arXiv:2611.29987v1 [math.CV] 23 Nov 2026

带有 S^4 的乘积上的复结构

MIN GAO、ZIZHOU TANG 和 WENJIAO YAN

摘要。本文的主定理是：当 P 是偶数个全纯线丛的单位圆丛在某个紧复流形上的纤维积时，$S^4 \times P$ 具有复结构。

这一结果有许多重要应用。例如，$S^4 \times G$ 对每个偶数维紧李群 G 都具有复结构。对于 $S^4 \times V_{2s}(\mathbb{C}^n)$ 和 $S^4 \times V_{2s}(\mathbb{H}^n)$，当 $n \geq 2s \geq 2$时，结论也成立；对于 $S^4 \times V_{4s}(\mathbb{R}^n)$，当$n \geq 4s \geq 4$时亦然。该定理还为 S^4 与任意偶数个奇数维球面的乘积赋予复结构。此外，在S^4 与某些矩角流形的乘积上也存在复结构，其中包括某些球面乘积的连通和。该构造利用了一个全纯的 $(\mathbb{C}^*)^2$-作用，该作用定义在 $S^4 \times \mathbb{T}^2$ 上；此处赋予的复结构是我们在 [17] 中构造的，并且还使用了一个在紧环面作用下等变的光滑分裂。

1. 引言

在球面中，只有 S^2 和 S^6 具有近复结构 [4]。特别是，S^4 不具有近复结构。Hopf 构造 [21] 为每个 $n \geq 1$上的 $S^1 \times S^{2n+1}$赋予了复结构。Calabi 和 Eckmann [11] 后来为 p，$q \geq 1$上的 $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ 构造了复结构。Bosio 和 Meersseman [5] 为某些球面乘积的连通和构造了复结构。Tang 和 Yan [37]在具有 $m = 1$的 OT–FKM 等距超曲面上构造了复结构（可积拟复结构），其中包括 $S^1 \times S^7 \times S^6$和 $S^1 \times S^3 \times S^2$ 这两个三球面乘积。后一个流形上的复结构的第一陈类为零，而 Hopf 曲面与 S^2 的乘积上的乘积复结构的第一陈类非零。Qian、Tang 和 Yan [31]证明，具有 $m = 2$ 的 OT–FKM 等距超曲面也具有复结构。

对于涉及 S^4 的乘积，Calabi 于 1958年 提出：当闭可定向曲面为 V [10] 时，$S^4 \times V$ 是否存在复结构？这些乘积已经具有近复结构：可将它们嵌入 $\mathbb{R}^7$ 中作为超曲面，并利用八元数叉积构造这些结构。

偶维实光滑流形 M 上的复结构，一般不足以保证 $S^4 \times M$ 上甚至存在近复结构。例如，Tang [35] 证明了 $S^4 \times \mathbb{CP}^2$ 不存在近复结构。Chakraborty 和 Thakur [12] 将这一障碍推广到

$S^4 \times \mathbb{CP}^{2n}$ 对所有 $n \geq 1$均成立。对于由 S^4 与 S^{2n}构成的乘积，只有 $S^4 \times S^2$ 承认近复结构 [14]。这一剩余情形是否存在复结构，是一个独立的问题。Liang、Liu 和 Zhang [24] 最近提出了 $S^4 \times S^2$上的一种复结构，其成立有赖于用于构造 S^6上复结构的环面纤维化构造有效。

2020 数学学科分类。32Q55, 32L05, 53C30, 57S12。关键词与短语。复结构、紧李群、主环面丛、Stiefel 流形、矩角流形。本研究部分得到了国家自然科学基金委员会（项目编号：12271038、12371048 和 12526205）及南开至德基金会的资助。

在我们此前的工作中 [17], 我们构造了一个复三维流形 X 与$S^4 \times \mathbb{T}^2$微分同胚，从而回答了 Calabi 关于亏格一的提问。在本文中，我们用由全纯线丛确定的主环面丛全空间取代乘积环面。对于带有厄米度量的全纯线丛 L ，记 $S(L)$ 为其单位圆丛，并记 $L^\times$ 为其零截面的补集。我们记 $\mathbb{T}^r = \mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r$，并在每个球面上使用标准光滑结构。

定理 1.1 （主定理）。 设 $L_1, \ldots, L_{2s}$ 是紧致连通复流形 B 上的全纯线丛，其中 $s \geq 1$。记它们的单位圆丛在 B 上的纤维积为

$$P = S(L_1) \times_B \cdots \times_B S(L_{2s}).$$

那么 $S^4 \times P$ 具有复结构。

这里我们指出，根据 [16, 命题 4。26], 因子 P 本身可以赋予复结构，因为 L_j 上的陈联络在 P上诱导出一个曲率类型为 (1,1) 的联络。定理 1.1 中的复结构 必然是非 Kähler 的。事实上，记 维数$_{\mathbb{R}} P = 2m$。根据 Künneth 公式，$H^2(S^4 \times P; \mathbb{R})$ 中的每个类都拉回自 P，因此其 $(m+2)$次幂为零。因此 $S^4 \times P$不具有辛形式。

奇数秩情形可通过添加一个平凡线丛，由主定理推出。

推论 1.2。 如果 P 是定义在紧致连通复流形上的奇数个全纯线丛的单位圆丛的纤维积，那么 $S^4 \times P \times S^1$承认一个复结构。

下面的推论描述了特定的偶数维因子。奇数维因子的相应结论可通过添加一个推论 1.2 中的 S^1 因子得到。因此，本文只在必要时陈述奇数维情形。

推论 1.3 （齐性空间）。设 G 是一个紧致连通李群， K 是 G中一个环面的中心化子， L 是 K的一个闭正规子群。若对于某个 $s \geq 1$有 $K/L \cong \mathbb{T}^{2s}$ ，则 $S^4 \times G/L$ 承认一个复结构。

我们首先回顾博雷尔的结果 [3], ，这些结果蕴含旗流形 G/K 带有一个齐性凯勒结构。在这个旗标底空间上， G/L 可实现为全纯线丛的单位圆丛的纤维积。于是可应用我们的主定理。

对于紧致连通李群，Samelson [32] 和 Wang [38] 证明了，每个偶数维的这类群都带有复结构。我们可以证明，只要该群的维数为偶数，它与 S^4 的乘积也具有复结构。

推论 1.4 (紧李群)。 每个维数为偶数的紧致连通李群 G 都具有复结构。

特别是， $S^4 \times \mathrm{SU}(3)$ 和 $S^4 \times G_2$ 具有复结构。然而，$S^4 \times (\mathrm{SU}(3)/\mathbb{T}^2)$ 和 $S^4 \times (G_2/\mathbb{T}^2)$ 都不具有近复结构；参见注记 5.1。因此， K/L在推论 1.3 中的正秩假设是必要的。

对于适当的 G、 K和 L，商空间 G/L 是一个 Stiefel 流形，因此推论 1.3适用。在第 6 节中，我们还将相应的线丛描述为旗标底空间上的典范商线丛。

推论 1.5 (Stiefel 流形)。 对于 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{H}$，令 $V_j(\mathbb{F}^n)$ 表示 $\mathbb{F}^n$ 中有序正交归一 j-标架所构成的 *Stiefel* 流形。对于 $s \geq 1$，这些流形

$$S^4 \times V_{2s}(\mathbb{C}^n), \qquad S^4 \times V_{2s}(\mathbb{H}^n), \qquad S^4 \times V_{4s}(\mathbb{R}^n)$$

分别存在带有 $n \geq 2s$ 和 $n > 4s$ 的复结构。当 $n = 4s$ 时，最后一个断言对定向分支 $\mathrm{SO}(4s)$ 也成立。

接下来，我们用 $L^{2a+1}(p) = S^{2a+1}/\mathbb{Z}_p$ 表示该透镜空间，其中 $S^{2a+1} \subset \mathbb{C}^{a+1}$ 是单位球面， $\mathbb{Z}_p$ 通过标量乘法作用。尽管标量透镜空间的乘积是齐性的，我们仍可直接从全纯线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^a}(-p)$ 的单位圆丛得到以下推论。

推论 1.6 (透镜空间积)。 设 $\ell \geq 2$ 为偶数，且 $a_j \geq 0$、 $p_j \geq 1$ 为满足 $1 \leq j \leq \ell$ 的整数。那么

$$S^4 \times \prod_{j=1}^{\ell} L^{2a_j+1}(p_j)$$

存在复结构。

特别地，令所有 $p_j = 1$，我们便得到 $S^4 \times \prod_{j=1}^{2s} S^{2a_j+1}$在所有 $s \geq 1$ 和 $a_j \geq 0$ 时的复结构。这些流形稳定可平行化且欧拉示性数为零，因此根据 Sutherland 判据 [34]，近复结构的存在性已可直接推出。对于 $S^4 \times S^5 \times S^{2a+1}$， $a \geq 0$还可将 Morimoto 乘积定理 [27, 定理 2 和 3] 应用于 $S^4 \times S^5$ 上的佐佐木结构来构造复结构。该佐佐木结构由 Boyer 和 Galicki 构造 [6, 定理 2， $n = 2$， $k = 1$]。

上述推论也适用于两族等距超曲面，这一点颇有意义。 推论 1.5 的四元数二标架情形在定型 OT–FKM 等距超曲面上诱导出复结构 $S^4 \times V_2(\mathbb{H}^k)$ ， $k \geq 2$回答了 Qian、Tang 和 Yan 的问题 [31, 备注 2(ii)]。 推论 1.6的球面-乘积情形包括重数为 （4，3） 的不定型 OT–FKM 等参超曲面，它们与 $S^4 \times S^3 \times S^7$ [30, 定理 1。3]微分同胚。

为简便起见，我们令$\mathcal{Z}_\bullet$ 表示与下标所指示的扇或多面体相关联的矩角流形。

推论 *1.7*（矩角流形）。设 Σ 是$\mathbb{R}^d$ 中的一个光滑完备有理扇，具有 m 条射线，其中 $m - d$ 为正偶数。则 $S^4 \times Z_\Sigma$ 具有复结构，其光滑结构由第 *7.2.1* 节指定。特别地，当 m为偶数时，这一结论适用于具有 $m \geq 4$条边的 *Delzant* m边形所对应的 $S^4 \times Z^{P_m}$ ；当 P 由一个 *Delzant* d单纯形经过奇数 $q \geq 1$ 次顶点截切得到时，也适用于 $S^4 \times Z_P$ $d \geq 2$；参见 （*21*） 和 （*23*） 。

最后一种情形推论 1.7指出这些流形

$$S^4 \times \left(\#_{j=1}^{q} j \binom{q+1}{j+1} (S^{j+2} \times S^{2d+q-j-1}) \right), \qquad d \geq 2, \quad q \geq 1 \text{ odd},$$

具有复结构。

对于 推论 1.7中的光滑完备有理扇，其因子 $\mathcal{Z}_\Sigma$ 已由 Panov–Ustinovsky 构造出复结构 [28, 定理 3。3]。我们的推论在 $S^4 \times \mathcal{Z}_\Sigma$ 上给出了复结构。Bosio–Meersseman [5, 定理 12。2] 为如下形式的偶数维链环构造了复结构： $\mathbb{T}^\ell \times \mathcal{Z}_Q$ ，以及与 S^1 的乘积，或奇数维链环的对角圆商空间，其中 Q 是简单凸多面体，且 $\ell \geq 0$。我们强调， S^4 因子确保了以下对象的同胚类型

