人工智能体的范畴基础

— Yong Wang —

arXiv:2611.29998v1 [cs.AI] 23 Nov 2026

目录

1 引言 **1**

1.1 偏序集.1 1.2 范畴.4

2 智能阶段 **8**

2.1 变换器范畴 **Trans** .8 2.1.1 **Trans** 的多项式函子.10 2.2 变换器代数 AT .18 2.2.1 步双模拟.18 2.2.2 变换器代数 AT .20

3 执行阶段 **26**

3.1 智能体范畴**Agnts** .26 3.2 编排与编舞范畴**OCs** .26 3.2.1 **OCs** 的多项式函子.28 3.3 真并发代数 $APTC$.38 3.3.1 步双模拟.38 3.3.2 真并发代数 $APTC$.39

1 引言

人工智能智能体将任务和软件自动化变为现实。模型上下文协议（MCP）[1] 之类的协议提供了用于发现和调用外部工具的接口。存在许多工具增强型人工智能智能体范式，例如 ReAct [2], Toolformer [3], ToolLLM [4], Gorilla[5], HuggingGPT [6], ART [7], 等。在多智能体框架中，例如 LangChain[8], AutoGen [9], MetaGPT [10], ChatDev [11], TaskWeaver [12], ，大语言模型的推理与执行交织在一起。最近， [13]提出了一种框架 [13] ，用于将推理与执行分离：在智能阶段，用户与大语言模型交流，以生成 AI智能体工作流的编排与协同编排；而在执行阶段，AI智能体工作流将被执行。

我们遵循将智能与执行分离这一理念，给出 AI智能体的范畴论基础：对变换器、智能体以及AI智能体的编排和编舞进行范畴化，其中还包括它们的余代数和代数。

1.1 偏序集

定义 1.1 （标记偏序集）。 令 Σ 为一个固定的标签集。标记偏序集是一个元组$\mathbf{u} = \langle S, \leq, \ell \rangle$，其中 S是载体集， $\leq$是 S上的偏序， ℓ是标记函数$\ell : S \to \Sigma$。

对于标记偏序集 $\mathbf{u}$， $S_{\mathbf{u}}$、 $\leq_{\mathbf{u}}$ 和 $\ell_{\mathbf{u}}$ 分别表示$\mathbf{u}$的载体、偏序和标记。标记偏序集的集合记为 LP ， 空标记偏序集为1。

定义 1.2 （偏序集态射）。 对于偏序集$\langle S, \leq \rangle$和$\langle S', \leq' \rangle$， 函数 $\varphi : S \to S'$, f称为偏序集态射，当且仅当对于 s_0、 $s_1 \in S$， 若 $s_0 \leq s_1$， 则 φ（s_0） $\leq' \varphi$（s_1）成立。

定义 *1.3*（标记偏序集同构）。设 $u = \langle S_1, \leq_1, \ell_1 \rangle$ 和 $v = \langle S_2, \leq_2, \ell_2 \rangle$ 是标记偏序集。从 $u = \langle S_1, \leq_1, \ell_1 \rangle$ 到 $v = \langle S_2, \leq_2, \ell_2 \rangle$ 的标记偏序集态射 φ 是从 $\langle S_1, \leq_1 \rangle$ 到 $\langle S_2, \leq_2 \rangle$ 的偏序集态射，且满足 $\ell_2 \bigcirc \varphi = \ell_1$。此外， φ 是标记偏序集同构，当且仅当它是双射，且 φ^{-1} 是从 $\langle S_2, \leq_2, \ell_2 \rangle$ 到 $\langle S_1, \leq_1, \ell_1 \rangle$ 的偏序集同构。若存在 $\langle S_1, \leq_1, \ell_1 \rangle$ 与 $\langle S_2, \leq_2, \ell_2 \rangle$ 之间的偏序集同构 φ，则称 $u = \langle S_1, \leq_1, \ell_1 \rangle$ 与 $v = \langle S_2, \leq_2, \ell_2 \rangle$ 同构，记作 $\langle S_1, \leq_1, \ell_1 \rangle \cong \langle S_2, \leq_2, \ell_2 \rangle$。

定义 1.4 (多重集**)**。 多重集是一种可包含重复对象的集合，记作$\{\!| - |\!\}$，因此$\{\!|a, b, b|\!\}$与$\{\!|a, b|\!\}$有显著区别。

定义 1.5 (带标签多重集**)**。 设 Σ 为一个固定的标签集。带标签多重集是一个元组$\langle S, \ell \rangle$，其中 S 是一个多重集，而 ℓ 是一个标记函数 $\ell : S \to \Sigma$。带标签多重集的出现项/实例集合记作 *lmset*。

定义 1.6 (偏序集**)**。 部分序多重集（*pomset*）是 *poset* 的一个 $\cong$-等价类。*pomset* 的集合记作 Pom；空部分有序多重集记作 $\mathbf{1}$ ，而1 的 $\cong$-等价类也记作 1。如果 *pomset* 中任意两个对象之间都不存在偏序关系，则该 *pomset* 称为一步，记作$\langle\!| - |\!\rangle$。步骤集合记作 Stp。

我们假设偏序 $\leq$ 可以分为两种：执行序 $\leq^e$ 和通信 $\leq^c$。在同一个并行分支中，偏序通常是执行序；通信通常存在于不同的并行分支之间。当然，并行分支可以嵌套。由此，我们可以自然地得到以下定义。

定义 1.7 (带通信的标记偏序集**)**。 带通信的标记偏序集是一个元组$\mathbf{u} = \langle S, \leq^e, \leq^c, \ell \rangle$，其中 S是载体集， $\leq^e$是 S上的执行序， $\leq^c$是 S上的通信，而 ℓ 是一个标记函数 $\ell : S \to \Sigma$。我们通常用$\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$ 表示带通信的标记偏序集。带通信的标记偏序集的集合记为LPC，空的带通信的标记偏序集记为1。

定义 *1.8*（标记偏序集同构）。设 $\boldsymbol{u} = \langle S_1, \leq_1^e, \leq_1^c, \lambda_1 \rangle$ 和 $\boldsymbol{v} = \langle S_2, \leq_2^e, \leq_2^c, \lambda_2 \rangle$ 是标记偏序集。从 $\langle S_1, \leq_1^e, \leq_1^c, \lambda_1 \rangle$ 到 $\langle S_2, \leq_2^e, \leq_2^c, \lambda_2 \rangle$ 的标记偏序集态射 h ，是从 $\langle S_1, \leq_1^e, \leq_1^c \rangle$ 到 $\langle S_2, \leq_2^e, \leq_2^c \rangle$ 的偏序集态射，且满足 $\lambda_2 \bigcirc h = \lambda_1$。此外，若 h 是双射，且 h^{-1} 是从 $\langle S_2, \leq_2^e, \leq_2^c, \lambda_2 \rangle$ 到 $\langle S_1, \leq_1^e, \leq_1^c \lambda_1 \rangle$ 的偏序集同构，则称 h 是标记偏序集同构。若存在 $\langle S_1, \leq_1^e, \leq_1^c, \lambda_1 \rangle$ 与 $\langle S_2, \leq_2^e, \leq_2^c, \lambda_2 \rangle$ 之间的偏序集同构 h，则称 $\boldsymbol{u} = \langle S_1, \leq_1^e, \leq_1^c, \lambda_1 \rangle$ 与 $\boldsymbol{v} = \langle S_2, \leq_2^e, \leq_2^c, \lambda_2 \rangle$ 同构，记作 $\langle S_1, \leq_1^e, \leq_1^c, \lambda_1 \rangle \sim \langle S_2, \leq_2^e, \leq_2^c, \lambda_2 \rangle$。

显然， $\cong$ 是一个等价关系，可用于抽象掉载体。

定义 1.9 (带通信的部分序多重集**)**。 带通信的部分序多重集 *pomsetc*，是带通信的标记偏序集的一个 $\cong$-等价类$\mathbf{u}$，记作 $[\mathbf{u}]$,, 即 $[\mathbf{u}] = \{\mathbf{v} \in \mathsf{LPC} : \mathbf{u} \cong \mathbf{v}\}$。*pomsetc* 的集合也记作 Pom；空的带通信标记偏序集记作 1 ，而 1 的 $\cong$-等价类记作1；恰好包含一个动作 $a \in \Sigma$ 的 *pomsetc* 称为基元。

并发包括并行性和通信，因此我们可以得到以下 Pomsetc 复合的定义。

定义 1.10 (Pomsetc 的并行复合**)**。 设 $U, V \in \mathsf{Pomc}$ 满足 $U = [\mathbf{u}]$ 和 $V = [\mathbf{v}]$。我们将 $U \parallel V$ 记作 U 与 V的并行复合，它是由$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$表示的 *pomsetc*，其中

$$S_{\mathbf{u}\parallel\mathbf{v}} = S_{\mathbf{u}} \cup S_{\mathbf{v}} \qquad \leq^e_{\mathbf{u}\parallel\mathbf{v}} = \leq^e_{\mathbf{u}} \cup \leq^e_{\mathbf{v}} \qquad \leq^c_{\mathbf{u}\parallel\mathbf{v}} = \leq^c_{\mathbf{u}} \cup \leq^c_{\mathbf{v}} \qquad \ell_{\mathbf{u}\parallel\mathbf{v}}(x) = \begin{cases} \ell_{\mathbf{u}}, & x \in S_{\mathbf{u}}; \\ \ell_{\mathbf{v}}, & x \in S_{\mathbf{v}}. \end{cases}$$

定义 1.11 （通信中的 pomsetc 复合）。 设 $U, V \in \mathsf{Pomc}$，其中 $U = [\mathbf{u}]$ 和$V = [\mathbf{v}]$。我们用 $U \mid V$表示 U和 V的通信组合，它是由$\mathbf{u} \mid \mathbf{v}$表示的 *pomsetc*，其中

$$S_{\mathbf{u}|\mathbf{v}} = S_{\mathbf{u}} \cup S_{\mathbf{v}} \qquad \leq^e_{\mathbf{u}|\mathbf{v}} = \leq^e_{\mathbf{u}} \cup \leq^e_{\mathbf{v}} \qquad \leq^c_{\mathbf{u}|\mathbf{v}} = \leq^c_{\mathbf{u}} \cup \leq^c_{\mathbf{v}} \cup (S_{\mathbf{u}} \times S_{\mathbf{v}}) \qquad \ell_{\mathbf{u}|\mathbf{v}}(x) = \begin{cases} \ell_{\mathbf{u}}, & x \in S_{\mathbf{u}}; \\ \ell_{\mathbf{v}}, & x \in S_{\mathbf{v}}. \end{cases}$$

定义 1.12 (Pomsetc 并发复合**)**。 设 $U, V \in \mathsf{Pomc}$ 满足 $U = [\mathbf{u}]$ 且$V = [\mathbf{v}]$。我们将 $U \between V$ 记作 U 和 V的并发组合，它是由$\mathbf{u} \between \mathbf{v}$表示的 *pomsetc*，其中

$$S_{\mathbf{u} \between \mathbf{v}} = S_{\mathbf{u}} \cup S_{\mathbf{v}} \quad \leq^e_{\mathbf{u} \between \mathbf{v}} = \leq^e_{\mathbf{u}} \cup \leq^e_{\mathbf{v}} \quad \leq^c_{\mathbf{u} \between \mathbf{v}} = \leq^c_{\mathbf{u}} \cup \leq^c_{\mathbf{v}} \quad or \quad \leq^c_{\mathbf{u} \between \mathbf{v}} = \leq^c_{\mathbf{u}} \cup \leq^c_{\mathbf{v}} \cup (S_{\mathbf{u}} \times S_{\mathbf{v}}) \quad \ell_{\mathbf{u} \between \mathbf{v}}(x) = \begin{cases} \ell_{\mathbf{u}}, & x \in S_{\mathbf{u}}; \\ \ell_{\mathbf{v}}, & x \in S_{\mathbf{v}}. \end{cases}$$

定义 1.13 (Pomsetc 顺序复合)。 设 $U, V \in \mathsf{Pomc}$ 满足 $U = [\mathbf{u}]$ 且 $V = [\mathbf{v}]$。我们将 $U \cdot V$ 记作 U 和 V 的顺序复合，它是由 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 表示的 *pomsetc*，其中

$$S_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} = S_{\mathbf{u}} \cup S_{\mathbf{v}} \qquad \leq^e_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} = \leq^e_{\mathbf{u}} \cup \leq^e_{\mathbf{v}} \cup (S_{\mathbf{u}} \times S_{\mathbf{v}}) \qquad \leq^c_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} = \leq^c_{\mathbf{u}} \cup \leq^c_{\mathbf{v}} \qquad \ell_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}(x) = \begin{cases} \ell_{\mathbf{u}}, & x \in S_{\mathbf{u}}; \\ \ell_{\mathbf{v}}, & x \in S_{\mathbf{v}}. \end{cases}$$

以下定义和结论摘自 [14]，我们在此重新列出。

定义 1.14 (Pomset 类型)。 设 $U \in \mathsf{Pom}$，若存在非空 *pomset* U_1 和 U_2，使得 $U = U_1 \cdot U_2$（相应地，$U = U_1 \parallel U_2$），则称 U 为顺序的（相应地，为并行的）。

定义 1.15 (因式分解)。 设 $U \in \mathsf{Pom}$。*(1)* 当 $U = U_1 \cdot \cdots \cdot U_i \cdot \cdots \cdot U_n$ 且每个 U_i 都非顺序的且非空时，序列 $U_1, \cdots, U_i, \cdots, U_n$ 称为 U 的顺序因式分解。*(2)* 当 $U = U_1 \parallel \cdots \parallel U_i \parallel \cdots \parallel U_n$ 且每个 U_i 都非并行的且非空时，多重集 $\{\!|U_1, \cdots, U_i, \cdots, U_n|\!\}$ 称为 U 的并行因式分解。

引理 1.16 (因式分解)。 顺序因式分解和平行因式分解唯一存在 .

引理 1.17. 对于 $U \in \mathsf{Pomc}$，以下两个结论成立：

1. U 要么是顺序的，要么是并行的，在 U 中不存在其他类型。
2. 在 U 中，顺序因式分解和平行因式分解唯一存在。

定义 1.18 (串并行 pomset)。 串并行 *pomset* 的集合（简称 *sp-pomset*，记作 SP）是满足以下规则的最小集合：

$$\frac{}{1 \in \mathsf{SP}} \quad \frac{a \in \Sigma}{a \in \mathsf{SP}} \quad \frac{U, V \in \mathsf{SP}}{U \cdot V \in \mathsf{SP}} \quad \frac{U, V \in \mathsf{SP}}{U \parallel V \in \mathsf{SP}}$$

定义 1.19 (串行通信并行 pomsetc)。 串行通信并行 *pomsetc* 的集合（简称 *scp-pomsetc*，记作SCP）是满足以下规则的最小集合：

$$\frac{}{1 \in \mathsf{SCP}} \quad \frac{a \in \Sigma}{a \in \mathsf{SCP}} \quad \frac{U, V \in \mathsf{SCP}}{U \cdot V \in \mathsf{SCP}} \quad \frac{U, V \in \mathsf{SCP}}{U \parallel V \in \mathsf{SCP}} \quad \frac{U, V \in \mathsf{SCP}}{U \mid V \in \mathsf{SCP}} \quad \frac{U, V \in \mathsf{SCP}}{U \between V \in \mathsf{SCP}}$$

定义1.20 (N 形 1)。 令 $U = [\mathbf{u}]$ 为一个偏序集。 U 中的 ***N* 形 *1*** 是由 u_0、u_1、u_2、$u_3 \in S_{\mathbf{u}}$ 组成的四元组，其中各点互不相同，满足 $u_0 \leq_{\mathbf{u}} u_1$、$u_2 \leq_{\mathbf{u}} u_3$ 和 $u_0 \leq_{\mathbf{u}} u_3$，且它们之间不存在其他关系。偏序集 U 是 ***N*-自由的**，当且仅当其中不含 ***N* 形 *1***。

定义 1.21 (N 形 2)。 令 $U = [\mathbf{u}]$ 为一个 *pomsetc*。 U 中的 ***N* 形 *2*** 是由 u_0、u_1、u_2、$u_3 \in S_{\mathbf{u}}$ 组成的四元组，其中各点互不相同，满足 $u_0 \leq^e_{\mathbf{u}} u_1$、$u_2 \leq^e_{\mathbf{u}} u_3$ 和 $u_0 \leq^c_{\mathbf{u}} u_3$，且它们之间不存在其他关系。

定义 1.21 中 N 形 2 的定义基于这样一个假设：不同并行分支之间的偏序（因果关系）全都是通信。

定理 1.22 (N 形 1)。一个偏序集是串并行的，当且仅当它是定义*1.20*中的无*N*形*1*。

定理 1.23 (N 形 2)。一个*pomsetc*是串行通信并行的，当且仅当它仅包含定义 *1.21* 中的 *N* 形 *2*。

定理 1.24 (从串行通信并行性到串并行性)。 如果所有通信都是同步的，即对于所有的 $u_i \leq^c u_j$，U中的 u_i和u_j都可以合并为 U' 中的单个 $\gamma(u_i, u_j)$，其中 $\gamma(u_i, u_j)$ 是 u_i 与 u_j 之间的通信函数，那么串行通信并行 *pomsetc* U 可以转换为串并行 *pomset* U' 。

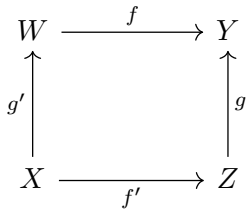
因此，在接下来的章节中，假设所有 pomset 都是串并行的，且所有 pomsetc 都是串行通信并行的。我们稍微宽泛地使用 Pom、Pomc、SP 和 SCP，不加区分。

1.2 范畴

定义 1.25 (范畴)。 范畴 $\mathbb{C}$ 由对象集 $\mathbf{Obj}(\mathbb{C})$和箭头集 $\mathbf{Arr}(\mathbb{C})$ 组成（箭头也称为映射或态射）。我们用 $X \in \mathbb{C}$ 表示 $X \in \mathbf{Obj}(\mathbb{C})$。 $\mathbb{C}$ 中的每个箭头都写作 $X \xrightarrow{f} Y$ 或 $f : X \to Y$，并具有定义域对象 $X \in \mathbb{C}$ 和陪域对象 $Y \in \mathbb{C}$。此外，范畴 $\mathbb{C}$ 还满足：

1. 复合运算符 $\circ$ 为每一对箭头 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 指定一个复合箭头 $g \circ f : X \to Z$，并满足以下结合律：对于任意箭头 $f : X \to Y$、 $g : Y \to Z$和 $h : Z \to W$，都有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$。*2.* 对于每个对象 $X \in \mathbb{C}$，恒等箭头 $\mathrm{id}_X : X \to X$ 满足以下恒等律：对于任意箭头 $f : X \to Y$，都有 $\mathrm{id}_Y \circ f = f$ 以及 $f \circ \mathrm{id}_X = f$。

定义 1.26 (交换图)。 范畴 $\mathbb{C}$ 中的图表是由顶点和有向边组成的集合，并且这些顶点和有向边分别以 $\mathbb{C}$中的对象和箭头进行一致标记。若对于每一对顶点 X 和 Y，图表中从 X 到 Y 的所有路径都相等，则称范畴$\mathbb{C}$ 中的图表是交换的。



说上述图表交换，等价于说 $f \circ g' = g \circ f'$。

特别是在图表中，态射 $f : X \to Y$ 的唯一性用虚线箭头 $f : X \dashrightarrow Y$表示。

命题 1.27 (带标签多重集范畴**LMSets**)。 **LMSets** 的一个对象是一个有序对$\langle X, \ell_X \rangle$，称为 *lmset*，其中

