分虚拟价值条件，并在假设检验模型中建立对偶框架。变量替换 $w(x) = r - u(x)$ 给出 $R_f(u) = \int_D w \, d\nu$，其中 $\nu = g(x)\, dx - \delta_0$，并以 $w \leq d$ 取代利普希茨约束。定义

$\mathcal{K} = \{w \in C(D) \colon\ w$ 是凹函数且逐坐标非增 $w|_H = 0\}$ $\lambda \succeq_{\mathcal{K}} \nu$ 当且仅当对每个 $w \in \mathcal{K}$。

定理 4（强对偶）。

$$\sup_{M\in\mathcal{M}_{\mathrm{IC,IR}}} \mathrm{Rev}_F(M) = \max_{\substack{w\in\mathcal{K}\\ w\le d}} \int_D w\,d\nu = \min_{\substack{\lambda\ge 0\\ \lambda\succeq_{\mathcal{K}}\nu}} \int_D d\,d\lambda, \tag{6.1}$$

对于凸且按坐标非递减的租金 u（其中 $u|_H = r$），全局 ℓ^1 1-利普希茨条件等价于垂直激励相容界 $r - u(x) \le d(x)$ 对每个 $x \in D$均成立。该界仅将每个类型 x 与前沿 H进行比较。其对偶乘子是定义在 D上的测度，从而得到一个广义说服问题（Yang and Yang，2026）。这不同于多维筛选中的标准运输表述，在后者中，成对利普希茨约束与定义在 $D\times D$ 上的耦合相关（Daskalakis、Deckelbaum和Tzamos，2017；Kleiner和Manelli，2019；Zhong，2026）。[24] 附录 D.2 建立了对偶表示。

证明 **标价**。令 $u_p = (s-p)_+$，$w_p = \min\{d,\ \frac{1}{2}-p\}$，并令 $W_p = \{s \ge p\}$.

命题 1 (定价销售证书)。对于在 p 上的完全信息数据集，标价是最优的，当且仅当定义在 D 上的非负测度 λ 满足

$$\lambda \succeq_{\mathcal{K}} \nu, \qquad \operatorname{supp}\lambda \subseteq W_p, \qquad \int_D w_p\, d(\lambda-\nu) = 0. \tag{6.2}$$

这些条件使得在 w_p 处两个对偶不等式都取等号。反过来，只要 w_p 是最优的，强对偶性就能给出一个达到最优值的 λ，使两个不等式都取等号。在 $g \ge 0$ 下，令 p^* 最大化 $p\Pr\{s(X) \ge p\}$。其一阶条件给出 $\int_{W_{p^*}} g\,dx = B$ 和 $\int_{D\setminus W_{p^*}} g\,dx = 1$。于是 $\lambda^* = \mathbf{1}_{W_{p^*}} g\,dx$ 是可行的，因为 $\int_D w\,d(\lambda^*-\nu) = w(0) - \int_{D\setminus W_{p^*}} wg\,dx \ge 0$，并且

$$\int_D d\,d\lambda^* = \int_{W_{p^*}} d(x)g(x)\,dx = R_f(u_{p^*}).$$

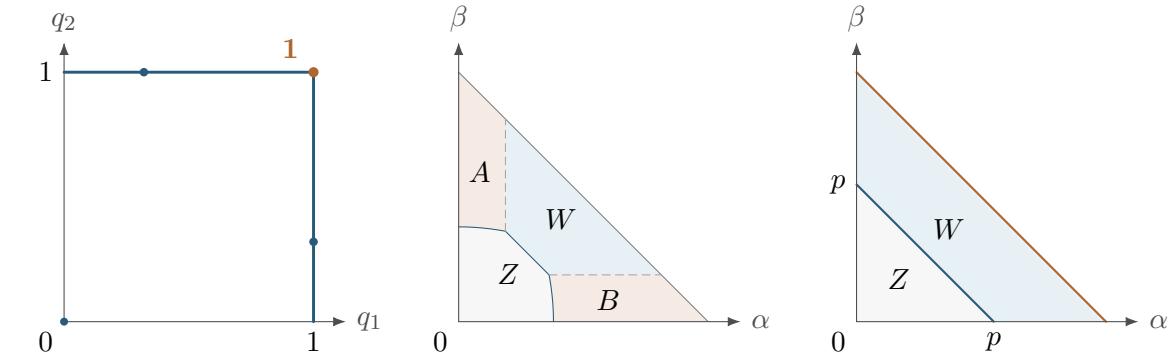
等价地，将前沿测度重新分配为 $(S_H)_{\#}\lambda^*$，其中 $S_H(x) = (\frac{1}{2}-\beta,\ \beta)$；耦合 $(S_H, \mathrm{Id})_{\#}\lambda^*$ 的成本为 $\int d\,d\lambda^*$，并可作为总括捆绑销售的证书。在效用为线性可加的等价两种商品捆绑问题中，[25] 该证书推广了 Haghpanah 和 Hartline (2021) 的充分条件；该条件要求每条射线 $r_k = \{(\alpha,\ \beta) | \alpha = k\beta\}$ 上的分布都相同。

[24]感谢 Andreas Kleiner 指出了这一点。[25]给定 $q = (q_1,\ q_2)$，令 λ_q 表示这样的彩票：以概率 q_i 独立地包含商品 i。捆绑商品 $\varnothing$、$\{1\}$、$\{2\}$ 和 $\{1,\ 2\}$ 对应的概率分别为 $(1-q_1)(1-q_2)$、$q_1(1-q_2)$、$(1-q_1)q_2$ 和 q_1q_2。买方支付 t 并获得抽中的商品组合，其预期净收益为 $\alpha q_1 + \beta q_2 - t$。

6.1.2 BM 使菜单变粗。

BM 限制 决定哪些选项可以处于活跃状态，并将复杂菜单简化为简单菜单 .

命题 2 （替换边界合同）。 将所有包含 $q_1 = 1$ 或$q_2 = 1$ 的选项替换为价格为 $p = \frac{1}{2} - r$ 的 $q =$ （1，1），不会降低利润。 -



（a）边界分配（a，1）或（1，a） （b）典范划分{Z，A，B，W} （c）BM 使菜单（a）和（b）变粗

图 8。 菜单粗化。

Pavlov（2011）给出了相关条件，使得最优菜单可以仅使用排除 $q = (0, 0)$ 或形如 $(1, a)$ 或 $(a, 1)$ 的分配，其中 $a \in [0, 1]$。Daskalakis、Deckelbaum和Tzamos（2017）给出了典范划分 $\{Z, A, B, W\}$ 具有最优性的充分条件。令 $b_1(\alpha)$ 表示排除区域 Z 在 α 处上边界的高度，令 $b_2(\beta)$ 表示其右边界在 β 处的宽度。在 A 和B 上，买方租金分别是垂直距离 $\beta - b_1(\alpha)$ 和水平距离 $\alpha - b_2(\beta)$。在 Z、 A、 B 和 W 上，分配几乎处处分别为 $(0, 0)$、$(-b_1'(\alpha), 1)$、$(1, -b_2'(\beta))$ 和 $(1, 1)$。在Blackwell 单调性下，单个完全信息合同可以替代所有这些合同。图 8 展示了由此产生的菜单粗化。

推论 1 （菜单坍缩）。 如果最优数据集菜单具有 *Pavlov* 的边界分配或 *DDT* 的典范划分，则完全信息的单一标价是最优的。

6.2 Blackwell 单调性分析

我们首先重新表述这个问题，以解释 Blackwell 单调性的来源：设计者筛选代理人可行的数据处理技术，这与 Gan 和 Li（2026）有关。我们

随后，我们将 Blackwell 单调性与多维筛选中可实施机制的三种刻画进行比较（Rochet，1987年；Daskalakis、Deckelbaum和Tzamos，2017）：（i）间接租金的单调性；（ii）配置的循环单调性；（iii）对偶形式中测度的可容许变动。这些比较回答了 Blackwell 单调性为何会使菜单变得更粗。

6.2.1 统计模型选择集的 BM 与筛选

私人数据集可以被视为一组由私人知晓的可行预测模型。设

$$\mathcal{R}_P := \{Q \in \Theta : P \succeq_B Q\} \tag{6.3}$$

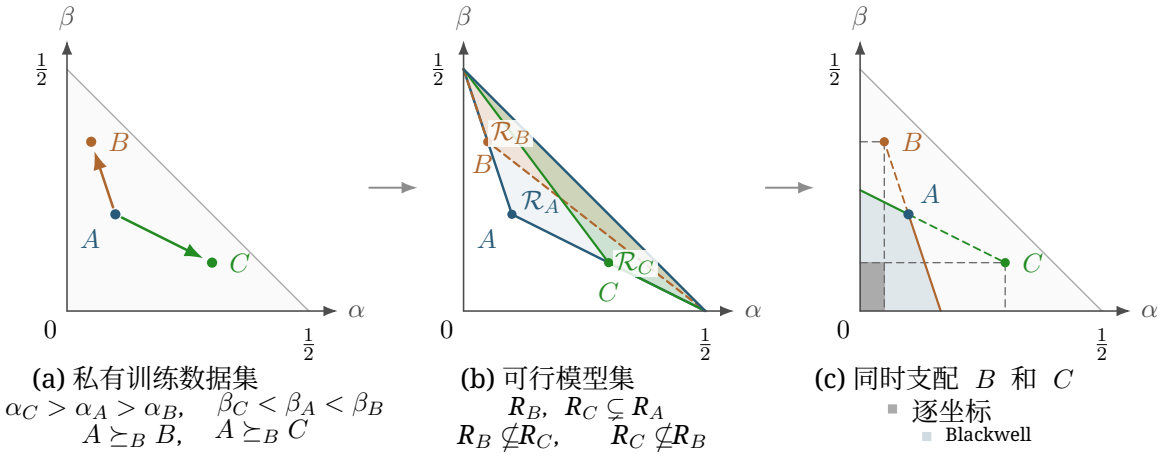
为拥有数据集 P 的买方通过对其私人预测进行信息模糊化所能获得的模型。根据信息模糊化的传递性以及 $Q \in \mathcal{R}_Q$ 这一事实，

$$P \succeq_B Q \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{R}_Q \subseteq \mathcal{R}_P. \tag{6.4}$$

如果 $\mathcal{R}_Q \subseteq \mathcal{R}_P$，类型 P 可以选择 Q 的合同，将其私人预测进行信息模糊化以复现 Q，并遵循 Q 规定的规则。这产生了 $U(Q)$，因此激励相容性要求 $U(P) \geq U(Q)$。因此，（BM）表示总效用随可行模型集的包含关系而具有单调性。

Blackwell 序相比假设检验中误差率的逐坐标序，能够比较严格更多的模型对。在图 9 中，A 与 B 和 C 具有不同的错误构成，但 A 可以复现它们。面板 (c) 展示了能够同时复现 B 和 C 的模型集合。该区域严格包含这样一个矩形：其中的模型在两个坐标上的误差均不高于 B 和 C 。可行模型集在包含关系下可能不可比，正如 $\mathcal{R}_B$ 和 $\mathcal{R}_C$ 所示，因此筛选仍然是多维的。

这一视角将我们的问题与 Gan 和 Li（2026）的研究联系起来；他们研究的是针对私人知晓的技术集合进行筛选。两者的主要区别在于，Gan 和 Li（2026）中，给定分配后，收益仅取决于报告类型。因此，他们的激励相容约束采取承诺效用关于集合包含关系单调的形式，这对应于本文中的 Blackwell 单调性。我们的卖方还必须满足真实性约束：买方可以选择另一类型的合同，同时保留自己的私人数据集，而该合同带来的收益取决于所使用的数据集。



(a) 私有训练数据集
$\alpha_C > \alpha_A > \alpha_B$, $\beta_C < \beta_A < \beta_B$
$A \succeq_B B$, $A \succeq_B C$

(b) 可行模型集
R_B, $R_C \subsetneq R_A$
$R_B \not\subseteq R_C$, $R_C \not\subseteq R_B$

(c) 同时支配 B 和 C

图 9. 可行模型集与 Blackwell 比较。

6.2.2 Blackwell 单调性限制可实施性

尽管 Blackwell 序是一种粗略的序，信息模糊化仍能以多种方式改变误差构成。因此，Blackwell 单调性会同时限制基于质量和误差构成的筛选，从而限制设计者从横向差异中提取租金的能力。

间接租金中的 Blackwell 单调性。考虑两种数据类型 P 和 Q、$P \succeq_B Q$。拥有信息量较少的私人数据的买方 Q 具有较低的外部收益 $\underline{u}(Q)$，并且从完全信息中获得的收益更大。因此，P 是筛选中的低类型，而 Q 是高类型。Blackwell 单调性规定，高类型获得的租金 Q 不能低于外部收益之间的间隙：

$$u(Q) - u(P) \le \underline{u}(P) - \underline{u}(Q) \qquad (P \succeq_B Q). \tag{6.5}$$

其中 $u(P) = U(P) - \underline{u}(P)$ 是 P的增量租金。类似地，为 Q定义 $u(Q)$.