推论 1.7中的流形并非由 Bosio–Meersseman 构造得到；参见第 7.2.3 节。

在第2节和3中，我们在 X 上构造了一个全纯作用，并证明了其等变分裂。第4节给出了主定理的证明。相关应用将在第5节至7节。

2. 原始三维簇与一个全纯作用

我们回顾在 X 中构造的三维簇 [17, 第3–6] ，并赋予其一个 $H \cong (\mathbb{C}^*)^2$的全纯作用。对于两个定义在 L_1上的全纯线丛 L_2 ， B是一个主$L_1^\times \times_B L_2^\times$-丛。该作用给出了第4节所用的全纯伴随丛。回顾第4节中 X的周期、节点完备化和粘合之后，我们将周期平移延拓至两个奇异纤维上。

用加法记号表示，

$$H = (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^2, \qquad \mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \subset H.$$

指数映射

$$([\alpha],[\beta]) \longmapsto (e^{2\pi i\alpha}, e^{2\pi i\beta})$$

将 H 识别为 $(\mathbb{C}^*)^2$ ，并将其子群 $\mathbb{T}^2$ 识别为 $(S^1)^2$。

2.1. 周期、完备化与粘合。我们从正则环面族开始。对于$t \in \mathbb{C}$，令 $q = e^{2\pi it} \in \mathbb{C}^*$ ，并令 $B = \mathrm{diag}(0,1)$。周期矩阵为

$$P(t) = P_{\mathrm{tw}}(q) \begin{pmatrix} I_2 & tB \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中

$$P_{\mathrm{tw}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -q & i & iq \\ q & 1 & -iq & i \end{pmatrix}.$$

根据 [17, 第 3], 节中的构造，格 $\Lambda_t = P(t)\mathbb{Z}^4$ 定义了一个复二维环面的真全纯族 $p : \mathcal{G} \to \mathbb{C}^*$。对于 q 的提升 t ，我们将点写为 $(q,[\zeta])$，其中$\zeta \in \mathbb{C}^2$ 按 Λ_t取模。第一列和第三列在 q 中是单值的。它们给出了下文所使用的平移方向：

$$p_1(q) = (1,q)^{\mathsf{T}}, \qquad p_3(q) = (i,-iq)^{\mathsf{T}}. \tag{2}$$

对于 $q \neq \pm i$，归一化周期为

$$A(q)^{-1}P(t) = (I_2 \;\; Z(t)), \qquad Z(t) = tB + C(q), \tag{3}$$

其中

$$A(q) = \begin{pmatrix} 1 & -q \\ q & 1 \end{pmatrix}, \qquad C(q) = \frac{i}{1+q^2}\begin{pmatrix} 1-q^2 & 2q \\ -2q & 1-q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(q) & b(q) \\ c(q) & d(q) \end{pmatrix}.$$

系数 a、b、c、d 在 $q = 0$ 处全纯。它们的值满足 $a(0) = d(0) = i$以及 $b(0) = c(0) = 0$。取 $\epsilon > 0$ 足够小，并令 $\Delta = \{|q| < \epsilon\}$。归一化周期定义了一个在 $\Delta^* = \Delta\setminus\{0\}$上的全纯族$\mathcal{T}^*$。坐标变换 $\widehat{\zeta} = A(q)^{-1}\zeta$ 将 $\mathcal{G}$ 在 Δ^* 上的限制双全纯地与 $\mathcal{T}^*$ 识别。

接下来我们回顾 [17, 第 4]节中在 $q = 0$ 处的完备化。其节点坐标也将用于延拓该作用。在对前两个归一化周期进行周期平移取商空间后，引入乘法坐标

$$z_1 = e^{2\pi i\widehat{\zeta}_1}, \qquad z_2 = e^{2\pi i\widehat{\zeta}_2}.$$

为了加入中心纤维，我们使用链$\mathcal{V} = \coprod V_k/\sim$。其节点图表

$$V_k = \mathbb{C}^*_{z_1} \times \{(x_k, y_k, q) \in \mathbb{C}^2 \times \Delta : x_k y_k = q\}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

通过相邻过渡函数粘合

$$\chi_k : (z_1, x_k, y_k)_k \longmapsto (z_1, qx_k, x_k^{-1})_{k+1}, \qquad x_k \neq 0. \tag{4}$$

在 $q \neq 0$ 上，链与上述乘法模型相识别。令 $u_f(q) = e^{2\pi i f(q)}$，其中 $f = a,\ b,\ c,\ d$。其余周期平移在链上的作用为

$$\begin{aligned} \gamma_1(z_1, x_k, y_k)_k &= (u_a z_1, u_c^{-1} x_k, u_c y_k)_k, \\ \gamma_2(z_1, x_k, y_k)_k &= (u_b z_1, u_d^{-1} x_k, u_d y_k)_{k+1}. \end{aligned} \tag{5}$$

令 Γ 为由 γ_1 和 γ_2生成的群。如 [17, 命题 41], 所示，商空间 $\mathcal{V}/\Gamma$ 是一个复三维流形。它将 $\mathcal{T}^*$ 延拓穿过 $q = 0$，其中

$$(\mathcal{V}/\Gamma)|_{\Delta^*} \cong \mathcal{T}^*$$

作为 Δ^* 上的全纯族。函数 $q = x_k y_k$ 将投影延拓为一个真全纯映射 $\pi : \mathcal{V}/\Gamma \to \Delta$。其中心纤维为

$$\pi^{-1}(0) \cong E_i \times C_{\mathrm{nod}},$$

其中 $E_i = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$，且 $C_{\mathrm{nod}} = \mathbb{P}^1/(0 \sim \infty)$。

在 ∞ 处，令 $s = -t$，并使用基坐标 $w = q^{-1} = e^{2\pi i s}$。在去心 w-圆盘上，相应的加法纤维坐标为

$$\zeta_\infty = (w\zeta_2, -w\zeta_1)^{\mathsf{T}}.$$

相对于局部周期矩阵

$$P_\infty(s) = P_{\mathrm{tw}}(-w) \begin{pmatrix} I_2 & sB \\ 0 & I_2 \end{pmatrix},$$

前两个实周期坐标保持不变，而后两个变号：

$$\zeta = P(t)(v_1, v_2, v_3, v_4)^{\mathsf{T}} \quad \Longrightarrow \quad \zeta_\infty = P_\infty(s)(v_1, v_2, -v_3, -v_4)^{\mathsf{T}}. \tag{6}$$

在这些坐标下，标准化周期矩阵为

$$(I_2 \ \ Z_\infty(s)), \qquad Z_\infty(s) = -Z(-s) = sB + C(-w).$$

因此，在 ∞ 处也适用同样的完备化构造。我们将 q 替换为 w，并将 $C(q)$ 替换为 $C(-w)$。将局部模型 $\mathcal{V}/\Gamma$ 沿穿孔 q-圆盘与 $\mathcal{G}$ 粘合，得到 $\mathcal{G}_0$。在 ∞ 处进行类似的构造，得到 $\mathcal{G}_\infty$。记 $\jmath_0$ 和 $\jmath_\infty$ 为 $\mathcal{G}$ 到这两个完备化中的嵌入。

两个完备化都包含同一个正则族。为了将它们粘合起来，我们使用 [17, 第 6] 节中的平移截面。相应的逐纤维平移为$\tau_\sigma(q, [\zeta]) = (q, [\zeta + u(t)])$，其中

$$u(t) = P(t)\mathbf{a}(t), \qquad \mathbf{a}(t) = (0, -t(t+1)/2, 0, t)^{\mathsf{T}}. \tag{7}$$

$u(t)$ 模 Λ_t 的类定义了 $\mathbb{C}^*$ 上的单值全纯截面。我们通过映射沿它们的正则部分将这两个完备化粘合起来：

$$\Phi : \jmath_0(\mathcal{G}) \longrightarrow \jmath_\infty(\mathcal{G}), \qquad \Phi = \jmath_\infty \circ \tau_\sigma \circ \jmath_0^{-1}. \tag{8}$$

正如 [17, 第 6], 节所证明的，所得空间 $X = \mathcal{G}_0 \bigcup_\Phi \mathcal{G}_\infty$ 是一个紧致复三维流形。它带有一个真全纯映射 $g : X \to \mathbb{P}^1$，其奇异纤维仅位于 0 和 ∞ 上。

2.2. 周期平移的延拓。 周期 p_1, p_3 在$\mathcal{G}$上定义了平移。对于伴随丛构造，我们需要这些平移定义在整个 X上。因此，我们将它们延拓到两个奇异纤维上。

命题 2.1。 存在一个保持 g 不变的全纯作用 ρ： $H \times X \to X$，在正则族上由下式给出

$$\rho_{\alpha,\beta}(q,[\zeta]) = \big(q,[\zeta + \alpha p_1(q) + \beta p_3(q)]\big). \tag{9}$$

证明。 在正则族上，将 α 和 β 分别改变整数会增加一个格向量。因此（9）对 $h = ([\alpha],\ [\beta]) \in H$是良定义的。列向量 p_1 和 p_3 在 q中是单值的，因此该公式在整个$\mathcal{G}$上定义了一个作用。

我们首先将该作用延拓到 $q = 0$。固定代表元 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$。在归一化坐标中， $p_1(q)$ 和 $p_3(q)$ 变为 $(1,\ 0)^{\mathsf{T}}$ 和 $(a(q)\ c(q))^{\mathsf{T}}$。因此平移为

$$\widehat{\zeta} \longmapsto \widehat{\zeta} + (\alpha + \beta a(q), \beta c(q))^{\mathsf{T}}.$$

$\frown$ $\frown$为检验穿过中心纤维的延拓，使用 $z_1 = e^{2\pi i\zeta_1}$、 $y_k = q^{-k}e^{2\pi i\zeta_2}$ 和 $x_k = q/y_k$。在节点图的去心部分上，该平移变为

$$\rho_{\alpha,\beta}(z_1, x_k, y_k)_k = \left(e^{2\pi i(\alpha+\beta a(q))}z_1,\ e^{-2\pi i\beta c(q)}x_k,\ e^{2\pi i\beta c(q)}y_k\right)_k, \qquad q = x_k y_k. \tag{10}$$

系数 a, c 在 $q = 0$ 处全纯，因此该公式在每个图册中都可延拓穿过中心纤维。令 $u = e^{2\pi i(\alpha+\beta a(q))}$ 和 $\mu = e^{2\pi i\beta c(q)}$。与图册过渡映射的相容性可由下式推出

$$\begin{aligned}\chi_k \circ \rho_{\alpha,\beta}(z_1, x_k, y_k)_k &= (uz_1, q\mu^{-1}x_k, \mu x_k^{-1})_{k+1}\\ &= \rho_{\alpha,\beta} \circ \chi_k(z_1, x_k, y_k)_k \qquad (x_k \neq 0).\end{aligned}$$

因此，局部映射定义了链 $\mathcal{V}$ 上的变换。我们还必须验证它们能否下降到周期商上。生成元 γ_1, γ_2 满足

$$\begin{aligned}\gamma_1 \circ \rho_{\alpha,\beta}(z_1, x_k, y_k)_k &= (u_a u z_1,\ u_c^{-1}\mu^{-1}x_k,\ u_c\mu y_k)_k\\ &= \rho_{\alpha,\beta} \circ \gamma_1(z_1, x_k, y_k)_k,\\ \gamma_2 \circ \rho_{\alpha,\beta}(z_1, x_k, y_k)_k &= (u_b u z_1,\ u_d^{-1}\mu^{-1}x_k,\ u_d\mu y_k)_{k+1}\\ &= \rho_{\alpha,\beta} \circ \gamma_2(z_1, x_k, y_k)_k.\end{aligned}$$

因此，这些变换下降到 $\mathcal{V}/\Gamma$。还需验证它们仅依赖于 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 中 α 和 β 的等价类。在链 $\mathcal{V}$ 上，$\rho_{1,0}$ =Id，$\rho_{0,1} = \gamma_1$，因此

$$\rho_{\alpha+m,\beta+n} = \gamma_1^n \rho_{\alpha,\beta}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}.$$