- X 是一个集合（多重集的出现项/实例集合）。

- $\ell_X : X \to \Sigma_X$ 是一个函数，称为标记映射，而 Σ_X 是标签字母表的某个集合。

我们将这样的对象写作 $\langle X, \ell_X : X \to \Sigma_X \rangle$。这是一种带标签多重集：每个出现项 $x \in X$都带有一个标签 $\ell_X(x) \in \Sigma_X$。不同对象可能具有不同的标签字母表。
设 $\langle X, \ell_X : X \to \Sigma_X \rangle$、$\langle Y, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y \rangle$是 **LMSets** 中的两个对象。一个态射 $\langle X, \ell_X \rangle \to \langle Y, \ell_Y \rangle$是有序对 $\langle f, \sigma \rangle : \langle X, \ell_X : X \to \Sigma_X \rangle \to \langle Y, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y \rangle$，其中

1. $f : X \to Y$是定义在出现项上的函数。
2. $\sigma : \Sigma_X \to \Sigma_Y$ 是定义在标签上的函数（一致重命名映射：标签 $a \in \Sigma_X$ 的每个出现项都被重命名为相同的 $\sigma(a) \in \Sigma_Y$）。

使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_X & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_Y \\ {\scriptstyle \ell_X}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \ell_Y} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

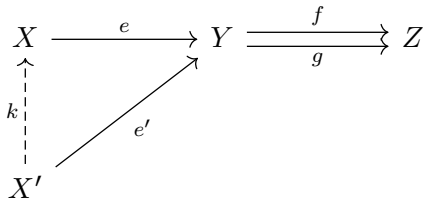
形式上，所需的方程为 $\ell_Y \circ f = \sigma \circ \ell_X$。对于每个 $x \in X$，这表示 $\ell_Y(f(x)) = \sigma(\ell_X(x))$。

假设有两个可复合态射：$\langle X, \ell_X \rangle \xrightarrow{\langle f, \sigma \rangle} \langle Y, \ell_Y \rangle$ 和 $\langle Y, \ell_Y \rangle \xrightarrow{\langle g, \xi \rangle} \langle Z, \ell_Z \rangle$，它们的复合定义为 $\langle g, \xi \rangle \bigcirc \langle f, \sigma \rangle \triangleq \langle g \bigcirc f, \xi \bigcirc \sigma \rangle$。这里，$g \bigcirc f : X \to Z$是作用于出现项的普通函数复合，而 $\xi \bigcirc \sigma : \Sigma_X \to \Sigma_Z$ 是作用于标签的普通函数复合。

对于任意对象 $\langle X, \ell_X : X \to \Sigma_X \rangle$，其恒等态射为 $\mathrm{id}_X \triangleq \langle \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{\Sigma X} \rangle$，其中 $\mathrm{id}_X : X \to X$是作用于出现项的恒等函数，而 $\mathrm{id}_{\Sigma_X} : \Sigma_X \to \Sigma_X$ 是作用于标签的恒等函数。
LM 集构成一个范畴。

定义 1.28（等化子）。箭头 $e : X \to Y$是有序对箭头 $f : Y \to Z$和 $g : Y \to Z$的等化子，当且仅当：

1. $f \circ e = g \circ e$。2. 每当 $e' : X' \to Y$满足 $f \circ e' = g \circ e'$ 时，都存在唯一的箭头 $k : X' \to X$ 使得$e \circ k = e'$。



定义 *1.29*（函子）。设有两个范畴 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$，函子 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ 由两个映射组成：$Obj(\mathbb{C})\to Obj(\mathbb{D})$，即将每个 $\mathbb{C}$-对象 $X\in\mathbb{C}$ 映射到一个 $\mathbb{D}$-对象 $F(X)\in\mathbb{D}$；以及 $Arr(\mathbb{C})\to Arr(\mathbb{D})$，即将每个 $\mathbb{C}$-箭头 $f:X\to Y$ 映射到一个 $\mathbb{D}$-箭头 $F(f):F(X)\to F(Y)$，满足：

1. F保持定义域和陪域：如果 $f:X\to Y$ 属于 $\mathbb{C}$，那么 $F(f):F(X)\to F(Y)$ 属于 $\mathbb{D}$。*2.* F保持恒等态射：对于每个 $X\in\mathbb{C}$，$F(id_X)=id_{F(X)}$。*3.* F保持复合：对于定义域和值域中的所有映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$，$F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$。

自函子是某个范畴 $\mathbb{C}$ 上的函子 $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$。

定义 1.30（余代数）。设 $\mathbb{C}$ 是任意一个配备了自函子$F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$的范畴。

1. 一个 F-余代数，或简称余代数，由一个对象 $X\in\mathbb{C}$ 以及一个态射 $c:X\to F(X)$ 组成；如前所述，X 称为状态空间，而 c 称为转移或余代数结构。

2. 从一个余代数 $c:X\to F(X)$ 到另一个余代数$d:Y\to F(Y)$ 的余代数同态由 $\mathbb{C}$中的一个态射 $f:X\to Y$ 构成，该态射使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ {\scriptstyle c}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

3. F-余代数及其间上述同态构成一个范畴，记作$\mathbf{CoAlg}(F)$，并配有遗忘函子$\mathbf{CoAlg}(F)\to\mathbb{C}$，它将余代数 $X\to F(X)$ 映射到其状态空间X，并将余代数同态 f 映射到 f。

定义 第 1.31 节（代数）。设 $\mathbb{C}$ 是一个任意范畴，带有一个自函子 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

1. 一个 F-代数（也简称代数）由一个对象 $X\in\mathbb{C}$ 和一个态射 $a:F(X)\to X$ 组成；通常称其为构造子或运算。

2. 从一个代数 $a:F(X)\to X$ 到另一个代数 $b:F(Y)\to Y$ 的代数同态由 $\mathbb{C}$ 中的一个态射 $f:X\to Y$ 构成，该态射使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

3. *F-a* 具有上述同态的代数构成一个范畴，记作 $\mathbf{Alg}(F$).

定义 1.32（双代数）。双代数由一个代数-余代数对 $F(X) \to X \to G(X)$ 构成，二者定义在共同的状态空间 X 上，其中 F、$G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是同一范畴 $\mathbb{C}$ 上的两个自函子。

2 智能阶段

本节将介绍智能阶段。在智能阶段，用户与大语言模型协商，以生成 AI智能体工作流的编排与协同编排。大语言模型的主要结构基于变换器 [15]。如表 1 所示，变换器结构会被分解为原子动作，然后再组合起来 [16], 。

表 1：Transformer分解 s

名称	函数	类型
a_1	词嵌入	$\Sigma \to \mathbb{R}^d$
a_2	位置嵌入	$\mathbb{N} \to \mathbb{R}^d$
a_3	恒等	$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$
a_4	最小值/最大值	$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
a_5	加法/减法	$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
a_6	乘以 c	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
a_7	乘法 xy	$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
a_8	比较器	$\mathbb{R} \to \{0,\ 1\}$
a_9	布尔函数	$\{0,1\}^m \to \{0,1\}$
a_{10}	连续分段线性函数	$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
a_{11}	抵消残差	$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$
a_{12}	恒等	$(\mathbb{R}^d)^+ \to (\mathbb{R}^d)^+$
a_{13}	均匀平均	$(\mathbb{R}^d)^+ \to (\mathbb{R}^d)^+$
a_{14}	第一	$(\mathbb{R}^d)^+ \to (\mathbb{R}^d)^+$
a_{15}	索引查找	$(\mathbb{R}^d)^+ \to \mathbb{R}^+$
a_{16}	前驱	$(\mathbb{R}^d)^+ \to (\mathbb{R}^d)^+$
a_{17}	平局判定	$--$
a_{18}	多头	$--$
a_{19}	反嵌入	$--$
a_{20}	层归一化	$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

变换器分解结束

因此，变换器范畴**Trans**可视为配备了 N-自由执行偏序的**lm 集**。接下来，我们将介绍**Trans**的余代数，以及在 [17]中首先引入的变换器代数。

2.1 变换器范畴 Trans

定义 2.1（变换器范畴 **Trans**）。**Obj**（**Trans**）中的一个对象是三元组$\langle X, \leq_X^e \ell_X : X \to \Sigma_X \rangle$，其中：

- X 是一个集合（多重集的出现项／实例集合）。

- $\leq_X^e$ 是定义在 X 上的执行偏序（自反、反对称、传递），且$\langle X, \leq_X^e\rangle$是一个 N-自由偏序集。
- Σ_X 是一个集合（ X的标签字母表）。
- $\ell_X : X \to \Sigma_X$ 是一个函数（标记映射）。

给定$\langle X, \leq_X^e, \ell_X : X \to \Sigma_X\rangle$、$\langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y\rangle$，一个态射$\langle f, \sigma\rangle : \langle X, \leq_X^e, \ell_X : X \to \Sigma_X\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y\rangle$ 是一个有序对(f, σ)，其中 $f : X \to Y$、$\sigma : \Sigma_X \to \Sigma_Y$满足：

1. 交换性： $\ell_Y \circ f = \sigma \circ \ell_X$。
2. 单调性： $\forall x_1, x_2 \in X. x_1 \leq_X^e x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq_Y^e f(x_2)$。

如果 $f, \sigma : X, \leq_X^e, \ell_X : X \to \Sigma_X \to Y, \leq_Y^e, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y$， $g, \xi : X, \leq_Y^e, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y \to Z, \leq_Z^e$ $\ell_Z : Z \to \Sigma_Z$， 定义 $g, \xi \bigcirc f, \sigma \triangleq g \bigcirc f, \xi \bigcirc \sigma$。
对于 $A = \langle X, \leq_X^e, \ell_X : X \to \Sigma_X\rangle$， $\mathrm{id}_A \triangleq \langle \mathrm{id}_X, \mathrm{id}^{\Sigma_X}\rangle$。
Trans 构成一个范畴。

证明。 我们假设 f， $\sigma : X$， $\leq_X^e$， $\ell_X : X \to \Sigma_X \to Y$， $\leq_Y^e$， $\ell_Y : Y \to \Sigma_Y$， g， $\xi : Y$， $\leq_Y^e$， $\ell_Y : Y \to \Sigma_Y \to Z$， $\leq_Z^e$， $\ell_Z : Z \to \Sigma_Z$ 是态射，并证明 $g \bigcirc f$， $\xi \bigcirc \sigma$ 满足两个态射条件。

1. 交换性：

$$\begin{aligned} \ell_C \circ (g \circ f) &= (\ell_C \circ g) \circ f \\ &= (\xi \circ \ell_Y) \circ f \\ &= \xi \circ (\ell_Y \circ f) \\ &= \xi \circ (\sigma \circ \ell_X) \\ &= (\xi \circ \sigma) \circ \ell_X. \end{aligned}$$

因此 $\ell_C \bigcirc (g \bigcirc f) = (\xi \bigcirc \sigma) \bigcirc \ell_X$.

2. 单调性：取 x_1， $x_2 \in X$，其中 $x_1 \leq_X^e x_2$。由于 f， σ 是单调的，因此 $f(x_1) \leq_Y^e f(x_2)$。由于 g， ξ 是单调的，因此 $g(f(x_1)) \leq_Z^e g(f(x_2))$。因此 $g \bigcirc f$ 是单调的。

The因此 $g \bigcirc f$， $\xi \bigcirc \sigma$ 确实是一个态射 X， $\leq_X^e$， $\ell_X : X \to \Sigma_X \to Z$， $\leq_Z^e$， $\ell_Z : Z \to \Sigma_Z\rangle$.
对于 $A = X$， $\leq_X^e$， $\ell_X : X \to \Sigma_X$， $\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_X$， id^{Σ_X}。检查以下两个条件：

1. 交换性： $\ell_X \bigcirc \mathrm{id}_X = \ell_X = \mathrm{id}^{\Sigma_X} \bigcirc \ell_X$。
2. 单调性：若 $x_1 \leq_X^e x_2$，则 $\mathrm{id}_X(x_1) = x_1 \leq_X^e x_2 = \mathrm{id}_X(x_2)$。

因此，$\mathrm{id}_A : A \to A$ 是一个态射。
接下来，我们证明复合的结合律。

取三个可复合态射：$f,\sigma : X, \leq_X^e, \ell_X : X \to \Sigma_X \to Y, \leq_Y^e, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y$、$g,\xi : Y, \leq_Y^e, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y \to Z, \leq_Z^e, \ell_Z : Z \to \Sigma_Z$、$h,\zeta : Z, \leq_Z^e, \ell_Z : Z \to \Sigma_Z \to W, \leq_W^e, \ell_W : W \to \Sigma_W$。根据定义：

$$\begin{aligned}(\langle h,\zeta\rangle \circ \langle g,\xi\rangle) \circ \langle f,\sigma\rangle &= \langle h\circ g, \zeta\circ\xi\rangle \circ \langle f,\sigma\rangle \\ &= \langle (h\circ g)\circ f, (\zeta\circ\xi)\circ\sigma\rangle\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\langle h,\zeta\rangle \circ (\langle g,\xi\rangle \circ \langle f,\sigma\rangle) &= \langle h,\zeta\rangle \circ \langle g\circ f, \xi\circ\sigma\rangle \\ &= \langle h\circ(g\circ f), \zeta\circ(\xi\circ\sigma)\rangle\end{aligned}$$

集合上的函数复合满足结合律：$(h \bigcirc g) \bigcirc f = h \bigcirc (g \bigcirc f)$，$(\zeta \bigcirc \xi) \bigcirc \sigma = \zeta \bigcirc (\xi \bigcirc \sigma)$。因此，这两个复合态射相等：$(h,\ \zeta \bigcirc g,\ \xi) \bigcirc f,\ \sigma = h,\ \zeta \bigcirc (g,\ \xi \bigcirc f,\ \sigma)$。
最后，我们证明单位律。
设 $f,\ \sigma : A = X,\ \leq_X^e,\ \ell_X : X \to \Sigma_X \to B = Y,\ \leq_Y^e,\ \ell_X : Y \to \Sigma_Y$。

$$\begin{aligned}\langle f,\sigma\rangle \circ \mathrm{id}_A &= \langle f,\sigma\rangle \circ \langle \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{\Sigma_X}\rangle \\ &= \langle f\circ \mathrm{id}_X, \sigma\circ \mathrm{id}_{\Sigma_X}\rangle \quad = \langle f,\sigma\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_B \circ \langle f,\sigma\rangle &= \langle \mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_{\Sigma_Y}\rangle \circ \langle f,\sigma\rangle \\ &= \langle \mathrm{id}_Y \circ f,\ \mathrm{id}_{\Sigma_Y}\circ\sigma\rangle \quad = \langle f,\sigma\rangle\end{aligned}$$

因此，**Trans** 是一个范畴。 □

2.1.1 Trans 的多项式函子

积

对于 lm 集 X、$\leq_X^e$、ℓ_X 和 Y、$\leq_Y^e$、ℓ_Y，它们的积记为 X、$\leq_X^e$、$\ell_X \times Y$、$\leq_Y^e$、ℓ_Y，定义如下：

$$\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle \times \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle = \{(x,y) | x \in \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle \wedge y \in \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle\}$$

积运算 $\times$ 是一个函子 $\mathbf{Trans} \times \mathbf{Trans} \to \mathbf{Trans}$。

定义 2.2 (积)。 取 **Trans** 中的两个对象 $\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle$ 和 $\langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle$。这两个对象的积是一个新的对象 $\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle \times \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle$，并带有两个投影态射：

$$\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle \xleftarrow{\pi_1} \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle \times \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle \xrightarrow{\pi_2} \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle$$

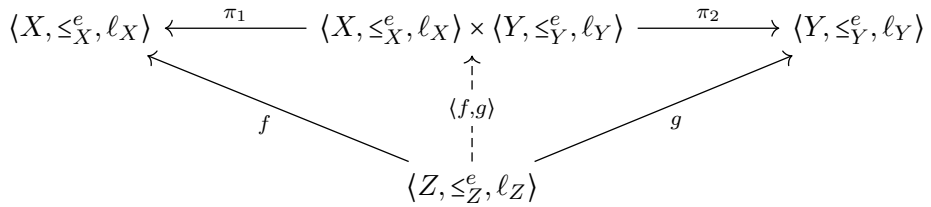
对于函数 $f : \langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z\rangle \to \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle$ 和 $g : \langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle$（其中，$f$还包含一对函数 $f : \langle f_f, f_\sigma\rangle : \langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z : Z \to \Sigma_Z\rangle \to \langle X, \leq_X^e, \ell_X : X \to \Sigma_X\rangle$；$g$也包含一对函数 $g : \langle g_g, g_\xi\rangle : \langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z : Z \to \Sigma_Z\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y\rangle$；在后续章节中，如果没有需要，我们就不展开它们，而使用其折叠形式），

存在唯一的配对函数 $\langle f,g\rangle : \langle Z,\leq_Z^e,\ell_Z\rangle \to \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \times \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle$，满足 $\langle f,g\rangle(z) = (f(z)\ g(z)) \in \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \times \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle$，对于 $z \in \langle Z,\leq_Z^e,\ell_Z\rangle$，使得以下方程成立：

$$\pi_1 \circ \langle f,g\rangle = f \qquad \langle \pi_1,\pi_2\rangle = \mathrm{id}_{\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \times \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle}$$
$$\pi_2 \circ \langle f,g\rangle = g \qquad \langle f,g\rangle \circ h = \langle f\circ h, g\circ h\rangle$$

其中 $h : \langle W,\leq_W^e,\ell_W\rangle \to \langle Z,\leq_Z^e,\ell_Z\rangle$。

对于上述态射 f 和 g，存在唯一的配对态射 $\langle f,g\rangle$，其定义如上，并使下图交换：



对于函数 $f : X,\leq_X^e,\ell_X \to X',\leq_{X'}^e,\ell_{X'}$ 和 $g : Y,\leq_Y^e,\ell_Y \to Y',\leq_{Y'}^e \ell_{Y'}$，函数的积 $f\times g$ 定义如下：

$$\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \times \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle \xrightarrow{f\times g} \langle X',\leq_{X'}^e,\ell_{X'}\rangle \times \langle Y',\leq_{Y'}^e,\ell_{Y'}\rangle$$

其定义为 $(x,y) \mapsto (f(x)\ g(y))$，其中 $x \in X,\leq_X^e,\ell_X$ 和 $y \in Y,\leq_Y^e,\ell_Y$，且满足以下方程：

$$f\times g = \langle f\circ\pi_1, g\circ\pi_2\rangle \qquad \mathrm{id}_{\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle} \times \mathrm{id}_{\langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle} = \mathrm{id}_{\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \times \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle}$$
$$(f\circ h)\times(g\circ k) = (f\times g)\circ(h\times k)$$

两个函数 $Z,\leq_Z^e,\ell_Z \to X,\leq_X^e,\ell_X$ 和 $Z,\leq_Z^e,\ell_Z \to Y,\leq_Y^e,\ell_Y$ 可以根据定义 3.3 复合为 $Z,\leq_Z^e,\ell_Z \to X,\leq_X^e,\ell_X \times Y,\leq_Y^e,\ell_Y$；而 $Z,\leq_Z^e,\ell_Z \to X,\leq_X^e,\ell_X \times Y,\leq_Y^e \ell_Y$ 可以通过使用投影 π_1 和 π_2 分解为 $Z,\leq_Z^e,\ell_Z \to X,\leq_X^e,\ell_X$ 和 $Z,\leq_Z^e,\ell_Z \to Y,\leq_Y^e,\ell_Y$，这可以用以下双线规则表示，并且可双向使用：

$$\frac{\langle Z,\leq_Z^e,\ell_Z\rangle \to \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \quad \langle Z,\leq_Z^e,\ell_Z\rangle \to \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle}{\langle Z,\leq_Z^e,\ell_Z\rangle \to \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \times \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle}$$