在示例中，$u(N) - u(A) > u(A) - u(N)$，因此 $\underline{U}(N) > U(A)$，尽管$A \succeq_B N$。虽然 N 甚至不属于类型空间，但它是 A的信息模糊化。因此，A 的所有者可以采用从定向补充中获益更多的组合。

Blackwell 单调性和循环单调性。将行动建议所诱导的分配定义为

$$D_r(a \mid \omega, s) = \sum_y E_r(y \mid \omega) \mathbf{1}\{\sigma_r(s, y) = a\}. \tag{6.6}$$

[26]定义 $U_N := W^o(P_N, P_B) - t_{P_B}$，因为 B的选项对于 N而言是最优的。

因此，服从性收益可以采用线性形式

$$\langle P, D_r \rangle_v := W^o(P, r) = \sum_{\omega, s, a} P(\omega, s) D_r(a \mid \omega, s) v(a, \omega). \tag{6.7}$$

通过 G 进行信息模糊化可得

$$D_r^G(a \mid \omega, s) = \sum_{s'} G(s' \mid s) D_r(a \mid \omega, s'), \qquad \langle P, D_r^G \rangle_v = \langle PG, D_r \rangle_v. \tag{6.8}$$

IC 要求对每个 P， r， G都有 $U(P) \geq \langle P, D_r^G \rangle_v - t_r$。沿循环求和 :

$$\sum_{i=1}^{k} \left[\langle P_i, D_{P_i} \rangle_v - \langle P_i, D_{P_{i+1}}^{G_i} \rangle_v \right] \geq 0, \qquad P_{k+1} = P_1, \quad k \geq 1. \tag{6.9}$$

循环单调性（CM）（Rochet，1987年）将每个 $G_i = I$ 设定为 G_i ，而 G_i 可以是（6.9）中的任意随机矩阵。该示例满足循环单调性。考虑循环$A \to B \to A$。在第一条边上，类型 A 将其私人预测进行信息模糊化，采用永不标记规则 $P_A G = P_N$，并遵循 B的建议。在第二条边上，类型 B 遵循A的建议。它违反了（6.9），

$$\begin{aligned} &\left[W^o(P_A, P_A) - W^o(P_N, P_B) \right] + \left[W^o(P_B, P_B) - W^o(P_B, P_A) \right] \\ &\quad = 0.800 - 1 + 0.964 - 0.804 = -0.040 < 0. \end{aligned} \tag{6.10}$$

对偶性中的 Blackwell 单调性与前沿重分配。Blackwell 单调性还改变了对偶问题中收入权重的可行移动。在假设检验中， H 上的所有类型都是 Blackwell 等价的，并具有相同的外部收益，因此其增量租金为常数：$u|_H = r$。回顾方程（4.6）

$$R_f(u) = r\lambda_H(H) - \int_D u(x) g(x)\, dx. \tag{6.11}$$

其中，分部积分后， $\lambda_H(H) = \int_0^{1/2} \frac{1}{2} f(a, \frac{1}{2} - a)\ da$是前沿收入测度。因此，在给定 $u|_H = r$的情况下，可以在不同错误构成之间重新分配前沿权重，而不会改变收入。[27] 没有 Blackwell 单调性时，前沿租金可能不同，因此重新分配可能改变目标函数。

图 10 展示了这种自由度如何支撑标价菜单。每条射线固定一种误差构成（ξ, $1 - \xi$），而类型 $x = s(\xi, 1 - \xi)$ 的总错误率各不相同

[27]一般而言，Blackwell 单调性允许在 Blackwell 顺序等价的类型之间进行测度重分配。

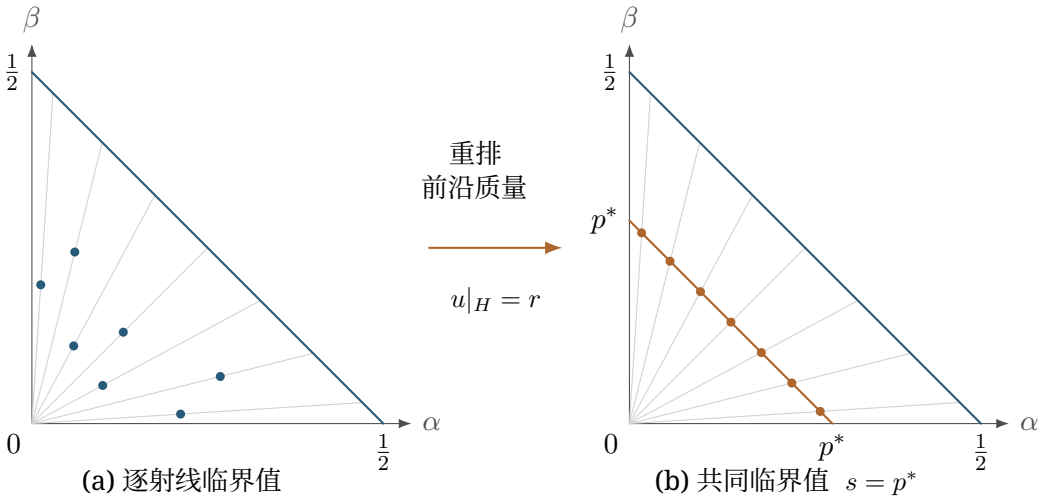


图 10。 前沿重分配。

$s \in [0, 1/2]$。忽略不同射线之间的相互激励相容约束后，设计者只需在不同射线上对总错误率 s 进行筛选。这是一个一维筛选问题，因此标价是最优的。然而，每条射线都可能有不同的最优价格临界值，如图 (a) 所示。此外，相互激励相容约束可能会起作用，使最优菜单的分析更加复杂。

将 Blackwell 单调性的前沿测度重新分配，有助于使各个临界值保持一致，并避免相互激励相容约束。在 $g \geq 0$ 下，令 p^* 为最优完全信息 posted price。为每条射线赋予一个前沿权重，该权重等于该射线上高于 p^* 的内部收益质量。 p^* 的一阶条件确保这些权重之和为 B，从而使这种重新分配具有可行性。调整权重后，每条射线的临界值目标函数均在 p^* 处达到最大值，从而得到面板 (b) 中的直线边界 $\alpha + \beta = p^*$。

6.3 中间信息销售

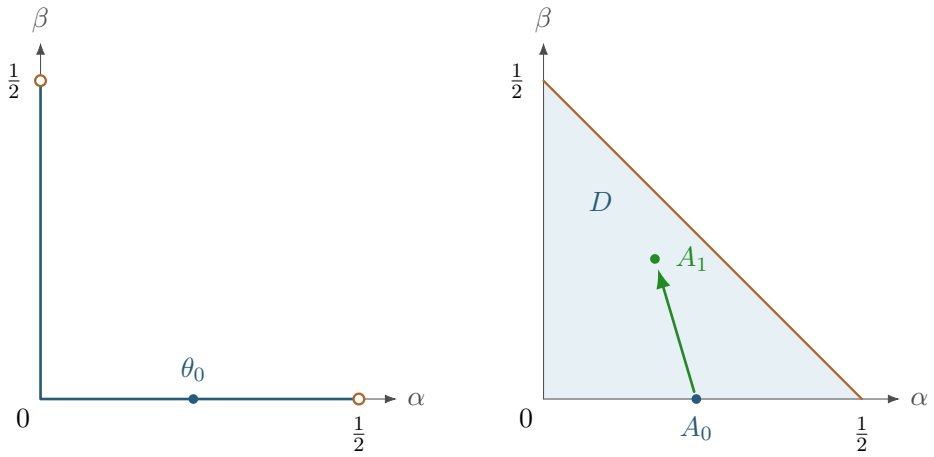
审核贷款申请的贷款方可能会购买一份信用报告，以进一步了解申请人。它已经对申请人的风险形成了判断，而这项评估决定了这份报告对当前决策的价值。同一贷款方也可能会购买一组过往贷款申请及还款结果的数据，以改进面向未来申请人的评分模型。购买时，它知道当前模型在哪些方面容易出错。未来的申请及其评分仍然未知。第一笔

交易是期间交易，如 Bergemann、Bonatti 和 Smolin（2018）所述，下文简称 BBS。第二笔则是事前交易，如我们的模型所述。BBS 对已实现后验概率进行筛选。我们筛选的是私人数据集，该数据集决定了未来后验概率的分布。

在假设检验中，令 $\theta = \Pr(\omega = 1)$ 表示 BBS 中买方的后验概率，并令 $v = \min\{\theta, 1-\theta\}$ 表示没有补充信息时的错误概率。如果买方预测为状态 2，则错误为假阳性；如果他预测为状态 1，则错误为假阴性。因此，后验区间映射到两条错误轴上：

$$\theta \le \tfrac{1}{2}: \quad (\alpha, \beta) = (v, 0), \qquad \theta \ge \tfrac{1}{2}: \quad (\alpha, \beta) = (0, v). \tag{6.12}$$

带有 $v = \frac{1}{2}$ 的两个端点代表相同的平衡信念。事前买方可能在未来案例中犯下这两类错误，因此其私人类型可以位于 D 的内部（图 11）。



（a）期间：已实现后验概率　　（b）事前：私人数据集

图 11。 期间销售和事前销售下的类型空间。

信息商品与数据商品。 销售时序以及买方观察其预测的时点，会同时影响卖方可以筛选什么，以及买方可以调整什么。在 BBS 中，即使买方的错误概率相同，他们对部分实验的估值也可能不同，因为他们需要针对不同状态获得更强证据，才能改变自己的决策。因此，信息的位置为卖方提供了一种筛选买方的方式，即使这些买方对完全信息的估值相同。由于单一私人信号已经实现，BBS 中的买方无法重新调整。

在事前销售中，私人数据集具有更丰富的横向差异，因为它们在预测误差的构成上各不相同，使卖方有更大空间针对特定误差进行定向销售。然而，买方也可以重新调整其模型，如图 11(b) 中从 A_0到 A_1 的变化所示。随后，他可以使用针对由此产生的误差组合的补充信息。Blackwell 单调性限制了卖方利用这些差异进行信息攫取的能力。

可实施性与最优设计。 我们可以将 BBS 改写为误差表示。在二元推荐表示中，按照 Bergemann、Bonatti 和 Smolin（2018年，第 8 页，第（ii）项）的定义，集中的实验满足 $\max_i \rho_i = 1$，其中 ρ_i 是在状态 i 下建议正确行动的概率。令 $\chi(\theta) = \rho_1(\theta) - \rho_2(\theta)$ 表示分配给后验分布 θ 的实验之差。分配 $x_1(\alpha) = 1+\chi(\alpha)$ 和 $x_2(\beta) = 1-\chi(1-\beta)$ 是沿两条误差分支的增量租金斜率。每条分支上的租金均从零开始，并且两个包络公式在平衡信念处必须给出相同的租金。

$$\int_0^{1/2} x_1(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{1/2} x_2(\beta)\, d\beta. \tag{6.13}$$

条件（6.13）与每个 x_i 均为非递减且 $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \le 2$ 一起刻画了可实施性，其中 $\bar{x}_i$ 是 x_i 在平衡信念处的极限。

附录 E.4 运用平衡条件，对 Bergemann、Bonatti 和 Smolin（2018）中的最优菜单给出了极点解释。最优菜单提供完全信息，并至多提供一种部分实验。例如，当两者都提供时，重新标记状态，使后验分布较低的买方购买部分信息。设 a 为完全信息的价格， b 为买方开始购买部分信息时的后验分布， c 为买方转而购买完全信息时的后验分布。后验分布为$\theta \in [b, c]$的买方以 λb的价格购买部分实验（ρ_1， ρ_2）=（λ，1），而后验分布为$\theta \in [c, 1-a]$ 的买方以 a的价格购买完全信息。条件（6.13）给出 $a = \lambda b + (1-\lambda)c$，这正是 c在部分信息与完全信息之间无差异的条件。其他所有买方都选择外部选项。在误差坐标下，分配为

$$\begin{aligned} x_1(\alpha) &= \lambda \mathbf{1}\{\alpha \ge b\} + (1-\lambda)\mathbf{1}\{\alpha \ge c\}, \\ x_2(\beta) &= \mathbf{1}\{\beta \ge a\} + (1-\lambda)\mathbf{1}\{\beta > 1-c\}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

揭示原理的证明

我们分两部分证明定理 1。首先，我们证明规范化合同中的推荐行可以在任何报告之后实现最优延续。其次，我们证明，对完全激励相容机制进行规范化，能够保留真实效用，并在每个报告下弱增支付。

A.1 信息模糊化与激励相容性

对于信息模糊化 $G \in \mathcal{G}_n$, $W^o(PG,\ r)$，其定义见（2.4）和（3.1）。

引理1。 在报告 r 下，类型为 P 的个体根据 $G(\cdot \mid s)$ 抽取 s'，并遵循 $\sigma_r(s', y)$，可获得总收益 $W^o(PG, r)$。此外，$W^o(PG, r) \le W(P, r)$。

证明。 条件独立性给出联合分布

$$\Pr(\omega, s', y) = \sum_s P(\omega, s) G(s' \mid s) E_r(y \mid \omega) = (PG)(\omega, s') E_r(y \mid \omega).$$

在该联合分布下遵循 σ_r 得到 $W^o(PG,\ r)$。为将其与 $W(P,\ r)$ 进行比较，固定一对以正概率出现的 $(s,\ y)$。买方仅使用 s 抽取 s'，因此这一抽取不会改变其对状态的后验分布。因此，他先进行信息模糊化、再遵循建议所获得的条件收益为

$$\sum_{s'} G(s' \mid s) \sum_{\omega} \Pr(\omega \mid s, y)\, v\Big(\sigma_r(s', y), \omega\Big) \le \max_{a \in A} \sum_{\omega} \Pr(\omega \mid s, y)\, v(a, \omega).$$

左边是在相同后验分布下对推荐行动收益取平均。对 $(s,\ y)$ 中的量对不等式取平均，得到 $W^o(PG,\ r) \le W(P,\ r)$。 □

引理 2 (响应编码)。 假设对于每个 $P, r \in \Theta$，都存在 $G_{P,\ r} \in \mathcal{G}_n$，使得 $PG_{P,\ r} \in \Theta$，并且

$$W(P, r) = W^o(PG_{P,r}, r). \tag{A.1}$$

那么，激励相容等价于真实性约束和 *Blackwell* 单调性，因此也等价于真实性约束、*OB* 和 *Blackwell* 单调性。

证明。 假设该机制满足激励相容。对于任意 $P,\ r \in \Theta$，在报告 r 时遵循建议是一种可行延续，因此

$$W^o(P, r) - t_r \le W(P, r) - t_r \le U(P).$$

这就得到真实性约束。在 $r = P$处，左侧等于 $U(P)$，因此两个不等式都取等号，OB 随之成立。若 $Q = PG \in \Theta$，引理1给出

$$U(P) \geq W(P,Q) - t_Q \geq W^o(Q,Q) - t_Q = U(Q).$$

因此，IC 也意味着 Blackwell 单调性。

反之，假设真实性约束和 Blackwell 单调性成立。固定 P，$r \in \Theta$并取$Q = PG_{P,r} \in \Theta$自（A.1）。类型 Q 的真实性约束比较了报告 r 与报告 Q。由于 P 可以将其信号进行信息模糊化以重现 Q，Blackwell 单调性比较了 P和 Q的真实效用。因此

$$W(P,r) - t_r = W^o(Q,r) - t_r \overset{\text{TT}}{\leq} U(Q) \overset{\text{BM}}{\leq} U(P). \tag{A.2}$$