节点上的公式验证了群律和联合全纯性。上述交换关系和整数平移恒等式使这些映射能够下降为 $\mathcal{V}/\Gamma$ 上的全纯H-作用。此作用在 $q \neq 0$ 上与原作用一致。

在 ∞ 处，(6) 将平移方向 $\alpha p_1 + \beta p_3$ 映为 $\alpha p_{1,\infty} - \beta p_{3,\infty}$。这里，$p_{j,\infty}$ 是 P_∞ 的第 j 列。将 $C(q)$ 替换为 $C(-w)$，并取参数 $(\alpha, -\beta)$，可得相同的计算。这就在 ∞ 处的完备化上定义了一个全纯 H-作用。

接下来需要检查粘合。两者 $\rho_{\alpha,\ \beta}$ 以及 τ_σ 都是作用在 $\mathcal{G}$上的逐纤维平移，因此它们彼此交换。由此，(8)使两个补全端上的作用相互交织。这些作用粘合成一个全纯 H-作用，作用于 X。每个局部公式都固定基坐标，因此该作用保持 g。 □

该作用现为第4节中的全纯伴随丛提供了结构。接下来我们证明一个 $\mathbb{T}^2$-等变光滑分裂 X，以确定它们的光滑类型。

3. 等变光滑分裂

我们建立一个 $\mathbb{T}^2$-等变光滑分裂 X，从而确定第4节中关联丛的光滑结构。第一步是使 [17, 第 5]节中的相对平凡化具有等变性，同时保留其预先规定的边界坐标。随后比较两个边界映射，即可将这些平凡化粘合起来。剩下的四维因子就是 [17, 第 7]节中确定的同伦球面。在本节中，令

$$K_0 = \{|q| \le 1\}, \qquad K_\infty = \{|w| \le 1\}, \qquad w = q^{-1}, \qquad S = \{|q| = 1\}.$$

如 [17, 第 2 节所述，$N_0 \to K_0$ 和 $N_\infty \to K_\infty$ 是椭圆曲线族在穿孔圆盘上的标准单节点完备化

$$\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + (t+i)\mathbb{Z}), \qquad \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + (s+i)\mathbb{Z}),$$

这些完备化使用了与前一节类似的局部节点模型，但省略了额外的 z_1 坐标。每个全空间都是一个紧致光滑四维流形，其边界位于正则值之上。在 N_0 的正则部分上，坐标为

$$q = re^{2\pi i\theta}, \qquad t = \theta + \frac{\log r}{2\pi i}, \qquad [\mu + (t+i)\nu] \in \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + (t+i)\mathbb{Z}).$$

这些实坐标（r, $[\theta, \mu, \nu]$）满足

$$(\theta + 1, \mu, \nu) \sim (\theta, \mu + \nu, \nu). \tag{11}$$

对于 N_∞，使用 w, s 代替 q, t 时，相同的坐标和约定仍然成立。

3.1. 不变相对平凡化。 [17, 节 5] 中的变形将端块连接到一个乘积。我们先回顾其参数族和指定的向量场，然后再施加等变性。周期为

$$P_\lambda(t) = P_{\mathrm{tw}}(\lambda q) \begin{pmatrix} I_2 & tB \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \lambda \le 1, \tag{12}$$

其中 $P_1 = P$ 且

$$P_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t+i \end{pmatrix}.$$

令 $\mathfrak{B}_I$ 表示通过同时完成此参数族得到的光滑全空间，如 [17,第 5] 节所述。它带有一个真映射

$$\Pi = (\lambda, q) : \mathfrak{B}_I \longrightarrow I \times \Delta_{1+\eta},$$

其中 $I \supset [0,1]$ 是一个开区间，$\Delta_{1+\eta}$ 是一个圆盘，且 $\eta > 0$。切片 $\mathcal{B}_\lambda = \Pi^{-1}(\{\lambda\} \times K_0)$ 满足

$$\mathcal{B}_1 = \overline{\mathcal{G}}_0|_{K_0}, \qquad \mathcal{B}_0 = E_i \times N_0.$$

该构造给出了定义在 $\mathfrak{B}_I$ 上的光滑向量场 V，满足

$$d\lambda(V) = 1, \qquad dq(V) = 0. \tag{13}$$

我们使用实周期坐标 $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^{\mathsf{T}}$，其定义为 $[\zeta] = [P_\lambda(t)v]$。在$q = re^{2\pi i\theta}$的条件下，这些坐标满足

$$(\theta + 1, v_1, v_2, v_3, v_4) \sim (\theta, v_1, v_2 + v_4, v_3, v_4).$$

在围绕 S的固定开环带上，向量场的形式为

$$V = \partial_\lambda|_{(r,\theta,v)},$$

因此其流会发生变化，同时保持 λ、 r、 θ和 v 固定不变。为了准确计算边界粘合映射，需要规定这种行为。下面的引理通过对 V进行平均化，使该流成为等变的，同时不改变（13）或其环带表达式。其 underlying

族和向量场构造于 [17, 第 5]节。对于第4节中的伴随丛构造，我们将这一相对平凡化加强为一个 $\mathbb{T}^2$-等变的平凡化。

引理 3.1. 存在一个 $\mathbb{T}^2$-等变微分同胚

$$D_0 : \overline{\mathcal{G}}_0|_{K_0} \longrightarrow \mathbb{T}^2 \times N_0.$$

它可延拓穿过切割圆 S。在该圆周围的一个开环带上，

$$D_0(q, [P(t)v]) = ([v_1, v_3], (r, [\theta, v_2, v_4])). \tag{14}$$

证明. 我们首先将环面作用延拓到整个参数族。在其正则部分上，定义 $h = ([\alpha], [\beta]) \in \mathbb{T}^2$ 的作用为

$$\rho_{\alpha,\beta}(\lambda, q, [\zeta]) = (\lambda, q, [\zeta + \alpha p_{1,\lambda}(q) + \beta p_{3,\lambda}(q)]),$$

其中 $p_{1,\lambda}, p_{3,\lambda}$ 是 P_λ 的第一列和第三列，而 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。这些平移满足群律且随参数光滑变化，因此它们在正则族上定义了一个光滑的 $\mathbb{T}^2$-作用。

计算 命题 2.1 中的结果，将 $C(q)$ 替换为 $C(\lambda q)$，即可得到节点图公式：

$$\rho_{\alpha,\beta}(\lambda, z_1, x_k, y_k)_k = \left(\lambda, e^{2\pi i(\alpha+\beta a(\lambda q))} z_1, e^{-2\pi i \beta c(\lambda q)} x_k, e^{2\pi i \beta c(\lambda q)} y_k\right)_k. \tag{15}$$

该公式可光滑地延拓到 $q = 0$ 上，并保持 λ 和 $q = x_k y_k$不变。它还与参数族的图册过渡映射和甲板变换相交换：

$$\chi_k \circ \rho_{\alpha,\beta} = \rho_{\alpha,\beta} \circ \chi_k,$$
$$\rho_{\alpha,\beta} \circ \gamma_j = \gamma_j \circ \rho_{\alpha,\beta}, \qquad j = 1, 2.$$

因此，这些映射下降到完备化上。它们只依赖于（$[\alpha]$, $[\beta]$），并保留群律，从而在 $\mathfrak{B}_I$上给出一个光滑的 $\mathbb{T}^2$作用。记$\rho_h = \rho_{\alpha,\ \beta}$。

下一步是使参数切片之间的传输在此作用下等变。不变向量场具有一个与该作用相交换的局部流。因此，我们利用 $\mathbb{T}^2$上的归一化哈尔测度 dh对 V 进行平均化：

$$\overline{V} = \int_{\mathbb{T}^2} (\rho_h)_* V \, dh. \tag{16}$$

作用的光滑性和 $\mathbb{T}^2$ 的紧致性确保 $\overline{V}$是光滑的。哈尔测度的不变性蕴含（ρ_h）$_* V = V$。由于该作用保持 λ 和 q,

$$d\lambda(\overline{V}) = \int_{\mathbb{T}^2} 1 \, dh = 1, \qquad dq(\overline{V}) = 0.$$

还需检查平均化保持环带标记。对于 $j = 1$，3，我们有$p_{j,\ \lambda} = P_\lambda(t)e_j$，因此

$$[P_\lambda(t)v + \alpha p_{1,\lambda} + \beta p_{3,\lambda}] = [P_\lambda(t)(v + \alpha e_1 + \beta e_3)].$$

因此，在环带上，

$$\rho_{\alpha,\beta}(\lambda, r, \theta, v) = (\lambda, r, \theta, v + \alpha e_1 + \beta e_3).$$

此翻译独立于 λ，因此 e

$$(\rho_h)_* \left(\partial_\lambda|_{(r,\theta,v)}\right) = \partial_\lambda|_{(r,\theta,v)}.$$

由于环带是不变的，且所规定的场在这些平移下保持不变，平均化在那里使其保持不变：

$$\overline{V} = \int_{\mathbb{T}^2} V \, dh = V = \partial_\lambda|_{(r,\theta,v)}.$$

令 $\mathcal{F}_\tau$ 为 V的流。由于¯Π 的真性，使得 $\Pi^{-1}([0,1]\times K_0)$ 是紧的。由于$\lambda=1$ 且 $\dot{q}=0$，从 $\mathcal{B}_0$ 出发的轨迹在其定义于$0\le\tau\le 1$时始终留在该集合中。 [17, 第 5] 节中的延拓论证给出时间一映射，而反向时间论证给出其逆映射，因此

$$\mathcal{F}_1:\mathcal{B}_0\longrightarrow\mathcal{B}_1$$

是一个微分同胚。对稍大的闭圆盘应用同样的论证，即可将其延拓至切割圆。

不变性（ρ_h）$_*V=V$¯蕴含¯

$$\mathcal{F}_\tau\circ\rho_h=\rho_h\circ\mathcal{F}_\tau$$

由 [23,推论 9.14] 可得。因此$\mathcal{F}_1$ 是 $\mathbb{T}^2$-等变的。在环带上，

$$\mathcal{F}_1(q,[P_0(t)v])=(q,[P_1(t)v]).$$

在 $\lambda=0$ 处，

$$P_0(t)v=\begin{pmatrix}v_1+iv_3\\ v_2+(t+i)v_4\end{pmatrix}.$$

因此， $[v_1,v_3]$ 是 E_i上的实坐标，而 $[v_2,v_4]$ 是 N_0的正则纤维上的纤维坐标。该作用将 E_i 平移 $[\alpha+i\beta]$，并固定 N_0。将$\mathcal{F}_1^{-1}$与如下识别复合

$$E_i\times N_0\longrightarrow\mathbb{T}^2\times N_0,\qquad([x+iy],w)\longmapsto([x,y],w),$$

我们得到等变微分同胚 D_0 其环带公式为（14）。 □

现在，我们在 ∞ 处应用相同的构造，使用 [17, 第 5], 节中的参数族和给定向量场，其周期为

$$P_{\infty,\lambda}(s)=P_{\mathrm{tw}}(-\lambda w)\begin{pmatrix}I_2 & sB\\ 0 & I_2\end{pmatrix},\qquad s=-t.$$

引理 3.1 的证明适用于将 λq 替换为 $-\lambda w$。坐标变换（6）在环面标记中引入了反射：元素 $h=$（$[\alpha]$, $[\beta]$）的作用为

$$\zeta_\infty\longmapsto\zeta_\infty+P_\infty(s)(\alpha,0,-\beta,0)^{\mathsf{T}}.$$

所得的微分同胚

$$D_\infty:\overline{\mathcal{G}}_\infty|_{K_\infty}\longrightarrow\mathbb{T}^2\times N_\infty$$