称为幂的 n 重积，定义为 $X,\leq_X^e,\ell_X{}^n = X,\leq_X^e,\ell_X \times\cdots\times X,\leq_X^e,\ell_X$，其中给定 $X,\leq_X^e,\ell_X$ 和 $n \in \mathbb{N}$。空积 $X,\leq_X^e,\ell_X{}^0$ 称为终对象。

定义 2.3 (终对象**)**。范畴 $\mathbb{C}$ 中的终对象是一个对象 $1 \in \mathbb{C}$，满足对于每个对象 $X \in \mathbb{C}$，在 $\mathbb{C}$ 中都存在唯一的态射 $!_X : X \to 1$。

命题 2.4 （Trans 的**Trans**）。**Trans** 有一个终对象。

证明。任意单元素标记出现多重集都是终对象。 □

Trans 具有有限积，因为它具有二元积和一个终对象 1。有限积可以推广为集合指标积：给定一个指标集 I，一族 $(X, \leq_X^e, \ell_X)_{i\in I}$ 的 I-指标对象具有 I-指标积 $X, \leq_X^e, \ell_X = \prod_{i\in I} X_i, \leq_{X_i}^e, \ell_{X_i}$，其投影为 $\pi_i : X, \leq_X^e, \ell_X \to X_i, \leq_{X_i}^e, \ell_{X_i}$，对 $i \in I$ 而言，这些积满足定义 3.3 中的泛性质：对于任意对象 $Y, \leq_Y^e, \ell_Y$ 以及一族 $f_i : Y, \leq_Y^e, \ell_Y \to X_i, \leq_{X_i}^e, \ell_{X_i}$ 的 I-指标态射，存在唯一态射 $f = f_i : Y, \leq_Y^e, \ell_Y \to X, \leq_X^e, \ell_X$，使得对 $i \in I$ 有 $\pi_i \bigcirc f = f_i$。在范畴 Trans 中，这样的积存在，并可描述如下：

$$\prod_{i\in I} \langle X_i, \leq_{X_i}^e, \ell_{X_i}\rangle = \{t : I \to \bigcup_{i\in I} \langle X_i, \leq_{X_i}^e, \ell_{X_i}\rangle | \forall i \in I.t(i) \in \langle X_i, \leq_{X_i}^e, \ell_{X_i}\rangle\}$$

余积

对于 lm 集 X，$\leq_X^e$，ℓ_X 和 Y，$\leq_Y^e$，ℓ_Y，它们的余积记作 X，$\leq_X^e$，ℓ_X $+Y$，$\leq_Y^e$，ℓ_Y，定义如下：

$$\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle + \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle = \{(x, 1) | x \in \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle\} \cup \{(y, 2) | y \in \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle\}$$

其中，1 和 2 使上述并集成为不相交并集。

余积运算 $+$ 也是一个函子 $\mathbf{Trans} \times \mathbf{Trans} \to \mathbf{Trans}$；实际上，它是积 $\times$ 的对偶。

定义 2.5（余积）。取 *Trans* 中的两个对象 $\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle$ 和 $\langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle$。这两个对象的余积是一个新的对象 $\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle + \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle$，并带有两个余投影态射：

$$\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle \xrightarrow{\kappa_1} \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle + \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle \xleftarrow{\kappa_2} \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle$$

对于函数 $f : \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle \to \langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z\rangle$ 和 $g : \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle \to \langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z\rangle$，存在唯一的余配对函数 $[f, g] : \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle + \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle \to \langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z\rangle$，满足：

$$[f, g](w) = \begin{cases} f(x), & if\ w = (x, 1); \\ g(y), & if\ w = (y, 2). \end{cases}$$

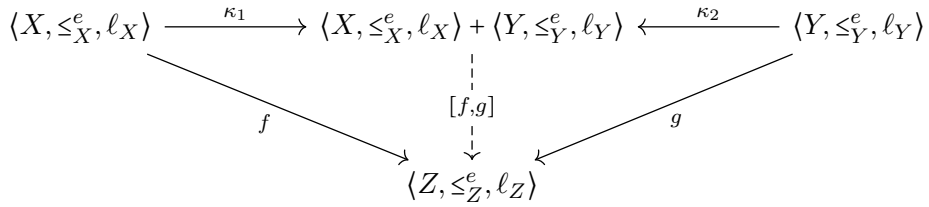
其中 $x \in \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle$ 和 $y \in \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle$。

并且以下方程成立：

$$[f, g] \circ \kappa_1 = f \qquad [\kappa_1, \kappa_2] = \mathrm{id}_{\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle + \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle}$$
$$[f, g] \circ \kappa_2 = g \qquad h \circ [f, g] = [h \circ f, h \circ g]$$

其中 $h : \langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z\rangle \to \langle W, \leq_W^e, \ell_W\rangle$。

对于上述态射 f 和 g，存在唯一的配对态射 $[f, g]$，其定义如上，使下图交换：



对于函数 $f : X,\ \leq_X^e,\ \ell_X \to X',\ \leq_{X'}^e,\ \ell_{X'}$ 和 $g : Y,\ \leq_Y^e,\ \ell_Y \to Y', \leq_{Y'}^e \ell_{Y'}$，函数的余积 $f + g$ 定义为:

$$(f+g)(w) = \begin{cases} (f(x), 1), & \text{if } w = (x, 1); \\ (g(y), 2), & \text{if } w = (y, 2). \end{cases}$$

其中 $x \in X, \leq_X^e, \ell_X$ 和 $y \in Y, \leq_Y^e, \ell_Y$，满足以下方程:

$$f + g = \langle \kappa_1 \circ f, \kappa_2 \circ g \rangle \qquad \mathrm{id}_{\langle X, \leq_X^e, \ell_X \rangle} + \mathrm{id}_{\langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y \rangle} = \mathrm{id}_{\langle X, \leq_X^e, \ell_X \rangle + \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y \rangle}$$
$$(f \circ h) + (g \circ k) = (f + g) \circ (h + k)$$

两个函数 $X, \leq_X^e, \ell_X \to Z, \leq_Z^e, \ell_Z$ 和 $Y, \leq_Y^e, \ell_Y \to Z, \leq_Z^e, \ell_Z$ 可根据定义 3.6 复合为 $X, \leq_X^e, \ell_X + Y, \leq_Y^e, \ell_Y \to Z, \leq_Z^e, \ell_Z$，而 $X, \leq_X^e, \ell_X + Y, \leq_Y^e, \ell_Y \to Z, \leq_Z^e \ell_Z$ 可借助余积注入 κ_1 and κ_2 分解为 $X, \leq_X^e, \ell_X \to Z, \leq_Z^e, \ell_Z$ 和 $Y, \leq_Y^e, \ell_Y \to Z, \leq_Z^e, \ell_Z$，这可由以下双线规则在两个方向上表示:

$$\frac{\langle X, \leq_X^e, \ell_X \rangle \to \langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z \rangle \quad \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y \rangle \to \langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z \rangle}{\langle X, \leq_X^e, \ell_X \rangle + \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y \rangle \to \langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z \rangle}$$

n 重余积定义为 $n \cdot X,\ \leq_X^e,\ \ell_X = X,\ \leq_X^e,\ \ell_X + \cdots + X,\ \leq_X^e,\ \ell_X$，给定 $X,\ \leq_X^e,\ \ell_X$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 时如此。空余积 $0 \cdot X,\ \leq_X^e,\ \ell_X$ 称为始对象。

定义 2.6 (始对象)。范畴 $\mathbb{C}$ 中的始对象是一个对象 $0 \in \mathbb{C}$，使得对于每个对象 $X \in \mathbb{C}$，在 $\mathbb{C}$ 中都存在唯一的态射 $!_X : 0 \to X$。

命题 2.7 (Trans 的始对象**Trans**)。**Trans** 有一个始对象。

证明。空标记出现多重集 0 是始对象。 □

Trans 具有有限余积，因为它具有二元余积和始对象 0。有限余积可以推广为集合指标余积: 给定指标集 I，一组 $(X, \leq_X^e \ell_X)_{i \in I}$ 个由 I 指标的对象，其 I 指标余积为 $X, \leq_X^e, \ell_X = \coprod_{i \in I} X_i, \leq_{X_i}^e, \ell_{X_i}$，余投影为 $\kappa_i : X_i, \leq_{X_i}^e, \ell_{X_i} \to X, \leq_X^e, \ell_X$，其中 $i \in I$；它们满足定义 3.6 中的泛性质: 对于任意对象 $Y, \leq_Y^e, \ell_Y$，以及一组由 I 指标的态射 $f_i : X_i, \leq_{X_i}^e, \ell_{X_i} \to Y, \leq_Y^e, \ell_Y$，存在唯一态射 $f = [f_i] : X, \leq_X^e, \ell_X \to Y, \leq_Y^e, \ell_Y$，使得 $f \bigcirc \kappa_i = f_i$ 对于 $i \in I$ 成立。在范畴 Trans 中，这类余积是不交并，可描述如下:

$$\coprod_{i \in I} \langle X_i, \leq_{X_i}^e, \ell_{X_i} \rangle = \{(i, x) : i \in I \wedge x \in \langle X_i, \leq_{X_i}^e, \ell_{X_i} \rangle\}$$

指数对象

对于 lm 集 $X, \leq_X^e, \ell_X$ 和 $Y, \leq_Y^e, \ell_Y$，其指数对象记作 $Y, \leq_Y^e, \ell_Y{}^{\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle}$，定义如下：

$$\langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle^{\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle} = \{f | f \text{ is a total function } \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle\}$$

指数运算 $Y, \leq_Y^e, \ell_Y{}^{\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle}$ 是一个函子 $\mathbf{Trans}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Trans} \to \mathbf{Trans}$，其中 $\mathbf{Trans}^{\mathrm{op}}$ 是 **Trans** 的对偶范畴。

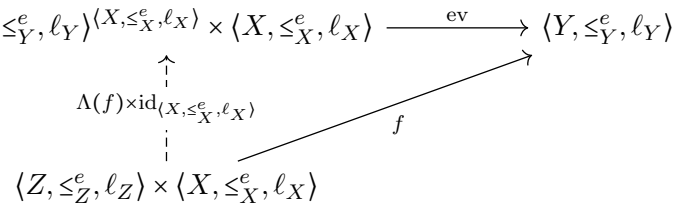
定义 2.8（指数对象）。取 **Trans** 中的两个对象 $\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle$ 和 $\langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle$。这两个对象的指数是一个新对象 $\langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle^{\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle}$，并带有一个求值态射：

$$\langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle^{\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle} \times \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle \xrightarrow{\quad \mathrm{ev} \quad} \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle$$

对于每个函数 $f : \langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z\rangle \times \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle$，都存在唯一的抽象态射 $\Lambda(f) : \langle X, \ell_Z\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle^{\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle}$，使得以下方程成立：

$$\mathrm{ev} \circ (\Lambda(f) \times \mathrm{id}_{\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle}) = f \qquad \Lambda(\mathrm{ev}) = \mathrm{id}_{\langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle^{\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle}}$$
$$\Lambda(f) \circ h = \Lambda(f \circ (h \times \mathrm{id}_{\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle}))$$

对于上述态射 f，存在唯一的抽象态射 $\Lambda(f)$，其定义如上，并使下图交换：



对于 **Trans** 中的两个映射 $k : X, \leq_X^e, \ell_X \to U, \leq_U^e, \ell_U$，以及 **Trans** 中的 $h : Y, \leq_Y^e, \ell_Y \to V, \leq_V^e, \ell_V$，函数 h^k 的指数定义为：

$$h^k(f) = h \circ f \circ k$$

使得以下方程成立：

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}^{\mathrm{id}}(f)) &= \mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id} = f \\ (h_2^{k_2} \circ h_1^{k_1})(f) &= (h_2^{k_2}(h_1^{k_1}(f)) \\ &= h_2^{k_2}(h_1 \circ f \circ k_1) \\ &= h_2 \circ h_1 \circ f \circ k_1 \circ k_2 \\ &= (h_2 \circ h_1)^{k_1 \circ k_2}(f) \\ &= (h_2 \circ_{\mathbb{C}} h_1)^{k_1 \circ_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}} k_2}(f)\end{aligned}$$

The 指数，也称为柯里化，可用以下双线规则表示：

$$\frac{\langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z\rangle \times \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle}{\langle Z, \leq_Z^e, \ell_Z\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle^{\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle}}$$

一个笛卡尔闭范畴，记作**CCC**，是一个具有有限积和指数对象的范畴。双笛卡尔闭范畴，记作**BiCCC**，是一个具有有限余积的**CCC** ，而**Trans** 是一个**BiCCC**。

幂集

对于一个 lmset $X, \leq_X^e, \ell_X$，我们将 $X, \leq_X^e, \ell_X$ 的幂集写作 $\mathsf{P}(X, \leq_X^e, \ell_X) = \{U, \leq_U^e \ell_U | U, \leq_U^e, \ell_U \subseteq X, \leq_X^e, \ell_X\}$，它是 $X, \leq_X^e, \ell_X$ 的所有子集构成的集合。幂集 $\mathsf{P}(X, \leq_X^e \ell_X)$ 按集合包含自然排序 $\subseteq$，从而得到一个偏序集 $\mathsf{P}(X, \leq_X^e, \ell_X)\ \subseteq$。通过将交定义为交集 $\bigcap_{i\in I} U_i, \leq_{U_i}^e, \ell_{U_i} = \{x \in X, \leq_X^e, \ell_X | \forall i \in I. x \in U_i, \leq_{U_i}^e, \ell_{U_i}\}$，将并定义为并集 $\bigcup_{i\in I} U_i, \leq_{U_i}^e, \ell_{U_i} = \{x \in X, \leq_X^e, \ell_X | \exists i \in I. x \in U_i, \leq_{U_i}^e, \ell_{U_i}\}$，将否定定义为补集 $\neg U, \leq_U^e, \ell_U = \{x \in X, \leq_X^e, \ell_X | x \notin U, \leq_U^e, \ell_U\}$，并定义真谓词 $\top_{\langle X, \leq_X^e, \ell_X} = (X, \leq_X^e, \ell_X \subseteq X, \leq_X^e, \ell_X)$ 和假谓词 $\bot_{\langle X, \leq_X^e, \ell_X} = (\varnothing \not\subseteq X, \leq_X^e, \ell_X)$，偏序集 $\mathsf{P}(X, \leq_X^e, \ell_X) \subseteq$ 构成一个完备布尔代数，因此，布尔值的集合 $\{\top, \bot\}$ 是终对象 1 的幂集 $\mathsf{P}(1)$。

定义在 lm 集 $X, \leq_X^e, \ell_X$ 和 $Y, \leq_Y^e, \ell_Y$ 上的关系 R 是子集 $R \subseteq X, \leq_X^e, \ell_X \times Y, \leq_Y^e, \ell_Y$，也就是说，$R \in \mathsf{P}(X, \leq_X^e, \ell_X \times Y, \leq_Y^e, \ell_Y)$ 是谓词的一种特殊情况。和谓词一样，$\mathsf{P}(X, \leq_X^e \ell_X \times Y, \leq_Y^e, \ell_Y) \subseteq$ 又构成一个完备布尔代数。通常，关系带有逆关系 $R^\dagger$ for R 和复合 $\bigcirc$。

对于某个 lmset $X, \leq_X^e, \ell_X$ 上的自关系 $R \subseteq X, \leq_X^e, \ell_X \times X, \leq_X^e, \ell_X$，相等关系 $\mathsf{Eq}(X, \leq_X^e, \ell_X) = \{(x, y) \in X, \leq_X^e, \ell_X \times X, \leq_X^e, \ell_X | x = y\} = \{(x, x) | x \in X, \leq_X^e, \ell_X\}$。范畴 LMSetsRel 以 lm 集为对象、以关系为态射，并以相等关系为恒等态射。

幂集运算 $X, \leq_X^e, \ell_X \mapsto \mathsf{P}(X, \leq_X^e, \ell_X)$ 也具有函子性。对于函数 $f : X, \leq_X^e, \ell_X \to Y, \leq_Y^e, \ell_Y$，有一个函数 $\mathsf{P}(f) : \mathsf{P}(X, \leq_X^e, \ell_X) \to \mathsf{P}(Y, \leq_Y^e, \ell_Y)$，定义这个函子有几种方法：

1. 直接像的方法：对于 $U, \leq_U^e, \ell_U \subseteq X, \leq_X^e, \ell_X$，

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(f)(\langle U, \leq_U^e, \ell_U\rangle) &= \{f(x) | x \in \langle U, \leq_U^e, \ell_U\rangle\} \\ &= \{y \in \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle | \exists x \in \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle. f(x) = y \wedge x \in \langle U, \leq_U^e, \ell_U\rangle\}\end{aligned}$$

   直接像也可以表示为 $f[U, \leq_U^e, \ell_U]$ 或 $\coprod_f (U, \leq_U^e, \ell_U)$。直接像的方法将幂集描述为一个函子 $\mathsf{P} : \mathbf{Trans} \to \mathbf{Trans}$。对于有限幂集 $\mathsf{P}_{\mathrm{fin}}(X, \leq_X^e, \ell_X) = \{U, \leq_U^e, \ell_U \in \mathsf{P}(X, \leq_X^e, \ell_X) | U, \leq_U^e, \ell_U$ 是有限的 $\}$，它也构成一个函子 $\mathbf{Trans} \to \mathbf{Trans}$。

2. 逆像方法：逆像方法将幂集描述为一个函子 $\mathsf{P} : \mathbf{Trans}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Trans}$。对于一个函数 $f : X, \leq_X^e, \ell_X \to Y, \leq_Y^e, \ell_Y$，存在一个函数 $f^{-1} : \mathsf{P}(Y, \leq_Y^e, \ell_Y) \to \mathsf{P}(X, \leq_X^e, \ell_X)$，对于 $U, \leq_U^e, \ell_U \subseteq X, \leq_X^e, \ell_X$，

$$f^{-1}(\langle U, \leq_U^e, \ell_U\rangle) = \{x | f(x) \in \langle U, \leq_U^e, \ell_U\rangle\}$$

对应关　直接像与逆像的对应关系可以由以下规则反映 le:

$$\frac{\coprod_f(\langle U,\leq^e_U,\ell_U\rangle)\subseteq\langle V,\leq^e_V,\ell_V\rangle}{\langle U,\leq^e_U,\ell_U\rangle\subseteq f^{-1}(\langle V,\leq^e_V,\ell_V\rangle)}$$

幂集也有一种对应关系，可以用以下规则表示:

$$\frac{\langle X,\leq^e_X,\ell_X\rangle\to\mathcal{P}(\langle Y,\leq^e_Y,\ell_Y\rangle)}{\text{relations}\subseteq\langle Y,\leq^e_Y,\ell_Y\rangle\times\langle X,\leq^e_X,\ell_X\rangle}$$

单射与满射

对于 lm 集 $X,\leq^e_X,\ell_X$ 和 $Y,\leq^e_Y,\ell_Y$，单射（单态射（单态射）或单态映射）是一种映射，满足：若 $f(x)=f(x')$，则 $x=x'$对于 $x,x'\in X,\leq^e_X,\ell_X$。对于单射，若 $X,\leq^e_X,\ell_X\subseteq Y,\leq^e_Y,\ell_Y$，我们记作 $f:X,\leq^e_X,\ell_X\hookrightarrow Y,\leq^e_Y,\ell_Y$ 或 $f:X,\leq^e_X,\ell_X\rightarrowtail Y,\leq^e_Y,\ell_Y$。满射（满态射（满态射）或满态映射）是一种记作 $f:X,\leq^e_X,\ell_X\twoheadrightarrow Y,\leq^e_Y,\ell_Y$ 的映射，满足对于每个 $y\in Y,\leq^e_Y,\ell_Y$，都存在一个 $x\in X,\leq^e_X,\ell_X$，使得 $f(x)=y$。

每个满射 $f:X,\leq^e_X,\ell_X\twoheadrightarrow Y,\leq^e_Y,\ell_Y$ 都有一个截面（分裂），即一个反向的函数 $s:Y,\leq^e_Y\ell_Y\to X,\leq^e_X,\ell_X$，满足 $f\bigcirc s=\mathrm{id}$。因此，这就从非空集 $f^{-1}(y)=\{x\in X,\leq^e_X,\ell_X|f(x)=y\}$ 中选取了一个元素 $s(y)$，而这样的截面是一个单射。
此外，对于每个带有 $X,\leq^e_X,\ell_X\neq\varnothing$ 的单射 $f:X,\leq^e_X,\ell_X\rightarrowtail Y,\leq^e_Y,\ell_Y$，都存在一个函数$g:Y,\leq^e_Y,\ell_Y\to X,\leq^e_X,\ell_X$，满足 $g\bigcirc f=\mathrm{id}$，其中 $x_0\in X,\leq^e_X,\ell_X$:

$$g(y)=\begin{cases}x, & \text{if there is an element } x \text{ with } f(x)=y;\\ x_0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Le引理 2.9 (单射与满射)。 设 $F:$**Trans** $\to$**Trans** 是任意一个函子 .