对于 $r = P$，该不等式给出了 OB，因为 $U(P) = W^o(P, P) - t_P$，且 $W(P, P) \geq W^o(P, P)$。对于其他每个报告，即使买方选择最优延续，该不等式也排除了该报告。这些不等式共同给出了激励相容。 □

A.2 最优响应编码

假设 $m = J = 2$。令 s_i^r 表示报告排序中排名为 i 的私人标签。具体而言，按照递增的 $r(2, s)/[r(1, s) + r(2, s)]$, 排列其非空标签，将空标签置于最后，并根据原始标签顺序打破平局。令 τ_r 表示这一排列，因此 $s_i^r = \tau_r(i)$。

定义 1 (规范化二元合约)。如果每个合同都使用结果标签 y_0、……、y_n，并满足以下条件，则机制属于 N_n 。在报告 r时，记作 $e_{rij} = E_r(y_j \mid i)$。似然矩阵为

$$E_r = \begin{pmatrix} e_{r10} & e_{r11} & \cdots & e_{r1,n-1} & 0 \\ 0 & e_{r21} & \cdots & e_{r2,n-1} & e_{r2n} \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

对于每个 $j = 1$、……、$n-1$，列 j 中的两个元素要么都为正，要么都为零。两个元素均为零的列表示未使用的结果。在两个元素均为正的列中，似然比 e_{r2j}/e_{r1j} 随 j 弱递增。

按照状态2的后验概率从低到高排列在 r 下出现的私人标签；后验概率相同时，按标签顺序排列。将概率为零的标签按标签顺序置于最后。将排名为 i 的标签记为 s_i^r 。在结果 y_j 下，合同建议

$$c_r^j(s_i^r) = \begin{cases} a_1, & j \leq n-i, \\ a_2, & j > n-i, \end{cases} \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{A.4}$$

命题 3。 在 $\Theta_{2,\ n}$ 上，对于每个 $M \in \boldsymbol{N}_n$，条件 (A.1) 均成立。

证明。Th 两种行动的收益差在两个状态下符号相反。记 e

$$d_1 = \upsilon(a_1, 1) - \upsilon(a_2, 1) > 0, \qquad d_2 = \upsilon(a_2, 2) - \upsilon(a_1, 2) > 0.$$

固定一个类型 P、一个报告 r 和一个实际私人标签 s。对于每个 $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ 满足$e_{r1j} > 0$，在 (s, y_j) 处选择 a_2 而非 a_1 所带来的收益，以信号对出现的概率加权后为

$$d_2 P(2, s) e_{r2j} - d_1 P(1, s) e_{r1j}.$$

当以下条件成立时，该收益非负

$$d_2 P(2, s) \frac{e_{r2j}}{e_{r1j}} \geq d_1 P(1, s).$$

由于似然比沿着具有正值的列弱递增，因此一旦该不等式成立，在之后每一个这样的列中都会继续成立。令 $k(s)$ 为第一个这样的列；若不存在，则令 $k(s) = n$ 。当 $j \geq k(s)$ 时选择 a_2，即可得到最优延续。在零列处，两种行动对期望收益的贡献均为零。在 y_0 和 y_n 处，该规则选择在所揭示状态下最优的行动。

由（A.4）可知，该后续策略就是针对 $s^r_{n-k(s)+1}$ 的建议行。定义 $G_{P,r}$，以概率一将每个实际标签 s 发送至该行对应的标签。截止点和标签排名由有限次比较决定。因此，买方仅凭 s 就能选择适当的行，并在每个 y_j 遵循该行。因此，$PG_{P,r} \in \Theta_{2,\ n}$以及 $W(P, r) = W^o\ (PG_{P,r}, r)$ 。

□

A.3 二元标准化

命题 4（标准化）。 对于$\Theta_{2,\ n}$上的每个激励相容机制 M，都存在一个$\widetilde{\ }$激励相容机制 $M \in \boldsymbol{N}_n$，使得

$$U_{\widetilde{M}}(P) = U_M(P) \qquad (P \in \Theta_{2,n}), \tag{A.5}$$

$$\widetilde{t}_r \geq t_r \qquad (r \in \Theta_{2,n}), \tag{A.6}$$

$$W_{\widetilde{M}}(P, r) - \widetilde{t}_r \leq W_M(P, r) - t_r \qquad (P, r \in \Theta_{2,n}). \tag{A.7}$$

证明。 固定一份报告 r，记 $e_i(y) = E_r(y \mid i)$，并令 $d_i > 0$ 表示在状态 i下选择 a_i 而非另一行动所获得的收益。对于每个原始补充信号 y，

在每个私人信号 s下，为类型 r 选择一项最优建议。如果 y 揭示了状态 i，则在每个 s下都选择 a_i 。若两个似然都为正，则当且仅当满足以下条件时，在非无效的 s下选择 a_2

$$d_2 r(2,s) e_2(y) > d_1 r(1,s) e_1(y). \tag{A.8}$$

在本例中，选择 a_2 无效私人信号，并舍弃在两种状态下似然均为零的任何 y 。由于非无效私人信号按状态 2 的后验概率递增排序，而无效信号排在最后，因此所得配置为 $c_r^{J(y)}$，其中某个 $J(y) \in \{0, \dots, n\}$。记

$$\bar{e}_{rij} := \sum_{y: J(y)=j} e_i(y).$$

为构造新合同，从 E_r中抽取 Y。如果 $1 \le J(Y) \le n-1$，则发送$y_{J(Y)}$。否则，在状态 1 下发送 y_0 ，在状态 2 下发送 y_n 。在 y_j处，建议 c_r^j。这就得到（A.3）。每个活跃内部列都会将两种状态下似然均为正的信号合并。在这些原始信号中， $J(y)$ 关于 $e_2(y)/e_1(y)$是非递减的。每个合并比率都是其组内各比率的状态1似然加权平均值，因此活跃内部比率按 j排序。

固定任意类型 P。在新合同中，取一个最优规则：在 y_0 处选择 a_1 ，并在 y_n处选择a_2 ，因为这些信号揭示了状态。在原始合同中，买方可以将该规则应用于（s, $y_{J(Y)}$）。在共同抽取 Y下，两条规则所选择的行动相同，除非状态 1 与 $J(Y) = n$ 配对，或状态 2 与 $J(Y) = 0$配对。因此，新合同中的期望收益增益为

$$\Delta_r := \pi_1 d_1 \bar{e}_{r1n} + \pi_2 d_2 \bar{e}_{r20} \ge 0. \tag{A.9}$$

由于先验相同，这一收益对每个 P 都相同。由于原买方可以对所有规则进行优化，

$$W_{\widetilde{M}}(P,r) - \Delta_r \le W_M(P,r).$$

对于类型 r，将新的建议规则应用于 $(s, y_{J(Y)})$，按构造即可得到原来的最优规则。因此，遵循新的建议可带来 r 总收益$W_M(r,r) + \Delta_r$。

~设 $t_r = t_r + \Delta_r$。在每个报告下，预期类型的诚实净收益保持不变，而每种类型从该报告中获得的最优净收益均弱减。这些比较给出 (A.5)–(A.7)，并保留完全的激励相容和个体理性。 □

定理 *1* 的证明。命题 4 使我们能够将注意力限制在$\mathcal{N}_n$ 上，而不损失收入。命题 3 验证了该类别上的响应编码条件。由引理 2 可知，在$\mathcal{N}_n$内，激励相容等价于真实性约束、OB 和 Blackwell 单调性。在两边都施加个体理性和非负支付条件，即得 (3.2)。

□

A.4 将二元分类视为在两条嵌套链上进行捆绑销售

考虑带有 n 私人标签的二元分类问题，正确分类的收益为 1。对于报告 r下的规范化合同，使用报告的标签顺序 $s_1^r,\ldots,s_n^r$，并像定义 1 中那样记 $e_{rij}=E_r(y_j\mid i)$。在 y_j处，截止规则 (A.4) 建议在前缀 A_j^r 上采用 a_1 ，并在互补后缀 B_j^r上采用 a_2 ，其中

$$A_j^r=\{s_i^r:i\le n-j\},\qquad B_j^r=\{s_i^r:i>n-j\},\qquad j=0,\ldots,n.$$

随着 j 增加， A_j^r 从 S 缩小到 $\varnothing$ ，而 B_j^r 从 $\varnothing$ 扩大到 S。例如，对于三个私人标签，两条链为

j	0	1	2	3
A_j^r	S	$\{s_1^r,s_2^r\}$	$\{s_1^r\}$	$\varnothing$
B_j^r	$\varnothing$	$\{s_3^r\}$	$\{s_2^r,s_3^r\}$	S.

每个标签 s对应两种商品：一种是在状态 1 下获取 a_1 于 s 的商品，另一种是在状态 2 下获取 a_2 于 s 的商品。它们对类型 P的价值分别为联合概率质量 $P(1,s)$ 和 $P(2,s)$。因此，可加捆绑价值为 $v_P(A_j^r)=\sum_{s\in A_j^r}P(1,s)$ 和 $v_P(B_j^r)=\sum_{s\in B_j^r}P(2,s)$。由条件独立性可得，

$$W^o(P,r)=\sum_{j=0}^{n}e_{r1j}v_P(A_j^r)+\sum_{j=0}^{n}e_{r2j}v_P(B_j^r). \tag{A.10}$$

因此，合同规定了两个针对嵌套商品组合的 e_{r1j}， e_{r2j} 彩票，每种状态各一个，价格相同，为 t_r。这两个彩票通过共同的结果索引j 和规范化条件相互关联：
$e_{r20}=e_{r1n}=0$，内部列在两种状态下要么都为正，要么都为零；而且 e_{r2j}/e_{r1j} 在所有为正的内部列中单调不减。反过来，这两个概率向量只要满足这些条件，就定义了一个标准化的补充数据集。

在没有补充数据的情况下， P 会按照自身的排序选择一个截止点，因此

$$\underline{u}(P)=\max_{0\le j\le n}\{v_P(A_j^P)+v_P(B_j^P)\}.$$

在（TT）下，买方选择报告以最大化服从净收益 $W^o(P,\ r)-t_r$。其总效用为 $U(P) = W^o(P,\ P) - t_P$，增量租金为 $U(P) - u(P)$。根据定理 1，在完整域 $\Theta_{2,\ \underline{n}}$ 上，在满足（TT）、（OB）、Blackwell 单调性和个体理性约束的条件下，最大化这些合同的收入，可达到原始的激励相容–个体理性收入界。

对于 $n = 2$ 和均匀先验，中间截断点遵循有序私人预测，并且在没有补充数据的情况下是最优的。在真实合同下，记 $x = (\alpha,\ \beta) = (P(1,\ s_2^P)\ P(2,\ s_1^P))$ 和 $q = (q_1,\ q_2) = (e_{P10},\ e_{P22})$，则由 (A.10) 得到 $U(P) - u(P) = \alpha q_1 + \beta q_2 - t_P$，即附录 B 中的双商品表示。

B 假设检验问题的证明

我们将启示原理应用于两个状态、两个行动和两个私人标签。先验为均匀先验，对于正确预测，收益为 1；否则为 0。

B.1 双商品表示的销售

将 P_x 记作具有错误对 $x = (\alpha,\ \beta)$ 的联合分布，并按以下方式排序：私人标签 i 推荐行动 a_i:

$$P_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \alpha & \alpha \\ \beta & \frac{1}{2} - \beta \end{pmatrix}.$$

行表示状态，列表示私人标签。令

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : s(x) := \alpha + \beta \le \tfrac{1}{2}\}, \qquad H = \{x \in D : s(x) = \tfrac{1}{2}\}, \qquad d(x) = \tfrac{1}{2} - s(x).$$

当且仅当 $x \in D$ 时，这两个标签会推荐最优行动。完整域 $\Theta_{2,2}$ 中的任何数据集都有这样的代表。当两个标签都出现时，按其对应状态 2 的后验概率对列排序；若后验概率并列，则按标签顺序排序。如果某个标签为无效，则将其放在最后。我们保留 H 的两个端点，作为同一无信息实验的固定标签表示。在 P_x 处，外部收益为 $u(P_x) = 1 - s(x)$，而完整信息的增量价值为 $s(x)$。

根据定理 1，只需考虑 $\mathcal{N}_2$ 中的合同。其补充数据集形式为

$$E(q) = \begin{pmatrix} q_1 & 1-q_1 & 0 \\ 0 & 1-q_2 & q_2 \end{pmatrix}, \qquad q = (q_1, q_2) \in [0,1]^2. \tag{B.1}$$

第一个和最后一个结果 y_0 以及 y_2揭示了状态 1 和状态 2。在中间结果y_1处，归一化建议遵循有序私人标签。对于 P_x 这一规则，由于两个数据集具有条件独立性，联合错误概率为 $\alpha(1-q_1)$和 $\beta(1-q_2)$。因此，建议的响应带来的增量净收益为 $x\cdot q-t$。

引理 3（服从性）。 对于每个 $x\in D$ 和 $q\in[0,1]^2$,

$$W(x;q)=\max\left\{1-s(x)+x\cdot q,\ \tfrac{1}{2}(1+q_1),\ \tfrac{1}{2}(1+q_2)\right\}. \tag{B.2}$$

当且仅当以下条件成立时，服从性成立：

$$(\tfrac{1}{2}-\alpha)(1-q_1)\geq\beta(1-q_2),\qquad(\tfrac{1}{2}-\beta)(1-q_2)\geq\alpha(1-q_1). \tag{B.3}$$

证明。 在揭示性结果下，买方知道状态，并选择匹配行动。在 y_1 下，建议是在私人标签 i 后选择 a_i。只有当在每个标签下，被建议的状态具有不低于另一状态的联合概率时，遵循建议才是最优的。这两个比较正是（B.3）。

打破平局时优先采用建议。此时，在两个标签下反转建议将要求（B.3）中的两个不等式都严格反向。这要求q_1，$q_2<1$。将两个严格不等式相乘，并约去（$1-q_1$）（$1-q_2$），得到

$$\alpha\beta>(\tfrac{1}{2}-\alpha)(\tfrac{1}{2}-\beta),$$

这与 $\alpha+\beta\leq\frac{1}{2}$ 矛盾。 -

这留下了 y_1 下三种可能的最优响应。遵循私人标签会产生错误 α（$1-q_1$）和 β（$1-q_2$），从而得到收益 $1-s$（x）$+x\cdot q$。在两个标签下都选择 a_2 时，在每个结果下状态 2 中都是正确的，而在状态 1 中仅当该状态被揭示时才正确，因此得到 $\frac{1}{2}$（$1+q_1$）。对称地，在两个标签下都选择 a_1 时得到 $\frac{1}{2}$（$1+q_2$）。取最大值即可得到（B.2）。 □

