一种用于无嫉妒切蛋糕的确定性多项式查询协议

HARIS AZIZ，新南威尔士大学悉尼分校，澳大利亚

arXiv:2611.30002v1 [cs.GT] 23 Nov 2026

我们给出一种确定性协议，在最坏情况下使用 $O(n^6 \log n)$ 次 Robertson–Webb 查询，将一块异质蛋糕完整且无嫉妒地分配给 n 名参与者。估值可以是任意非负的无原子测度，分配束也可以是不连通的。该协议会调用 $O(n)$ 次经认证的修剪；每次经认证的修剪会对 n 个份额使用 $O(n^5 \log n)$ 次查询。在一次经认证的修剪中，每名参与者无嫉妒地获得不同份额的末端部分，即后缀，并且每个缩短后的份额都有一名见证者，其见证者平局可追溯回某个完整份额。在每一步中，见证者对缩短后的后缀的估值恰好与她对自己份额的估值相同。对于区间长度为正且后缀价值严格递增的份额，保留后缀长度是唯一的，尽管其持有者可能不同。候选分配共享一个价值查询和切点查询表。如果其价值估计的逐坐标中位数未通过匹配检验，该检验会识别出一名价值被低估的参与者，从而排除至少一半剩余的分配方案。对切分标记取加权中位数，可以通过一次修复步骤消除少量嫉妒，同时分配几乎全部剩余部分。对于完整的无嫉妒家务分配，查询界为 $O(n^7 \log n)$。

1 引言

> “自 *20* 世纪 *40* 年代以来，无嫉妒蛋糕分割的计算一直令多个学科领域的许多杰出学者困惑不已。”——Procaccia [2013,第 83]

假设参与者必须分割一种异质的可分割物品，例如一块土地、一段广播时间或一块蛋糕。参与者对同一份额的估值可能不同，而且每个人都应认为自己的份额至少与其他任何人的份额同样有价值。这项要求称为无嫉妒性。要以这种方式分割整块蛋糕，需要询问多少关于其价值的问题?

在*Robertson and Webb* [1998]的标准模型中，协议只能通过向参与者提问来了解其价值，这些问题称为查询。估值查询要求参与者给出某个区间对她的价值。切分查询则要求她标记出从给定点开始，蛋糕达到她所指定价值的位置。对于两位参与者，只需少量查询：一位参与者将蛋糕切分成两份，并认为两份价值相等；另一位则拿走自己更喜欢的那份。Gamow 和 Stern [1958] 曾提出疑问：蛋糕是否总能在任意数量的参与者之间实现无嫉妒分割？对于三位参与者，Selfridge 和 Conway 找到了一种切割次数有界的协议 [RobertsonandWebb 1998]。

对于任意数量的参与者，从有限协议[Brams 和 Taylor， 1995] 到查询数量由仅取决于 n 的函数所界定的协议 [Aziz 和 Mackenzie， 2016]，，耗时超过二十年，而当时该界是六个 n的塔。那时，Procaccia [Procaccia，2020年，第 118] 页 [注意到了这个天文数字般的界，并写道：“这不禁让人思考，是否存在一种切蛋糕协议，既无嫉妒，又具备计算效率。”到2026年，确定性界已降至单指数 [叶和白， 2026]。在本文中，我们的目标是获得一种多项式查询的无嫉妒协议。遵循 Edmonds [1965, 第 450–451],页 [将多项式增长（而非指数增长）视为“优秀”算法标志的观点，我们寻求查询数量关于参与者数量为多项式的协议。Mackenzie 和 Suzuki [Mackenzie 和 Suzuki，2026年，第 1] 页[1]写道：“多项式数量的查询是否足够，是公平分配中的一个核心开放问题。”本文解决了这一开放问题。算法 1 给出如下保证。[1]

[1]在 Lean 归档 https://github.com/harisaziz/EFcake/releases/download/v1.0/CakeCutting-Lean-v1.zip中，定理 `CakeCutting.mainClaim`证明确立了`CakeCutting.MainClaim` 对于每个 $n \geq 2$，在 $[0,1]$, 上的所有有限无原子博雷尔测度以及每个有效切割响应均成立。该归档还包含验证记录和构建说明。