满足

$$D_\infty(h\cdot p)=(R_Th)\cdot D_\infty(p),\qquad R_T[x,y]=[x,-y],$$

其中目标作用是在第一因子上的平移。因此， D_∞ 关于由 R_T 修正的环面作用是等变的。其在原坐标中的环带公式为

$$D_\infty(q,[P(t)v])=\big([v_1,-v_3],(r^{-1},[-\theta,v_2,-v_4])\big).$$

3.2. 边界识别与等变粘合。 保留下来的环带标记使我们能够比较切割圆上的两个端平凡化。在 S上，我们有 $t=\theta\in\mathbb{R}$，而 τ_σ 加上实周期向量

$$\mathbf{a}(\theta)=\left(0,-\frac{\theta(\theta+1)}{2},0,\theta\right)^{\mathsf{T}}.$$

因此， D_0 和 D_∞ 的环带公式给出

$$f_S:=D_\infty\circ\Phi|_{g^{-1}(S)}\circ D_0^{-1}=R_T\times\psi:\mathbb{T}^2\times\partial N_0\longrightarrow\mathbb{T}^2\times\partial N_\infty,\tag{17}$$

其中

$$\psi[\theta,\mu,\nu]=\left[-\theta,\mu-\frac{\theta(\theta+1)}{2},-\nu-\theta\right].$$

映射 ψ 正是 [17, 第 7] 节的边界微分同胚。

命题 3.2。 令 $Y = N_0 \cup_\psi N_\infty$。存在一个 $\mathbb{T}^2$等变微分同胚

$$X \cong_{\mathbb{T}^2} \mathbb{T}^2 \times Y,$$

其中 $\mathbb{T}^2$ 作用于 X 的方式为 命题 *2.1*，作用于 $\mathbb{T}^2 \times Y$ 的方式为平移

$$h \cdot (k, w) = (h + k, w), \qquad h, k \in \mathbb{T}^2, w \in Y.$$

证明。 如 [17, 第 7] 节所述，领圈粘合赋予 Y 其光滑结构。为使两端的平凡化具有相同的环面作用，在 ∞ 处通过如下方式修正标记：

$$\widetilde{D}_\infty = (R_T \times \mathrm{id}_{N_\infty}) \circ D_\infty.$$

由 引理 3.1 以及在 ∞ 处相应的公式可知，对于每个 $h \in \mathbb{T}^2$，都有

$$\begin{aligned} D_0(h \cdot p) &= h \cdot D_0(p), \\ \widetilde{D}_\infty(h \cdot p) &= (R_T \times \mathrm{id}_{N_\infty})((R_T h) \cdot D_\infty(p)) \\ &= h \cdot \widetilde{D}_\infty(p). \end{aligned}$$

现在，两个块微分同胚均关于标准平移作用等变。同样的修正消除了边界映射中的环面反射。具体而言，记$\Phi_S = \Phi|_{g^{-1}(S)}$， （17）给出

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_\infty \circ \Phi_S &= (R_T \times \mathrm{id}_{N_\infty}) \circ (R_T \times \psi) \circ D_0 \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^2} \times \psi) \circ D_0. \end{aligned}$$

因此，块映射及其逆映射都保持边界识别。它们诱导出一个等变同胚，并且在每个块上光滑，

$$D : X \longrightarrow \mathbb{T}^2 \times Y.$$

由于 $\mathbb{T}^2$ 是紧致的，作用是适当的。等变同胚 D 在每个块上限制为微分同胚。根据等变光滑化定理 [22, 定理 9.4], ，可以在公共边界的一个 $\mathbb{T}^2$-不变邻域内对其进行调整，从而得到

$$X \cong_{\mathbb{T}^2} \mathbb{T}^2 \times Y.$$

□

粘合映射 ψ 与 [17, 第 7], 节中的映射一致，因此 Y 是同一个光滑四维流形。特别地， Y 根据 [17,命题 7.2]是一个同伦四维球面。这一事实将与 Hirsch乘积定理一同用于确定第4节中关联丛的光滑类型。

4. 主定理的证明

现在我们结合 X 的全纯作用和等变光滑分裂来证明主定理。

定理 1.1。 设 L_1、...、 L_{2s} 是紧致连通复流形 B 上的全纯线丛，其中 $s \geq 1$。将它们的单位圆丛在 B 上的纤维积记为

$$P = S(L_1) \times_B \cdots \times_B S(L_{2s}).$$

那么 $S^4 \times P$ 具有复结构。

我们先处理两个线丛。受 Sankaran 和 Thakur 的圆丛构造启发， [33], 我们构造一个纤维为 X 的全纯伴随丛。紧致环面约化和等变分裂将其底层光滑流形识别为 $P \times Y$。随后由 Hirsch 定理可得与 $P \times S^4$ 微分同胚。对于两个以上的线丛，其余的圆因子为同一构造提供了一个新的复基底。

4.1. **两个线丛**。设 $H = (\mathbb{C}^*)^2$ 和 $\mathbb{T}^2 = (S^1)^2$。我们使用H-作用命题 2.1 中的全纯 $\mathbb{T}^2$-等变光滑分裂 X，它来自命题 3.2。对于右主 H-丛的伴随丛，我们的约定是

$$(qh, x) \sim (q, hx).$$

命题 4.1。设 B 是紧致连通复流形，且 L_1、L_2 是 B 上的全纯线丛。设

$$Q = L_1^\times \times_B L_2^\times, \qquad P = S(L_1) \times_B S(L_2).$$

那么 $M = Q \times_H X$ 是紧复流形，并且

$$\mathcal{M} \cong_{\text{diff}} P \times S^4.$$

证明。首先，全纯主丛 $Q \to B$ 以及 X 上的全纯 H 作用赋予$\mathcal{M}$ 一个复结构。在 Q 的局部全纯平凡化中，关联丛

$$\mathcal{M} = Q \times_H X \longrightarrow B$$

具有全纯过渡映射和纤维 X [20, 第 3.2(b)–(d) 节]。底空间和纤维的紧致性使得 $\mathcal{M}$ 是紧致的。

为确定底层光滑流形，使用由厄米度量确定的紧化约化 $P \subset Q$。伴随丛 $P \times_{\mathbb{T}^2} X \to B$ 是光滑的，其全空间与$\mathcal{M}$微分同胚。由于每个 $q \in Q$ 都有唯一的表达式

$$q = pr, \qquad p \in P, \quad r \in (\mathbb{R}_{>0})^2,$$

映射

$$\begin{aligned} Q \times_H X &\longrightarrow P \times_{\mathbb{T}^2} X \\ [q, x] &\longmapsto [p, rx] \end{aligned}$$

及其逆映射

$$[p, x] \longmapsto [p, x]$$

都是光滑的逆映射，从而得到

$$Q \times_H X \cong_{\text{diff}} P \times_{\mathbb{T}^2} X.$$

为保证定义良好，将 (q, x) 替换为 $(qh, h^{-1}x)$，并写作 $h = ta$，其中 $t \in \mathbb{T}^2$ 和$a \in (\mathbb{R}_{>0})^2$。其像于是为 $[pt, t^{-1}rx] = [p, rx]$。

等变分裂现在将伴随丛与 $P \times Y$等同。令$\phi\colon\ \mathbb{T}^2 \times Y \to X$ 为命题 3.2的等变微分同胚。映射

$$\begin{aligned} P \times_{\mathbb{T}^2} X &\longrightarrow P \times Y \\ [p, \phi(t, y)] &\longmapsto (pt, y) \end{aligned}$$

以及逆映射

$$(p, y) \longmapsto [p, \phi(1, y)]$$

由于 ϕ 与环面作用相互交织，因此定义良好。它们是光滑的逆映射，所以

$$P \times_{\mathbb{T}^2} X \cong_{\text{diff}} P \times Y.$$

最后， Y 根据 [17, 命题 72]，是一个光滑的同伦四维球面。由于 P 是闭的且维数为正，Hirsch 定理 [19, 定理 6(a)] 给出

$$P \times Y \cong_{\text{diff}} P \times S^4.$$

这些微分同胚将紧复流形 $\mathcal{M}$ 与所需的光滑积相识别：

$$\mathcal{M} \cong_{\text{diff}} P \times S^4$$

□

4.2. **偶数个线丛**。 对于 $s > 1$，我们保留前两个线丛，并使用剩余的 $2s-2$ 个圆因子构成一个新的基底。剩余线丛上的陈联络具有 (1,1) 型的曲率。结合环面纤维的偶数维数，我们可以应用下面引用的结果。该结果赋予新基底一个复结构，并使其具有到 B 的全纯投影。对 L_1、L_2 的全纯拉回随后将证明归结为 命题 4.1。对于 $s > 1$，令

$$\widehat{B} = S(L_3) \times_B \cdots \times_B S(L_{2s}),$$

$\widehat{\ }$带有自然投影 $f\colon\ B \to B$。根据 [16, 命题 4.26]，B 具有所需的复$\widehat{\ }$结构，且 f 是全纯的。对于 $s = 1$，令 $B = B$，并令 $f = \mathrm{id}_B$。定义

$$\widehat{Q} = (f^*L_1)^\times \times_{\widehat{B}} (f^*L_2)^\times, \qquad \widehat{\mathcal{M}} = \widehat{Q} \times_H X.$$

$\widehat{\ }$定理 *1.1* 的证明情形 $s = 1$ 是 命题 4.1。对于 $s > 1$，新的基 B 是紧致且连通的，因为其基和纤维都是紧致且连通的。由于 f是全纯的， f^*L_1和 f^*L_2也都是全纯的。因此，双线丛构造适用于$\widehat{\ }$上的 B。赋予拉回度量后，所得的单位圆纤维积满足

$$\widehat{P} = S(f^*L_1) \times_{\widehat{B}} S(f^*L_2) \cong_{\text{diff}} P.$$

这一识别恢复了圆因子的原始排列。它将 ($\widehat{\ }b$， v_1， v_2)（其中 $\widehat{\ }b = (b,\ v_3,\ \ldots\ldots,\ v_{2s}) \in \widehat{B}$）映射到 $(b,\ v_1,\ \ldots\ldots,\ v_{2s})$。现在应用 命题 4.1 即可得到所需的复流形：

$$\widehat{\mathcal{M}} = \widehat{Q} \times_H X \cong_{\text{diff}} \widehat{P} \times S^4 \cong_{\text{diff}} P \times S^4.$$

□

对于奇数个线丛，添上一个平凡线丛即可使数量变为偶数，并为全空间增加一个 S^1 因子。

推论 1.2。 如果 P 是紧致连通复流形上奇数个全纯线丛的单位圆丛的纤维积，那么 $S^4 \times P \times S^1$具有复结构。

证明。 将这个奇数写成 $2s+1$，其中 $s \geq 0$。平凡线丛 $\mathbb{C} = B \times \mathbb{C}$满足

$$P \times_B S(\underline{\mathbb{C}}) \cong P \times S^1.$$

应用 定理 1.1 于 L_1、……、L_{2s+1}、$\mathbb{C}$即可证明该断言。 □

存在性证明完成后，我们记录从g 继承而来的全纯映射： $X \to \mathbb{P}^1$。 H对 g 的不变性使其能够逐纤维下降到伴随丛上。下面的命题描述了该映射及其奇异纤维。

命题 4.2。 复流形 M 具有一个真满射全纯映射

$$\widehat{g} : \widehat{\mathcal{M}} \longrightarrow \widehat{B} \times \mathbb{P}^1, \qquad [q, x] \longmapsto (\pi(q), g(x)),$$

其中 $\pi : Q \to B$ 是丛投影。其正则纤维是复二维环面，而其奇异值为 $B \times \{0、\infty\}$。每个奇异纤维双全纯于

$$E_i \times C_{\mathrm{nod}}, \qquad E_i = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}), \qquad C_{\mathrm{nod}} = \mathbb{P}^1/(0 \sim \infty).$$