B.2 如实报告与个体理性的刻画

引理 4 (仿射效用表示（Rochet（1987年））**)**。 对于仿射收益 $x\cdot q-t$，如实报告等价于 u 为凸函数，且 $q(x)$ 在每个 x 处都是 u 的支撑超平面，其中

$$t(x)=x\cdot q(x)-u(x). \tag{B.4}$$

根据 Rochet（1987年），限制条件 $q(x) \in [0,1]^2$ 使 u 逐坐标单调不减，并且关于 ℓ^1 范数是 1-利普希茨的。在原点 (0,0) 处，个体理性和非负支付意味着 $u(0) = 0$。将由此得到的定义在 D 上的租金类别 u 记为 $\mathcal{U}$。

反之，每个 $u \in \mathcal{U}$ 都允许选择支撑斜率 $q(x) \in [0,1]^2$。原点处的支撑不等式给出 $t(x) \geq 0$，而单调性给出 $u \geq 0$。因此，$\mathcal{U}$ 是在 TT 和 IR 以及非负支付条件下的可实施租金集合。在内部可微点处，$q(x) = \nabla u(x)$。

B.3 Blackwell 单调性与前沿

引理5（BM 在前沿上意味着无扭曲）。对于 $u \in U$，总效用 $U(x) = 1 - s(x) + u(x)$ 满足 *BM*，当且仅当 u 在 H 上为常数。

证明。H 上的所有数据集都没有信息，因此 Blackwell 等价。它们的外部收益为 $\frac{1}{2}$，所以 BM 蕴含对于某个 r 有 $u|_H = r$。

为证明反向蕴含，取 $u|_H = r$。以概率 a 将标签1发送为标签2、以概率 b 将标签2发送为标签1的信息模糊化，在当.....时从 P_x 产生 P_z

$$z = (1-a-b)x + ah_1 + bh_2,, \qquad s(z) = s(x) + (a+b)d(x). \tag{B.5}$$

其中 $h_1 = (\frac{1}{2}, 0)$ 和 $h_2 = (0, -\frac{1}{2})$。如果 $d(x) > 0$，那么 z 属于 D 意味着 $a + b \leq 1$。反过来，任意满足 $a + b \leq 1$ 的 $a, b \geq 0$ 都定义了这样一种信息模糊化。因此，可达误差对构成 $\mathrm{co}\{x, (\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})\}$。由于 H 上的所有点都 Blackwell 等价，且对无信息数据集进行信息模糊化后仍然无信息，因此该公式对 $x \in H$ 也成立。

固定 $x \in D$。点 $h = x + d(x)(1, 0)$ 位于 H 上，且 $\|h - x\|_1 = d(x)$。由于 $u(h) = r$，利普希茨界给出

$$u(x) \geq u(h) - \|h - x\|_1 = r - d(x).$$

利用 $d(x) = \frac{1}{2} - s(x)$，我们得到

$$U(x) = 1 - s(x) + u(x) \geq 1 - s(x) + r - d(x) = \tfrac{1}{2} + r.$$

右侧是每种前沿类型的总效用。

现在，设 z 是任何可通过对 P_x 进行信息模糊化而到达的类型。根据可达集公式，我们可以写出

$$z = (1-a-b)x + ah_1 + bh_2, \qquad a,b \geq 0, \quad a+b \leq 1,$$

由于 $U = 1 - s + u$是凸的，且 $U(h_1) = U(h_2) = \frac{1}{2} + r$，

$$U(z) \leq (1-a-b)U(x) + aU(h_1) + bU(h_2) = (1-a-b)U(x) + (a+b)(\tfrac{1}{2}+r) \leq U(x).$$

因此，这证明了 Blackwell 单调性。 □

B.4 约化问题

引理 6。 对于 $u \in U$，以下条件等价：*OB*、*Blackwell* 单调性、激励相容，以及 $u|_H$为常数。

证明。 根据引理 4 中的 Rochet 刻画，

$$x \cdot q_z - t_z \leq u(x) \qquad (x, z \in D),$$

在 $x = z$处取等号，且 u 在 ℓ_1上是 1-利普希茨的。

假设 OB 成立。对于 $h \in$ 相对内部 H，引理 3 和 $d(h) = 0$ 可得

$$h \cdot q_h \geq \tfrac{1}{2}\max\{q_{h,1}, q_{h,2}\}.$$

由于 $2h_1$ 和 $2h_2$ 是和为一的正权重，该不等式要求 $q_{h,1} = q_{h,2}$。因此，对于每个 $h' \in H$，都有 $h' \cdot q_h - t_h = h \cdot q_h - t_h = u(h)$。真实性约束给出 $u(h') \geq u(h)$。当 h 和 h' 都位于相对内部 H 时交换二者，可得等式。连续性将该等式延拓至 H的端点。

现在假设 $u|_H \equiv r$。对 H 的两个端点应用真实性约束，可对任意 $z \in D$得到 $\frac{1}{2}q_{z,i} - t_z \leq r$对于 $i = 1, 2$以及每个 $z \in D$均成立。点 $x + d(x)(1, 0)$位于 H 上，因此利普希茨界给出 $r - d(x) \leq u(x)$。因此

$$x \cdot q_z - t_z \leq u(x), \qquad \tfrac{1}{2}q_{z,i} - t_z - d(x) \leq r - d(x) \leq u(x) \quad (i = 1, 2).$$

这些不等式界定了引理 3 中报告 z 所对应的优化收益中的每一项。在真实报告下规定的响应为 $u(x)$，因此激励相容成立。

最后，激励相容蕴含 OB 和 Blackwell 单调性。在 Blackwell 单调性下，H 上的类型具有相同的总效用，因为它们是 Blackwell 等价的。它们的外部收益也相同，因此 u 在 H上是常数。 □

令 $\mathcal{U}^{\mathrm{BM}} = \{u \in \mathcal{U} :\ u|_H$ 为常数$\}$。因此，在激励相容和个体理性以及非负支付的条件下，增量租金函数的可实施集合为 $\mathcal{U}^{\mathrm{BM}}$。

命题 5（设计者问题的重新表述）。 每个 $u \in U^{\mathrm{BM}}$ 都可由 N_2中的机制实现。若误差对的分布在 D上具有密度 f，则

$$\sup_{M \in \mathcal{M}_{\mathrm{IC,IR}}} \mathrm{Rev}_F(M) = \sup_{u \in \mathcal{U}^{\mathrm{BM}}} \int_D [x \cdot \nabla u(x) - u(x)] f(x)\, dx. \tag{B.6}$$

证明。在 $\mathcal{N}_2$中的实现。 固定 $u \in \mathcal{U}^{\mathrm{BM}}$。引理 4 给出了一个带有非负支付的简化 TT–IR 菜单 $(q_x, t_x)_{x \in D}$，它实现了 u。前面的引理表明，该菜单是激励相容的。

令 $\rho = u|_H$，并设 $p = \frac{1}{2} - \rho$。由于 $u(0) = 0$，且 u 是非递减且 1-利普希茨的，$p \in [0, \frac{1}{2}]$。价格 p 下的完全信息给出增量租金 $s(x) - p = \rho - d(x) \le u(x)$，且在 H 上取等号。若 $q_{x,\,i} = 1$ 对某个 i成立，则边界端点 $\frac{1}{2}e_i$ 处的真实性约束给出 $\frac{1}{2} - t_x \le \rho$，因此 $t_x \ge p$。于是

$$u(x) = x \cdot q_x - t_x \le s(x) - p \le u(x).$$

在 p 为每个类型分配完全信息，并为分配合同的某个坐标等于 1 的每个类型分配完全信息。每个类型在其分配的合同下仍能获得 $u(x)$，且每份合同带来的优化租金至多为 $u(x)$。因此，激励相容和个体理性得以保留。

每份保留的合同都具有严格为正的两个中间结果似然，而完全信息的两个似然均等于零。为每个类型分配与其规范误差对对应的合同，并按照该类型的标签顺序写出建议。这保留了分配收益以及每个优化偏离收益。所得机制属于 $\mathcal{N}_2$。

收入。 根据定理 1，只需考虑规范化的激励相容—个体理性机制。对于此类机制，其简化租金为

$$u(x) = \max\left\{0, \sup_P \left[W(x; q_P) - t_P - (1 - s(x))\right]\right\}.$$

根据引理 3，这是斜率属于 $[0,1]^2$ 的仿射函数的上确界。个体理性和非负支付给出 $u(0) = 0$，而 Blackwell 单调性使 u 在 H 上为常数。因此 $u \in \mathcal{U}^{\mathrm{BM}}$。

对于具有规范误差对 $x \in \operatorname{int} D$ 的类型 P，在中间结果处，诚实推荐遵循有序私人预测。由于 P 和 P_x 具有相同的租金（依据 Blackwell 单调性），

根据 Blackwell 单调性，

$$u(x) = x \cdot q_P - t_P, \qquad u(z) \geq z \cdot q_P - t_P \quad (z \in D),$$

其中不等式由激励相容和引理 3 得出。因此，q_P 在 x处支持 u。在u 的内部可微处，$q_P = \nabla u(x)$，因此 $t_P = x \cdot \nabla u(x) - u(x)$。密度假设保证该等式几乎处处成立。积分即可得到每个规范化机制的收入，而上述实施方式达到了相应的收入。这证明了（B.6）。

□

B.5 收入恒等式

对于 $u \in \mathcal{U}$，对三角形 D 上的利普希茨向量场 $u(x)f(x)x$应用散度定理。由于 $\operatorname{div}(f(x)x) = 2f(x) + x \cdot \nabla f(x)$，

$$\int_D x \cdot \nabla u(x) f(x)\, dx = \int_{\partial D} u(x) f(x) x \cdot n(x)\, dS(x) - \int_D u(x)[2f(x) + x \cdot \nabla f(x)]\, dx.$$

这里，n 是外单位法向量，dS 是弧长。坐标边的通量为零。将 H 参数化为 $h(a) = (a, \frac{1}{2} - a)$，其中 $a \in [0, \frac{1}{2}]$。在该边上，$x \cdot n = 1/(2\sqrt{2})$，且 $dS = \sqrt{2}\, da$。定义前沿测度 λ_H 及其质量 B 为

$$\lambda_H(L) = \int_0^{1/2} \mathbf{1}\{h(a) \in L\} \tfrac{1}{2} f(h(a))\, da, \qquad B = \lambda_H(H) \tag{B.7}$$

对于每个 Borel $L \subseteq D$。从散度恒等式中减去 $\int_D uf\, dx$ 得到

$$R_f(u) := \int_H u\, d\lambda_H - \int_D u(x) g(x)\, dx = Br - \int_D u(x) g(x)\, dx. \tag{B.8}$$

第二个等式来自 $u \in \mathcal{U}^{\mathrm{BM}}$，其中 $u|_H = r$。

B.6 定价上界

定理5（假设检验中的标价）。若 $g \geq 0$ *on* D，则针对完全信息的单一标价在激励相容和个体理性约束下使收入最大化。其收入为

$$\sup_{M \in \mathcal{M}_{\mathrm{IC,IR}}} \mathrm{Rev}_F(M) = \max_{0 \leq p \leq 1/2} p \, \Pr\{s(X) \geq p\}. \tag{B.9}$$

证明。 根据命题 5，任取一个可行的简化租金 $u \in \mathcal{U}^{\mathrm{BM}}$，令 $p = \frac{1}{2} - r$。由非负性以及从 0 到 H 的利普希茨界可得 $0 \le r \le \frac{1}{2}$。由引理 8 和个体理性可知

$$u(x) \ge \max\{0, r - d(x)\} = (s(x) - p)_+. \tag{B.10}$$

由于 $u_p|_H = r$，(B.8) 中的两个边界项相同。令 $u_p(x) := (s(x) - p)_+$因此

$$R_f(u_p) - R_f(u) = \int_D g(x)[u(x) - u_p(x)]\,dx \ge 0. \tag{B.11}$$

根据 X 的绝对连续性， $s(X)$ 的分布没有原子，因此

$$R_f(u_p) = p\,\Pr\{s(X) \ge p\}. \tag{B.12}$$

该函数在紧区间 $[0, \frac{1}{2}]$, 上连续，因此可以取得其最大值。(B.11) 中的比较关系将每个可行收入限制在该最大值以内，而标价实现了这一最大值。

□

C 广义污染空间的证明

C.1 类型空间

考虑具有均匀先验和匹配收益的多类分类。令 $(S_r)_{r=1}^k$将 S 划分为若干非空组别。干净数据集 $C \in \Theta_{m,\ n}$ 具有两两不相交的逐状态支撑集。某个组别在 C 下的概率可能为零。

令 $\ell(\omega)$ 表示真实类别 ω 所属的组。我们假设类别ω 的所有干净标签都属于该组，因此

$$\operatorname{supp} C(\cdot \mid \omega) \subseteq S_{\ell(\omega)} \qquad \text{for every } \omega \in \Omega.$$

多个真实类别可能属于同一组。

令 Q 为将每个标签映射到其所属组的 $n \times k$随机矩阵，并令 B_h 为这样一个 $k \times n$随机矩阵：其第 r 行从 h_r 在 S_r 上抽取一个标签。先抽取一个标签，再读取其所属组，得到的就是原来的组，因此 $B_h Q = I_k$。污染矩阵为 $\Gamma_h = QRB_h$。

对于 $j \in S_r$，令 $x_j = \varepsilon h_r(j)$。由于每个 h_r 都是概率分布，每个组中的坐标之和为 ε。定义

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j \in S_r} x_j = \sum_{j \in S_1} x_j \text{ for every } r \right\}, \qquad \varepsilon(x) = \sum_{j \in S_1} x_j.$$

这些等式施加了 $k-1$ 个独立的线性约束，因此 L 的维数为 $d = n-k+1$。坐标域及其前沿为

$$\mathcal{D} = \{x \in L : x \geq 0,\ \varepsilon(x) \leq 1\}, \qquad \mathcal{H} = \{x \in \mathcal{D} : \varepsilon(x) = 1\}.$$