1. 若 $f:\langle X,\leq^e_X,\ell_X\rangle\to\langle Y,\leq^e_Y,\ell_Y\rangle$ 是满射，则 $F(f):F(\langle X,\leq^e_X,\ell_X\rangle)\to F(\langle Y,\leq^e_Y\ell_Y\rangle)$ 也是满射。*2.* 若 $f:\langle X,\leq^e_X,\ell_X\rangle\to\langle Y,\leq^e_Y,\ell_Y\rangle$ 是单射，且 $\langle X,\leq^e_X,\ell_X\rangle\neq\varnothing$，则 $F(f):F(\langle X,\leq^e_X\ell_X\rangle)\to F(\langle Y,\leq^e_Y,\ell_Y\rangle)$ 也是单射。

定义 2.10（多项式函子族）。 我们定义三类函子**Trans** $\to$**Trans**、**SPF**、**EPF** 和**KPF**，分别对应简单多项式函子、指数多项式函子和 *Kripke* 多项式函子:

1. **SPF** 是函子**Trans** $\to$**Trans** 中满足以下条件的最小类:

(a) 恒等函子 *Trans* $\to$*Trans* 属于 *SPF*。*(b)* 对于每个 *lmset* $\langle A,\leq^e_A,\ell_A\rangle$，常值函子 $A:$ *Trans* $\to$ *Trans* 属于 *SPF*，它将每个 *lmset* $\langle X,\leq^e_X,\ell_X\rangle$ 映射到 $\langle A,\leq^e_A,\ell_A\rangle$，并将每个函数 f映射为 $\langle A,\leq^e_A,\ell_A\rangle$ 上的恒等映射 $id_{\langle A,\leq^e_A,\ell_A\rangle}$。*(c)* 如果函子 $F,G\in$属于 *SPF*，那么 $F\times G\in$属于 *SPF*，因为 $\langle X,\leq^e_X,\ell_X\rangle\mapsto F(\langle X,\leq^e_X,\ell_X\rangle)\times F(\langle X,\leq^e_X,\ell_X\rangle)$，并且对于函数 $f\mapsto F(f)\times G(f)$。

(d) 对于非空指标集 I，若存在一个由 I索引的函子族 $F_i \in$，对于 $i \in I$属于 *SPF*，则$\coprod_{i\in I} F_i \in$属于 *SPF*，因为 $\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle \mapsto \coprod_{i\in I} F_i(\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle)$，其中 $\coprod_{i\in I} F_i(\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle) = \{(i, u) \mid i \in I \wedge u \in F_i(\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle)\}$；并且对于函数 $f:$，将 $\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle \to$映射到 $\langle Y, \leq^e_Y, \ell_Y\rangle$，其映射 $(i, u) \mapsto (i, F_i(f)(u))$。

2. EPF $\supset$ *SPF*，此外，对于每个 *lmset* $\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle$，若 $F \in$ *EPF*，那么常值指数 $F\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle$ *as* $\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle \mapsto F(\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle)^{\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle}$ 也是如此。它将函数$f:\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle \to \langle Y, \leq^e_Y, \ell_Y\rangle$ 映射为函数 $F(f)^{\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle} = F(f)^{\mathrm{id}_{\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle}}$，该函数将$h:\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle \to F(\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle)$ 映射为 $F(f) \bigcirc h:\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle \to F(\langle Y, \leq^e_Y, \ell_Y\rangle)$。

3. **KPF** $\supset$**EPF**，此外，

(a) 若 $F \in$ *KPF*，则幂集 $P(F) \in$ *KPF*，因为 $\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle \mapsto P(F(\langle X, \leq^e_X \ell_X\rangle))$ 且函数 $f \mapsto P(F(f))$。*(b)* 对每个 *lmset* $\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle$，若 $F \in$ *KPF*，则幂集指数 $F^{\mathcal{P}(\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle)}$ 也具有 *KPF*，因为 $\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle \mapsto F(\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle)^{\mathcal{P}(\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle)}$。它将函数 $f:\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle \to \langle Y, \leq^e_Y, \ell_Y\rangle$ 映射为函数 $F(f)^{\mathcal{P}(\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle)} = F(f)^{\mathcal{P}(\mathrm{id}_{\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle})}$，该函数将 $h:P(\langle A, \leq^e_A \ell_A\rangle) \to F(\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle)$ 映射到 $F(f) \bigcirc h:P(\langle A, \leq^e_A, \ell_A\rangle) \to F(\langle Y, \leq^e_Y, \ell_Y\rangle)$。

如果 F 中的幂集 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}$，那么 F 称为有限 **KPF**。

列表函子 $F^\star$ 可表示为积的无限余积:

$$F^\star = \coprod_{n\in\mathbb{N}} F^n \text{ where } F^n = F \times F^{n-1}$$

如果 F是恒等函子，那么 $F^\star$将一个 lmset $X, \leq^e_X, \ell_X$ 映射为列表集合:

$$X, \leq^e_X, \ell_X\ ^\star = 1+\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle+(\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle\times\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle)+(\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle\times\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle\times\langle X, \leq^e_X, \ell_X\rangle)+\cdots$$

定义 2.11 (终余代数)。设 $\mathbb{C}$ 是一个带有自函子 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 的任意范畴。一个终 F-余代数就是关联范畴 $\mathbf{CoAlg}(F)$ 中 F-余代数的终对象。因此，它是一个余代数 $\zeta: Z \to F(Z)$，使得对于任意余代数 $c: X \to F(X)$，都存在唯一的余代数同态 $beh_c: X \to Z$，使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(beh_c)} & F(Z) \\ \uparrow{\scriptstyle c} & & \uparrow{\scriptstyle \zeta} \\ X & \xrightarrow[beh_c]{} & Z \end{array}$$

引理 2.12。若终余代数存在，则它在同构意义下唯一。

Lemm命题 2.13. 最终余代数 $\zeta: Z \to F(Z)$ 必然是一个同构 $\zeta: Z \xrightarrow{\cong} F(Z)$.

定理 m 2.14. 每个有限 *Kripke* 多项式函子 **Trans** →**Trans** 都有一个终余代数 .

定义 2.15 (初始代数**)**。设 $\mathbb{C}$ 是任意范畴，并带有一个自函子 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$。初始 F-代数就是关联范畴 $\mathbf{Alg}(F)$ 中 F-代数的一个始对象。因此，它是一个代数 $\alpha:F(A)\to A$，使得对于任意代数 $b:F(X)\to X$，都存在唯一的代数同态 $int_b:\alpha\to b$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(int_b)} & F(X) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ A & \xrightarrow[int_b]{} & X \end{array}$$

引理 2.16. 函子 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 的初始代数 $F(A)\to A$ 是同构 $F(A)\xrightarrow{\cong} A$，在 $\mathbb{C}$ 中。

命题 *2.17.* 任意初始代数 $\alpha:F(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)\xrightarrow{\cong}\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle$ 满足以下递归性质：对于每个映射 $h:F(\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle\times\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)\to\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle$，都存在唯一映射 $f:\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle\to\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle) & \xrightarrow{F(\langle f,\mathrm{id}\rangle)} & F(\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle\times\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle & \xrightarrow[f]{} & \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \end{array}$$

2.2 变换器代数 AT

2.2.1 步双模拟

定义 *2.18*（关系提升）。设 $F:$*Trans* $\to$*Trans* 是一个多项式函子，并设 $\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle$、$\langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle$ 是任意 *lm* 集。映射 ***Rel(F)*** 将关系 $R\subseteq\langle X,\leq_X^e\ell_X\rangle\times\langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle$ 映射为提升关系 ***Rel(F)(*** R***)*** $\subseteq F(\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle)\times F(\langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle)$，它按如下方式对函子 F 的结构进行归纳定义：

1. 若 F 是恒等函子，则

$$\mathrm{Rel}(F)(R)=R$$

2. 若 F 是常值函子 $\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle\mapsto\mathcal{P}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)$，则

$$\mathrm{Rel}(F)(R)=\{(U,U)|U\in\mathcal{P}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)\}$$

3. 如果 F 是一个积 $F_1\times F_2$，那么

$$\mathrm{Rel}(F)(R)=\{((u_1,u_2),(v_1,v_2))|\mathrm{Rel}(F_1)(R)(u_1,v_1)\wedge\mathrm{Rel}(F_2)(R)(u_2,v_2)\}$$

4. 如果 F 是一个集合指标余积 $\coprod_{i\in I} F_i$，那么

$$\mathrm{Rel}(F)(R) = \bigcup_{i\in I}\{(\kappa_i(u),\kappa_i(v))|\mathrm{Rel}(F_i)(R)(u,v)\}$$

5. 若 F 是指数 $G^{\mathcal{P}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$，则

$$\mathrm{Rel}(F)(R) = \{(f,g)|\forall U \in \mathcal{P}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle).\mathrm{Rel}(G)(R)(f(U),g(U))\}$$

6. 若 F 是幂集$\mathcal{P}(G)$，则

$$\mathrm{Rel}(F)(R) = \{(U,V)|\forall u \in U.\exists v \in V.\mathrm{Rel}(G)(R)(u,v) \wedge \forall v \in V.\exists u \in U.\mathrm{Rel}(G)(R)(u,v)\}$$

定义 *2.19*（步双模拟）。设 F :*Trans* →*Trans* 是一个多项式函子。余代数 $c:\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \to F(\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle)$ 和 $d:\langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle \to F(\langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle)$ 的步双模拟是一个满足以下条件的关系 $R \subseteq \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \times \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle$:

$$(x,y) \in R \Rightarrow (c(x),d(y)) \in \mathrm{Rel}(F)(R)$$

步双模拟等价是单个余代数上的步双模拟，且它是一种等价关系。

定义 2.20（步双模拟等价）。设 $c:\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \to F$（$X,\leq_X^e,\ell_X$）和 $d:\langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle \to F$（$Y,\leq_Y^e,\ell_Y$）是多项式函子 F 的两个余代数。步双模拟关系 $\leftrightarrow$ 是所有步双模拟的并集:

$$x \underline{\leftrightarrow} y \Leftrightarrow \exists R \subseteq \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \times \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle.R \text{是 } c\text{和 } d\text{之间的步双模拟，并且 } R(x,y)$$

定理 *2.21*。设 F :*Trans* → *Trans* 是一个具有终余代数 $\zeta:\langle Z,\leq_Z^e,\ell_Z\rangle \xrightarrow{\cong} F(\langle Z,\leq_Z^e,\ell_Z\rangle)$ 的有限多项式函子。设 $c:\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \to F(\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle)$ 和 $d:\langle Y,\leq_Y^e\ell_Y\rangle \to F(\langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle)$ 是任意余代数，其对应的行为同态为 $\mathbf{beh}_c:\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \to \langle Z,\leq_Z^e,\ell_Z\rangle$ 和 $\mathbf{beh}_d:\langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle \to \langle Z,\leq_Z^e,\ell_Z\rangle$。那么，两个状态 $x \in \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle$ 和$y \in \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle$ 步双模拟等价，当且仅当它们具有相同的真正并发行为:

$$x \underline{\leftrightarrow}_{cd} y \Leftrightarrow \mathrm{beh}_c(x) = \mathrm{beh}_d(y)$$

定义 *2.22*（同余）。设 F :*Trans* →*Trans* 是一个多项式函子。代数 $a:F(\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle) \to \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle$ 和 $b:F(\langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle) \to \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle$ 的同余是一个关系$R \subseteq \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \times \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle$，满足:

$$(u,v) \in \mathrm{Rel}(F)(R) \Rightarrow (a(u),b(v)) \in R$$

同余等价是指同时为同余和等价关系的关系。

定理 *2.23*。设 *Kripke* 多项式函子 F 有两个代数 $a:F(\langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle) \to \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle$ 和 $b:F(\langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle) \to \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle$。关系 $R \subseteq \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \times \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle$ 是同余，当且仅当它本身带有唯一代数 $F(R) \to R$，使得 $\langle r_1,r_2\rangle : R \rightarrowtail \langle X,\leq_X^e,\ell_X\rangle \times \langle Y,\leq_Y^e,\ell_Y\rangle$ 是代数包含同态，如下所示:

$$\begin{array}{ccccc} F(\langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle) & \xleftarrow{F(r_1)} & F(R) & \xrightarrow{F(r_2)} & F(\langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle) \\ \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle \langle r_1, r_2\rangle} & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ \langle X, \leq_X^e, \ell_X\rangle & \xleftarrow[r_1]{} & R & \xrightarrow[r_2]{} & \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y\rangle \end{array}$$

2.2.2 变换器代数 AT

由于函子 $X,\ \leq_X^e,\ \ell_X \mapsto \mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(X,\ \leq_X^e,\ \ell_X)^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\ \leq_A^e,\ \ell_A\rangle)}$是一个有限 Kripke 多项式函子，并且有一个终余代数:

$$Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)} \xrightarrow[\cong]{\zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}} \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)})^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$$

The 终余代数的元素$Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$ 被称为真正并发的进程 s.

空进程是不执行任何操作的平凡进程:

$$\mathbf{0} \triangleq \zeta^{-1}_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(\lambda U \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \ell_A\rangle).\varnothing)$$

给定两个进程 $z_1,z_2 \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$，和进程 $z_1 + z_2 \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$ 定义如下:

$$z_1 + z_2 \triangleq \zeta^{-1}_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(\lambda U \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \ell_A\rangle).\zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_1)(U) \cup \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_2)(U))$$

于是，我们有:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) \xrightarrow{U} w &\Leftrightarrow w \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_1 + z_2)(U) \\ &\Leftrightarrow w \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_1)(U) \cup \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_2)(U) \\ &\Leftrightarrow w \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_1)(U) \text{ or } w \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_2)(U) \\ &\Leftrightarrow z_1 \xrightarrow{U} w \text{ or } z_2 \xrightarrow{U} w \end{aligned}$$

可以用以下两条规则来描述:

$$\frac{z_1 \xrightarrow{U} w}{z_1 + z_2 \xrightarrow{U} w} \qquad \frac{z_2 \xrightarrow{U} w}{z_1 + z_2 \xrightarrow{U} w}$$

给定一个进程 $z \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$ 和一个步 $V \in \mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(A, \leq_A^e, \ell_A)$，前缀进程 $V.z$ 定义如下:

$$V.z \triangleq \zeta^{-1}_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(\lambda U \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \ell_A\rangle)).\{z | U \cong V\}$$

接下来，我们有:

$$\begin{aligned}(V.z) \xrightarrow{U} w &\Leftrightarrow w \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(V.z)(U)\\ &\Leftrightarrow w \in \{z | U \cong V\}\\ &\Leftrightarrow U \cong V \wedge w = z\end{aligned}$$

可以用以下规则来描述:

$$\frac{}{V.z \xrightarrow{V} z}$$

给定两个进程 $z_1, z_2 \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$，并行进程 $z_1 \oplus z_2 \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$ 定义如下:

$$z_1 \oplus z_2 \triangleq \zeta^{-1}_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(\lambda U, V \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle).\zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_1)(U) \cup \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_2)(V))$$

于是，我们有:

$$\begin{aligned}(z_1 \oplus z_2) \xrightarrow{U \| V} z_1' \oplus z_2' &\Leftrightarrow z_1' \oplus z_2' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_1 \oplus z_2)(U \parallel V)\\ &\Leftrightarrow z_1' \oplus z_2' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_1)(U) \cup \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_2)(V)\\ &\Leftrightarrow z_1' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_1)(U) \text{ and } z_2' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(z_2)(V)\\ &\Leftrightarrow z_1 \xrightarrow{U} z_1' \text{ and } z_2 \xrightarrow{V} z_2'\end{aligned}$$

这可以由以下两条规则描述:

$$\frac{z_1 \xrightarrow{U} z_1' \quad z_2 \xrightarrow{V} z_2'}{z_1 \oplus z_2 \xrightarrow{U \| V} z_1' \oplus z_2'}$$

对于任意步骤的幂集 $\mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(A, \leq_A^e, \ell_A)$，令多项式函子 $\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$:**Trans** →**Trans** 定义为

$$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}(X, \leq_X^e, \ell_X) = 1 + (\mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(A, \leq_A^e, \ell_A) \times X, \leq_X^e, \ell_X) + (X, \leq_X^e, \ell_X \times X, \leq_X^e, \ell_X) + (X, \leq_X^e, \ell_X \times X, \leq_X^e, \ell_X)$$

该函子上的代数 $\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}(X, \leq_X^e, \ell_X) \to X, \leq_X^e, \ell_X$ 由四个运算组成：$\mathbf{0} : 1 \to X, \leq_X^e, \ell_X$ 表示空进程，$. : \mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(A, \leq_A^e, \ell_A) \times X, \leq_X^e, \ell_X \to X, \leq_X^e, \ell_X$ 表示前缀进程，$+ : X, \leq_X^e, \ell_X \times X, \leq_X^e, \ell_X \to X, \leq_X^e, \ell_X$，$\oplus : X, \leq_X^e, \ell_X \times X, \leq_X^e, \ell_X \to X, \leq_X^e \ell_X$ 表示并行进程。终余代数 $Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)} \xrightarrow{\cong} \mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)})^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}$ 携带一个写作 $\xi_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)} : \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}) \to Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}$ 的 $\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}$ 代数。因此，可得到一个双代数:

$$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}) \xrightarrow{\xi_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}} Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)} \xrightarrow[\cong]{\zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}} \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)})^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$$