定理 1。 对于具有有限、非负、无原子、可加估值的 $n \geq 2$ 参与者，一个确定性协议使用$O(n^7 \log n)$*Robertson–Webb* 查询，在有限个区间的并集中返回一个完整且完全无嫉妒的蛋糕分配。该界对每一种有效切分答案的选择均成立。

该协议可以在相同的查询界内实现，只使用针对单个区间的查询，且这些区间的端点是 0、1，或由先前的切点查询返回的点（附录G）。附录 H 给出了一种将对同一切割者的调用批处理的变体。它只进行 O（n）次经认证的修剪调用，并总共使用 O（$n^6 \log n$）次 Robertson–Webb 查询。

对于具有任意有限、非负、无原子成本的完整无嫉妒家务分配，最坏情况下的查询界为 O（$n^7 \log n$）。附录 F解释了如何在 Aziz [2026] 的家务协议中使用修剪界和修复界。

无嫉妒性与支配。对于部分分配而言，维持无嫉妒性很容易。什么都不给每个人是无嫉妒的；将剩余蛋糕中的某个无嫉妒分割里每位参与者所得的部分添加到其分配束中，也能保持分配的无嫉妒性，因为价值具有可加性。困难在于尚未分配的蛋糕，即剩余部分。谨慎的分割步骤往往会留下一部分，而这最后的剩余部分也必须分配出去。经典的解决方法是不可撤销优势 [Aziz 和 Mackenzie，2016年，Brams 和 Taylor， 1995]。记 $v_a(B)$ 为参与者 a 对份额 B 的价值。参与者a相对于参与者 b的优势是 $v_a(X_a) - v_a(X_b)$，即她对自己的分配束 X_a的价值高于 b的分配束 X_b的数额；无嫉妒性恰好意味着每个优势都是非负的。当这一优势至少等于她对全部剩余部分的价值时，我们称 a支配 b。这样， b就可以获得全部剩余部分，而无论其余部分如何分配， a仍不会嫉妒她。一旦某个非空适当参与者群体之外的每个人都支配该群体内部的每个人，就可以递归地仅在该群体成员之间分配剩余部分。局外人并不在意成员获得什么，而成员只会获益。因此，协议的目标是在保持其分配无嫉妒的同时，逐一建立支配关系。

协议概述。 我们的协议保留一个无嫉妒的部分分配，并重复进行包含四个步骤的一轮（图 1），直到出现被支配群体。

1. 在 Core中，一名固定的代理人——切割者——将剩余部分切分为 n 份她认为价值相等的份额，而修剪程序让每名代理人无嫉妒地获得不同份额的末端部分。其中一份保持完整，且切割者的份额对她而言恰好价值一整份。如果她认为新的剩余部分具有正价值，那么相对于某个修剪后份额的持有者，她具有严格优势。2 如果现在某个群组之外的每个人都支配群组之内的每个人，那么该群组的成员将当前物品束带入递归调用，并切分剩余部分（步骤 5）。3 否则，切割者可能已经支配了那名持有者，此时她的优势便被浪费了。我们寻找某名代理人相对于一个她尚未支配的物品束的优势。如有必要，我们传递 Core 刚刚围绕一环代理人分配的新后缀：每名代理人保留她之前的物品束，并在其上接收一个新后缀。这可能会产生少许嫉妒。4 修复 在 $n - 1$ 每个物品束前方放置小型 缓冲区 ，并在其后方放置一大份剩余部分。每次添加的目标，是剩余部分在每名代理人自己的价值衡量下所占的一定比例。修剪 随后让每名代理人无嫉妒地获得这些份额中某个不同份额的一个后缀。其中一份保持完整。如果某次切割进入了一个物品束，就会缺少足够的其他份额来实现每个中间缓冲区层级。缺失层级之上的每位原所有者都会严格偏好其标签上的后缀，而不是其下方的任何后缀，因此没有足够的代理人来见证差距下方的修剪（第 7.4）。因此，切割只消耗缓冲区。所发现的优势