证明。 映射 $g : X \to \mathbb{P}^1$ 和 $\pi : \widehat{Q} \to \widehat{B}$ 均为 H-不变且全纯，因此

$$\widehat{g}([q, x]) := (\pi(q), g(x))$$

定义良好且全纯。在 Q 的局部全纯平凡化下，此映射是底空间上的恒等映射与 g 的乘积。因此，其满射性、纤维和奇异值均可由 g 的相应性质推出。$\mathcal{M}$ 的紧致性给出真性。□

5. 以旗流形为基底的齐性空间

我们通过 推论 1.3 和 1.4 将齐性空间实现为旗流形上的单位圆纤维积来证明这两个推论。我们首先描述它们的光滑主环面丛，然后利用旗流形基底将相关线丛全纯地实现出来。这样便将这些空间置于 定理 1.1的框架中。所有群和商空间都赋予其标准的光滑结构。

5.1. 旗流形上的环面丛。

推论 1.3。 设 G 是一个紧致连通李群， K 是 G 中某个环面的中心化子， L 是 K 的闭正规子群。若对于某个 $s \geq 1$ 有 $K/L \cong \mathbb{T}^{2s}$ ，则 $S^4 \times G/L$ 具有复结构。

证明。 我们将 $K = C_G(A)$ 记作 G 中的一个环面 A ，并记 $F = G/K$。存在一个有限覆盖

$$Z(G)^0 \times [G, G] \longrightarrow G, \qquad (z, h) \longmapsto zh,$$

其中 $Z(G)^0$ 是中心的单位连通分支， $[G, G]$ 是交换子子群。 $[G, G]$ 是紧致、连通且半单的。由于 $Z(G)^0 \subseteq K$ 在 F 上平凡作用，我们可以将 G/K 化归为半单情形。博雷尔的结果 [3, 定理 2 和 4] 表明， F 是一个单连通齐性凯勒流形，因而是一个凯勒C空间。然后根据第4节中的格里菲斯消失定理、定理 3′]，我们得到

$$H^2(F, \mathcal{O}_F) = 0. \tag{18}$$

这里$\mathcal{O}_F$ 是全纯函数层。消失式（18）将在我们通过特征描述光滑环面丛后，给出全纯线丛。

接下来我们描述 F 上的光滑丛。记 $P = G/L$。由于 $L \triangleleft K$，投影

$$\pi : P \longrightarrow F, \qquad gL \longmapsto gK,$$

具有良定义的右 K/L-作用

$$(gL) \cdot (kL) = gkL.$$

$G \to F$ 的局部光滑截面 $\sigma : U \to G$ 定义了一个等变平凡化

$$U \times K/L \longrightarrow \pi^{-1}(U), \qquad (b, kL) \longmapsto \sigma(b)kL.$$

因此， $P \to F$ 是一个光滑主 K/L-丛。

为将此主丛表示为单位圆纤维积，我们固定一个识别$K/L \cong (S^1)^{2s}$ ，并取坐标特征

$$\chi_j : K/L \longrightarrow S^1, \qquad \chi_j(t_1, \ldots, t_{2s}) = t_j, \qquad 1 \leq j \leq 2s.$$

这些特征构成 K/L的特征格的一组基。相应的光滑复线丛定义为

$$E_j = P \times_{\chi_j} \mathbb{C}, \qquad (pt, z) \sim (p, \chi_j(t)z).$$

由于每个 χ_j 都取值于 S^1，因此 $|[p,z]|_{E_j} = |z|$ 是 E_j 上定义良好的厄米度量。考虑映射

$$P \longrightarrow S(E_1) \times_F \cdots \times_F S(E_{2s}), \qquad p \longmapsto ([p,1], \ldots, [p,1]).$$

在由 P 的局部截面诱导的平凡化中，该映射为

$$(b,t) \longmapsto (b, \chi_1(t), \ldots, \chi_{2s}(t)).$$

由于 (χ_1、……、 χ_{2s}) 是 K/L 与 $(S^1)^{2s}$ 之间选定的识别，因此这是光滑主环面丛的一个同构。

剩下的问题是将 E_j 实现为全纯线丛。这正是（18）发挥作用之处。层的指数序列

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{O}_F \xrightarrow{f \mapsto e^{2\pi i f}} \mathcal{O}_F^* \longrightarrow 1,$$

诱导出如下正合片段

$$\mathrm{Pic}(F) = H^1(F, \mathcal{O}_F^*) \xrightarrow{c_1} H^2(F; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(F, \mathcal{O}_F),$$

其中，$\mathcal{O}_F^*$ 是处处不为零的全纯函数层， $\mathbb{Z}$ 是整数常值层。这里我们将常值层 $\mathbb{Z}$ 的上同调与奇异上同调等同，因为 F是光滑流形。由于 $H^2(F, \mathcal{O}_F) = 0$，余边界映射 c_1是满射。因此， $c_1(E_j)$是全纯线丛 L_j的第一陈类。光滑复线丛由其第一陈类分类，因此存在光滑线丛同构 $\phi_j : E_j \cong L_j$。我们在 L_j 上赋予由 ϕ_j传输而来的度量。因此

$$\begin{aligned} P &\longrightarrow S(L_1) \times_F \cdots \times_F S(L_{2s}), \\ p &\longmapsto (\phi_1([p,1]), \ldots, \phi_{2s}([p,1])) \end{aligned} \tag{19}$$

是主环面丛之间的微分同胚。

因此， G/L 是 $2s$ 在紧致连通复流形 F上的全纯线丛 $s \geq 1$的单位圆纤维积。由于 $s \geq 1$，定理 1.1 适用，故可得结论。□

5.2. **紧李群**。极大环面丛 $\mathbb{T}_G \to G \to G/\mathbb{T}_G$ 的全空间就是紧李群本身。我们将推论 1.3 应用于该丛。对于 G 正偶维的情形，剩下要验证的是其极大环面也具有偶数维。

推论 1.4。 对于任意偶维紧致连通李群 G， $S^4 \times G$都具有复结构。

证明。对于紧致连通李群 G，我们取一个极大环面 $\mathbb{T}_G$。它在 G 中的中心化子是 $K = \mathbb{T}_G$ [7, 第四章，定理2.3(i)], ，旗标底空间为 $G/\mathbb{T}_G$。令 $L =\{e\}$，则

$$K/L = \mathbb{T}_G, \qquad G/L = G.$$

因此，推论 1.3 中的相关丛就是 $\mathbb{T}_G \to G \to G/\mathbb{T}_G$。现在我们来检验其环面秩的正性和奇偶性。

写出 $r =$维 $\mathbb{T}_G$。由于 $C_G(\mathbb{T}_G) = \mathbb{T}_G$，平凡的极大环面将迫使 $G = \{e\}$。因此 $r > 0$。旗流形 $G/\mathbb{T}_G$ 具有标准复结构 [3, 定理 2]，所以

$$\dim G - r = 2 \dim_{\mathbb{C}}(G/\mathbb{T}_G).$$

因此 维数 $G \equiv r$ (模 2)。根据推论的假设， r 是正偶数。推论 1.3 适用于 $K = \mathbb{T}_G$ 和 $L = \{e\}$。□

注记 5.1。 对于 $K = \mathbb{T}_G$，选择 $L = \{e\}$ 和 $L = K$ 分别对应于 G 和 $G/\mathbb{T}_G$，在后一种情况下有 $\dim(K/L) = 0$ 。然而， $S^4 \times (\mathrm{SU}(3)/\mathbb{T}^2)$和 $S^4 \times (G_2/\mathbb{T}^2)$ 都不具有近复结构，因此 推论 1.3中的正秩假设是必要的。

下面的概述解释了这两个例子中 $\dim(K/L) = 0$ 时存在的障碍。记 $M_1 = S^4 \times (\mathrm{SU}(3)/\mathbb{T}^2)$ 和 $M_2 = S^4 \times (G_2/\mathbb{T}^2)$。如果 M_i 具有近复结构 J_i，则复向量丛 $E_i = (TM_i, J_i)$ 将满足 $\mathrm{ch}_{2j}(E_i) = 0$对于 $j \geq 1$，因为 M_i 是稳定可平行化的 [36, 第 3 节1]。然后，利用 Bott 周期性、线丛生成元和上同调环；参见 [1, 2, 9], 计算可得

$$c_5(E_1) \in 8H^{10}(M_1;\mathbb{Z}), \qquad c_8(E_2) \in 16H^{16}(M_2;\mathbb{Z}).$$

这与$\langle c_{\mathrm{top}}(E_i)\ [M_i]\rangle = \chi(M_i)$矛盾，因为 $\chi(M_1) = 12$ 和 $\chi(M_2) = 24$ [26,第 14 节和推论 11.12]。

6. Stiefel 流形

我们应用齐性空间判据来证明 推论 1.5 对复、四元数和实 Stiefel 流形成立。证明将每个标架空间识别为 G/L并检验环面 K/L的秩。随后，我们利用典范商丛描述旗流形基底上的相应全纯线丛。

推论 1.5。 对于 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{H}$，令 $V_j(\mathbb{F}^n)$ 表示由 $\mathbb{F}^n$ 中有序正交归一的 j-标架构成的 *Stiefel* 流形。对于 $s \geq 1$，这些流形

$$S^4 \times V_{2s}(\mathbb{C}^n), \qquad S^4 \times V_{2s}(\mathbb{H}^n), \qquad S^4 \times V_{4s}(\mathbb{R}^n)$$

分别具有复结构 $n \geq 2s$ 和 $n > 4s$。当 $n = 4s$ 时，最后一条断言对定向分支 $\mathrm{SO}(4s)$成立。

6.1. 齐性空间表示与证明。

证明推论 *1.5*。我们讨论复与四元数 r-标架，其中 $1 \leq r \leq n$，以及实 $2t$-标架，其中 $1 \leq 2t \leq n$。为应用该准则，我们选取群 G、环面A、中心化子 $K = C_G(A)$ ，以及子群 L 如下表所示：

G	A	$K = C_G(A)$	L
$\mathrm{U}(n)$	$\{\text{对角矩阵}(z_1, \ldots, z_r, I_{n-r}) : z_j \in S^1\}$	$\mathrm{U}(1)^r \times \mathrm{U}(n-r)$	$\mathrm{U}(n-r)$
$\mathrm{Sp}(n)$	$\{\mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_r, I_{n-r}) : z_j \in S^1\}$	$\mathrm{U}(1)^r \times \mathrm{Sp}(n-r)$	$\mathrm{Sp}(n-r)$
$\mathrm{SO}(n)$	$\{\mathrm{diag}(R(\theta_1) \ldots, R(\theta_t)\ I_{n-2t}) : \theta_j \in \mathbb{R}\}$	$\mathrm{SO}(2)^t \times \mathrm{SO}(n-2t)$	$\mathrm{SO}(n-2t)$

其中

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

在四元数情形中， S^1 属于 $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$的一个固定副本。标准矩阵群 $\mathrm{U}(n)$ 和 $\mathrm{Sp}(n)$ 分别保持标准复厄米型和四元数厄米型，而 $\mathrm{SO}(n)$ 保持欧几里得内积和定向。

环面 A 独立旋转前 r 条坐标直线，或前 t 个坐标二维平面，并固定其余子空间。任何与 A 对易的矩阵都必须

保持这些子空间中的每一个不变。在每条复坐标直线或四元数坐标直线上，它都必须按单位复数乘法作用。在每个实坐标二维平面上，它都必须按旋转作用。这些观察确定了表中的中心化子。在每一行中，L 是 K 到其圆因子的投影的核，因此是一个闭正规子群。因此，前两行中有 $K/L \cong \mathbb{T}^r$，第三行中有 $\mathbb{T}^t$。这些就是 $G/L \to G/K$ 的环面纤维。