初始 $\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}$-代数记作 $P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}$，即 $\alpha : \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}) \xrightarrow{\cong} P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}$，其中包含闭过程项，这些项由 $\mathbf{0}$ 和 $U \in \mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(A, \leq_A^e \ell_A)$ 构造而成。$P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\ell_A)}$ 也具有双代数结构：

$$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}) \xrightarrow[\cong]{\alpha} P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)})^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$$

余代数 β 由归纳法定义：

$$\begin{aligned}
\beta(\mathbf{0})(U) &= \varnothing \\
\beta(V.s)(U) &= \{s | V \cong U\} \\
\beta(s+t)(U) &= \beta(s)(U) \cup \beta(t)(U) \\
\beta(s \oplus t)(U \parallel V) &= \beta(s)(U) \cup \beta(t)(V)
\end{aligned}$$

由初始性给出的指称语义与由终结性给出的操作语义对于过程项是一致的。

命题 2.24. 在上述情形下，我们得到两个映射 $P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)} \to Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$，其中一个由初始性给出，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}) & \xrightarrow{\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(\mathrm{int}_\alpha)} & \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha}\ \cong & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\
P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)} & \xrightarrow[\mathrm{int}_\alpha]{} & Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}
\end{array}$$

另一个由终结性给出，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)})^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)} & \xrightarrow{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}} & \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)})^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)} \\
\uparrow{\scriptstyle \beta} & & \uparrow{\scriptstyle \cong\ \zeta} \\
P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)} & \xrightarrow[\mathrm{beh}_\beta]{} & Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}
\end{array}$$

证明。对项的结构 $s \in P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\ \leq_A^e,\ \ell_A\rangle)}$进行归纳法，我们证明 $\mathrm{beh}_\beta(s) = \mathrm{int}_\alpha(s)$，或者等价地，$\zeta(\mathrm{beh}_\beta(s))(U) = \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s))(U)$：

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathrm{beh}_\beta(\mathbf{0}))(U) &= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(\beta(\mathbf{0}))(U) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(\mathbf{0})(U)) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta(\varnothing)) \\
&= \varnothing \\
&= \zeta(\mathbf{0})(U) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(\mathbf{0}))(U)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\zeta(\mathrm{beh}_\beta(V.s))(U) &= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(V.s))(U) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\{s|V \cong U\}) \\
&= \{\mathrm{beh}_\beta(s)|V \cong U\} \\
&= \{\mathrm{int}_\alpha(s)|V \cong U\} \\
&= \zeta(V.\mathrm{int}_\alpha(s))(U) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(V.s))(U)
\end{aligned}
$$

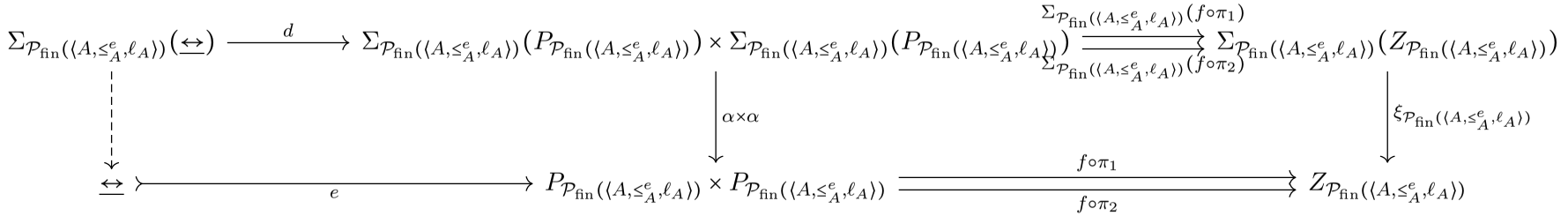
$$
\begin{aligned}
\zeta(\mathrm{beh}_\beta(s+t))(U) &= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s+t))(U) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s)(U) \cup \beta(t)(U)) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s)(U)) \cup \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(t)(U)) \\
&= \zeta(\mathrm{beh}_\beta(s))(U) \cup \zeta(\mathrm{beh}_\beta(t))(U) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s))(U) \cup \zeta(\mathrm{int}_\alpha(t))(U) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s) + \mathrm{int}_\alpha(t))(U) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s+t))(U)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta(\mathrm{beh}_\beta(s \oplus t))(U \parallel V) &= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s \oplus t))(U \parallel V) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s)(U) \cup \beta(t)(V)) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s)(U)) \cup \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(t)(V)) \\
&= \zeta(\mathrm{beh}_\beta(s))(U) \cup \zeta(\mathrm{beh}_\beta(t))(V) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s))(U) \cup \zeta(\mathrm{int}_\alpha(t))(V) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s) \oplus \mathrm{int}_\alpha(t))(U \parallel V) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s \oplus t))(U \parallel V)
\end{aligned}
$$

□

命题 2.25。 在上述情形下，进程项的 $\leftrightarrow$ 集合$P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\ \leq^e_A,\ \ell_A\rangle)}$ 上的步双模拟关系是一个同余。

证明。在下图中， $f = \mathsf{beh}_\beta = \mathsf{int}_\alpha$。


$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(\underline{\leftrightarrow})$
d
$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}) \times \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)})$
$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(f\circ\pi_1)$
$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(f\circ\pi_2)$
$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)})$
$\alpha\times\alpha$
$\xi_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$
$\underline{\leftrightarrow}$
e
$P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)} \times P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$
$f\circ\pi_1$
$f\circ\pi_2$
$Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\ell_A\rangle)}$

根据定理 2.21，映射 e 是 $f \bigcirc \pi_1$ 和 $f \bigcirc \pi_2$ 的等化子，而 d 是有序对 $\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\ \leq_A^e,\ \ell_A\rangle)}(\pi_1 \bigcirc e)\, \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\ \leq_A^e,\ \ell_A\rangle)}(\pi_2 \bigcirc e)$。我们证明 $(\alpha \times \alpha) \bigcirc d$ 是 $f \bigcirc \pi_1$ 和 $f \bigcirc \pi_2$ 的等化子。根据等化子 e 的泛性质，虚线箭头存在；由定理 2.23，$\leftrightarrow$ 是一个同余。 —

$$
\begin{aligned}
f \circ \pi_1 \circ (\alpha \times \alpha) \circ d &= \mathrm{int}_\alpha \circ \alpha \circ \pi_1 \circ d \\
&= \xi \circ \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \ell_A\rangle)}(\mathrm{int}_\alpha) \circ \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \ell_A\rangle)}(\pi_1 \circ e) \\
&= \xi \circ \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \ell_A\rangle)}(\mathrm{int}_\alpha) \circ \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \ell_A\rangle)}(\pi_2 \circ e) \\
&= \mathrm{int}_\alpha \circ \alpha \circ \pi_2 \circ d \\
&= f \circ \pi_2 \circ (\alpha \times \alpha) \circ d
\end{aligned}
$$

□

命题 2.26。 所谓的交换律成立：

$$(U.s) \oplus (V.t) \underline{\leftrightarrow} (U \parallel V).(s \oplus t)$$

3 执行阶段

本节中，我们介绍执行阶段。在执行阶段，AI智能体工作流会被执行。智能体范畴 **Agnts** 仍可视为配备了执行偏序的**LMSets** ，与**Trans**类似；我们仅给出定义。AI智能体编排与协作范畴**OCs** 被视为配备了执行偏序和通信偏序的**LMSets** 。随后，我们介绍**OCs**的余代数，以及在 [18] [19]首先引入的编排与协作代数。

3.1 智能体范畴 Agnts

定义 3.1 （智能体范畴 **Agnts**）。 **Obj**（**Agnts**） 中的一个对象是三元组 $\langle X, \leq_X^e, \ell_X : X \to \Sigma_X \rangle$ ，其中：

- X 是一个集合（多重集的出现项／实例集合）。
- $\leq_X^e$ 是 X 上的执行偏序（自反、反对称、传递），且 $\langle X, \leq_X^e \rangle$ 是一个 N-自由偏序集。
- Σ_X 是一个集合（ X 的标签字母表）。
- $\ell_X : X \to \Sigma_X$ 是一个函数（标记映射）。

给定 $\langle X, \leq_X^e, \ell_X : X \to \Sigma_X \rangle$、$\langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y \rangle$，一个态射 $\langle f, \sigma \rangle : \langle X, \leq_X^e, \ell_X : X \to \Sigma_X \rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y \rangle$ 是一个有序对 (f, σ)，其中 $f : X \to Y, \sigma : \Sigma_X \to \Sigma_Y$ 满足：

1. 交换性： $\ell_Y \circ f = \sigma \circ \ell_X$。
2. 单调性： $\forall x_1, x_2 \in X. x_1 \leq_X^e x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq_Y^e f(x_2)$。

若 $f, \sigma : X, \leq_X^e, \ell_X : X \to \Sigma_X \to Y, \leq_Y^e, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y$，且 $g, \xi : X, \leq_Y^e, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y \to Z, \leq_Z^e \ell_Z : Z \to \Sigma_Z$，则定义 $g, \xi \bigcirc f, \sigma \triangleq g \bigcirc f, \xi \bigcirc \sigma$。
对于 $A = \langle X, \leq_X^e, \ell_X : X \to \Sigma_X \rangle$，$\mathrm{id}_A \triangleq \langle \mathrm{id}_X, \mathrm{id}^{\Sigma_X} \rangle$。
Agnts 构成一个范畴。

3.2 编排与编舞范畴 OCs

定义 3.2 （编排与编舞范畴**OCs**）。中的一个对象 **Obj(OCs)**是一个四元组 $X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X : X \to \Sigma_X$ 其中：

- X 是一个集合（多重集的出现项／实例集合）。
- $\leq_X^e$ 是定义在 X 上的执行偏序（自反、反对称、传递），且 $\langle X, \leq_X^e \rangle$ 是一个 N-自由偏序集。

- $\leq_X^c$ 是定义在 X 上的通信偏序（自反、反对称、传递），且$\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c\rangle$ 可能包含 N 形，其中不同并行分支之间的偏序都属于 $\leq_X^c$ 的形式。

- Σ_X 是一个集合（ X的标签字母表）。

- $\ell_X : X \to \Sigma_X$ 是一个函数（标记映射）。

给定$\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X : X \to \Sigma_X\rangle$、$\langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y\rangle$，一个态射$\langle f, \sigma\rangle : \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X : X \to \Sigma_X\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y\rangle$是一个有序对$(f, \sigma)$，其中 $f : X \to Y$、 $\sigma : \Sigma_X \to \Sigma_Y$满足:

1. 交换性： $\ell_Y \circ f = \sigma \circ \ell_X$。

2. 单调性： $\forall x_1, x_2 \in X. x_1 \leq_X^e x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq_Y^e f(x_2)$且 $\forall x_1, x_2 \in X. x_1 \leq_X^c x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq_Y^c f(x_2)$。

如果 $f, \sigma : X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X : X \to \Sigma_X \to Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y$， $g, \xi : X, \leq_Y^e, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y \to Z, \leq_Z^e, \leq_Z^c, \ell_Z : Z \to \Sigma_Z$，则定义 $g, \xi \bigcirc f, \sigma \triangleq g \bigcirc f, \xi \bigcirc \sigma$。
对于 $A = \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X : X \to \Sigma_X\rangle$， $\mathrm{id}_A \triangleq \langle \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{\Sigma_X}\rangle$。
OCs 构成一个范畴。

证明。假设 $f, \sigma : X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X : X \to \Sigma_X \to Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y$、 $g, \xi : Y, \leq_Y^e \leq_Y^c, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y \to Z, \leq_Z^e, \leq_Z^c, \ell_Z : Z \to \Sigma_Z$ 是态射，并证明 $g \bigcirc f, \xi \bigcirc \sigma$ 满足两个态射条件。

1. 交换性:

$$\begin{aligned} \ell_C \circ (g \circ f) &= (\ell_C \circ g) \circ f \\ &= (\xi \circ \ell_Y) \circ f \\ &= \xi \circ (\ell_Y \circ f) \\ &= \xi \circ (\sigma \circ \ell_X) \\ &= (\xi \circ \sigma) \circ \ell_X. \end{aligned}$$

所以 $\ell_C \bigcirc (g \bigcirc f) = (\xi \bigcirc \sigma) \bigcirc \ell_X$。

2. 单调性：取 x_1， $x_2 \in X$，其中 $x_1 \leq_X^e x_2$和/或 $x_1 \leq_X^c x_2$。由于 f， σ 是单调的，$f(x_1) \leq_Y^e f(x_2)$ 和/或 $f(x_1) \leq_Y^c f(x_2)$。由于 g， ξ 是单调的， $g(f(x_1)) \leq_Z^e g(f(x_2))$ 和/或 $g(f(x_1)) \leq_Z^c g(f(x_2))$。因此 $g \bigcirc f$是单调的。

因此，$g \bigcirc f$， $\xi \bigcirc \sigma$ 确实是一个态射 X， $\leq_X^e$， $\leq_X^c$， $\ell_X : X \to \Sigma_X \to Z$， $\leq_Z^e$， $\leq_Z^c$， $\ell_Z : Z \to \Sigma_Z$。对于 $A = X$， $\leq_X^e$， $\leq_X^c$， $\ell_X : X \to \Sigma_X$， $\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_X$， id^{Σ_X}。检查以下两个条件:

1. 交换性： $\ell_X \bigcirc \mathrm{id}_X = \ell_X = \mathrm{id}^{\Sigma_X} \bigcirc \ell_X$。

2. 单调性：若 $x_1 \leq_X^e x_2$， 则 $\mathrm{id}_X(x_1) = x_1 \leq_X^e x_2 = \mathrm{id}_X(x_2)$；若 $x_1 \leq_X^c x_2$， 则 $\mathrm{id}_X(x_1) = x_1 \leq_X^c x_2 = \mathrm{id}_X(x_2)$。

因此 $\mathrm{id}_A : A \to A$ 是一个态射。

接下来，我们证明复合的结合律。

取三个可复合态射：$f,\sigma : X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X : X \to \Sigma_X \to Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y$、$g,\xi : Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y : Y \to \Sigma_Y \to Z, \leq_Z^e, \leq_Z^c, \ell_Z : Z \to \Sigma_Z$、$h,\zeta : Z, \leq_Z^e, \leq_Z^c, \ell_Z : Z \to \Sigma_Z \to W, \leq_W^e, \leq_W^c, \ell_W : W \to \Sigma_W$。

根据定义：

$$\begin{aligned}(\langle h,\zeta\rangle \circ \langle g,\xi\rangle) \circ \langle f,\sigma\rangle &= \langle h \circ g, \zeta \circ \xi\rangle \circ \langle f,\sigma\rangle \\ &= \langle (h \circ g) \circ f, (\zeta \circ \xi) \circ \sigma\rangle\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\langle h,\zeta\rangle \circ (\langle g,\xi\rangle \circ \langle f,\sigma\rangle) &= \langle h,\zeta\rangle \circ \langle g \circ f, \xi \circ \sigma\rangle \\ &= \langle h \circ (g \circ f), \zeta \circ (\xi \circ \sigma)\rangle\end{aligned}$$

集合上的函数复合满足结合律：$(h \bigcirc g) \bigcirc f = h \bigcirc (g \bigcirc f)$，$(\zeta \bigcirc \xi) \bigcirc \sigma = \zeta \bigcirc (\xi \bigcirc \sigma)$。因此，这两个复合态射相等：$(h,\ \zeta \bigcirc g,\ \xi) \bigcirc f,\ \sigma = h,\ \zeta \bigcirc (g,\ \xi \bigcirc f,\ \sigma)$。

最后，我们证明单位律。

设 $f,\ \sigma : A = X,\ \leq_X^e,\ \leq_X^c,\ \ell_X : X \to \Sigma_X \to B = Y,\ \leq_Y^e,\ \ell_X : Y \to \Sigma_Y$。

$$\begin{aligned}\langle f,\sigma\rangle \circ \mathrm{id}_A &= \langle f,\sigma\rangle \circ \langle \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{\Sigma_X}\rangle \\ &= \langle f \circ \mathrm{id}_X, \sigma \circ \mathrm{id}_{\Sigma_X}\rangle \quad = \langle f,\sigma\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_B \circ \langle f,\sigma\rangle &= \langle \mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_{\Sigma_Y}\rangle \circ \langle f,\sigma\rangle \\ &= \langle \mathrm{id}_Y \circ f,\ \mathrm{id}_{\Sigma_Y} \circ \sigma\rangle \quad = \langle f,\sigma\rangle\end{aligned}$$

因此，**OCs** 是一个范畴。 □

3.2.1 OCs 的多项式函子

积

对于 lmset $X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X$ 和 $Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y$，它们的积记作 $X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X \times Y, \leq_Y^e \leq_Y^c, \ell_Y$，定义如下：

$$\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \times \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle = \{(x,y) | x \in \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \wedge y \in \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle\}$$

积运算 $\times$ 是一个函子 $\mathbf{OCs} \times \mathbf{OCs} \to \mathbf{OCs}$。

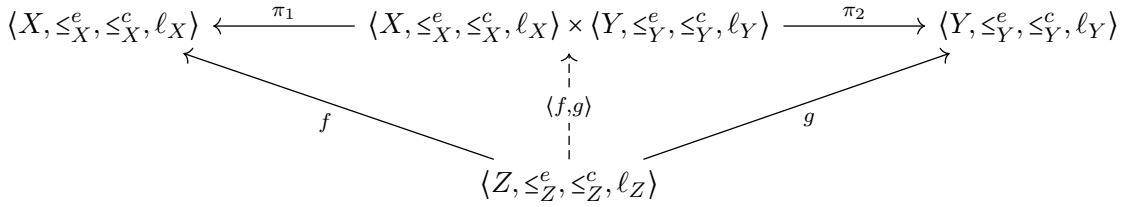
定义 3.3 (积)。 设我们取 **OCs** 中的两个对象 $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle$ 和 $\langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$。这两个对象的积是一个新的对象 $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \times \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$，它带有两个投影态射：

$$\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \xleftarrow{\pi_1} \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \times \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle \xrightarrow{\pi_2} \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$$

对于函数 $f:\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle \to\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle$ 和 $g:\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle \to\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$（其中 f包含一有序对函数 $f:\langle f_f,f_\sigma\rangle :\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z : Z \to \Sigma_Z\rangle \to\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c\ell_X : X\to\Sigma_X\rangle$，而 g也包含一有序对函数 $g:\langle g_g,g_\xi\rangle :\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z : Z\to\Sigma_Z\rangle \to\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y : Y\to\Sigma_Y\rangle$；在后续章节中，若无必要，我们不展开它们，而使用其简写形式），存在唯一的配对函数 $\langle f,g\rangle:\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle \to\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\times\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$，满足对于 $z\in\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle$，有 $\langle f,g\rangle(z) = (f(z)\ g(z))\in\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\times\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$，使得下列方程成立：

$$\pi_1\circ\langle f,g\rangle = f \qquad \langle\pi_1,\pi_2\rangle = \mathrm{id}_{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\times\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle}$$
$$\pi_2\circ\langle f,g\rangle = g \qquad \langle f,g\rangle\circ h = \langle f\circ h, g\circ h\rangle$$

其中 $h:\langle W,\leq_W^e,\leq_W^c,\ell_W\rangle\to\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle$。
对于上述态射 f 和 g，存在唯一的配对态射 $\langle f,g\rangle$，其定义如上，并使下图交换：



对于函数 $f:X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\to X',\leq_{X'}^e,\leq_{X'}^c,\ell_{X'}$ 和 $g:Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\to Y',\leq_{Y'}^e\ \leq_{Y'}^c\ \ell_{Y'}$，函数的积 $f\times g$ 定义为：

$$\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\times\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle \xrightarrow{f\times g} \langle X',\leq_{X'}^e,\leq_{X'}^c,\ell_{X'}\rangle\times\langle Y',\leq_{Y'}^e,\leq_{Y'}^c,\ell_{Y'}\rangle$$