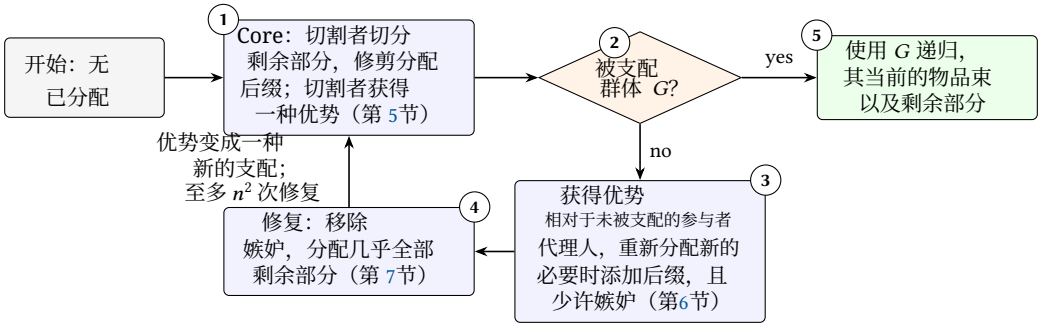

图1。 Divide （算法1），展示了贯穿全文所使用的步骤编号。除了重新分配3 之外，分配在每一步之后都保持无嫉妒，而Repair 4 会将其恢复。表格2 说明了每一步所保证的内容。

在步骤 3 中得以保留，只付出很小的损失，而剩余部分则缩减到低于该物品束的价值。现在，该代理人支配持有该物品束的人。

即使持有者发生变化，旧的支配关系仍会随其物品束保留；每一轮只要继续执行到步骤 2 之后，被支配对的数量就会增加。群体缩小时保留当前物品束，可以维持这些支配关系。原始群体中至多有 n^2 个有序对，因此整个执行过程中至多有 n^2 轮需要修复。

修剪是瓶颈。 每一轮都会调用Core中的修剪程序。若某一轮执行到修复 ，则会再次调用该程序。其他步骤只需多项式数量的查询。切割者进行$n-1$ 次切割，重新分配只读取已记录的价值；除调用修剪外，修复所需的查询次数与其精度的对数成正比。因此，修剪这一步决定了整个协议是否为多项式时间。调用修剪 时，会接收 n 个有序份额，从其中一些份额的前端切下一部分，再将不同份额的剩余后缀 分别分给各参与者，使无人嫉妒他人。给所有人一个空后缀虽能实现无嫉妒，却毫无用处，因此每次修剪都必须有依据：在一条始于完整份额的链中，较早的持有者对每个修剪后缀的评价，都恰好与她对自己份额的评价相同（图2）。早期协议通过搜索参与者和份额的排列，找出这样的经认证的分配；在最坏情况下，这需要指数数量的查询 [Aziz 和 Mackenzie，2016年，2020年，Psomas， 2026]。

通过中位数确定修剪位置。 假设输入份额由正长度区间组成，且每位代理人对每个正长度区间都赋予正价值。那么，所有经认证的分配都保留相同的后缀。对于每个份额，这些后缀都是任何无嫉妒后缀分配中可能出现的最长后缀（命题 1）。只要知道一个支持性分配，也就是某个经认证的分配中各份额的持有者，就足以恢复这些后缀。首先为每位代理人的价值设定一个无穷大的上界。反复将每个份额切分为最长的后缀（最长可达完整份额），使得没有代理人认为该后缀的价值超过其当前上界；然后将该份额被分配给的持有者的上界下调至她对剩余部分的估值。与 Bellman–Ford 最短路径算法类似，这些上界会在 n 轮次内收敛到真实价值。

我们不知道支持性分配是什么，因此同时对所有 n种候选方案进行这种松弛！然后批量舍弃候选方案。三个观察结果使得我们能够通过多项式次查询实现这一点（图 5）。

- 一张表格服务于所有候选方案。 不同候选方案会在不同位置查询价值和切分。我们将每个请求都向上舍入 到少数几个共享网格点之一，这些网格点选为候选方案当前界的分位数

，因此每轮只需一张包含 $O(n^3)$ 个查询的表格，就能满足整个池的需求，无论还剩多少候选方案。向上舍入只会使上界变宽松，因此支持候选项的价值绝不会低于实际值。

- 中位数是一个下界。使真实分配成立的平局会拉低每个候选方案的界，无论其是否得到支持：在每一轮中，至少还有一个候选方案的界达到真实价值或降至其以下，直到所有候选方案都达到这一点。舍入可能会阻碍这一进展，例如某个代理人的价值估计值舍入后高于其真实价值，或某份额的长度估计值舍入后高于其真实长度。在每个阈值处，只有位于包含该阈值的网格间隙中的估计值才能跨越它。经过 $4n$ 轮后，大多数候选方案在每个坐标上都不高于真实值，因此，对于每个坐标，候选方案界的下中位数至多是真实价值。