对于 $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$，通过令 $h_r(j) = x_j/\varepsilon(x)$（$j \in S_r$）来恢复 h，并记为 $P_x = P_{\varepsilon(x),\, h}$。令 $P_0 = C$。由于 $P_{\varepsilon,\, h} = (1-\varepsilon)C + \varepsilon CQRB_h$，对于 $j \in S_r$，我们有

$$P_x(\omega, j) = (1 - \varepsilon(x))C(\omega, j) + (CQR)_{\omega r} x_j. \tag{C.1}$$

因此，P_x 关于 x 是仿射的。在 $\mathcal{D}$ 上的 X 的某个分布下，期望收益等于 P_X 的诱导分布下的期望收益。

引理 7。定义

$$\kappa = \sum_{r=1}^{k} \max_{\omega \in \Omega} (CQR)_{\omega r}, \qquad \bar{v} = 1 - \kappa, \qquad v(x) = \bar{v}\, \varepsilon(x).$$

则 $u(P_x) = 1 - v(x)$。H 上的数据集 *Blackwell* 等价，并且每个 P_x *Blackwell* 支配其中的每一个。对于每个固定的 h，$P_{\varepsilon,\, h} \succeq_B P_{\varepsilon',\, h}$ 当 $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon' \leq 1$ 时成立。

证明。令 $N = R^{-1}$。由于 $R\mathbf{1} = \mathbf{1}$，我们也有 $N\mathbf{1} = \mathbf{1}$。固定 R 的一列 $z = Re_r$，并令 i 为 z 取得最大值时的任意索引。列 z 非负且非零，因此 $z_i > 0$。利用 N 的行和为 1，我们可以写成

$$(Nz)_i = z_i + \sum_{j \neq i} (-N_{ij})(z_i - z_j) \geq z_i > 0.$$

求和中的每一项都非负，因为对于 $j \neq i$，$N_{ij} \leq 0$ 且 $z_i \geq z_j$。由于 $Nz = e_r$ 只有一个正项，位于索引 r 处，因此必有 $i = r$。所以，R_{rr} 严格大于列 r 中的其他每个项。

在均匀先验下，类别 ω' 的所有干净概率质量 $1/m$ 都位于组 $\ell(\omega')$ 中。因此

$$(CQR)_{\omega' r} = \frac{1}{m} R_{\ell(\omega'), r}.$$

如果 $j \in S_r$ 和 $C(\omega, j) > 0$，那么 $\ell(\omega) = r$。因此， R 的列最大值性质给出

$$\omega \in \arg\max_{\omega' \in \Omega} (CQR)_{\omega' r}. \tag{C.2}$$

由于干净支撑集两两不相交，这样的状态 ω 也使 $C(\cdot\ j)$ 最大化。因此，(C.1) 右侧的两项具有共同的最大化状态。如果 C 的列j 为零，则第二项的任一最大化状态也会使第一项最大化。利用$\sum_{j \in S_r} x_j = \varepsilon(x)$以及干净标签能够识别真实类别这一事实，我们得到

$$\underline{u}(P_x) = \sum_{j \in S} \max_{\omega \in \Omega} P_x(\omega, j) = (1 - \varepsilon(x)) + \varepsilon(x) \sum_{r=1}^{k} \max_{\omega \in \Omega} (CQR)_{\omega r} = 1 - v(x).$$

对于 Blackwell 比较，设

$$K_\varepsilon = (1-\varepsilon) I_k + \varepsilon R, \qquad N_\varepsilon = (1-\varepsilon) R^{-1} + \varepsilon I_k.$$

矩阵 N_ε 的行和为一，且非对角元素非正。因此，它严格对角占优且可逆。为说明其逆矩阵非负，设 $N_\varepsilon z \geq 0$ ，并令 $z_i = \min_j z_j$。如果 $z_i < 0$，则

$$(N_\varepsilon z)_i = z_i + \sum_{j \neq i} (-(N_\varepsilon)_{ij})(z_i - z_j) \leq z_i < 0,$$

矛盾。因此， $N_\varepsilon z \geq 0$ 意味着 $z \geq 0$，所以 N_ε^{-1}为非负矩阵。其行和为一，因而是一个随机矩阵。

利用 $B_h Q = I_k$，我们有 $P_{\varepsilon,\ h} Q = CQK_\varepsilon$。由于 $K_\varepsilon = RN_\varepsilon$，信息模糊化 $QN_\varepsilon^{-1} B_{h'}$给出

$$P_{\varepsilon,h}(QN_\varepsilon^{-1} B_{h'}) = CQRB_{h'} = P_{1,h'}. \tag{C.3}$$

这对所有 h， h' 和 $\varepsilon \in [0,1]$均成立。取 $\varepsilon = 1$ 即可在前沿上建立 Blackwell 等价。同样的构造表明，每个 P_x Blackwell 支配每个前沿数据集。

最后，固定 h。对于 $\varepsilon < \varepsilon'$，令 $a = (1-\varepsilon')/(1-\varepsilon)$。随机矩阵 $aI_n + (1-a) QN_\varepsilon^{-1} B_h$ 将 $P_{\varepsilon,\ h}$ 映射为

$$aP_{\varepsilon,h} + (1-a) P_{1,h} = P_{\varepsilon',h}.$$

如果 $\varepsilon = \varepsilon'$，两个数据集相同。 □

C.2 收益比较

定理 *3* 的证明。 如果 $\bar{v} = 0$，引理 7 和个体理性意味着所有支付均为零。假设 $\bar{v} > 0$。我们考察满足真实性约束、Blackwell 单调性和个体理性的任意机制的收入。

定义 $u(x) = U(P_x) - \underline{u}(P_x)$ 和 $c_r = 1 - W^o(C, r) \geq 0$ 对于报告 $r \in \Theta$。根据 (C.1) 和引理 7，存在一个向量 $b_r \in L$ 使得

$$W^o(P_x, r) - t_r - \underline{u}(P_x) = x \cdot b_r - c_r - t_r.$$

向量 b_r 一致有界。事实上，$W^o(P_x, r)$ 关于联合分布 P_x 是线性的，其系数为 $\sum_y E_r(y \mid \omega)\mathbf{1}\{\sigma_r(j, y) = \omega\} \in [0, 1]$。真实性约束和个体理性意味着

$$u(x) = \max\left\{0, \sup_{r \in \Theta}[x \cdot b_r - c_r - t_r]\right\}, \qquad 0 \leq u(x) \leq v(x). \tag{C.4}$$

真实报告达到上确界，上界则由 $W^o(P_x, P_x) \leq 1$ 和 $t_{P_x} \geq 0$ 得出。因此，u 在 $\mathcal{D}$ 上是凸且利普希茨连续的。在相对于 L 的每个可微内点处，真实分支的斜率为 $\nabla_L u(x)$，这意味着

$$t_{P_x} = x \cdot \nabla_L u(x) - u(x) - c_{P_x}. \tag{C.5}$$

根据 Blackwell 单调性和引理 7，u 在 $\mathcal{H}$ 上有一个共同值 $\rho \in [0, \bar{v}]$，且 $U(P_x) \geq 1 - \bar{v} + \rho$ 在 $\mathcal{D}$ 上。在 $p = \bar{v} - \rho$ 处，个体理性和这个最后的不等式给出

$$u(x) \geq u_p(x) := (v(x) - p)_+, \qquad u|_{\mathcal{H}} = u_p|_{\mathcal{H}}. \tag{C.6}$$

效用 u_p 由带有外部选项且在价格 p 下提供完全信息的菜单所提供。类型为 P_x 的买方可以通过购买获得 $1 - p$，而不购买则获得 $\underline{u}(P_x)$。

令 (5.3) 中的 f 在 L 中具有到 $\mathcal{D}$ 的相对邻域上的 C^1 延拓。令 dx 为 L 上的 d 维勒贝格测度，令 dS 为相对于 L 的边界曲面测度。对于 $\mathcal{D}$ 上的利普希茨函数 w，令

$$\mathcal{L}_f(w) = \int_{\mathcal{D}} [x \cdot \nabla_L w(x) - w(x)] f(x)\, dx.$$

将散度定理应用于 xfw，可得

$$\mathcal{L}_f(w) = \int_{\mathcal{H}} wf\, x \cdot \nu\, dS - \int_{\mathcal{D}} w(x) g(x)\, dx, \tag{C.7}$$

其中，ν 是相对于 L 的外单位法向量，并且 $g(x) = (d+1)f(x) + x \cdot \nabla_L f(x)$。其他每个面都位于经过原点的超平面上，并满足 $x \cdot \nu = 0$。

X 的分布具有密度，且 u 是利普希茨函数，因此 (C.5) 在X处几乎必然成立。由此可得 $\mathrm{Rev}_F(M) = \mathcal{L}f(u) - \int_{\mathcal{D}} c_{P_x} f(x)\, dx$。函数 v在 L上是线性的，因此$x \cdot \nabla_L u_p(x) - u_p(x) = p\mathbf{1}\{v(x) > p\}$ 几乎处处成立。由于 $\bar{v} > 0$ 且 F 具有密度， $v(X)$的分布没有原子。利用 (C.6) 可得

$$p \Pr\{v(X) \geq p\} - \mathrm{Rev}_F(M) = \int_{\mathcal{D}} g(x)[u(x) - u_p(x)]\, dx + \int_{\mathcal{D}} c_{P_x} f(x)\, dx \geq 0. \quad \text{(C.8)}$$

该不等式使用了（5.3）以及 c_{P_x} 的非负性。定价销售收入在 $[0, \bar{v}]$ 上连续，因此存在最大值点。该实现满足激励相容，并达到了 TT–BM–IR 松弛的上界。因此，标价是最优的。

□

C.3 二元分类

现在，我们允许干净数据集随买方而变化，并取完全类型空间和报告空间 $\Theta = \Theta_{2,\ n}$，其中先验为均匀先验，收益为匹配收益。完全信息的价值为：

$$v(P) = 1 - \underline{u}(P) = \sum_{j \in S} \min\{P(1,j), P(2,j)\}, \qquad \bar{v} = \tfrac{1}{2}.$$

对于 $0 < v(P) < \bar{v}$，令 $b_j = \min\{P(1,\ j),\ P(2,\ j)\}$，并定义

$$h_j = \frac{b_j}{v(P)}, \qquad C(\omega, j) = \frac{P(\omega, j) - b_j}{1 - 2v(P)}.$$

C 的两行具有不相交的支撑，并且每行的总和均为 $1/2$。因此，每个这样的 P 都位于一条由 $\xi = (C,\ h)$ 唯一索引的路径上，

$$P_{\xi,v}(\omega, j) = (1 - 2v)C(\omega, j) + vh_j, \qquad 0 \leq v \leq \bar{v}. \quad \text{(C.9)}$$

沿每条路径，用来自 h 的抽样值替换一些私人标签会提高 v。端点在 $v = 0$ 处提供完全信息，在 $v = \bar{v}$处不提供信息。令 $P \sim F$ 和$V = v(P)$。在内部总体 $0 < V < \bar{v}$上，令 $\Xi = (C,\ h)$，并将以价格 p 出售完全信息所得的条件收入写为

$$R_\xi(p) = p \Pr\{V \geq p \mid \Xi = \xi,\ 0 < V < \bar{v}\}, \qquad 0 \leq p \leq \bar{v}. \quad \text{(C.10)}$$

微分虚拟价值。 固定一条路径 $\xi = (C,\ h)$，并设 V的条件分布 F_ξ 具有连续可微的密度 f_ξ。对固定价格收入求导可得

$$-R'_\xi(p) = pf_\xi(p) - \Big[1 - F_\xi(p)\Big].$$

右侧是密度加权虚拟价值。因此，当且仅当该虚拟价值沿路径非递减时，收入关于价格是凹的。

定理 6。 假设对于内部总体中几乎所有的 ξ，R_ξ 关于价格是凹的。对于完全信息数据集，标价是最优的，价格为

$$p^* \in \arg\max_{p\in[0,\bar v]} p\Pr\{V \ge p\}.$$

沿每条路径，阈值价格的混合可以再现买方的租金，并对其支付设定上界。BM 在无信息端点处使租金相等，因此这些混合具有相同的平均价格。凸性随后意味着，在每条路径上都采用这一价格会使收入弱增。

定理 6 的证明。固定一个满足 TT、BM 和 IR 且支付非负的机制。记 $u_\xi(v) = U(P_{\xi,v}) - u(P_{\xi,v})$。根据 (C.9)，$u(P_{\xi,v}) = \underline{1} - v$。对于固定的报告 r，$W^o(P_{\xi,v}, r) - t_r - (1 - v)$ 关于 v 是仿射函数。TT 使得 u_ξ 成为这些仿射函数的上包络。IR 和非负支付给出 $0 \le u_\xi(v) \le v$，因此 $u_\xi(0) = 0$。对于 $v < w \le \bar v$，以概率 $(w-v)/(\bar v - v)$ 从 h 中抽取一个值来替代私人标签，会将 $P_{\xi,v}$ 劣化为 $P_{\xi,w}$。因此 BM 给出 $u_\xi(w) - u_\xi(v) \le w - v$。凸性以及在零点处达到最小值给出 $u_\xi(w) \ge u_\xi(v)$。

使用右导数 $u'_{\xi,\,+}$ 作为 $[0,\bar v$ 上的 Λ_ξ 分布函数，并将任何剩余质量置于 $\bar v$。对该导数积分得到

$$u_\xi(v) = \int_{[0,\bar v]} (v - a)_+\, d\Lambda_\xi(a).$$

所有 $P_{\xi,\,\bar v}$ 均为 Blackwell 等价，并且具有外部选项 $1 - \bar v$。因此，Blackwell 单调性给出$u_\xi(\bar v) = \rho$，其中 $\rho \in [0, \bar v]$ 为公共值。特别地，

$$\int_{[0,\bar v]} a\, d\Lambda_\xi(a) = \bar v - \rho =: p_\rho.$$

在内部 v处，真实报告为 u_ξ 提供了一个斜率为 $q \le u'_{\xi,\,+}(v)$、截距为$-c - t_{P_{\xi,\,v}}$ 的仿射支撑；其中 $c = 1 - W^o(P_{\xi,\,0},\ P_{\xi,\,v}) \ge 0$。因此，

$$t_{P_{\xi,v}} = vq - u_\xi(v) - c \le vu'_{\xi,+}(v) - u_\xi(v) = \int_{[0,v]} a\, d\Lambda_\xi(a).$$