其由 $(x,y)\mapsto(f(x)\ g(y))$ 给出，其中 $x\in X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$ 和 $y\in Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$，满足以下方程：

$$f\times g = \langle f\circ\pi_1, g\circ\pi_2\rangle \qquad \mathrm{id}_{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle}\times\mathrm{id}_{\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle} = \mathrm{id}_{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\times\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle}$$
$$(f\circ h)\times(g\circ k) = (f\times g)\circ(h\times k)$$

两个函数 $Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\to X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$ 与 $Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\to Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$ 可根据定义 3.3 复合为 $Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\to X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\times Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$，而 $Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c\ell_Z\to X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\times Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$ 可通过投影 π_1和 π_2 分解为 $Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\to X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$ 与 $Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\to Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$，这可由以下沿两个方向起作用的双线规则表示：

$$\frac{\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle\to\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle \quad \langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle\to\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle}{\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle\to\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\times\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle}$$

称为幂的 n 重积定义为 $X,\ \leq_X^e,\ \leq_X^c,\ \ell_X{}^n = X,\ \leq_X^e,\ \leq_X^c,\ \ell_X\times\cdots\times X,\ \leq_X^e,\ \leq_X^c\ell_X$，对于给定的 $X,\ \leq_X^e,\ \leq_X^c,\ \ell_X$ 和 $n\in\mathbb{N}$。而空积 $X,\ \leq_X^e,\ \leq_X^c,\ \ell_X{}^0$称为终对象。

定义 3.4（终对象）。范畴 $\mathbb{C}$ 中的终对象是一个对象 $1 \in \mathbb{C}$，对于每个对象 $X \in \mathbb{C}$，在 $\mathbb{C}$中都存在唯一的态射 $!_X : X \to 1$。

命题 3.5（OCs 的**终对象**）。**OCs** 具有一个终对象。

证明。任意单元素标记出现多重集都是终对象。 □

OCs 具有有限积，因为它具有二元积和一个终对象 1。有限积可以推广为集合指标积：给定一个指标集 I，一个 $(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X)_{i \in I}$ 个I指标对象的集合具有 I指标积 $X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X = \prod_{i \in I} X_i, \leq^e_{X_i}, \leq^c_{X_i}, \ell_{X_i}$，其投影为 $\pi_i : X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \to X_i, \leq^e_{X_i}, \leq^c_{X_i}, \ell_{X_i}$，对于 $i \in I$，这些积具有定义 3.3 中所述的泛性质：对于任意对象 $Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y$ 以及一个 I指标态射集合 $f_i : Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \to X_i, \leq^e_{X_i} \leq^c_{X_i}, \ell_{X_i}$，存在唯一的态射 $f = f_i : Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \to X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$，满足 $\pi_i \bigcirc f = f_i$ 对于 $i \in I$。在范畴 OCs 中，这样的积存在，并可描述如下：

$$\prod_{i \in I} \langle X_i, \leq^e_{X_i}, \leq^c_{X_i}, \ell_{X_i} \rangle = \{t : I \to \bigcup_{i \in I} \langle X_i, \leq^e_{X_i}, \leq^c_{X_i}, \ell_{X_i} \rangle | \forall i \in I. t(i) \in \langle X_i, \leq^e_{X_i}, \leq^c_{X_i}, \ell_{X_i} \rangle\}$$

余积

对于 lm 集 X，$\leq^e_X$，$\leq^c_X$，ℓ_X 和 Y，$\leq^e_Y$，$\leq^c_Y$，ℓ_Y，它们的余积写作 X，$\leq^e_X$，$\leq^c_X$，ℓ_X $+Y$，$\leq^e_Y$，$\leq^c_Y$，ℓ_Y，定义如下：

$$\langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle + \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle = \{(x, 1) | x \in \langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle\} \cup \{(y, 2) | y \in \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle\}$$

其中，1 和 2 使上述并集成为不相交并集。

余积运算 $+$ 也是一个函子 $\mathbf{OCs} \times \mathbf{OCs} \to \mathbf{OCs}$，实际上，它是积 $\times$的对偶。

定义 3.6 (余积)。取 *OCs* 中的两个对象 $\langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle$ 和 $\langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle$。这两个对象的余积是一个新的对象 $\langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle + \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle$，带有两个余投影态射：

$$\langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle \xrightarrow{\kappa_1} \langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle + \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle \xleftarrow{\kappa_2} \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle$$

对于函数 $f : \langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle \to \langle Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z, \ell_Z \rangle$ 和 $g : \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle \to \langle Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z, \ell_Z \rangle$，存在唯一的余配对函数 $[f, g] : \langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle + \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle \to \langle Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z, \ell_Z \rangle$，满足：

$$[f, g](w) = \begin{cases} f(x), & \text{if } w = (x, 1); \\ g(y), & \text{if } w = (y, 2). \end{cases}$$

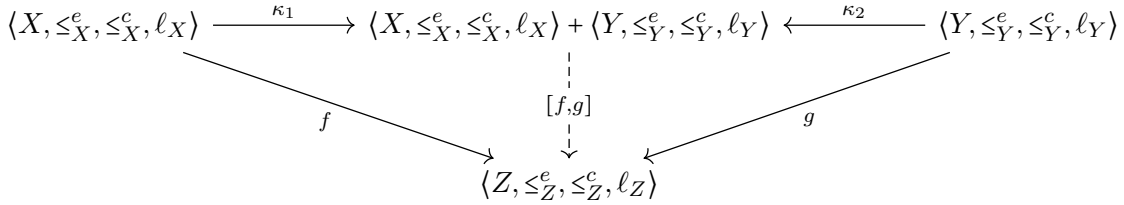
其中 $x \in \langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle$ 和 $y \in \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle$。

并且以下方程成立：

$$[f,g]\circ\kappa_1 = f \qquad [\kappa_1,\kappa_2] = \mathrm{id}_{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle+\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle}$$
$$[f,g]\circ\kappa_2 = g \qquad h\circ[f,g] = [h\circ f, h\circ g]$$

其中 $h:\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle \to \langle W,\leq_W^e,\leq_W^c,\ell_W\rangle$。

对于上述态射 f 和 g，存在唯一的配对态射 $[f,g]$，其定义如上，并使下图交换：



对于函数 $f:X$，$\leq_X^e$，$\leq_X^c$，$\ell_X \to X'$，$\leq_{X'}^e$，$\leq_{X'}^c$，$\ell_{X'}$ 和 $g:Y$，$\leq_Y^e$，$\leq_Y^c$，$\ell_Y \to Y'$，$\leq_{Y'}^e$，$\leq_{Y'}^c$，$\ell_{Y'}$，函数的余积 $f+g$ 定义如下：

$$(f+g)(w) = \begin{cases}(f(x),1), & \text{if } w=(x,1);\\ (g(y),2), & \text{if } w=(y,2).\end{cases}$$

where $x\in X$，$\leq_X^e$，$\leq_X^c$，ℓ_X 和 $y\in Y$，$\leq_Y^e$，$\leq_Y^c$，ℓ_Y，使得下列方程成立：

$$f+g = \langle \kappa_1\circ f, \kappa_2\circ g\rangle \qquad \mathrm{id}_{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle} + \mathrm{id}_{\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle} = \mathrm{id}_{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle+\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle}$$
$$(f\circ h)+(g\circ k) = (f+g)\circ(h+k)$$

根据定义 3.6，两个函数 $X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X \to Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z$ 和 $Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y \to Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z$ 可以复合为 $X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X + Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y \to Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z$；而 $X,\leq_X^e,\leq_X^c\ell_X + Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y \to Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z$ 可利用余积注入 κ_1和 κ_2分解为 $X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X \to Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z$ 和 $Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y \to Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z$，这可以用以下双向作用的双线规则表示：

$$\frac{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle \to \langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle \quad \langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle \to \langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle}{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle + \langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle \to \langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle}$$

给定 $X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 时，n 重余积定义为 $n\cdot X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X = X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X + \cdots + X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$。而空余积 $0\cdot X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$ 称为始对象。

定义 3.7 (始对象)。范畴 $\mathbb{C}$ 中的始对象是一个对象 $0\in\mathbb{C}$，它满足：对每个对象 $X\in\mathbb{C}$，都存在唯一的态射 $!_X:0\to X$ 在 $\mathbb{C}$中。

命题 3.8 (OCs 的始对象**OCs**)。**OCs** 有一个始对象。

证明。空标记出现多重集 0 是始对象。 □

OCs 具有有限余积，因为它具有二元余积和始对象 0。有限余积可以推广为集合指标余积：给定指标集 I，一个由 I 指标对象构成的族 $(X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X)_{i\in I}$ 具有 I 指标余积 $X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X = \coprod_{i\in I}X_i,\leq_{X_i}^e,\leq_{X_i}^c,\ell_{X_i}$，其余积注入为 $\kappa_i : X_i,\leq_{X_i}^e,\leq_{X_i}^c,\ell_{X_i} \to X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$，对于 $i \in I$，它们满足定义 3.6 中的泛性质：对于任意对象 $Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$ 和一个由态射构成的 I 指标族 $f_i : X_i,\leq_{X_i}^e,\leq_{X_i}^c,\ell_{X_i} \to Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$，存在唯一态射 $f = [f_i] : X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X \to Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$，使得对于 $i \in I$，$f \bigcirc \kappa_i = f_i$。在范畴 OCs 中，这种余积是不交并，可描述如下：

$$\coprod_{i\in I}\langle X_i,\leq_{X_i}^e,\leq_{X_i}^c,\ell_{X_i}\rangle = \{(i,x) : i \in I \wedge x \in \langle X_i,\leq_{X_i}^e,\leq_{X_i}^c,\ell_{X_i}\rangle\}$$

指数对象

对于 lm 集 $X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$ 和 $Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$，它们的指数对象记作 $Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y{}^{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle}$，定义如下：

$$\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle^{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle} = \{f | f \text{ is a total function } \langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle \to \langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle\}$$

指数运算 $Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y{}^{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle}$ 是一个函子 $\mathbf{OCs}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{OCs} \to \mathbf{OCs}$，其中$\mathbf{OCs}^{\mathrm{op}}$ 是$\mathbf{OCs}$的对偶范畴。

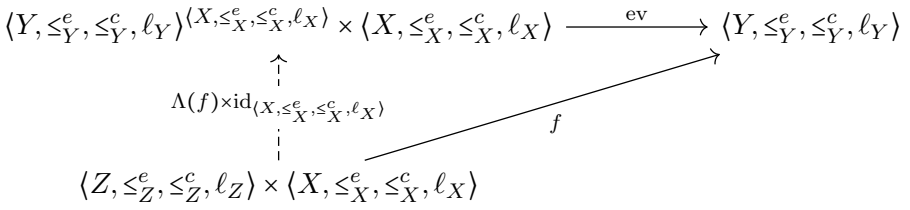
定义 3.9 (指数对象)。 取$\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle$和$\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$这两个$\mathbf{OCs}$中的对象。这两个对象的指数对象是一个新的对象$\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle^{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle}$，并带有一个求值态射：

$$\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle^{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle} \times \langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle \xrightarrow{\ \mathrm{ev}\ } \langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$$

对于每个函数 $f : \langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle \times \langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle \to \langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$，都存在唯一的抽象态射 $\Lambda(f) : \langle X,\ell_Z\rangle \to \langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle^{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle}$，使得以下方程成立：

$$\mathrm{ev} \circ (\Lambda(f) \times \mathrm{id}_{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle}) = f \qquad \Lambda(\mathrm{ev}) = \mathrm{id}_{\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle^{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle}}$$
$$\Lambda(f) \circ h = \Lambda(f \circ (h \times \mathrm{id}_{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle}))$$

对于上述态射 f，存在唯一的抽象态射 $\Lambda(f)$，其定义如上，并使下图交换：



对于 $\mathbf{OCs}^{\mathrm{op}}$ 中的两个映射 $k : X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X \to U, \leq_U^e, \leq_U^c, \ell_U$，以及 **OCs**中的 $h : Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y \to V, \leq_V^e, \leq_V^c \ell_V$，函数 h^k 的指数定义为：

$$h^k(f) = h \circ f \circ k$$

使得以下方程成立：

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}^{\mathrm{id}}(f)) &= \mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id} = f \\ (h_2^{k_2} \circ h_1^{k_1})(f) &= (h_2^{k_2}(h_1^{k_1}(f)) \\ &= h_2^{k_2}(h_1 \circ f \circ k_1) \\ &= h_2 \circ h_1 \circ f \circ k_1 \circ k_2 \\ &= (h_2 \circ h_1)^{k_1 \circ k_2}(f) \\ &= (h_2 \circ_{\mathbb{C}} h_1)^{k_1 \circ_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}} k_2}(f)\end{aligned}$$

指数（也称为柯里化）可用以下双线规则表示：

$$\frac{\langle Z, \leq_Z^e, \leq_Z^c, \ell_Z\rangle \times \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle}{\langle Z, \leq_Z^e, \leq_Z^c, \ell_Z\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle^{\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle}}$$

OCs 也是一个**BiCCC**。

合并

对于 lm 集 $X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X$ 和 $Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y$，它们的合并记作 $X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X \mid Y, \leq_Y^e \leq_Y^c, \ell_Y$，定义如下：

$$\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mid \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle = \{\gamma(x, y) | x \in \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \wedge y \in \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle\}$$

合并运算 $\mid$ 是一个函子 $\mathbf{OCs} \times \mathbf{OCs} \to \mathbf{OCs}$。

定义 3.10 (合并)。 取 $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle$ 和 $\langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$ 这两个 **OCs** 中的对象。这两个对象的合并是一个新的对象 $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mid \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$，它具有两个投影态射：

$$\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \xleftarrow{\iota_1} \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mid \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle \xrightarrow{\iota_2} \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$$

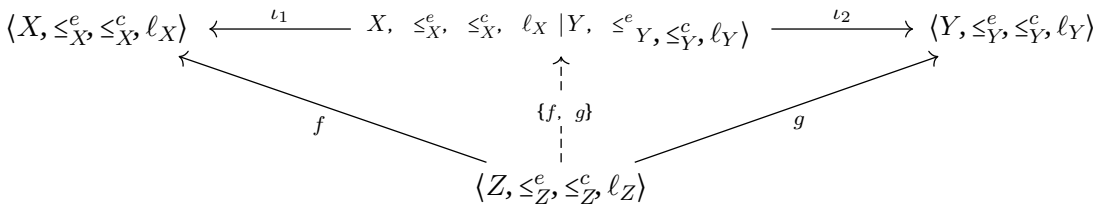
对于函数 $f : \langle Z, \leq_Z^e, \leq_Z^c, \ell_Z\rangle \to \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle$ 和 $g : \langle Z, \leq_Z^e, \leq_Z^c, \ell_Z\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$，存在唯一的配对函数 $\{f, g\} : \langle Z, \leq_Z^e, \leq_Z^c, \ell_Z\rangle \to \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mid \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$，满足 $\{f, g\}(z) = (f(z) \; g(z)) \in \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mid \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$，其中 $z \in \langle Z, \leq_Z^e, \leq_Z^c, \ell_Z\rangle$，使得以下方程成立：

$$\iota_1 \circ \{f, g\} = f \qquad \{\iota_1, \iota_2\} = \mathrm{id}_{\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mid \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle}$$

$$\iota_2 \circ \{f, g\} = g \qquad \{f, g\} \circ h = \{f \circ h, g \circ h\}$$

其中 $h : \langle W, \leq^e_W, \leq^c_W, \ell_W \rangle \to \langle Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z, \ell_Z \rangle$。

对于上述态射 f 和 g，存在唯一的配对态射 $\{f, g\}$，其定义如上，使下图交换：



对于函数 $f : X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \to X', \leq^e_{X'}, \leq^c_{X'}, \ell_{X'}$ 和 $g : Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \to Y', \leq^e_{Y'}, \leq^c_{Y'}, \ell_{Y'}$，函数 $f \mid g$ 的合并定义为：

$$\langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle \mid \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle \xrightarrow{f|g} \langle X', \leq^e_{X'}, \leq^c_{X'}, \ell_{X'} \rangle \mid \langle Y', \leq^e_{Y'}, \leq^c_{Y'}, \ell_{Y'} \rangle$$

其由 $\gamma(x, y) \mapsto (f(x) g(y))$ 给出，其中 $x \in X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$ 和 $y \in Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y$，满足以下方程：

$$f \mid g = \{f \circ \iota_1, g \circ \iota_2\} \qquad \mathrm{id}_{\langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle} \mid \mathrm{id}_{\langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle} = \mathrm{id}_{\langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle \mid \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle}$$
$$(f \circ h) \mid (g \circ k) = (f \mid g) \circ (h \mid k)$$

根据定义 3.10，两个函数 $Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z, \ell_Z \to X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$ 和 $Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z, \ell_Z \to Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y$ 可以复合为 $Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z, \ell_Z \to X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \mid Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y$；而 $Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z \ell_Z \to X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \mid Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y$ 可以使用投影 ι_1 和 ι_2 分解为 $Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z, \ell_Z \to X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$ 和 $Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z, \ell_Z \to Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y$，这可以通过以下双线规则在两个方向上表示：

$$\frac{\langle Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z, \ell_Z \rangle \to \langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle \quad \langle Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z, \ell_Z \rangle \to \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle}{\langle Z, \leq^e_Z, \leq^c_Z, \ell_Z \rangle \to \langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \rangle \mid \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \rangle}$$

n重合并定义为：对于给定的$X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$和 $n \in \mathbb{N}$，$X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X{}^{n|} = X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \mid \cdots \mid X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$。而空合并$X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X{}^{0|}$称为终对象或终端对象。

定义 3.11（终对象）。范畴 $\mathbb{C}$ 中的终对象是一个对象 $1 \in \mathbb{C}$，使得对于每个对象 $X \in \mathbb{C}$，存在唯一的态射$!_X : X \to 1$ 位于 $\mathbb{C}$中。

命题 3.12（OCs 的终对象**OCs**）。**OCs**具有一个终对象。

证明。 任何单元素标记出现多重集都是终对象。 □

OCs 具有有限合并，因为它具有二元合并和一个终对象 1。有限合并可以推广为集合指标合并：给定指标集 I，一族 $(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X)_{i\in I}$ 个 I-指标对象具有 I-指标合并 $X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X = \prod^{|}_{i\in I} X_i, \leq^e_{X_i}, \leq^c_{X_i}, \ell_{X_i}$，其投影为 $\iota_i : X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \to X_i, \leq^e_{X_i}, \leq^c_{X_i}, \ell_{X_i}$，对 $i \in I$ 而言，这些合并满足定义 3.10 中的泛性质：对于任意对象 $Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y$ 以及一族 $f_i : Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \to X_i, \leq^e_{X_i}, \leq^c_{X_i} \ell_{X_i}$ 的 I-指标态射，存在唯一态射 $f = \{f_i\} : Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y \to X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$，使得 $\iota_i \bigcirc f = f_i$ 对 $i \in I$ 成立。在范畴 OCs 中，这类合并存在，且可描述如下：

$$\prod^{|}_{i\in I} \langle X_i, \leq^e_{X_i}, \leq^c_{X_i}, \ell_{X_i}\rangle = \{t : I \to \bigcup_{i\in I} \langle X_i, \leq^e_{X_i}, \leq^c_{X_i}, \ell_{X_i}\rangle | \forall i \in I.t(i) \in \langle X_i, \leq^e_{X_i}, \leq^c_{X_i}, \ell_{X_i}\rangle\}$$