每个正交标架都可以扩张为一个正交基。在实数情形中，当 $n > 2t$ 时，存在正向定向扩张。对于 $n = 2t$，我们考虑正向定向的完整标架。因此，G 在相应的标架空间上具有传递作用，其在标准标架处的稳定子为 L。因此，轨道映射将 G/L 与以下标架空间对应起来：

$$G/L \cong_{\mathrm{diff}} \begin{cases} V_r(\mathbb{C}^n), & G = \mathrm{U}(n), \\ V_r(\mathbb{H}^n), & G = \mathrm{Sp}(n), \\ V_{2t}(\mathbb{R}^n), & G = \mathrm{SO}(n),\ n > 2t. \end{cases}$$

对于 $n = 2t$，使用 $\mathrm{SO}(2t)$ 而不是 $V_{2t}(\mathbb{R}^{2t}) = \mathrm{O}(2t)$。

对于复数标架和四元数标架，$K/L \cong \mathbb{T}^r$；对于实数 $2t$标架，$K/L \cong \mathbb{T}^t$。在前两种情形中取 $r = 2s$，在第三种情形中取 $t = 2s$，即可使环面秩为正且为偶数。因此，上述对应关系使我们能够应用推论 1.3，从而证明所有断言。□

对于 $n = 2t = 4s$，完整标架空间 $V_{4s}(\mathbb{R}^{4s})$ 与 $\mathrm{O}(4s)$微分同胚。尽管推论 1.5 不适用于它，推论 1.4逐连通分支应用后表明$S^4 \times V_{4s}(\mathbb{R}^{4s})$ 也具有复结构。

四元数二标架情形也适用于具有 $m = 4$ 和 $l = 4k$, $k \geq 2$ 的定型 OT–FKM 等距超曲面，因为

$$M \cong_{\mathrm{diff}} S^4 \times M_+ \cong_{\mathrm{diff}} S^4 \times V_2(\mathbb{H}^k).$$

第一个微分同胚见 [31, 注 2(ii)], ，第二个则由[29]得出。因此，推论 1.5 意味着这些超曲面具有复结构。

6.2. **典范商线丛**。现在，我们将推论 1.3 证明中出现的特征线丛明确地构造出来。旗流形基底 G/K 具有具体的复模型，在这些模型上，逐次典范商丛是全纯线丛。它们的单位圆纤维积将重现 G/L。我们先从以下三个旗流形开始：

$$\begin{aligned} F^{\mathbb{C}}_{n,r} &= \{V_\bullet = (0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r \subseteq \mathbb{C}^n) : \dim_{\mathbb{C}} V_j = j\}, \\ F^{\mathbb{H}}_{n,r} &= \{V_\bullet = (0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r \subseteq \mathbb{C}^{2n}) : \dim_{\mathbb{C}} V_j = j,\ \omega|_{V_r} = 0\}, \\ F^{\mathbb{R}}_{n,t} &= \{V_\bullet = (0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_t \subseteq \mathbb{C}^n) : \dim_{\mathbb{C}} V_j = j,\ b|_{V_t} = 0\}^\circ. \end{aligned}$$

这里 ω 和 b 分别是标准复辛形式和对称双线性形式，定义如下：

$$\omega((z,w),(z',w')) = \sum_{a=1}^{n}(z_a w'_a - w_a z'_a), \qquad b(u,v) = \sum_{a=1}^{n} u_a v_a.$$

$\mathrm{Sp}(n)$ 在 $\mathbb{C}^{2n}$ 上的标准作用保持 ω，而 $\mathrm{SO}(n)$ 在$\mathbb{C}^n$ 上的标准作用保持 b。

我们将 F 记作相应的旗空间，并分别使用

$$(E,\ell) = (\mathbb{C}^n, r), \quad (\mathbb{C}^{2n}, r), \quad (\mathbb{C}^n, t),$$

。上标 ∘ 选取包含标准旗的连通分支

$$V_j^0 = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a_1, \ldots, a_j\}, \qquad a_j = \begin{cases} e_j, & F = F_{n,r}^{\mathbb{C}} \text{ or } F_{n,r}^{\mathbb{H}}, \\ (e_{2j-1} - ie_{2j})/\sqrt{2}, & F = F_{n,t}^{\mathbb{R}}. \end{cases}$$

这里，e_j 表示 $\mathbb{C}^n$ 或 $\mathbb{C}^{2n}$ 中的第 j 个标准基向量，具体取决于情况。

这些空间是 $\prod_{j=1}^{\ell}\mathrm{Gr}_j(E)$ 的光滑闭子簇，并承载诱导复结构。它们是旗流形基底的模型： G 在 F 上的作用是传递的，标准旗 $V_\bullet^0$ 处的稳定子为 K。因此，轨道映射诱导一个微分同胚

$$G/K \longrightarrow F, \qquad gK \longmapsto gV_\bullet^0.$$

坐标投影 $F \to \mathrm{Gr}_j(E)$、 $V_\bullet \mapsto V_j$ 是全纯的。$\mathrm{Gr}_j(E)$ 上的典范丛为

$$\mathcal{U}_j = \{(W, v) \in \mathrm{Gr}_j(E) \times E : \ v \in W\}, \qquad (W, v) \longmapsto W.$$

因此，它在 $V_\bullet \mapsto V_j$ 下的拉回为

$$\mathcal{S}_j = \{(V_\bullet, v) \in F \times E : \ v \in V_j\}, \qquad (V_\bullet, v) \longmapsto V_\bullet,$$

$F \times E$ 的一个全纯子丛，其在 $V_\bullet$ 上的纤维为 V_j。它们的逐次商

$$L_j = \mathcal{S}_j/\mathcal{S}_{j-1}, \qquad \mathcal{S}_0 = 0,$$

是纤维为 V_j/V_{j-1} 的全纯线丛。

我们赋予 L_j 由 E 上的标准厄米度量诱导的商度量。对于 $\kappa \in K$，记 $\kappa L = (z_1、 \ldots\ldots、 z_\ell) \in K/L \cong (S^1)^\ell$，并将坐标特征定义为 $\chi_j(\kappa L) = z_j$。由 K 的分块对角形式，

$$\kappa a_j = z_j a_j.$$

在 V_j^0/V_{j-1}^0 中，我们有

$$[\kappa a_j] = [a_j]\chi_j(\kappa L).$$

因此映射

$$(G/L) \times_{\chi_j} \mathbb{C} \longrightarrow L_j,$$
$$[gL, c] \longmapsto (gV_\bullet^0, [ga_j]c)$$

是良定义的。对于 $G \to F$ 的局部光滑截面 $g : U \to G$，向量 $[g(b)a_j]$ 构成 $L_j|_U$ 的单位标架。在这些标架下，丛映射为 $(b, \ c) \mapsto (b, \ c)$，因此它们是酉光滑线丛同构。

由此得到的单位标架定义映射

$$\Phi : G/L \longrightarrow S(L_1) \times_F \cdots \times_F S(L_\ell),$$
$$gL \longmapsto (gV_\bullet^0; [ga_1], \ldots, [ga_\ell]).$$

在给定的局部平凡化下， Φ 具有以下形式

$$(b, \kappa L) \longmapsto (b, \chi_1(\kappa L), \ldots, \chi_\ell(\kappa L)).$$

由于 $(\chi_1, \ldots, \chi_\ell) : K/L \to (S^1)^\ell$ 是一个李群同构， Φ 是主环面丛的微分同胚。因此，全纯典范商线丛将G/L 实现为所需的单位圆纤维积。

7. 透镜空间与矩角流形

我们证明推论 1.6和1.7 分别利用射影空间乘积和托里克簇上的全纯线丛。对于每种情形，我们都确定定理 1.1所需的单位圆纤维积。这些示例包括奇数维球面的乘积以及某些球面乘积的连通和，从而为与 S^4相乘的对象给出了明确的光滑因子。

7.1. 透镜空间与奇数维球面。对于整数 $a \geq 0$ 和 $p \geq 1$，我们将透镜空间定义为

$$L^{2a+1}(p) = S^{2a+1}/\mathbb{Z}_p.$$

这里，群 $\mathbb{Z}_p$ 由一个本原的 p次单位根生成。它通过标量乘法作用于单位球面 $S^{2a+1} \subset \mathbb{C}^{a+1}$。特别地， $L^{2a+1}(1) = S^{2a+1}$。

Co推论 1.6。设 $\ell \geq 2$ 为偶数，并设 $a_j \geq 0$、 $p_j \geq 1$ 为满足 $1 \leq j \leq \ell$的整数。则

$$S^4 \times \prod_{j=1}^{\ell} L^{2a_j+1}(p_j)$$

具有复结构。

证明。 我们首先将每个透镜空间实现为一个单位圆丛。随后，我们将这些圆丛组装到射影空间乘积上。对于任意 $\ell \geq 1$，令

$$B = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}^{a_j},$$

其投影为 $\mathrm{pr}_j\colon B \to \mathbb{P}^{a_j}$。沿着 pr_j 拉回全纯线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{a_j}}(-p_j)$，得到全纯线丛

$$L_j = \mathrm{pr}_j^{*}\, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{a_j}}(-p_j)$$

在 B 上。利用 $\mathbb{C}^{a+1}$ 上的标准厄米度量及诱导的张量积度量，我们有

$$S(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^a}(-1)) = \{(\lambda, v) : \lambda \in \mathbb{P}^a,\ v \in \lambda,\ |v| = 1\} \cong S^{2a+1},$$

and

$$S(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^a}(-p)) = \{(\lambda, \xi) : \lambda \in \mathbb{P}^a,\ \xi \in \lambda^{\otimes p},\ |\xi| = 1\}.$$

张量幂映射

$$S^{2a+1} \longrightarrow S(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^a}(-p)), \qquad v \longmapsto (\mathbb{C}v, v^{\otimes p}),$$

由于 $|v^{\otimes p}| = |v|^p$，该映射定义良好。我们选取 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^a}(-1)$ 的局部光滑单位标架 $e(b)$，并写作 $v = z\, e(b)$。于是有 $v^{\otimes p} = z^p e(b)^{\otimes p}$ ，其中 $e(b)^{\otimes p}$ 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^a}(-p)$ 的单位标架。因此，该映射在局部为

$$(b, z) \mapsto (b, z^p).$$

因此，这是一个光滑覆叠，其纤维恰好是标量 $\mathbb{Z}_p$-轨道，其中 $\mathbb{Z}_p$ 是 p 次单位根群。因此，它下降为一个微分同胚

$$L^{2a+1}(p) = S^{2a+1}/\mathbb{Z}_p \cong_{\mathrm{diff}} S(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^a}(-p)).$$

由于 L_j 是从 B的各个独立因子拉回的，这些圆丛识别给出

$$S(L_1) \times_B \cdots \times_B S(L_\ell) \cong_{\mathrm{diff}} \prod_{j=1}^{\ell} S(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{a_j}}(-p_j)) \cong_{\mathrm{diff}} \prod_{j=1}^{\ell} L^{2a_j+1}(p_j).$$

有 ℓ 个圆因子。当 ℓ为偶数时，定理 1.1 适用于该纤维积，并证明了该推论。□

取所有 $p_j = 1$ 可得到球面因子。特别是，$p_1 = p_2 = 1$、$a_1 = 1$ 和 $a_2 = 3$ 在 $S^4 \times S^3 \times S^7$ 上给出一个复结构。Qian–Tang–Yan [30, 定理 1.2 和 1.3] 将其识别为重数为 (4，3) 的不定型 OT–FKM 等距超曲面 $M \subset S^{15}$。