以 ξ 属于内部总体为条件，托内利定理和詹森不等式给出

$$\mathbb{E}[t_P \mid \Xi = \xi,\ 0 < V < \bar{v}] \le \int_{[0,\bar{v}]} R_\xi(a)\, d\Lambda_\xi(a) \le R_\xi(p_\rho).$$

根据个体理性，类型为 $V = 0$ 的买方支付为零。在 $V = \bar{v}$ 处，支付至多为 $1 - U(P) = p_\rho$。面对价格为 p 的完全信息时，买方在 $V \ge p$ 时购买，且在无差异时也购买。该菜单完全满足激励相容和个体理性。其收入关于 p 上半连续，并在 $[0, \bar{v}]$ 上取得最大值。 □

D 超越正则性：对偶性与菜单粗化

回顾附录 B。D，H，$s(x) = \alpha + \beta$, $d(x) = \frac{1}{2} - s(x)$，$f$ 是定义在 D 上的非负概率密度，在 D 的某邻域内具有 C^1 延拓，$g(x) = 3f(x) + x \cdot \nabla f(x)$。$\mathcal{U}^{\mathrm{BM}}$ 由凸且按坐标非递减的函数 $u\colon D \to \mathbb{R}$ 组成，这些函数满足 $u(0) = 0$，并且对某个 $r \in \mathbb{R}$ 满足 $u|_H \equiv r$

$$|u(h) - u(x)| \le \|h - x\|_1 \qquad (x \in D,\ h \in H).$$

D.1 前沿无差异与水平特征相容性

引理 8（一个等价的边界界）。假设 $u : D \to \mathbb{R}$ 是凸的且逐坐标非递减，并且有 $u(0) = 0$ 和 $u|_H \equiv r$。那么，当且仅当

$$0 \le r - u(x) \le d(x) \qquad (x \in D). \tag{D.1}$$

这些条件也等价于：u 在 D 上关于 ℓ^1 范数满足 1-利普希茨条件。

证明。对于每个 $x \in D$，点 $x + d(x)e_1$ 位于 H 上，并且逐坐标高于 x。由单调性和前沿利普希茨界可得（D.1）。反之，对于每个 $h \in H$，$\|h - x\|_1 \ge d(x)$，因此（D.1）意味着前沿利普希茨界。

为获得全局界，取不同的 $x, z \in D$，且按逐坐标满足 $x \le z$。从 x 经过 z 的射线在 H 处于点 h 相交，并且 $\|h - x\|_1 = d(x)$。记作$\lambda = \|z - x\|_1 / d(x)$，由凸性可得

$$0 \le u(z) - u(x) \le \lambda\Big(u(h) - u(x)\Big) \le \|z - x\|_1.$$

对于任意 $x, z \in D$，从它们的逐坐标最小值 $w = x \wedge z$ 出发，将此界分别应用于每个点。两个增量均为非负数，因此

$$|u(x) - u(z)| \le \max\{\|x - w\|_1, \|z - w\|_1\} \le \|x - z\|_1.$$

全局利普希茨界直接蕴含边界界。 □

D.2 强对偶

定理 4 的证明。 记 $C(D)$ 为 D 上实连续函数构成的空间，并赋予一致范数；记 $\mathcal{M}(D)$ 为 D 上有限有符号拉东测度构成的空间。对于$v \in C(D)$ 和 $\rho \in \mathcal{M}(D)$，记作 $\langle v, \rho \rangle = \int_D v \, d\rho$。

原始问题。 令 $\mathcal{F} = \{w \in \mathcal{K} : w \le d\}$，其中不等式在$D$上逐点成立。对于每个 $x = (\alpha, \beta) \in D$，点 $(\alpha + d(x), \beta)$ 属于 H，且按坐标不小于 x。由于每个 $w \in \mathcal{K}$ 都按坐标非递增，并且在 H 上为零，因此 $w \ge 0$ 在 D 上成立。

对于 $u \in \mathcal{U}^{\mathrm{BM}}$，令 r 表示其在 H 上的公共值。函数 $w = r - u$ 属于$\mathcal{K}$，由引理 8 可得 $0 \le w \le d$。反过来，对于 $w \in \mathcal{F}$，函数 $u = w(0) - w$ 连续、凸且按坐标非递减，并且满足 $u(0) = 0$ 和 $u|_H = w(0)$。其前沿间隙为 w，因此由引理 8 可得 $u \in \mathcal{U}^{\mathrm{BM}}$。由于 $u(0) = 0, w(0) = r$。

将 (B.8) 中的散度定理应用于向量场 $x \mapsto f(x)x$，得到

$$\int_D g(x)\, dx = \int_D f(x)\, dx + \int_{\partial D} f(x) x \cdot n(x)\, dS(x) = 1 + B,$$

其中，n 是外单位法向量，dS 是弧长。坐标轴的通量为零，因此边界项等于 B。将 $u = r - w$ 和 $r = w(0)$ 代入 (B.8)，即可得到

$$\begin{aligned} R_f(u) &= \left(B - \int_D g(x)\, dx\right) r + \int_D w(x) g(x)\, dx \\ &= \int_D w(x) g(x)\, dx - w(0) = \langle w, \nu \rangle. \end{aligned} \tag{D.2}$$

集合$\mathcal{F}$ 包含零函数。凹性、逐坐标单调性、在 H 上为零以及界 $w \le d$ 在一致极限下都得以保持，因此$\mathcal{F}$ 在 $C(D)$中是闭集。界 $0 \le w \le d$ 给出一致有界性。对于每个 $w \in \mathcal{F}$，相应的租金 u 关于 ℓ_1 范数是 1-利普希茨的，因此 $|w(x) - w(y)| = |u(x) - u(y)| \le \|x - y\|_1$ 对所有

$x,\ y \in D$。因此$\mathcal{F}$是一致等度连续的，并且根据阿尔泽拉-阿斯科利定理，在 $C(D)$ 中是紧的。由于ν 是有限的，$w \mapsto \langle w,\ \nu\rangle$ 关于一致范数是连续的。因此，原始问题的值 $P^* = \max_{w\in\mathcal{F}}\langle w,\ \nu\rangle$ 是有限的，并且可以取到。

弱对偶性。令 $w \in \mathcal{F}$，并令 $\lambda \geq 0$ 满足 $\lambda \succeq_{\mathcal{K}} \nu$。序约束给出下方的第一个不等式，而 $w \leq d$ 和 $\lambda \geq 0$ 给出第二个不等式：

$$\langle w, \nu\rangle \leq \langle w, \lambda\rangle \leq \langle d, \lambda\rangle. \tag{D.3}$$

添加惩罚项。令 $\nu = \nu^+ - \nu^-$ 为 ν的乔丹分解，设 $C = \nu^+(D)$，并定义 $\Lambda_C = \{\lambda \in \mathcal{M}(D) :\ \lambda \geq 0,\ \ \lambda(D) \leq C\}$。对于任意 $w \in \mathcal{K}$，定义$\widehat{w} = \min\{w,\ d\}$。函数 w 和 d 是连续、凹、逐坐标不增的，并且在 H上为零。它们的最小值保持连续性、单调性和边界条件。其上图是两个凸上图的交集，因此同样是凹的。由于 $\widehat{w} \leq d$，我们有 $\widehat{w} \in \mathcal{F}$。根据 $w - \widehat{w} = (w-d)_+ \geq 0$ 和乔丹分解，

$$\langle w,\nu\rangle = \langle \widehat{w}, \nu\rangle + \langle (w-d)_+, \nu\rangle \leq P^* + \langle (w-d)_+, \nu^+\rangle \leq P^* + C\|(w-d)_+\|_\infty$$

在 $\mathcal{F}$ 中的最大值点处，惩罚项为零。因此

$$P^* = \sup_{w\in\mathcal{K}}\Big\{\langle w, \nu\rangle - C\|(w-d)_+\|_\infty\Big\}.$$

固定 $w \in \mathcal{K}$，令 $m = \|(w-d)_+\|_\infty$。由于 $d - w \geq -m$ on D，每个 $\lambda \in \Lambda_C$ 都满足 $\langle d-w, \lambda\rangle \geq -m\lambda(D) \geq -mC$。若 $m > 0$，连续性和紧致性保证存在一点 $x^* \in D$，使得 $w(x^*) - d(x^*) = m$，且 $C\delta_{x^*}$ 取得下界。若 $m = 0$，则零测度取得该下界。因此，对于 $L(w,\lambda) = \langle w, \nu\rangle + \langle d-w, \lambda\rangle$，

$$P^* = \sup_{w\in\mathcal{K}} \min_{\lambda\in\Lambda_C} L(w,\lambda).$$

极小极大与对偶可达性。根据黎曼表示定理，我们将$\mathcal{M}(D)$ 与 $C(D)^*$ 在上述配对下等同。在弱* 拓扑下，对于每个 $v \in C(D)$，映射 $\lambda \mapsto \langle v, \lambda\rangle$连续。条件 $\lambda \geq 0$ 等价于对每个非负的 $v \in C(D)$，都有 $\langle v, \lambda\rangle \geq 0$，且质量上界为 $\langle \mathbf{1}, \lambda\rangle \leq C$。这些不等式定义了一个弱*-闭凸集。

对于非负测度，$\|\lambda\|_{\mathrm{TV}} = \lambda(D)$。因此，$\Lambda_C$ 属于半径为 C 的闭对偶球。根据巴拿赫-阿劳格鲁定理，该球是弱* 紧的，因此其闭子集 Λ_C 也是弱* 紧的。

集合 $\mathcal{K}$ 是 $C(D)$ 中的凸锥。对于每个 $\lambda \in \Lambda_C$， $L(\cdot\ \lambda)$ 关于一致范数是仿射且连续的；对于每个 $w \in \mathcal{K}$， $L(w,\cdot)$ 是仿射且弱*连续的。以 Λ_C 作为紧致极小化集合，应用 Sion极小极大定理可得

$$P^* = \inf_{\lambda \in \Lambda_C} \sup_{w \in \mathcal{K}} L(w, \lambda).$$

若 $\lambda \succeq_{\mathcal{K}} \nu$，则对所有 $w \in \mathcal{K}$，有 $\langle w, \nu - \lambda \rangle \le 0$，且在 $w = 0$ 处取等。此时内部上确界为 $\langle d, \lambda \rangle$。若序约束不成立，则存在 $w_0 \in \mathcal{K}$，使得 $\langle w_0, \nu - \lambda \rangle > 0$。函数 $t w_0$ 对所有 $t \ge 0$ 都属于 $\mathcal{K}$，且当 $t \to \infty$ 时， $L(t w_0, \lambda) \to +\infty$。

集合 $\{\lambda \in \Lambda_C : \lambda \succeq_{\mathcal{K}} \nu\}$ 包含 ν^+，因为 $\nu^+ - \nu = \nu^-$ 且每个 $w \in \mathcal{K}$ 都是非负的。它是弱*紧的，因为每个不等式 $\langle w, \lambda \rangle \ge \langle w, \nu \rangle$ 都定义了一个弱*闭半空间。由于 $d \in C(D)$，成本 $\lambda \mapsto \langle d, \lambda \rangle$ 是弱*连续的，并在该集合上的某个 λ^* 处达到其最小值，成本为 P^*。测度 λ^* 对无限制对偶问题是可行的，且 (D.3) 将每个无限制对偶可行测度的成本从下方界定为 P^*。因此 λ^* 也达到无限制对偶问题的最小值。

C互补松弛性。 对于任意原始可行的 w 和对偶可行的 λ，

$$\langle d, \lambda \rangle - \langle w, \nu \rangle = \langle d - w, \lambda \rangle + \langle w, \lambda - \nu \rangle.$$

右侧的每一项都非负。根据强对偶性，当且仅当两项都为零时，该对偶对是最优的。由于 $d - w$ 是连续且非负的，$\langle d - w,\ \lambda \rangle = 0$意味着 $\operatorname{supp} \lambda \subseteq \{x \in D : w(x) = d(x)\}$。事实上，每个满足 $d(x) - w(x) > 0$ 的点都有一个邻域，使得该邻域上的间隙与零有正距离，而该邻域的 λ-质量为零。

□

D.3 标价的认证

命题 1 的证明。 对于 $p \in [0, \tfrac{1}{2}]$，标价租金为 $u_p = (s - p)_+$。其前沿间隙为 $w_p = \min\{d, \tfrac{1}{2} - p\}$，其与 d 的接触集为 $W_p = \{x \in D : s(x) \ge p\}$。对于任意原始可行和对偶可行对，其目标值之差为

$$\int_D d\, d\lambda - \int_D w\, d\nu = \int_D (d - w)\, d\lambda + \int_D w\, d(\lambda - \nu).$$

根据 (D.3)，两项均为非负。在 $w = w_p$ 处，由于 $d - w_p$ 的连续性，第一项当且仅当 $\operatorname{supp} \lambda \subseteq W_p$ 时为零。第二项当且仅当 $\int_D w_p\, d(\lambda - \nu) = 0$ 时为零。定理 4 给出了一个可达到的对偶测度。等价性得证。 □