幂集

对于一个 lmset $X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$，我们将 $X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$ 的幂集写作 $\mathrm{P}(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X) = \{U, \leq^e_U, \leq^c_U, \ell_U | U, \leq^e_U, \leq^c_U, \ell_U \subseteq X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X\}$，表示 $X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$ 的所有子集所构成的集合。幂集 $\mathrm{P}(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X)$ 按集合包含关系 $\subseteq$ 自然地排序，并形成偏序集 $\mathrm{P}(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X) \subseteq$。通过以交集定义交 $\bigcap_{i\in I} U_i, \leq^e_{U_i}, \leq^c_{U_i}, \ell_{U_i} = \{x \in X, \leq^e_X \leq^c_X, \ell_X | \forall i \in I.x \in U_i, \leq^e_{U_i}, \leq^c_{U_i}, \ell_{U_i}\}$，以并集定义并 $\bigcup_{i\in I} U_i, \leq^e_{U_i}, \leq^c_{U_i}, \ell_{U_i} = \{x \in X, \leq^e_X, \leq^c_X \ell_X | \exists i \in I.x \in U_i, \leq^e_{U_i}, \leq^c_{U_i}, \ell_{U_i}\}$，以补集定义否定 $\neg U, \leq^e_U, \leq^c_U, \ell_U = \{x \in X, \leq^e_X, \leq^c_X \ell_X | x \notin U, \leq^e_U, \leq^c_U, \ell_U\}$，并定义真谓词 $\top_{\langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X} = (X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \subseteq X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X)$ 和假谓词 $\bot_{\langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X} = (\varnothing \not\subseteq X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X)$，偏序集 $\mathrm{P}(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X) \subseteq$ 构成完备布尔代数，因此，$\{\top, \bot\}$ 个布尔值就是终对象 1 的幂集 P(1)。

lm 集合 $X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$ 与 $Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y$ 上的关系 R 是 $X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \times Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y$ 的子集，即 $R \in \mathrm{P}(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \times Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y)$ 是谓词的一个特例。与谓词一样，$\mathrm{P}(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \times Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y) \subseteq$ 再次构成一个完备布尔代数。通常，关系配备有逆关系 $R^\dagger$ for R 和复合 $\bigcirc$。

对于某个 lmset $X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$ 上的自关系 $R \subseteq X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \times X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$，相等关系 $\mathrm{Eq}(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X) = \{(x, y) \in X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \times X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X | x = y\} = \{(x, x) | x \in X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X\}$。范畴 LMSetsRel 以 lm 集为对象、以关系为态射，并以相等关系为恒等态射。

幂集运算 $X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \mapsto \mathrm{P}(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X)$ 也具有函子性。对于一个函数 $f : X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X \to Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y$，存在一个函数 $\mathrm{P}(f) : \mathrm{P}(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X) \to \mathrm{P}(Y, \leq^e_Y \leq^c_Y, \ell_Y)$，给出这个函子有几种方式：

1. 直接像的方式：对于 $U, \leq^e_U, \leq^c_U, \ell_U \subseteq X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X$,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(f)(\langle U, \leq^e_U, \leq^c_U, \ell_U\rangle) &= \{f(x) | x \in \langle U, \leq^e_U, \leq^c_U, \ell_U\rangle\} \\ &= \{y \in \langle Y, \leq^e_Y, \leq^c_Y, \ell_Y\rangle | \exists x \in \langle X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X\rangle.f(x) = y \wedge x \in \langle U, \leq^e_U, \leq^c_U, \ell_U\rangle\}\end{aligned}$$

   直接像也可以表示为 $f[U, \leq^e_U, \leq^c_U, \ell_U]$ 或 $\coprod_f (U, \leq^e_U, \leq^c_U, \ell_U)$。直接像方法将幂集描述为一个函子 $\mathrm{P} : \mathrm{OCs} \to \mathrm{OCs}$。对于有限幂集 $\mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X) = \{U, \leq^e_U, \leq^c_U, \ell_U \in \mathrm{P}(X, \leq^e_X, \leq^c_X, \ell_X) | U, \leq^e_U, \leq^c_U, \ell_U$ 是有限的$\}$，它也构成一个函子 $\mathrm{OCs} \to \mathrm{OCs}$。

2. 逆像方法：逆像方法将幂集描述为一个函子 $\mathrm{P}:\mathbf{OCs}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{OCs}$。对于一个函数 $f:X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\to Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$，存在一个函数$f^{-1}:\mathrm{P}(Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y)\to\mathrm{P}(X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X)$，对于 $U,\leq_U^e,\leq_U^c,\ell_U\subseteq X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$，

$$f^{-1}(\langle U,\leq_U^e,\leq_U^c,\ell_U\rangle)=\{x|f(x)\in\langle U,\leq_U^e,\leq_U^c,\ell_U\rangle\}$$

对应　　直接像与逆像的对应关系可由以下规则体现　　le:

$$\frac{\coprod_f(\langle U,\leq_U^e,\leq_U^c,\ell_U\rangle)\subseteq\langle V,\leq_V^e,\leq_V^c,\ell_V\rangle}{\langle U,\leq_U^e,\leq_U^c,\ell_U\rangle\subseteq f^{-1}(\langle V,\leq_V^e,\leq_V^c,\ell_V\rangle)}$$

幂集也存在一种对应关系，可用以下规则表示：

$$\frac{\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\to\mathcal{P}(\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle)}{\text{relations}\subseteq\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle\times\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle}$$

单射与满射

对于 lm 集 $X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$ 和 $Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$，单射（单态射（单态）或单态映射）是一种映射，满足：若 $f(x)=f(x')$，则 $x=x'$对于 $x,x'\in X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$。对于单射，若 $X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\subseteq Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$，我们记作 $f:X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\hookrightarrow Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$ 或 $f:X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rightarrowtail Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$。满射（满态射（满态）或满态映射）是一种记作 $f:X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\twoheadrightarrow Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$ 的映射，满足对于每个 $y\in Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$，都存在一个$x\in X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$，使得 $f(x)=y$。

每个满射 $f:X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\twoheadrightarrow Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$ 都有一个截面（分裂），即一个方向相反的函数 $s:Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\to X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$，满足 $f\bigcirc s=\mathrm{id}$。因此，这会在非空集 $f^{-1}(y)$ 中选取一个元素 $s(y)=\{x\in X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X|f(x)=y\}$，而这样的截面是一个单射。

此外，对于每个满足 $X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\neq\varnothing$ 的单射 $f:X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rightarrowtail Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y$，都存在一个函数 $g:Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\to X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$，满足 $g\bigcirc f=\mathrm{id}$，其中 $x_0\in X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$：

$$g(y)=\begin{cases}x, & \text{if there is an element } x \text{ with } f(x)=y;\\ x_0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Lemma 3.13 （单射与满射）。设 $F:\mathbf{OCs}\to\mathbf{OCs}$ 是任意函子　　$r.$

1. 如果 $f:\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\to\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$ 是满射，那么 $F(f):F(\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle)\to F(\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle)$ 也是满射。*2.* 如果 $f:\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\to\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$ 是单射，且 $\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\neq\varnothing$，那么 $F(f):F(\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle)\to F(\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle)$ 也同样是单射。

定义 3.14 (多项式函子族)。我们定义三个函子族**OCs** $\to$**OCs**、**SPF**、**EPF** 和**KPF**，分别对应简单多项式函子、指数多项式函子和 *Kripke* 多项式函子：

1. **SPF** 是满足以下条件的函子 **OCs** $\to$**OCs** 的最小类：

(a) 恒等函子 *OCs* →*OCs* 属于 *SPF*。*(b)* 对每个 *lmset* $\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle$，常值函子 $A : \mathit{OCs} \to \mathit{OCs}$ 属于 *SPF*；它将每个 *lmset* $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle$ 映射到 $\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle$，并将每个函数 f 映射为 $\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle$ 上的恒等映射 $\mathit{id}_{\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle}$。*(c)* 若函子 $F, G \in$ 属于 *SPF*，则 $F \times G \in$ 属于 *SPF*，因为 $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mapsto F(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c \ell_X\rangle) \times F(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle)$，且对于函数 $f \mapsto F$，有 $(f) \times G(f)$。*(d)* 对于非空指标集 I，若存在一个由 I 索引的函子族 $F_i \in$，且对 $i \in I$ 属于 *SPF*，则 $\coprod_{i\in I} F_i \in$ 属于 *SPF*，因为 $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mapsto \coprod_{i\in I} F_i(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle)$，其中 $\coprod_{i\in I} F_i(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c \ell_X\rangle) = \{(i, u) | i \in I \wedge u \in F_i(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle)\}$；对于函数 $f : \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$，其映射为 $(i, u) \mapsto (i, F_i(f)(u))$。*(e)* 若函子 $F, G \in$ 属于 *SPF*，则 $F \mid G \in$ 属于 *SPF*，因为 $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mapsto F(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle) \mid F(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle)$，且对于函数 $f \mapsto F$，有 $(f) \mid G(f)$。

2. EPF $\supset$ *SPF*，此外，对于每个 *lmset* $\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle$，如果 $F \in$ *EPF*，那么常值指数 $F^{\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle}$ *as* $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mapsto F(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle)^{\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle}$ 也属于 *EPF*。它将函数 $f : \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$ 映射为函数 $F(f)^{\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle} = F(f)^{\mathrm{id}_{\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle}}$，该函数将 $h : \langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle \to F(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle)$ 映射为 $F(f) \bigcirc h : \langle A, \leq_A^e \leq_A^c, \ell_A\rangle \to F(\langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle)$。

3. **KPF** $\supset$**EPF**，此外，

(a) 如果 $F \in$*KPF*，那么幂集 $P(F) \in$*KPF*，因为 $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mapsto P(F(\langle X, \leq_X^e \leq_X^c, \ell_X\rangle))$，且函数 $f \mapsto P(F(f))$。*(b)* 对于每个 *lmset* $\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle$，如果 $F \in$*KPF*，那么幂集指数 $F^{\mathcal{P}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}$ 也如此，因为 $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mapsto F(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle)^{\mathcal{P}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}$。它将函数 $f : \langle X, \leq_X^e \leq_X^c, \ell_X\rangle \to \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$ 映射为函数 $F(f)^{\mathcal{P}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)} = F(f)^{\mathcal{P}(\mathrm{id}_{\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle})}$，该函数将 $h : P(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle) \to F(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle)$ 映射到 $F(f) \bigcirc h : P(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c \ell_A\rangle) \to F(\langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle)$。

如果 F 中的幂集 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}$，那么 F 被称为有限 **KPF**。

列表函子 $F^\star$ 表示为积的无限余积：

$$F^\star = \coprod_{n\in\mathbb{N}} F^n \text{ where } F^n = F \times F^{n-1}$$

如果 F 是恒等函子，那么 $F^\star$ 将 lmset $X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X$ 映射为列表集合：

$$X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X{}^\star = 1 + X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X + (X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X \times X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X) + (X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X \times X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X \times X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X) + \cdots$$

定理 3.15。每个有限 *Kripke* 多项式函子 **OCs** →**OCs** 都有一个终余代数。

命题 *3.16.* 任意初始代数 $\alpha : F(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle) \xrightarrow{\cong} \langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle$ 满足以下递归性质：对于每个映射 $h : F(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \times \langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle) \to \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle$，存在唯一映射 $f : \langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle \to \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle) & \xrightarrow{F(\langle f, \mathrm{id}\rangle)} & F(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \times \langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha}\ \cong & & \Big\downarrow{\scriptstyle h} \\ \langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle & \xrightarrow[f]{} & \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \end{array}$$

3.3 真并发代数 $APTC$

3.3.1 步双模拟

定义 *3.17*（关系提升）。设 F : *OCs* →*OCs* 为一个多项式函子，并设 $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle$、$\langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$ 为任意 *lm* 集。映射 *Rel(F)* 将一个关系 $R \subseteq \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \times \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$ 映射为提升关系 $Rel(F)(R) \subseteq F(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle) \times F(\langle Y, \leq_Y^e \leq_Y^c, \ell_Y\rangle)$，该关系按函子 F 的结构通过归纳法定义如下：

1. 如果 F 是恒等函子，那么

$$\mathrm{Rel}(F)(R) = R$$

2. 如果 F是常值函子 $\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \mapsto \mathcal{P}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)$，那么

$$\mathrm{Rel}(F)(R) = \{(U, U) | U \in \mathcal{P}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)\}$$

3. 如果 F 是积 $F_1 \times F_2$，那么

$$\mathrm{Rel}(F)(R) = \{((u_1, u_2), (v_1, v_2)) | \mathrm{Rel}(F_1)(R)(u_1, v_1) \wedge \mathrm{Rel}(F_2)(R)(u_2, v_2)\}$$

4. 如果 F 是集合指标余积 $\coprod_{i\in I} F_i$，那么

$$\mathrm{Rel}(F)(R) = \bigcup_{i\in I}\{(\kappa_i(u), \kappa_i(v)) | \mathrm{Rel}(F_i)(R)(u, v)\}$$

5. 如果 F 是一个指数 $G^{\mathcal{P}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}$，则

$$\mathrm{Rel}(F)(R) = \{(f, g) | \forall U \in \mathcal{P}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle).\mathrm{Rel}(G)(R)(f(U), g(U))\}$$

6. 如果 F 是一个合并 $F_1 \mid F_2$，则

$$\mathrm{Rel}(F)(R) = \{((u_1, u_2), (v_1, v_2)) | \mathrm{Rel}(F_1)(R)(u_1, v_1) \wedge \mathrm{Rel}(F_2)(R)(u_2, v_2)\}$$

7. 如果 F 是一个幂集$\mathcal{P}(G)$，则

$$\mathrm{Rel}(F)(R) = \{(U, V) | \forall u \in U.\exists v \in V.\mathrm{Rel}(G)(R)(u, v) \wedge \forall v \in V.\exists u \in U.\mathrm{Rel}(G)(R)(u, v)\}$$

定义 *3.18*（步双模拟）。设 F :*OCs* → *OCs* 是一个多项式函子。对于余代数 $c : \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \to F(\langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle)$ 和 $d : \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle \to F(\langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle)$，步双模拟是满足以下条件的关系 $R \subseteq \langle X, \leq_X^e, \leq_X^c, \ell_X\rangle \times \langle Y, \leq_Y^e, \leq_Y^c, \ell_Y\rangle$：

$$(x, y) \in R \Rightarrow (c(x), d(y)) \in \mathrm{Rel}(F)(R)$$

步双模拟等价是在单个余代数上的步双模拟，并且它是一个等价关系。

定义 3.19 (步双模拟等价)。 设 $c:\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\to F(\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle)$ 和 $d:\langle Y,\leq_Y^e\leq_Y^c,\ell_Y\rangle\to F(\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle)$ 是多项式函子 F的两个余代数。步互模拟关系 $\leftrightarrow$是所有步双模拟的并集:

—

$$x\underline{\leftrightarrow}y\Leftrightarrow\exists R\subseteq\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\times\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle.R\text{是 }c\text{ 和 }d\text{ 的步双模拟，且 }R(x,y)$$

定理 *3.20*。设 $F:\mathcal{OCS}\to\mathcal{OCS}$ 是一个有限多项式函子，并且具有最终余代数 $\zeta:\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle\xrightarrow{\cong}F(\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle)$。设 $c:\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\to F(\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle)$ 和 $d:\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle\to F(\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle)$ 是任意余代数，其相应的行为同态为 $\mathbf{beh}_c:\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\to\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle$ 和 $\mathbf{beh}_d:\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle\to\langle Z,\leq_Z^e,\leq_Z^c,\ell_Z\rangle$。那么，状态 $x\in\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle$ 和 $y\in\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$ 步双模拟，当且仅当它们具有相同的真正并发行为:

$$x\,{}_c\underline{\leftrightarrow}_d y\Leftrightarrow\mathrm{beh}_c(x)=\mathrm{beh}_d(y)$$

定义 *3.21*（同余）。设 $F:\mathcal{OCS}\to\mathcal{OCS}$ 是一个多项式函子。对于代数 $a:F(\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle)\to\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle$ 和 $b:F(\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle)\to\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$，同余是一个关系 $R\subseteq\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\times\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$，满足:

$$(u,v)\in\mathrm{Rel}(F)(R)\Rightarrow(a(u),b(v))\in R$$

同余等价是一个同时也是等价关系的同余。

定理 *3.22*。设有 *Kripke* 多项式函子 F 的两个代数 $a:F(\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle)\to\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle$ 和 $b:F(\langle Y,\leq_Y^e\leq_Y^c,\ell_Y\rangle)\to\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$。关系 $R\subseteq\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\times\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$ 是同余，当且仅当它自身带有一个唯一代数 $F(R)\to R$，使得 $\langle r_1,r_2\rangle:R\rightarrowtail\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle\times\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle$ 成为代数包含同态的:

$$\begin{array}{ccccc}
F(\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle) & \xleftarrow{F(r_1)} & F(R) & \xrightarrow{F(r_2)} & F(\langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle)\\
\downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle\langle r_1,r_2\rangle} & & \downarrow{\scriptstyle b}\\
\langle X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\rangle & \xleftarrow[r_1]{} & R & \xrightarrow[r_2]{} & \langle Y,\leq_Y^e,\leq_Y^c,\ell_Y\rangle
\end{array}$$

3.3.2 真并发代数 $APTC$

由于函子 $X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X\mapsto\mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X)^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}$是一个具有终余代数的有限 Kripke 多项式函子:

$$Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}\xrightarrow[\cong]{\zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}}\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)})^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}$$

终余代数的$Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}$ 中的元素称为真并发进程。

空进程是一个什么也不做的平凡进程:

$$\mathbf{0} \triangleq \zeta^{-1}_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(\lambda U \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle).\varnothing)$$

给定两个进程 $z_1,z_2 \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}$，和进程 $z_1 + z_2 \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}$ 定义如下：

$$z_1+z_2 \triangleq \zeta^{-1}_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(\lambda U \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle).\zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(z_1)(U)\cup\zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(z_2)(U))$$

然后，我们有：

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) \xrightarrow{U} w &\Leftrightarrow w \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(z_1 + z_2)(U)\\ &\Leftrightarrow w \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(z_1)(U) \cup \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(z_2)(U)\\ &\Leftrightarrow w \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(z_1)(U) \text{ or } w \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(z_2)(U)\\ &\Leftrightarrow z_1 \xrightarrow{U} w \text{ or } z_2 \xrightarrow{U} w\end{aligned}$$

这可以由以下两条规则描述：

$$\frac{z_1 \xrightarrow{U} w}{z_1 + z_2 \xrightarrow{U} w} \qquad \frac{z_2 \xrightarrow{U} w}{z_1 + z_2 \xrightarrow{U} w}$$

给定一个进程 $z \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\ \leq^e_A,\ \leq^c_A,\ \ell_A\rangle)}$ 和一个步 $V \in \mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(A,\ \leq^e_A,\ \leq^c_A,\ \ell_A)$，前缀进程$V.z$ 定义如下：

$$V.z \triangleq \zeta^{-1}_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(\lambda U \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)).\{z|U \cong V\}$$

然后，我们有：

$$\begin{aligned}(V.z) \xrightarrow{U} w &\Leftrightarrow w \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(V.z)(U)\\ &\Leftrightarrow w \in \{z|U \cong V\}\\ &\Leftrightarrow U \cong V \wedge w = z\end{aligned}$$