7.2. **矩角流形。** Cox [13] 构造了一个全纯主丛，其底空间是与光滑完备有理扇相关联的环面簇。Panov–Ustinovsky[28] 将其紧化约化识别为一个矩角流形。我们将此约化实现为全纯特征线丛的单位圆纤维积，并应用定理 1.1。McGavran 的多边形描述 [25] 以及 Bosio–Meersseman 的若干示例 [5] 随后给出了与 S^4相关的乘积的显式光滑因子。

推论 *1.7.* 设 Σ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个光滑完备有理扇，具有 m 条射线，其中 $m-d$为正偶数。那么 $S^4 \times_{\mathcal{Z}_\Sigma}$ 具有复结构，其光滑结构由第 *7.2.1* 节指定。特别地，这适用于具有偶数 $m \geq 4$的 *Delzant* m边形P_m 对应的 $S^4 \times_{\mathcal{Z}_{P_m}}$；也适用于 P 由 *Delzant* d单纯形经过奇数 $q \geq 1$ 次顶点截切 $d \geq 2$得到时的 $S^4 \times_{\mathcal{Z}_P}$；见式（*21*）和（*23*）。

7.2.1. *Cox* 丛的特征线丛。 设 Σ是 $\mathbb{R}^d$中的一个光滑完备有理扇，其本原射线生成元为 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}^d$。映射

$$A : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^d, \qquad e_j \longmapsto a_j,$$

该映射是满射，因为极大锥的生成元构成一个整基。取 $r = m - d$时，所诱导的环面同态给出

$$G = \ker\big((\mathbb{C}^*)^m \to (\mathbb{C}^*)^d\big) \cong (\mathbb{C}^*)^r, \qquad K = G \cap \mathbb{T}^m \cong \mathbb{T}^r.$$

群 G 通过逐坐标乘法作用于 Cox 开集

$$U_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \{z \in \mathbb{C}^m : z_j \neq 0 \text{ whenever } a_j \notin \sigma\}.$$

Cox 商定理将 $B_\Sigma = U_\Sigma / G$ 识别为与 Σ [13, 定理 2.1]对应的环面簇。由于扇是光滑的，

$$G \longrightarrow U_\Sigma \longrightarrow B_\Sigma$$

是一个全纯主丛。底空间 B_Σ 是紧的，因为扇是完备的[28,第 5] 节。

Put

$$A_\Sigma = \exp\big(\ker(A \otimes \mathbb{R})\big) \subset (\mathbb{R}_{>0})^m.$$

根据极分解 $G = K \times A_\Sigma$，对 A_Σ 取商可得到紧化约化，它是一个光滑主 K丛

$$K \longrightarrow \mathcal{Z}_\Sigma := U_\Sigma / A_\Sigma \longrightarrow B_\Sigma.$$

我们使用 $\mathcal{Z}_\Sigma$ 作为与 Σ [28,定理 2.2]相关联的矩角流形的光滑模型。

为应用主定理，我们将此紧化约化识别为全纯特征线丛的单位圆纤维积。特征格的一组基 $\chi_1, \dots, \chi_r$ 定义了一个全纯李群同构

$$\Psi : G \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^r, \qquad g \longmapsto (\chi_1(g), \dots, \chi_r(g)).$$

这些特征决定了全纯线丛

$$L_j = U_\Sigma \times_{\chi_j} \mathbb{C}, \qquad (qg, v) \sim (q, \chi_j(g)v).$$

Ψ 将 K 映射到 $(S^1)^r$，并将 A_Σ 映射到 $(\mathbb{R}_{>0})^r$。对于 L_j上的光滑厄米度量，该映射

$$\Phi : \mathcal{Z}_\Sigma \longrightarrow S(L_1) \times_{B_\Sigma} \cdots \times_{B_\Sigma} S(L_r),$$
$$[q]_{A_\Sigma} \longmapsto \left(\frac{[q,1]}{|[q,1]|_{L_1}}, \ldots, \frac{[q,1]}{|[q,1]|_{L_r}} \right)$$

定义良好：将 q 替换为 qa，其中 $a \in A_\Sigma$，会使第 j 个向量及其范数同时乘以同一个正数 $\chi_j(a)$。利用 $U_\Sigma \to B_\Sigma$ 的局部截面及其诱导的单位标架，Φ 的局部表达式为

$$(b,k) \longmapsto (b, \Psi(k)), \qquad k \in K.$$

由于 $\Psi|_K : K \to (S^1)^r$ 是李群同构，Φ 是微分同胚。

推论 *1.7* 的证明 对于 $\mathcal{Z}_\Sigma$。对于正偶数 $r = m - d$，上述识别将 $\mathcal{Z}_\Sigma$ 实现为 r 上的全纯线丛的单位圆纤维积，其中底空间为紧致连通复基底 B_Σ。应用 定理 1.1 即可证明该断言。

□

7.2.2. 多边形与一个显式六边形。设 P_m 是一个具有 $m \geq 4$条边的 Delzant 多边形 [15]，Σ 是其法扇，而$\mathcal{Z}_{P_m}$ 是P_m的标准光滑矩角流形。根据 [28,第 4], 节，相应的矩角流形微分同胚:

$$\mathcal{Z}_{P_m} \cong_{\text{diff}} \mathcal{Z}_\Sigma = U_\Sigma / A_\Sigma.$$

推论推论 *1.7* 的$\mathcal{Z}_{P_m}$。由于 Delzant 多边形的法扇 Σ 是光滑、完备且有理的，并且具有 m 条射线，位于 $\mathbb{R}^2$ 和 $d = 2$中，前面的证明表明$S^4 \times \mathcal{Z}_\Sigma$ 在 m 为偶数时具有复结构。因此，$S^4 \times \mathcal{Z}_{P_m}$ 根据上述微分同胚具有复结构。

为了明确写出这些乘积中的光滑因子，我们使用 McGavran 的微分同胚公式 [25,定理 3。4]

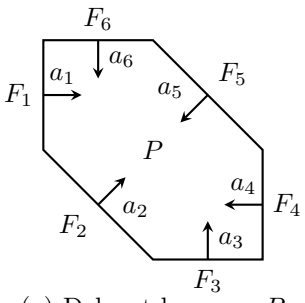
$$\mathcal{Z}_{P_m} \cong_{\text{diff}} \#_{j=3}^{m-1} (j-2) \binom{m-2}{j-1} (S^j \times S^{m+2-j}). \tag{20}$$

因此，对于每个偶整数 $m \geq 4$，光滑流形

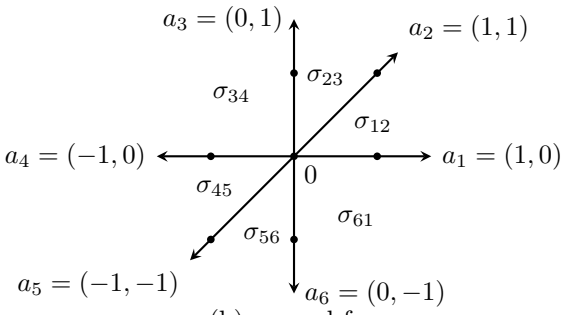
$$S^4 \times \left(\#_{j=3}^{m-1} (j-2) \binom{m-2}{j-1} (S^j \times S^{m+2-j}) \right) \tag{21}$$

具有复结构。□

对于 Delzant 六边形，我们明确写出 Cox 表示及其四个特征线丛。通过主定理，可直接得到 $m = 6$ 情形。



(a) Delzant hexagon P



(b) normal fan

该六边形为 $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |x+y| \leq 1\}$，其内法向量为 a_i。边 F_i 和顶点 $F_i \cap F_{i+1}$ 分别对应射线 $\mathbb{R}_{\geq 0} a_i$ 和锥

$\sigma_{i,i+1} =$ 锥(a_i, a_{i+1})。法扇中，射线生成元位于 $\mathbb{Z}^2$ 中，因此该扇是有理的。这些锥覆盖 $\mathbb{R}^2$，且每一对相邻锥的行列式均为一。因此，该扇是完备且光滑的。

射线生成元确定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

以及诱导同态

$$A_{\mathbb{C}} : (\mathbb{C}^*)^6 \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^2, \qquad (g_1, \dots, g_6) \longmapsto \left(\frac{g_1 g_2}{g_4 g_5}, \frac{g_2 g_3}{g_5 g_6} \right).$$

$G =$ 核 $A_{\mathbb{C}}$ 定义为

$$g_1 = g_2^{-1} g_4 g_5, \qquad g_3 = g_2^{-1} g_5 g_6.$$

因此，我们可以写出复李群同构

$$(\mathbb{C}^*)^4 \longrightarrow G,$$
$$(h_1, h_2, h_3, h_4) \longmapsto (h_1^{-1} h_2 h_3,\ h_1,\ h_1^{-1} h_3 h_4,\ h_2,\ h_3,\ h_4).$$

对于这个扇，Cox 开集为

$$U_\Sigma = \bigcup_{i=1}^{6} \{ z \in \mathbb{C}^6 : z_j \neq 0 \text{ for } j \notin \{i, i+1\} \},$$

其中，指标按模 6 循环读取。 G 在 U_Σ 上的右作用为：对 $h =$(h1, ..., h4), $\in (\mathbb{C}^*)^4$,

$$z \cdot h = (h_1^{-1} h_2 h_3 z_1,\ h_1 z_2,\ h_1^{-1} h_3 h_4 z_3, h_2 z_4,\ h_3 z_5,\ h_4 z_6).$$

坐标特征$\chi_j(h) = h_j$ 诱导出四个全纯线丛，我们将对它们应用主定理

$$L_j = U_\Sigma \times_{\chi_j} \mathbb{C}, \qquad 1 \leq j \leq 4.$$

根据推论 1.7,

$$\mathcal{Z}_{P_6} \cong_{\text{diff}} S(L_1) \times_{B_\Sigma} \cdots \times_{B_\Sigma} S(L_4).$$

将定理 1.1 应用于这四个线丛，并利用微分同胚（20），我们在

$$S^4 \times \left(\#^9 (S^3 \times S^5) \#^8 (S^4 \times S^4) \right).$$

7.2.3. *Delzant*实现与*Bosio–Meersseman*示例。 现在，我们将扇的构造应用于Bosio–Meersseman描述的两个族。由定理 4.1 和推论 4.7]可知，$\mathcal{Z}_P$ 的微分同胚类型仅取决于 P [5, 的组合类型。因此，只需为所涉及的多胞体选择Delzant实现即可。下文的示例均存在这样的实现，因为乘积和适当选取的面截断会保持Delzant性质；参见 [8, 第5节2]。对于每个实现，其法扇 Σ都是光滑、完备且有理的，并且$\mathcal{Z}_P \cong_{\text{diff}} \mathcal{Z}_\Sigma$ [28, 节。相关的秩为$r = m - d$，其中 m 是面的数量，且 $d =$ 维数为 P。

（1）单纯形的乘积给出奇数维球面的乘积：

$$P = \Delta^{d_1} \times \cdots \times \Delta^{d_a}, \qquad \mathcal{Z}_P \cong_{\text{diff}} \prod_{j=1}^{a} S^{2d_j+1}, \qquad d_j \geq 1.$$

其中包括 [5, 例 0.4 和推论 4 中的球面乘积。6]在此$r = a$。对于偶数 a，所得的与 S^4 的乘积恢复了前面的透镜空间例子，其中所有 $p_j = 1$。对于奇数 a，推论 1.2 在添加一个 S^1 因子后给出了复结构。

(2) 设 P 由一个 d-单纯形经过 $q \geq 1$ 次连续的顶点截切得到，其中 $d \geq 2$。那么 P 具有 $m = d + q + 1$ 个面。Bosio–Meersseman [5, 定理 6。3] 将 McGavran 多边形公式推广到如下分解

$$\mathcal{Z}_P \cong_{\text{diff}} \#_{j=1}^{q} j \binom{q+1}{j+1} (S^{j+2} \times S^{2d+q-j-1}). \tag{22}$$