- 匹配检验会指定一个要筛选的坐标。在中位数价值处，二分图匹配计算要么证明这些价值就是真实价值，要么指定一名其中位数价值严格过低的代理人。支持候选项从上界定该代理人的价值，因此它们的界严格高于中位数，而至少一半候选方案的界不高于中位数。这些候选方案会被舍弃。

每个阶段使用 $O(n^4)$ 次查询，无论候选方案的价值有多接近。每次失败的测试都会至少淘汰池中一半的候选方案，因此 $1+\log_2(n!) = O(n\log n)$ 个阶段就足够了。这意味着每次修剪需要 $O(n^5\log n)$ 次查询。修复在每轮中具有相同的查询界，而算法 1 总共使用 $O(n^2)$ 轮（第 4.4节）。

低成本地修复嫉妒。另一个新要素涉及 修复：它为每个分配束提供剩余部分中的大份额，而每个代理人对这些份额的价值几乎相同，并在前面放置小型 缓冲区。随后再次调用 修剪，即可通过消耗缓冲区来消除轻微的嫉妒，同时保持每个分配束完整不变。未分配的部分仅包括缓冲区和很小的舍入误差，因此一次修复就能使剩余部分充分缩小，从而将优势变为支配。为了构建这些份额，我们改造了离线的 ε-共识划分算法，该算法由 Alon and Graur [2021]提出。它将一个区间划分为 k个部分，每个部分对每个 t测度的价值都近似为 $1/k$，使用 $O(tk\log(k/\varepsilon))$ 次切分。他们的算法可以查询各测度之和。在这里，我们只能访问各个代理人的 Robertson–Webb 查询。我们只细化仍由多个份额共同分割的剩余部分单元，并在代理人的半价值标记的加权中位数处切分每个这样的单元。一次切分会使该单元两侧的总归一化价值都降低一个常数因子，因此达到所需精度的成本是对数级的。

组织结构。第 2 节讨论相关工作，第 3 节建立模型并介绍支配。第 4 节给出完整协议并证明定理 1，其中将其三个子程序各自对应的一个引理作为已知条件。第 5–7 节按照各步骤执行的顺序证明这些引理。第 5 节给出用于修剪的中位数算法，以及切割者的保证。第 6 节和 7节介绍重新分配和修复。全文贯穿一个三代理人示例。附录 A证明匹配检验，附录 B 处理零价值和空份额。附录C 给出适用于一般曲线的中位数算法。附录 D 探讨经认证的蛋糕修剪与任务修剪及最低价格均衡之间的关系。附录 E将中位数算法应用于具有非线性效用的分配市场。附录 F将修剪界和修复界推广到家务。附录 G给出区间实现，附录 H 证明蛋糕问题中更紧的查询界。

2 相关工作

蛋糕的最坏情况界。Selfridge and Conway 的三方程序只使用有界数量的切割 [Robertson and Webb, 1998]。对于任意数量的参与者，

Brams 和 Taylor 的 1995年协议 [1995] 对每个输入都会终止，但对于固定数量的参与者，不存在统一的界。2009年，Procaccia [2009]证明了一个一般的 $\Omega(n^2)$ 查询下界。2016年，Aziz 和 Mackenzie [2016] 为所有 n提出了首个有界离散协议，其上界是六个 n的塔式函数。2023年，Sokolov [2023] 修改并重新分析了该协议，得到 $n^{8n^2(1+o(1))}$ 次查询。2026年9月，叶和白 [2026]通过剪枝部分分配，并多次（多项式数量）调用其 SubCore 变体——Aziz 和 Mackenzie 的修剪子程序 [2016]，将界降至 $n^{O(1)}2^n$。Psomas 于 10 月发布的基本协议 [2026], 使用 $2^{O(n\log n)}$ 次查询，并围绕修剪、修复和支配来组织构造。定理 1 给出了每个交互记录的确定性界。分配束始终可以是不连通的。如果要求每位参与者都获得单一区间，那么对于三个或更多参与者，不存在能保证连通的无嫉妒蛋糕分配的有限协议 [Stromquist,2008]。