在 $g \geq 0$ 下验证标价。 假设 $g \geq 0$，令 p^* 最大化完全信息下的定价销售收入。由于 F具有密度，该收入在某个内部价格处为正，而在 0 和 1_2 处为零。令 $h_S(p) = \int_0^p f(a, p-a)\, da$ 表示 $s(X)$ 的密度。一阶条件为 $\Pr\{s(X) \geq p^*\} - p^* h_S(p^*) = 0$。对于 $W = W_{p^*}$ 和 $Z = D \setminus W$，使用 $g = f + \operatorname{div}(xf)$，并在 W 上应用散度定理。H 上的通量为 B，$\{s = p^*\}$ 上的通量为 $-p^* h_S(p^*)$，而各坐标轴上的通量均为零。因此

$$\int_W g(x)\, dx = B, \qquad \int_Z g(x)\, dx = 1, \tag{D.4}$$

令 $\lambda^* = \mathbf{1}_W g(x)\, dx$。对于 $w \in \mathcal{K}$，由单调性可得 $w(x) \leq w(0)$，因此

$$\int_D w\, d(\lambda^* - \nu) = w(0) - \int_Z w(x) g(x)\, dx \geq 0.$$

由于 w_{p^*} 在 Z上为常数，因此在 w_{p^*}处等号成立。λ^* 的支撑超平面位于 W中，因此它是一个证书。

令 $S_H(x) = (\frac{1}{2} - \beta, \beta)$，并令 $\gamma = (S_H, \mathrm{Id})_\# \lambda^*$。其第一个边缘分布的质量为 B，且支撑于 H，因此可用它替代 λ_H。其第二个边缘分布为 λ^*。由于 $u(S_H(x)) - u(x) \leq d(x)$ 且 $u \geq 0$，我们有

$$R_f(u) = \int_{D \times D} [u(h) - u(x)]\, d\gamma(h, x) - \int_Z u(x) g(x)\, dx \leq \int_D d\, d\lambda^*.$$

两个不等式在 u_{p^*}处均取等号。

对于图 10，使用射线坐标 $x = s(\xi, 1-\xi)$，其雅可比为 s，边界点为 $h(\xi) = \frac{1}{2}(\xi, 1-\xi)$。令 $\widetilde{b}(\xi) = \int_{p^*}^{1/2} s\, g(s(\xi, 1-\xi))\, ds$。根据 (D.4)，$\int_0^1 \widetilde{b}(\xi)\, d\xi = B$，因此 $\widetilde{b}(\xi)\, d\xi$ 在 h 下的推前是有效的边界替代分布。放松不同射线之间的约束。在一条射线上，租金非负，且关于 s 是 1-利普希茨的。给定边界租金 $\frac{1}{2} - c$，逐点最小的此类租金为 $(s-c)_+$。它在该射线上可行，并且在给定边界租金时使其收益贡献最大，因为 $g \geq 0$。截止点为 c 时，优化后的射线贡献为

$$L_\xi(c) = \widetilde{b}(\xi)(\tfrac{1}{2} - c) - \int_c^{1/2} (s-c) s\, g(s(\xi, 1-\xi))\, ds.$$

其导数为 $\int_c^{p^*} s\, g(s(\xi,\ 1-\xi))\, ds$，当 $c \leq p^*$ 时非负，当 $c \geq p^*$时非正。共同临界值最大化了每条射线的贡献，并且在原问题中是可行的。

D.4 菜单粗化

命题 *2* 的证明。令 u 为菜单产生的租金，令 $r = u|_H$，并设$p = \frac{1}{2} - r$。根据引理 8，在价格 p 下的完全信息在每种类型上给出 $s(x) - p = r - d(x) \le u(x)$ 的租金，并在 H上取等号。因此，添加这一选项不会改变租金包络。

现在考虑一个原始合同（$q,\ t$），其中对于某个 i有 $q_i = 1$ 。在边界端点 $\frac{1}{2}e_i$ 处，其中$-e_i$是第 i个坐标向量，该合同带来的租金为 $\frac{1}{2} - t$。由于原始菜单在该端点带来的租金为 r，因此 $t \ge \frac{1}{2} - r = p$。所以，在每一种类型下， p 处的完全信息都弱支配该合同：

$$(s(x) - p) - (x \cdot q - t) = (\mathbf{1} - q) \cdot x + (t - p) \ge 0.$$

如果将该合同分配给了 x，那么 $x \cdot q - t = u(x)$。由于 $s(x) - p \le u(x)$，不等式取等号，并且 $t = p$。因此，我们可以删除边界合同，将完全信息分配给原先的买方，同时保留所有其他分配不变。每种类型都保留其租金和支付。

对于激励相容，每个保留的合同仍满足 $\frac{1}{2}q_i - t \le r$，其中 $i = 1,\ 2$。根据命题 5 中的后续策略收益界限，其在类型 x 下优化后的净租金至多为

$$\max\{x \cdot q - t,\ r - d(x)\} \le u(x).$$

在 p 完全信息下，至多也能得到 $u(x)$，且指定选项达到 $u(x)$。这证明了激励相容。由于租金不变，个体理性得以保持。 □

推论 *1* 的证明。令 u 为具有所述配置形式之一的可行最优租金，并设 $p = \frac{1}{2} - u|_H$。两种形式都意味着，对于几乎每个内部类型 x，梯度 $q = \nabla u(x)$ 要么为零，要么有一个坐标等于一。对于 Pavlov 形式，这由边界配置限制可得。在规范形式中，排除区域内的斜率为零，每个部分配置区域内有一个坐标等于一，而在完全配置区域内两个坐标都等于一。

个体理性和引理 8 给出 $u(x) \ge (s(x) - p)_+$。为证明反向不等式，固定一个具有这些斜率之一的内部可微点。该支撑合同

$$q = \nabla u(x), \qquad t = x \cdot q - u(x)$$

在 x 处给出租金 $u(x)$，并且处处位于 u 之下。在原点处计算该支撑函数得到 $t \geq 0$。如果 $q = 0$，则这意味着 $u(x) = 0$。如果 $q_i = 1$，在 $\frac{1}{2}e_i$处计算该支撑函数得到 $t \geq p$，因此 $u(x) = x \cdot q - t \leq s(x) - p$。因此，$u = (s - p)_+$ 几乎处处成立，而连续性将该等式扩展到 D的所有点。对于完全信息采用公布价格 p 可保持最优期望收益。 □

E 重新表述 BBS

我们研究 Bergemann、Bonatti 和 Smolin（2018年）的二元匹配，以下简称 BBS。在购买时，买方知道后验分布 $\theta = \Pr\{\omega = 1\} \in [0, 1]$。其外部决策价值为 $u^{\mathrm{B}}(\theta) = \max\{\theta, 1 - \theta\}$。我们将 u^{B} 记作增量租金，并将注意力限制在 BBS 所确定的响应式集中实验上。全文均施加个体理性约束和非负支付条件。

E.1 误差表示

设 ρ_i 表示在状态 i下建议正确行动的概率。集中实验满足 $\max\{\rho_1, \rho_2\} = 1$。令 $\chi = \rho_1 - \rho_2 \in [-1, 1]$。相应的实验如下，其中各列分别建议采取行动 1 和 2：

$$E_\chi = \begin{pmatrix} \rho_1(\chi) & 1 - \rho_1(\chi) \\ 1 - \rho_2(\chi) & \rho_2(\chi) \end{pmatrix}, \qquad (\rho_1(\chi), \rho_2(\chi)) = \begin{cases} (1 + \chi, 1), & \chi \leq 0, \\ (1, 1 - \chi), & \chi \geq 0. \end{cases} \tag{E.1}$$

完全信息为 $\chi = 0$。两个端点实验 $\chi = -1,1$ 均不包含信息。

遵循建议所获得的总价值为 $\theta\chi + 1 + \min\{-\chi, 0\}$。其余决策规则要么忽略建议，要么反转建议。反转建议不可能优于外部行动：若 $\rho_1 = 1$，其价值为 $(1 - \theta)(1 - \rho_2) \leq 1 - \theta$；若 $\rho_2 = 1$，其价值为$\theta(1 - \rho_1) \leq \theta$。因此，最优增量价值为

$$V^{\mathrm{B}}(\theta, \chi) = \left[\theta\chi + 1 + \min\{-\chi, 0\} - \underline{u}^{\mathrm{B}}(\theta)\right]_+ . \tag{E.2}$$

当方括号内的表达式非负时，分配给 θ 的合同是响应式的。

将信念区间折叠为两个分支：

$$\theta \leq \tfrac{1}{2}: \quad (v, 0) = (\theta, 0), \qquad \theta \geq \tfrac{1}{2}: \quad (0, v) = (0, 1 - \theta). \tag{E.3}$$

坐标 $v = \min\{\theta, 1-\theta\}$ 是买方基准错误率。 $v = \frac{1}{2}$的两个副本代表相同的平衡信念。- $v = 0$ 处的两个极端信念对每个实验都具有相同的零增量估值；指定其分配的合同时，可以保留分支标签。

对于单个实验，定义

$$\widehat{x}_1(\chi) = 1 + \chi, \qquad \widehat{x}_2(\chi) = 1 - \chi, \qquad 0 \le \widehat{x}_i \le 2, \quad \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2 = 2, \qquad \kappa(z) = (z-1)_+. \tag{E.4}$$

将（E.3）代入（E.2）可得

$$V_i^{\mathrm{B}}(v, \chi) = \left[v\widehat{x}_i(\chi) - \kappa(\widehat{x}_i(\chi))\right]_+, \qquad i = 1, 2. \tag{E.5}$$

在第一个分支中， $v = \theta$ 且买方默认行动为行动 2。遵循建议可获得增量收益

$$\theta\chi + 1 + \min\{-\chi, 0\} - (1-\theta) = v(1+\chi) - \chi_+.$$

这里， $\chi_+ = 1 - \rho_2$表示在状态 2 下实验建议采取行动 1 的概率，此时买方默认行动已经正确。第二个分支类似。

E.2 可实施性

令 $x_i(v)$ 表示在分支 i 上分配的实验的估值坐标，并令$t_i(v)$ 表示其支付。因此， $x_1(v) = \widehat{x}_1(\chi(v))$，且 $x_2(v) = \widehat{x}_2(\chi(1-v))$。式（ E.4 ）中的恒等式关联了同一实验的两个坐标。对于 $v < \frac{1}{2}$，分配 $x_1(v)$ 和 $x_2(v)$ 分别指分配给两个不同后验信念 v 和 $1-v$ 的实验。

令 $x_1, x_2\colon [0, \frac{1}{2}) \to [0, 2]$ 可测。当它们为非递减时，记作$\bar{x}_i = \lim^{v\uparrow\frac{1}{2}} x_i(v)$。

命题 6 （错误坐标可实施性）。 当且仅当，坐标对（x_1、 x_2）可由一个具有响应式、激励相容性和个体理性的集中式菜单以非负支付方式实施

$$x_i \text{ is nondecreasing}, \qquad i = 1, 2, \tag{E.6}$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \le 2, \tag{E.7}$$

$$\int_0^{1/2} x_1(v)\, dv = \int_0^{1/2} x_2(v)\, dv. \tag{E.8}$$

在每个分支上，租金和支付为

$$u_i(v) = \int_0^v x_i(w)\,dw, \qquad t_i(v) = v x_i(v) - \kappa(x_i(v)) - \int_0^v x_i(w)\,dw. \tag{E.9}$$

证明。 在对称匹配情形中，Bergemann、Bonatti 和 Smolin（2018年，引理 2）中的实验指标为 $q = \rho_1 - \rho_2 = \chi$。他们的引理表明，响应式实施等价于 χ 在 $[0,1]$ 上的单调性以及条件

$$\int_0^1 \chi(\theta)\,d\theta = 0. \tag{E.10}$$

他们证明中的包络公式给出了总净效用 $1 + I(\theta)$，其中 $I(\theta) = \int_0^\theta \chi(z)\,dz$。常数为 1，因为处于 $\theta = 0$ 的买方知道状态，并且根据个体理性和非负支付，其支付为零。从指定实验下的总收益中减去总净效用，即得到他们公式（A5）中的转移：

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \int_0^\theta \chi(z)\,dz, \\ t(\theta) &= \theta\chi(\theta) + \min\{-\chi(\theta), 0\} - I(\theta), \\ u^{\mathrm{B}}(\theta) &= 1 + I(\theta) - \underline{u}^{\mathrm{B}}(\theta). \end{aligned} \tag{E.11}$$

这些实施支付均为非负。如果 $\chi(\theta) \le 0$，则根据单调性，$t(\theta) = \theta\chi(\theta) - I(\theta) \ge 0$。如果 $\chi(\theta) \ge 0$，则（E.10）给出 $t(\theta) = \int_\theta^1 [\chi(z) - \chi(\theta)]\,dz \ge 0$。

在误差坐标下，标量分配为

$$\chi(\theta) = \begin{cases} x_1(\theta) - 1, & 0 \le \theta < \tfrac{1}{2}, \\ 1 - x_2(1-\theta), & \tfrac{1}{2} < \theta \le 1. \end{cases} \tag{E.12}$$

每个分支上的单调性等价于（E.6）。当且仅当 $\bar{x}_1 - 1 \le 1 - \bar{x}_2$ 时，$\theta = \tfrac{1}{2}$ 处的值可以单调地连接两个分支，这就是（E.7）。因此，任意 $\chi(\tfrac{1}{2}) \in [\bar{x}_1 - 1, 1 - \bar{x}_2]$ 都适用。经变量替换可得

$$\int_0^1 \chi(\theta)\,d\theta = \int_0^{1/2} [x_1(v) - 1]\,dv + \int_0^{1/2} [1 - x_2(v)]\,dv = \int_0^{1/2} x_1(v)\,dv - \int_0^{1/2} x_2(v)\,dv. \tag{E.13}$$

因此，（E.8）等价于（E.10）。

任一分支上的外部收益为 $1 - v$。因此，在后验分布 v 和 $1 - v$ 下的租金分别为

$$\begin{aligned} u_1(v) &= v + I(v) = \int_0^v x_1(w)\,dw, \\ u_2(v) &= v + I(1-v) = v - \int_{1-v}^1 \chi(z)\,dz = \int_0^v x_2(w)\,dw, \end{aligned}$$

其中第二行使用了（E.10）。根据响应性，指定实验在分支 i 上带来的毛增量价值为 $v x_i(v) - \kappa(x_i(v))$。扣除租金后，即得到（E.9）中的支付。

□

E.3 设计者问题

设 F_{B} 为后验分布的累积分布函数，f_{B} 为其密度。对于 $v \in [0, \frac{1}{2}]$，定义分支密度及其尾部为

$$g_1(v) = f_{\mathrm{B}}(v), \qquad g_2(v) = f_{\mathrm{B}}(1-v), \qquad G_i(v) = \int_v^{1/2} g_i(w)\, dw.$$

期望收益是两条分支上的期望支付之和。在（E.9）中，分支 i 上的期望租金满足

$$\int_0^{1/2} g_i(v) \left(\int_0^v x_i(w)\, dw \right) dv = \int_0^{1/2} x_i(w) G_i(w)\, dw,$$