这可以由以下规则描述：

$$\frac{}{V.z \xrightarrow{V} z}$$

给定两个进程 $z_1,\ z_2 \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\ \leq^e_A,\ \leq^c_A,\ \ell_A\rangle)}$，并发进程 $z_1 \between z_2 \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\ \leq^e_A,\ \leq^c_A,\ \ell_A\rangle)}$定义如下：

$$z_1 \between z_2 \triangleq \zeta^{-1}_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(\lambda U,V \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle).\zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(z_1)(U)\cup\zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(z_2)(V))$$

接下来，我们有：

$$
\begin{aligned}
(z_1 \between z_2) \xrightarrow{U \between V} z_1' \between z_2' &\Leftrightarrow z_1' \between z_2' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_1 \between z_2)(U \between V) \\
&\Leftrightarrow z_1' \between z_2' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_1)(U) \cup \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_2)(V) \\
&\Leftrightarrow z_1' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_1)(U) \text{ and } z_2' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_2)(V) \\
&\Leftrightarrow z_1 \xrightarrow{U} z_1' \text{ and } z_2 \xrightarrow{V} z_2'
\end{aligned}
$$

它可以用以下两条规则来描述：

$$
\frac{z_1 \xrightarrow{U} z_1' \quad z_2 \xrightarrow{V} z_2'}{z_1 \between z_2 \xrightarrow{U \between V} z_1' \between z_2'}
$$

给定两个进程 $z_1,\ z_2 \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\ \leq_A^e,\ \leq_A^c,\ \ell_A\rangle)}$，并行进程 $z_1 \parallel z_2 \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\ \leq_A^e,\ \leq_A^c,\ \ell_A\rangle)}$ 定义如下：

$$
z_1 \parallel z_2 \triangleq \zeta^{-1}_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A)}(\lambda U, V \in \mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A).\zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A)}(z_1)(U) \cup \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A)}(z_2)(V))
$$

那么，我们有：

$$
\begin{aligned}
(z_1 \parallel z_2) \xrightarrow{U \parallel V} z_1' \between z_2' &\Leftrightarrow z_1' \between z_2' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_1 \parallel z_2)(U \parallel V) \\
&\Leftrightarrow z_1' \between z_2' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_1)(U) \cup \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_2)(V) \\
&\Leftrightarrow z_1' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_1)(U) \text{ and } z_2' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_2)(V) \\
&\Leftrightarrow z_1 \xrightarrow{U} z_1' \text{ and } z_2 \xrightarrow{V} z_2'
\end{aligned}
$$

这可以用以下两条规则来描述：

$$
\frac{z_1 \xrightarrow{U} z_1' \quad z_2 \xrightarrow{V} z_2'}{z_1 \parallel z_2 \xrightarrow{U \parallel V} z_1' \between z_2'}
$$

给定两个进程 $z_1,\ z_2 \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}\ (A,\ \leq_A^e,\ \leq_A^c,\ \ell_A)}$，通信进程 $z_1 \mid z_2 \in Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}\ (A,\ \leq_A^e,\ \leq_A^c,\ \ell_A)}$ 定义如下：

$$
z_1 \mid z_2 \triangleq \zeta^{-1}_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(\lambda U, V \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle).\zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_1)(U) \cup \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_2)(V))
$$

那么，我们有：

$$
\begin{aligned}
(z_1 \mid z_2) \xrightarrow{U \mid V} z_1' \between z_2' &\Leftrightarrow z_1' \between z_2' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_1 \mid z_2)(U \mid V) \\
&\Leftrightarrow z_1' \between z_2' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_1)(U) \cup \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_2)(V) \\
&\Leftrightarrow z_1' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_1)(U) \text{ and } z_2' \in \zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A\rangle)}(z_2)(V) \\
&\Leftrightarrow z_1 \xrightarrow{U} z_1' \text{ and } z_2 \xrightarrow{V} z_2'
\end{aligned}
$$

这可以用以下两条规则来描述：

$$\frac{z_1 \xrightarrow{U} z_1' \quad z_2 \xrightarrow{V} z_2'}{z_1 \mid z_2 \xrightarrow{U|V} z_1' \between z_2'}$$

对于任意步骤幂集 $\mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(A,\ \leq_A^e,\ \leq_A^c,\ \ell_A)$，令多项式函子 $\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\ \leq_A^e,\ \leq_A^c,\ \ell_A\rangle)} : \mathbf{OCs} \to \mathbf{OCs}$ 定义如下

$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}(X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X) = 1 + (\mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A) \times X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X) + (X,\leq_X^e,\leq_X^c \ell_X \times X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X) + (X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X \times X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X) + (X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X \mid X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X)$

该函子上的一个代数 $\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}(X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X) \to X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$ 由五个运算构成：空进程的 $\mathbf{0} : 1 \to X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$，前缀进程的 $. : \mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A) \times X,\leq_X^e,\leq_X^c \ell_X \to X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$，$+ : X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X \times X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X \to X,\leq_X^e,\leq_X^c \ell_X$，并行进程的 $\| : X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X \times X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X \to X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$，以及通信进程的 $| : X,\leq_X^e\leq_X^c,\ell_X \mid X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X \to X,\leq_X^e,\leq_X^c,\ell_X$。终余代数 $Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)} \xrightarrow{\cong} \mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)})^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}$ 携带一个 $\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}$ 代数，记作 $\xi_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)} : \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}) \to Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}$。因此，得到一个双代数：

$$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}) \xrightarrow{\xi_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}} Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)} \xrightarrow[\cong]{\zeta_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}} \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)})^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}$$

初始 $\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}$-代数，记作 $P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}$，其形式为 $\alpha : \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}) \xrightarrow{\cong} P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}$，包含由 $\mathbf{0}$ 和 $U \in \mathrm{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e\leq_A^c,\ell_A)$ 构造而成的闭过程项。$P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A)}$ 还具有双代数结构：

$$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}) \xrightarrow[\cong]{\alpha} P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)})^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}$$

余代数 β 通过归纳法定义：

$$\beta(\mathbf{0})(U) = \varnothing$$
$$\beta(V.s)(U) = \{s \mid V \cong U\}$$
$$\beta(s+t)(U) = \beta(s)(U) \cup \beta(t)(U)$$
$$\beta(s \between t)(U \between V) = \beta(s)(U) \cup \beta(t)(V)$$
$$\beta(s \parallel t)(U \parallel V) = \beta(s)(U) \cup \beta(t)(V)$$
$$\beta(s \mid t)(U \mid V) = \beta(s)(U) \cup \beta(t)(V)$$

通过初始性给出的进程项的指称语义，与通过终结性给出的操作语义相一致。

命题 3.23。在上述情形中，我们得到两个映射 $P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)} \to Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}$，其中一个由初始性使下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}\big(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}\big) & \xrightarrow{\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}(\mathrm{int}_\alpha)} & \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}\big(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}\big) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \alpha}\ \Big|{\scriptstyle \cong} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi} \\
P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)} & \xrightarrow[\mathrm{int}_\alpha]{} & Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}
\end{array}$$

另一个则由终结性使下图交换:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}\big(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}\big)^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)} & \xrightarrow{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}} & \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}\big(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}\big)^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)} \\
\Big\uparrow{\scriptstyle \beta} & & \Big|{\scriptstyle \cong}\ \Big\uparrow{\scriptstyle \zeta} \\
P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)} & \xrightarrow[\mathrm{beh}_\beta]{} & Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}
\end{array}$$

证明。 对项 $s \in P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}$的结构作归纳法，我们证明 $\mathrm{beh}_\beta(s) = \mathrm{int}_\alpha(s)$，或等价地，$\zeta(\mathrm{beh}_\beta(s))(U) = \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s))(U)$:

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathrm{beh}_\beta(\mathbf{0}))(U) &= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)^{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}(\beta(\mathbf{0}))(U) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(\mathbf{0})(U)) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\varnothing) \\
&= \varnothing \\
&= \zeta(\mathbf{0})(U) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(\mathbf{0}))(U)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathrm{beh}_\beta(V.s))(U) &= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(V.s))(U) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\{s | V \cong U\}) \\
&= \{\mathrm{beh}_\beta(s) | V \cong U\} \\
&= \{\mathrm{int}_\alpha(s) | V \cong U\} \\
&= \zeta(V.\mathrm{int}_\alpha(s))(U) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(V.s))(U)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathrm{beh}_\beta(s+t))(U) &= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s+t))(U) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s)(U) \cup \beta(t)(U)) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s)(U)) \cup \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(t)(U)) \\
&= \zeta(\mathrm{beh}_\beta(s))(U) \cup \zeta(\mathrm{beh}_\beta(t))(U) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s))(U) \cup \zeta(\mathrm{int}_\alpha(t))(U) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s) + \mathrm{int}_\alpha(t))(U) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s+t))(U)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\zeta(\mathrm{beh}_\beta(s \between t))(U \between V) &= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s \between t))(U \between V) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s)(U) \cup \beta(t)(V)) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s)(U)) \cup \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(t)(V)) \\
&= \zeta(\mathrm{beh}_\beta(s))(U) \cup \zeta(\mathrm{beh}_\beta(t))(V) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s))(U) \cup \zeta(\mathrm{int}_\alpha(t))(V) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s) \between \mathrm{int}_\alpha(t))(U \between V) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s \between t))(U \between V)
\end{aligned}
$$

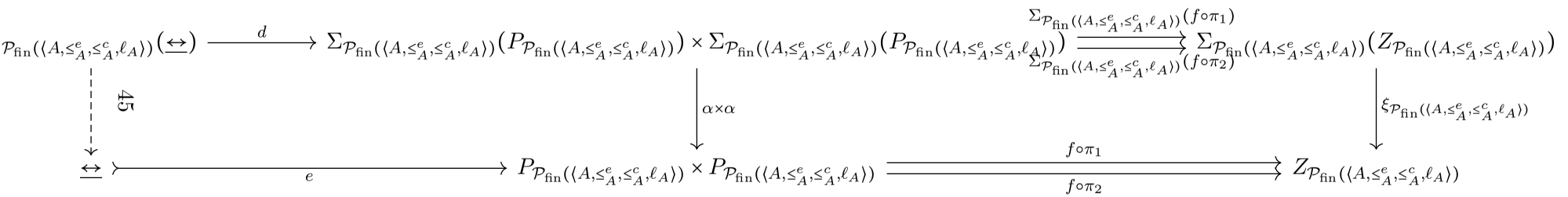
$$
\begin{aligned}
\zeta(\mathrm{beh}_\beta(s \parallel t))(U \parallel V) &= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s \parallel t))(U \parallel V) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s)(U) \cup \beta(t)(V)) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s)(U)) \cup \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(t)(V)) \\
&= \zeta(\mathrm{beh}_\beta(s))(U) \cup \zeta(\mathrm{beh}_\beta(t))(V) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s))(U) \cup \zeta(\mathrm{int}_\alpha(t))(V) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s) \parallel \mathrm{int}_\alpha(t))(U \parallel V) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s \parallel t))(U \parallel V)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta(\mathrm{beh}_\beta(s \mid t))(U \mid V) &= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s \mid t))(U \mid V) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s)(U) \cup \beta(t)(V)) \\
&= \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(s)(U)) \cup \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{beh}_\beta)(\beta(t)(V)) \\
&= \zeta(\mathrm{beh}_\beta(s))(U) \cup \zeta(\mathrm{beh}_\beta(t))(V) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s))(U) \cup \zeta(\mathrm{int}_\alpha(t))(V) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s) \mid \mathrm{int}_\alpha(t))(U \mid V) \\
&= \zeta(\mathrm{int}_\alpha(s \mid t))(U \mid V)
\end{aligned}
$$

□

命题 3.24。 仍处于上述情形，进程项 $\leftrightarrow$ 在集合$P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A, \leq_A^e, \leq_A^c, \ell_A \rangle)}$ 上的步双模拟关系是一个同余。

证明。 在下图中， $f = \mathrm{beh}_\beta = \mathrm{int}_\alpha$。


$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)\big(\underline{\leftrightarrow}\big)$
d
$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}\big(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}\big) \times \Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}\big(P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}\big)$
$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(f\circ\pi_1)$
$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}(f\circ\pi_2)$
$\Sigma_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}\big(Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}\big)$
45
$\alpha\times\alpha$
$\xi_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}$
$\underline{\leftrightarrow}$
e
$P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)} \times P_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}$
$f\circ\pi_1$
$f\circ\pi_2$
$Z_{\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\langle A,\leq^e_A,\leq^c_A,\ell_A\rangle)}$

根据定理 3.20，映射 e是 $f \bigcirc \pi_1$和 $f \bigcirc \pi_2$的等化子，而 d是有序对 $\Sigma_{\mathcal{P}_{\text{fin}}(\langle A,\ \leq_A^e,\ \leq_A^c,\ \ell_A\rangle)}(\pi_1 \bigcirc e)$ $\Sigma_{\mathcal{P}_{\text{fin}}(\langle A,\ \leq_A^e,\ \leq_A^c,\ \ell_A\rangle)}(\pi_2 \bigcirc e)$。我们证明 $(\alpha \times \alpha) \bigcirc d$使 $f \bigcirc \pi_1$和 $f \bigcirc \pi_2$相等化。根据等化子 e的泛性质，虚线箭头随即存在，并根据定理 3.22 使 $\leftrightarrow$ 成为同余。 —

$$
\begin{aligned}
f \circ \pi_1 \circ (\alpha \times \alpha) \circ d &= \text{int}_\alpha \circ \alpha \circ \pi_1 \circ d \\
&= \xi \circ \Sigma_{\mathcal{P}_{\text{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}(\text{int}_\alpha) \circ \Sigma_{\mathcal{P}_{\text{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}(\pi_1 \circ e) \\
&= \xi \circ \Sigma_{\mathcal{P}_{\text{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}(\text{int}_\alpha) \circ \Sigma_{\mathcal{P}_{\text{fin}}(\langle A,\leq_A^e,\leq_A^c,\ell_A\rangle)}(\pi_2 \circ e) \\
&= \text{int}_\alpha \circ \alpha \circ \pi_2 \circ d \\
&= f \circ \pi_2 \circ (\alpha \times \alpha) \circ d
\end{aligned}
$$

□

命题 3.25。所谓的交换律成立：

$$
\begin{aligned}
(a.s) \between (b.t) &\underline{\leftrightarrow} (a.s) \parallel (b.t) + (a.s) \mid (b.t) \\
&\underline{\leftrightarrow} (a \parallel b).(s \between t) + \gamma(a,b).(s \between t)
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Anthropic, 《模型上下文协议规范》, 版本 2025-11-25（2025）。网址：https://modelcontextprotocol.io/specification/2025-11-25[2] S. Yao、J. Zhao、D. Yu、N. Du、I. Shafran、K. Narasimhan、Y. Cao, 《ReAct：让语言模型中的推理与行动协同》, 载于：国际学习表征会议，2023。网址：https://arxiv.org/abs/2210.03629[3] T. Schick、J. Dwivedi-Yu、R. Dessì、R. Raileanu、M. Lomeli、E. Hambro、L. Zettlemoyer、N. Cancedda、T. Scialom, 《Toolformer：语言模型可以自学使用工具》, 载于：神经信息处理系统进展，第 36 卷，2023。网址：https://arxiv.org/abs/2302.04761[4] Y. Qin、S. Liang、Y. Ye、K. Zhu、L. Yan、Y. Lu、Y. Lin、X. Cong、X. Tang、B. Qian、S. Zhao、L. Hong、R. Tian、R. Xie、J. Zhou、M. Gerstein、D. Li、Z. Liu、M. Sun, 《ToolLLM：助力大语言模型掌握 16000+ 现实世界中的应用程序接口》, 载于：国际学习表征会议，2024。网址：https://arxiv.org/abs/2307.16789[5] S. G. Patil、T. Zhang、X. Wang、J. E. Gonzalez, 《Gorilla：连接海量应用程序接口的大语言模型》, 载于：神经信息处理系统进展，第 37 卷，2024。网址：https://arxiv.org/abs/2305.15334[6] Y. Shen、K. Song、X. Tan、D. Li、W. Lu、Y. Zhuang, 《HuggingGPT：使用 ChatGPT 及其 Hugging Face 好友解决人工智能任务》, 载于：神经信息处理系统进展，第 36 卷，2023。网址：https://arxiv.org/abs/2303.17580[7]B. Paranjape、S. Lundberg、S. Singh、H. Hajishirzi、L. Zettlemoyer、M. T. Ribeiro, 《ART：面向大语言模型的自动多步推理与工具使用》（2023）。arXiv:2303.09014。网址：https://arxiv.org/abs/2303.09014[8] H. Chase、L. Team, 《LangChain：通过可组合性构建基于大语言模型的应用程序》（2022）。网址：https://github.com/langchain-ai/langchain[9] Q. Wu、G. Bansal、J. Zhang、Y. Wu、S. Zhang、E. Zhu、B. Li、L. Jiang、X. Zhang、J. Liu、A. H. Awadallah、R. W. White、D. Burger、C. Wang, 《AutoGen：通过多智能体对话赋能新一代大语言模型应用》（2023）。arXiv:2308.08155。网址：https://arxiv.org/abs/2308.08155[10] S. Hong、M. Zhuge、J. Chen、X. Zheng、Y. Cheng、C. Zhang、J. Wang、Z. Wang、S. K. S. Yau、Z. Lin、L. Zhou、C. Ran、L. Xiao、C. Wu、J. Schmidhuber, 《MetaGPT：面向多智能体协作框架的元程序设计》, 载于：国际学习表征会议，2024。网址：https://arxiv.org/abs/2308.00352

[11] C. Qian、W. Liu、H. Liu、N. Chen、Y. Dang、J. Li、C. Yang、W. Chen、Y. Su、X. Cong、J. Xu、D. Li、Z. Liu、M. Sun，《ChatDev：面向软件开发的协作式智能体》，载于：第62届计算语言学协会年会（ACL）论文集，第1卷，2024年，第15174–15186页。doi:10.18653/v1/2024.acl-long.810。URL https://arxiv.org/abs/2307.07924[12] B. Qiao、L. Li、X. Zhang、S. He、Y. Kang、C. Zhang、F. Yang、H. Dong、J. Zhang、L. Wang、M. Ma、P. Zhao、S. Qin、X. Qin、C. Du、Y. Xu、Q. Lin、S. Rajmohan、D. Zhang，《TaskWeaver：代码优先智能体框架》（2023）。arXiv:2311.17541。URL https://arxiv.org/abs/2311.17541[13] A. S. Parmar，《将智能与执行分离：面向模型上下文协议的工作流引擎》（2026）。arXiv:2605.00827。URL https://arxiv.org/abs/2605.00827[14] T. Kapp´e，《并发 Kleene 代数：完备性与可判定性》（博士学位论文），博士论文，UCL（伦敦大学学院）（2020）。[15] A. Vaswani、N. Shazeer、N. Parmar、J. Uszkoreit、L. Jones、A. N. Gomez、L. Kaiser、I. Polo- sukhin，《注意力机制就是你所需要的一切》（2023）。arXiv:1706.03762。URL https://arxiv.org/abs/1706.03762[16] A. Yang、C. Watson、A. Xue、S. Bhattamishra、J. Llarena、W. Merrill、E. D. S. Ferreira、A. S.、D. Chiang，《Transformer 指南》（2025）。arXiv:2510.00368。URL https://arxiv.org/abs/2510.00368[17] Y. Wang、Z. Wang、H. Kang，《变换器代数》（2026）。arXiv:2610.36795。URL https://arxiv.org/abs/2610.36795[18] Y. Wang，《真正并发的代数理论》，Elsevier AP，2023年。[19] Y. Wang，《真正并发进程代数手册》，Elsevier MK，2023年。