家务问题的并行研究脉络。Oskui 的三人程序由 Robertson and Webb 描述；Peterson 和 Su 提出了四人移动刀程序。Peterson 和 Su 利用不可撤销优势和保留价，为任意 n构造了一个无界离散程序；德赫加尼等人提出了第一个有界程序。法哈迪和哈吉阿盖证明，即使对于比例家务分配，也存在一个 $\Omega(n\log n)$ 下界。与此同时，法哈迪和哈吉阿盖在 2026 年 11 月的修订版中加入了一个基于延期补偿的确定性 $2^n\log_2 n+O(n)$ 家务协议，而 Aziz 提出了一个单指数时间协议。附录 F 表明，我们的修剪界和修复界使 Aziz 的家务协议具有 $O(n^7\log n)$ 查询界。

概率界与下界。 Chèze [2026] 证明，对于一个偏好档案分布，该程序以高概率达到多项式界。2026 年 10 月，Mackenzie 和 Suzuki [2026]针对每个偏好档案提出了一个随机精确协议，其期望查询次数为 $\widetilde{O}(n^{30})$。他们的 11 月 12 日的研究札记 报告了改进后的界：期望查询次数为 $\widetilde{O}(n^5)$。11 月，法哈迪和哈吉阿盖 [2026] 将蛋糕和家务问题的期望查询次数都降至 $O(n^{12}\log n)$。他们还证明，对于成功概率固定且为正的协议，即使可以自由选择输出端点，期望查询次数也存在二次下界。

协议的来源。 表 1 总结了哪些组成部分源自以往的研究。我们的框架采用 Aziz 和 Mackenzie [2016, 2020]：切割者将剩余部分分成等份，修剪会分配其中一部分并留下完整的份额，支配用于衡量进展，而被支配群体则递归地取得剩余部分。我们沿用 Psomas [2026] 的做法，将一轮组织为修剪、重新分配和修复。我们的修复有两点不同：一次调用即可保护现有物品束，并将剩余部分缩减到足以保留刚刚获得的优势；其成本关于容差倒数呈对数级，而非线性级。为此，我们将 Alon and Graur [2021] 的分数舍入方法调整为适用于指定份额，并在加权中位数处切分共享单元。修剪程序是新的。其匹配形式与 Alaei etal. [2016] （附录 D.2）提出的极端竞争均衡密切相关。我们通过在候选分配之间共享网格查询并用中位数筛选这些查询，以多项式次查询计算出极端解。

投票、设施选址与分割中的中位数。对于直线上的单峰偏好和奇数选民群体，中位峰值是多数胜者 [Black, 1948]。在直线上为一个设施选择报告位置的中位数具有策略无关性，并且能够使总距离最小 [Moulin, 1980年, Procaccia and Tennenholtz, 2009]。在比例公平切蛋糕中，Even and Paz [1984] 在中位切分标记处分割参与者，而Cseh and Fleiner [2020]在按代理人的应得份额加权的近半数标记的加权中位数处进行切分，

表1. thispa 中的要素及其用途 per.

要素	早期研究	本文
Core、支配，递归	切割者、修剪、支配作为进展 [Aziz 和 Mackenzie，2016, 2020]	当前物品束传入递归调用（第 4节）
经认证的修剪	SubCore 和认证序 [Aziz 和 Mackenzie，2016年，Psomas，2026]	正输入上的唯一后缀。中值使用共享网格查询进行筛选需要 O（$n^5 \log n$）次查询（第5节）
重新分配	交换创造了优势 [Aziz 和 Mackenzie，2016, 2020]；蛋糕引理 [Psomas，2026年，引理 5]	双情况形式（引理 2）
修复	缓冲的；成本与容差倒数成线性关系 [Psomas，2026]	通过分数舍入得到近似共同份额 [Alon and Graur，2021]使用加权中位数切割；成本为对数级（第 7节）