其中等式由富比尼定理推出。代入期望收益可得

$$\mathrm{Rev}^{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{2} \int_0^{1/2} \left[\psi_i(v) x_i(v) - g_i(v) \kappa(x_i(v)) \right] dv, \qquad \psi_i(v) = v g_i(v) - G_i(v). \quad \text{(E.14)}$$

卖方在满足（E.6）–（E.8）的约束下最大化（E.14）。

E.4 极点方法

根据 Bergemann、Bonatti 和 Smolin（2018年，命题 2），某个最优菜单会将完全信息分配给后验分布 θ^I。对于每个候选项 $\theta^I \in [0,1]$，我们首先求解满足 $\chi(\theta^I) = 0$ 的卖方问题。然后，对 θ^I 上得到的价值取最大值，即可恢复不受约束的最优值。

截止点表示。 令 $J_- = [0, \theta^I]$ 和 $J_+ = [\theta^I, 1]$。对于满足 $\chi(\theta^I) = 0$ 的非递减分配 χ，用定义在 J_- 上的概率测度 μ_- 和定义在 J_+ 上的概率测度 μ_+ 分别表示其两侧的增量。在 $[0, \theta^I)$ 上，μ_- 的累积分布函数为 $1 + \chi(\theta+)$，其余质量放置在 θ^I 处。在 $[\theta^I, 1)$ 上，μ_+ 的累积分布函数为 $\chi(\theta+)$，其余质量放置在

1 处。这里， $\chi(\theta+)$表示右极限。将两个测度在各自区间之外延拓为零，则对于几乎处处的 θ,

$$\chi(\theta) = -1 + \mu_-([0,\theta]) + \mu_+([0,\theta]).$$

反过来，该公式在 θ^I 之外定义了一个非递减分配。它在左侧为非正、在右侧为非负，因此我们可以令 $\chi(\theta^I) = 0$。

对该表示式积分可得

$$\int_0^1 \chi(\theta)\, d\theta = 1 - \int_{J_-} z\, d\mu_-(z) - \int_{J_+} z\, d\mu_+(z).$$

因此，根据 (E.10)，可行截断对是定义在 J_- 和 J_+ 上、满足以下条件的概率测度

$$\int_{J_-} z\, d\mu_-(z) + \int_{J_+} z\, d\mu_+(z) = 1. \tag{E.15}$$

极点。在 θ^I 的左侧，(E.11) 中的转移等于 $\int_0^\theta [\chi(\theta) - \chi(s)]\, ds$。在右侧，利用 (E.10)，它等于 $\int_\theta^1 [\chi(s) - \chi(\theta)]\, ds$。代入截断表示并应用富比尼定理可得

$$t(\theta) = \begin{cases} \displaystyle\int_{[0,\theta]} z\, d\mu_-(z), & \theta < \theta^I, \\ \displaystyle\int_{(\theta,1]} (1-z)\, d\mu_+(z), & \theta > \theta^I, \end{cases} \qquad \text{for almost every } \theta.$$

对后验分布下的这些支付进行积分可得

$$\begin{aligned} \mathrm{Rev}^{\mathrm{B}} = &\int_{J_-} z\Big[F_{\mathrm{B}}(\theta^I) - F_{\mathrm{B}}(z)\Big]\, d\mu_-(z) \\ &+ \int_{J_+} (1-z)\Big[F_{\mathrm{B}}(z) - F_{\mathrm{B}}(\theta^I)\Big]\, d\mu_+(z). \end{aligned}$$

由于 F_{B} 是连续的，收入关于 (μ_-, μ_+ 是仿射且弱连续的).

在紧不交并 $J = J_- \sqcup J_+$ 上，确定概率测度为 $\nu = \frac{1}{2}(\mu_- \oplus \mu_+)$ 的配对。可行性等价于

$$\nu(J_-) = \frac{1}{2}, \qquad \int_J z\, d\nu(z) = \frac{1}{2},$$

其中， z 表示两侧的截断坐标。两个矩等式定义了$\mathcal{P}(J)$的一个弱闭凸子集，因此可行集是弱紧且凸的。由于收入是弱连续且具有仿射性的，最大化解的集合非空、

紧且凸。根据Krein–Milman定理（Krein和Milman，1940年），最大化解集合具有一个极点。为说明 ν^* 在可行集中也是极点，假设对于可行测度 ν_1，ν_2和 $0<\tau<1$，有 $\nu^*=\tau\nu_1+(1-\tau)\nu_2$。根据仿射性，$\nu^*$ 处的收入是 ν_1 和 ν_2处收入的加权平均。由于任一收入都不能超过最大值，因此二者都必须达到最大值。于是，ν^* 在最大化解集合中的极性意味着 $\nu_1=\nu_2=\nu^*$。可行集由$\mathcal{P}(J)$上的两个矩等式定义。因此，Winkler（1988年，定理2.1）表明，ν^* 由 J中的至多三个点支撑。

E.5 最优菜单

每一侧都具有正质量，因此可以选择一个最优截止点对，使其中一侧有一个点，另一侧有两个点。如有必要，重新标记状态，使右侧只有一个截止点。这样，两种情况都可以写成

$$\mu_-=\lambda\delta_b+(1-\lambda)\delta_c,\qquad \mu_+=\delta_{1-a},\qquad 0\le b\le c\le\theta^I\le 1-a\le 1,\quad \lambda\in[0,1].$$

矩条件给出 $a=\lambda b+(1-\lambda)c$。每一侧各有一个点的情况表示为 $b=c=a$。

在截止点之外，χ 取连续取值 -1、$\lambda-1$、0 和 1，并在 b、c 和 $1-a$ 处发生跃迁。支付公式给出如下菜单。满足 $b<\theta<c$ 的买方获得实验（ρ_1，ρ_2）$=(\lambda,\ 1)$，并支付 λb。满足$c<\theta<1-a$ 的买方获得完全信息，并支付 a。对于后者，支付在 θ^I 左侧等于 $\lambda b+(1-\lambda)c$，在右侧等于 $1-(1-a)$。其余买方选择外部选项。将分配代入 $x_1(\alpha)=1+\chi(\alpha)$ 和 $x_2(\beta)=1-\chi(1-\beta)$，即可得到（6.14）；截止点处的选择除外，因为这些点的概率为零。

在所选状态标注下的期望收益为

$$\lambda b\Big[F_{\mathrm{B}}(c)-F_{\mathrm{B}}(b)\Big]+a\Big[F_{\mathrm{B}}(1-a)-F_{\mathrm{B}}(c)\Big],\qquad a=\lambda b+(1-\lambda)c, \tag{E.16}$$

其中，F_{B} 是该标注下的后验累积分布函数。反之，对于满足价格关系的任意 $\lambda\in[0,1]$ 和$0\le b\le c\le 1-a\le 1$，可以选择 $\theta^I\in[c,1-a]$。该截止点对属于相应的区间，并满足（E.15），因此是可实施的。

因此，对这些参数最大化（E.16）即可得到最优收入。正如 Bergemann、Bonatti 和 Smolin（2018年，命题 4）所示，最优菜单提供完全信息以及至多一个部分实验。

参考文献

Adams, William James 和 Janet L. Yellen。1976。《商品捆绑与垄断负担》。《经济学季刊》90(3)：475–498。

Admati, Anat R. 和 Paul Pfleiderer。1986。《信息垄断市场》。《经济理论杂志》39(2)：400–438。

Admati, Anat R. 和 Paul Pfleiderer。1990。《信息的直接与间接销售》。《计量经济学》58(4)：901–928。

Ali, S. Nageeb、Nima Haghpanah、Xiao Lin 和 Ron Siegel。2022。《如何销售硬信息》。《经济学季刊》137(1)：619–678。

Bergemann, Dirk 和 Alessandro Bonatti。2019。《信息市场：导论》。《经济学年度评论》11：85–107。DOI。

Bergemann, Dirk、Alessandro Bonatti 和 Alex Smolin。2018年。《信息的设计与定价》。《美国经济评论》108(1)：1–48。DOI。

Blackwell, David。1953年。《实验的等价比较》。《数学统计年鉴》24(2)：265–272。DOI。

Bull, Jesse 和 Joel Watson。2007年。《硬证据与机制设计》。《博弈与经济行为》58(1)：75–93。

Carroll, Gabriel。2017年。《多维筛选中的稳健性与分离》。《计量经济学》85(2)：453–488。

Che, Yeon-Koo 和 Weijie Zhong。2025年。《销售多种商品的稳健最优机制》。《经济学研究评论》92(5)：2923–2951。

Courty, Pascal 和 Hao Li。2000。“序贯筛选。”《经济学研究评论》67(4): 697–717。

Daskalakis, Constantinos, Alan Deckelbaum 和 Christos Tzamos。2017。“多商品垄断者的强对偶性。”《计量经济学》 85(3): 735–767。

Doval, Laura 和 Vasiliki Skreta。2026年。“购买历史与产品个性化。”《*RAND*经济学杂志》57(1)：78–102。

Dworczak, Piotr、Jacopo Perego 和 Laura Veldkamp。2026年。“隐私出售：无政府状态、禁令还是市场？”工作论文，8月15日。

Eliaz, Kfir 和 Ran Spiegler。2026年。“垄断性数据倾倒。”《美国经济学杂志：微观经济学》18(4)：534–559。DOI。

Eső, Péter 和 Balázs Szentes。2007年。“拍卖中的最优信息披露与障碍拍卖。”《经济学研究评论》74(3)：705–731。

Fotakis, Dimitris、Alkis Kalavasis、Vasilis Kontonis 和 Christos Tzamos。2021年。“从粗粒度标签中学习的高效算法。”《机器学习研究论文集》134：2060–2079。

Gan、Tan 和 Yingkai Li。2026年。《选择集筛选》。工作论文，arXiv:2601.15580。

Haghpanah、Nima 和 Jason Hartline。2021年。《何时纯捆绑销售是最优的？》《经济研究评论》88(3)：1127–1156。

Haghpanah、Nima、Xiao Lin 和 Ron Siegel。2026年。《逐项销售证据》。PIER工作论文第26-019号。

Inan、Hakan、Kartikeya Upasani、Jianfeng Chi、Rashi Rungta、Krithika Iyer、Yuning Mao、Michael Tontchev、Qing Hu、Brian Fuller、Davide Testuggine 和 Madian Khabsa。2023年。《Llama Guard：用于人机对话的基于大语言模型的输入输出安全防护》。arXiv:2312.06674。

Kleiner、Andreas 和 Alejandro Manelli。2019。《垄断定价中的强对偶性》。《计量经济学》87(4)：1391–1396。DOI。

Krein, M. 和 D. Milman。1940年。“正规凸集的极点。”*StudiaMathematica*9(1): 133–138。

Lahr, Patrick 和 Axel Niemeyer。2025年。“多维筛选中的极值点。” CEPS 工作论文第 2025/16 号。工作论文。Li, Hao 和 Xianwen Shi。2017。“歧视性信息披露。”《美国经济评论》107(11): 3363–3385。Markov, Todor、Chong Zhang、Sandhini Agarwal、Florentine Eloundou Nekoul、Theodore Lee、Steven Adler、Angela Jiang 和 Lilian Weng。2023年。“面向现实世界不良内容检测的整体方法。”人工智能 *AAAI* 会议论文集37(12): 15009–18。McAfee, R. Preston 和 John McMillan。1988年。“多维激励相容与机制设计。”《经济理论杂志》46(2): 335–354。

McAfee, R. Preston, John McMillan 和 Michael D. Whinston。1989年。“多产品垄断、商品捆绑销售与价值相关性。”《经济学季刊》104(2)：371–383。

Myerson, Roger B. 1981年。“最优拍卖设计。”《运筹学数学》6(1)：58–73。

Myerson, Roger B. 1982年。“广义委托—代理问题中的最优协调机制。”《数学经济学杂志》10(1)：67–81。

Natarajan, Nagarajan, Inderjit S. Dhillon, Pradeep K. Ravikumar 和 Ambuj Tewari。2013年。“使用噪声标签进行学习。”神经信息处理系统进展26：1196–1204。

Patrini, Giorgio, Alessandro Rozza, Aditya Krishna Menon, Richard Nock 和 Lizhen Qu。2017。“使深度神经网络对标签噪声具有鲁棒性：一种损失修正方法。”*IEEE*计算机视觉与模式识别会议论文集，1944–1952。

Pavlov, Gregory. 2011. “线性垄断问题解的一个性质。”《*B.E.*理论经济学杂志》11(1)，专辑，文章4。 DOI。

Raykar, Vikas C.、Shipeng Yu、Linda H. Zhao、Gerardo Hermosillo Valadez、Charles Florin、Luca Bogoni 和 Linda Moy。2010年。《从群体中学习》。《机器学习研究杂志》11：1297–1322。

Raykar, Vikas C. 和 Shipeng Yu。2012年。《消除垃圾邮件发送者并为众包标注任务中的标注者排名》。《机器学习研究杂志》13：491–518。Riley, John 和 Richard Zeckhauser。1983。《最优销售策略：何时讨价还价，何时坚持立场》。《经济学季刊》98(2)：267–289。DOI。

Rochet, Jean-Charles. 1987年。“拟线性情境下可理性化性的充要条件。”《数学经济学杂志》16(2)：191–200。

Rochet, Jean-Charles，和 Philippe Choné。1998。“熨平、扫描与多维筛选。”《计量经济学》66(4)：783–826。

Segura-Rodríguez, Carlos。2022。“数据销售。”PIER工作论文第19-006号，2022年8月修订。工作论文。

Sion, Maurice。1958年。“关于一般极小极大定理。”《太平洋数学杂志》8(1)：171–176。DOI。

Thanassoulis, John。2004年。“替代品讨价还价。”《经济理论杂志》117(2)：217–245。

Winkler, Gerhard。1988年。“矩集的极值点。”《运筹学数学》13(4)：581–587。

Yang, Frank。2025年。《嵌套捆绑》。《美国经济评论》115(9)：2970–3013。Yang, Frank 和 Kai Hao Yang。2026年。《随机优化与耦合》。考尔斯基金会讨论论文第2506号，3月12日。Yang, Kai Hao。2022年。《出售消费者数据获利：最优市场细分设计及其后果》。《美国经济评论》112(4)：1364–1393。DOI。Zhong, Weijie。2026年。《互补品捆绑》。工作论文，斯坦福大学。arXiv:2607.07982。