情形 $d = 2$ 恢复了上述多边形族。由于 $r = q + 1$，奇数次顶点截切给出了 推论 1.7 中所需的偶数秩。

关于 推论 *1.7* 中 $\mathcal{Z}_P$ 的证明。 对于 (2) 中的截角单纯形， $r = q + 1$ 在 $q \geq 1$ 为奇数时为正偶数。因此，扇情形在 $S^4 \times \mathcal{Z}_P$ 上给出了复结构。利用（22），我们在以下空间上得到复结构:

$$S^4 \times \left(\#_{j=1}^{q} j \binom{q+1}{j+1} (S^{j+2} \times S^{2d+q-j-1}) \right). \tag{23}$$

这就证明了 推论 1.7 的剩余断言。 □

接下来，我们比较 推论 1.7 中的流形与 Bosio 和 Meersseman 构造的复流形 [5]的同胚类型。设 Σ是一个具有 $r = m - d > 0$的光滑完备有理扇，并令 $N = S^4 \times \mathcal{Z}_\Sigma$。当 r 为偶数时，我们之前的构造赋予 $M = N$ 复结构；而当 $M = N \times S^1$为奇数时，则赋予 r 复结构。

Bosio–Meersseman 在偶数维链环上构造复结构，并且对于奇维链接 W，在 $W \times S^1$ 和 W/S^1 [5, 定理 12.2] 上构造。每个链接都微分同胚于 $\mathbb{T}^\ell \times \mathcal{Z}_Q$，其中 Q 是一个简单凸多面体，$\mathcal{Z}_Q$ 是其标准矩角流形，并且 $\ell \geq 0$。

$\mathcal{Z}_\Sigma$ 与 $\mathcal{Z}_Q$ 都是 2-连通的 [8, 命题 4.3.5(a)]。Hurewicz 定理与泛系数定理，连同 Künneth 公式，蕴含 $H^2(M; \mathbb{Z}) = 0$。此外， M 与 $\mathbb{T}^\ell \times \mathcal{Z}_Q$ 的万有覆盖分别同伦等价于 N 与 $\mathcal{Z}_Q$。

与 $\mathbb{Q}$作张量积之后， [8, 定理 4.5.8]中的分解与乘积法则蕴含 $H^4(\mathcal{Z}_Q; \mathbb{Q})$ 由使非零三次类零化的类张成。事实上，每个非零四次直和项对应于三个顶点上的一个不连通全子复形。其中两个顶点构成一条缺边，从而决定一个非零三次类。由乘积法则，它与该直和项中每个类的乘积都为零，因为这两个顶点集相交。然而，这对 N 不成立。将一个四次类写成 $H^4(N; \mathbb{Q})$ 中的 $cu + v$，其中 u 由 $H^4(S^4; \mathbb{Q})$ 的一个生成元拉回，而v 由 $\mathcal{Z}_\Sigma$ 拉回。若对某个非零的 $a \in H^3(N; \mathbb{Q})$ 有 $(cu + v) \smile a = 0$，则 Künneth 公式迫使 $c = 0$。因此这些类不能张成 $H^4(N; \mathbb{Q})$。 N 与 $\mathcal{Z}_Q$ 具有不同构的分次有理上同调环。

从 M 到某个链接，或到它与 S^1的乘积的同胚，在取万有覆盖后都会与这一障碍相矛盾。若 M 与 W/S^1同胚，则主圆丛 $W \to W/S^1$ 会拉回为 M上的平凡丛，因为 $H^2(M; \mathbb{Z}) = 0$。因此， $W \cong_{\text{homeo}} M \times S^1$，而它们的万有覆盖也会导致同样的矛盾。所以， M 与 Bosio–Meersseman 构造中的任何流形都不同胚。

人工智能披露。 作者在广泛讨论其关于 $S^4 \times \mathbb{T}^2$ [17]的基础性工作可能的推广时，使用了人工智能工具来构造 $S^4 \times V_{2s}(\mathbb{H}^n)$上的复结构，并检查了作者提出的一般构造在后续示例中的应用。作者对所有论证进行了检查和完善，并对数学内容承担全部责任。

参考文献

[1] M. F. Atiyah，K理论，D. W. Anderson 笔记，W. A. Benjamin，纽约–阿姆斯特丹，1967年。[2] M. F. Atiyah 和 F. Hirzebruch，向量丛与齐性空间，载于《微分几何》，纯数学专题讨论会论文集，第3卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1961年，第7–38页。[3] A. Borel，半单李群的Kähler陪集空间，《美国国家科学院院刊》40 (1954年)，1147–1151，doi:10.1073/pnas.40.12.1147。[4] A. Borel 和 J.-P. Serre，李群与 Steenrod 降幂，Amer. J. Math. 75 (1953年)，409–448，doi:10.2307/2372495。[5] F. Bosio 和 L. Meersseman，$\mathbb{C}^n$中的实二次曲面、复流形与凸多面体，Acta Math. 197 (2006年)，53–127，doi:10.1007/s11511-006-0008-2；arXiv:math/0405075。[6] C. P. Boyer 和 K. Galicki，具有正Ricci曲率的高连通流形，Geom. Topol. 10 (2006年)，2219–2235，doi:10.2140/gt.2006.10.2219；arXiv:math/0508189。[7] T. Bröcker 和 T. tom Dieck，《紧李群的表示》，数学研究生教材，第98卷，Springer-Verlag，纽约，1985年，doi:10.1007/978-3-662-12918-0。[8] V. M. Buchstaber 和 T. E. Panov，《环面拓扑》，数学调查与专著，第204卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2015年，doi:10.1090/surv/204。[9] M. Burfitt 和 J. Grbić，秩2旗流形自由环空间的上同调，Homology Homotopy Appl. 25 (2023年)，第2期，343–372，doi:10.4310/HHA.2023.v25.n2.a15。[10] E. Calabi，若干6维近复流形的构造与性质，Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958年)，407–438，doi:10.1090/S0002-9947-1958-0130698-7。[11] E. Calabi 和 B. Eckmann，一类非代数的紧复流形，Ann. of Math. (2) 58 (1953年)，494–500，doi:10.2307/1969750。[12] P. Chakraborty 和 A. S. Thakur，乘积 $S^{2m}\times M$上近复结构的不存在性，Topology Appl. 199 (2016年)，102–110，doi:10.1016/j.topol.2015.12.057；arXiv:1508.06458。[13] D. A. Cox，环面簇的齐次坐标环，J. Algebraic Geom. 4 1, 17 1995 50, 9210008 ( ), no. – arXiv:alg-geom/ 。[14] B. Datta 和 S. Subramanian，偶数维球面乘积上近复结构的不存在性，Topology Appl. 36 (1990年)，39–42，doi:10.1016/0166-8641(90)90034-Y。[15] T. Delzant，周期哈密顿量与矩映射的凸像，Bull. Soc. Math. France 116 (1988年)，第3期，315–339，doi:10.24033/bsmf.2100。[16] Y. Félix、J. Oprea 和 D. Tanré，《几何中的代数模型》，牛津数学研究生教材，第17卷，牛津大学出版社，牛津，2008年。[17] M. GAO、Z. Z. TANG 和 W. J. YAN，$\mathbb{T}^2\times S^4$上的复结构：Calabi问题的亏格一情形，预印本（2026年），arXiv:2610.06067v1。[18] P. A. Griffiths，齐性复流形的一些几何与解析性质。第一部分：层与上同调，Acta Math. 110 (1963年)，115–155。[19] M. W. Hirsch，关于低维同伦球面，载于《微分与组合拓扑：纪念 Marston Morse 的专题讨论会》，S. S. Cairns（编），普林斯顿数学丛书，第27卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1965年，第199–204页，doi:10.1515/9781400874842-013。[20] F. Hirzebruch，《代数几何中的拓扑方法》，第三版，第二次修订印刷，数学科学基础丛书，第 131 卷，Springer-Verlag，柏林–海德堡–纽约，1978年。[21] H. Hopf，关于复流形的拓扑，载于《献给 R. Courant 六十寿辰的研究与论文集》，Interscience Publishers，纽约，1948年，第167–185页。[22] M. Kankaanrinta，适当李群作用的等变领圈化、管状邻域与粘合定理，Algebr. Geom. Topol. 7 (2007年)，1–27，doi:10.2140/agt.2007.7.1。[23] J. M. Lee，《光滑流形导论》，第2版，数学研究生教材，第218卷，Springer，纽约，2013年，doi:10.1007/978-1-4419-9982-5。[24] R. Liang、C. Liu 和 Y. Zhang，关于 $\mathbb{P}^3$ 和 $S^2\times S^4$上复结构的评述，预印本（2026年），arXiv:2608.29651v1。[25] D. McGavran，相邻连通和与环面作用，Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979年)，235–254，doi:10.1090/S0002-9947-1979-0531977-5。[26] J. W. Milnor 和 J. D. Stasheff，《特征类》，数学年刊研究丛书，第76卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1974年。[27] A. Morimoto，关于正规近接触结构，J. Math. Soc. Japan 15 (1963年)，420–436，doi:10.2969/jmsj/01540420。[28] T. Panov 和 Y. Ustinovsky，矩角流形上的复解析结构，Mosc. Math. J. 12 (2012年)，149–172，doi:10.17323/1609-4514-2012-12-1-149-172；arXiv:1008.4764。

[29] C. Qian、Z. Z. Tang 和 W. J. Yan，《Clifford 系统、调和映射及具有非负曲率的度量》，Pacific J. Math. 320（2022年），第 2 期，391–424，doi:10.2140/pjm.2022.320.391；arXiv:2202.09078v2。[30] C. Qian、Z. Z. Tang 和 W. J. Yan，《球面中等距族的拓扑学与曲率》，Comm. Math. Stat. 11（2023年），第 2 期，439–475，doi:10.1007/s40304-021-00259-2。[31] C. Qian、Z. Z. Tang 和 W. J. Yan，《等距叶状结构与复结构》，Int. J. Math. 37（2026年），第 8 期，2650040，doi:10.1142/S0129167X26500400；arXiv:2502.09041v1。[32] H. Samelson，《一类复解析流形》，Portugal. Math. 12（1953年），129–132。[33] P. Sankaran 和 A. S. Thakur，《复流形上的圆丛乘积的复结构》，Ann. Inst. Fourier 63（2013年），1331–1366，doi:10.5802/aif.2805。[34] W. A. Sutherland，《关于近复结构和弱复结构的一则注记》，J. London Math. Soc. 40（1965年），705–712。[35] Z. Z. Tang，《 $S^{2m}\times\mathbb{CP}^2$ 和 $S^{2m}\times\mathbb{CP}^3$上的近复结构》，Chinese Sci. Bull. 37（1992年），第 24 期，2025–2028。[36] Z. Z. Tang、Y. Q. Xie 和 W. J. Yan，《Schoen–Yau–Gromov–Lawson 理论与等距叶状结构》，Comm. Anal. Geom. 20（2012年），第 5 期，989–1018。[37] Z. Z. Tang 和 W. J. Yan，《等距超曲面与复结构》，Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) 42（2022年），2223–2229，doi:10.1007/s10473-022-0603-0。[38] H.-C. Wang，《具有齐性复结构的闭流形》，Amer. J. Math. 76 1, 1 1954 1032, 2307 2372397 ( ), no. – doi: . / .

中国天津市300071南开大学陈省身数学研究所和LPMC电子邮箱： mingao@mail.nankai.edu.cn中国天津市300071南开大学陈省身数学研究所和LPMC电子邮箱： zztang@nankai.edu.cn中国北京市100875北京师范大学数学科学学院数学与复杂系统实验室电子邮箱： wjyan@bnu.edu.cn