按代理人的应得份额加权。修剪根据候选方案分配对价值估计进行排序。修复根据每位代理人对单元的归一化价值为切分标记加权。

3 预备知识

一个实例是一个元组（N，C，$(v_i)_{i\in N}$），其中 $N = [n]$是有限参与者集合，$C = [0, 1]$是蛋糕，且每个 v_i 都是有限的、非负的、无原子性的可加价值测度。非负可积价值密度是其特殊情形。一个**份额**是有限个区间的并集。价值不必归一化。将某个参与者的价值乘以正的常数不会改变她的任何比较。在一次递归调用中，n 表示参与的参与者数量，并将其重新标记为 $[n]$。其输入蛋糕可能是不连通的。我们给出 $n \geq 2$的渐近查询界。对于一名参与者，分割和修剪都能将完整份额分配给她。

一个**分配** $X = (X_i)_{i\in N}$由两两不相交的份额组成，每名参与者对应一份。其**剩余部分**是 $R = C \setminus \bigcup_i X_i$。当剩余部分为空时，该分配是**完整的**。在部分分配中允许出现空片段。除蛋糕的右端点外，我们始终使用半开区间来分配端点。无原子性使这些端点选择对价值无关紧要。若对于所有参与者 i，$j \in N$，分配 X满足 $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$，则称其为**无嫉妒的**。因此，每名参与者都获得了她认为价值最高的分配束。无嫉妒性只比较已分配的分配束，不限制参与者如何评价剩余部分。对于蛋糕不相交部分上的部分分配 X和 Y，记$X \oplus Y$为将 $X_i \cup Y_i$ 分配给每名参与者的分配。可加性意味着，同一组参与者的两个无嫉妒分配的并集仍然是无嫉妒的。

支配。我们通过支配来衡量进展 [Aziz 和 Mackenzie，2016, 2020]，这是一种不可撤销优势的形式 [Brams 和 Taylor，1995]。在带有剩余部分 X 的无嫉妒部分分配中R，如果 i支配 j，则当 $v_i(X_i) - v_i(X_j) \geq v_i(R)$。被支配群体是一个集合 $\emptyset \neq G \subseteq N$，使得该集合之外的每个代理人 G都支配 G其中的每个成员。

如果 i支配 j，将全部剩余部分分配给 j仍然不会使 i产生嫉妒。支配在我们所使用的操作下也是永久保持的。对剩余部分的一部分进行无嫉妒分配 Y 会保留所有现有的支配关系：i相对于 j的优势变化为 $v_i(Y_i) - v_i(Y_j) \geq 0$，而她对剩余部分的价值只会降低。第 4 节说明，即使分配束更换持有者，支配关系也仍然保持。一旦找到被支配群体，就可以在其成员之间递归地划分剩余部分。

查询与有序份额。估值查询返回 $v_i([x, y])$。切分查询指定一位代理人i、一个起点 x和一个可行价值 w，并返回任意一个 $y \geq x$满足 $v_i([x, y]) = w$ [Robertson

和 Webb， 1998]。所有计算均使用精确算术处理查询答案。协议做出选择时遇到平局，则遵循固定顺序。

一份额是由互不相交的组成区间按顺序排列而成的列表。前缀遵循这一顺序，后缀则是移除前缀后剩下的部分。此顺序可能不同于 $[0,1]$ 上的物理顺序。我们用 $P \mathbin{+\!\!+} Q$ 表示拼接。这样一来，修复便可以将缓冲区放在分配束之前，无论这些份额在物理上位于何处。要切分出价值指定的前缀，可根据已记录的估值找到其所在的组成区间。如果目标位于端点，我们可以选择该端点。特别是，如果切割者给她自己的整个剩余部分赋予零质量，她可以将前 $n-1$ 份额取为空，最后一份额则取为整个剩余部分。否则，只需在该组成区间内进行一次普通切分。后缀标记也可用相同方法找到：从总价值中减去目标值即可。

协议会记录每位活跃代理人对每个组成区间的价值，计算初始总值时最多需要n 次求值。每次要保留一条新的切分时，对每位代理人进行一次求值即可得到其中一部分的价值，再通过减法得出另一部分的价值。计入切分本身，最多需要 $n+1$次查询。在修剪过程中，输入记录保持不变。每个试验后缀最多只需对其边界组成区间进行一次查询，只有返回后缀的边界会加入记录，供后续调用使用。

4 协议概览

本节介绍整个协议，并证明定理1。本节将三个子程序Core、Reassign 和Repair 视为黑箱。每个子程序都通过一个引理加以描述，该引理准确说明下一步所需的条件；第5–7 节将证明这些引理。表2 总结了一轮操作，表4汇总了主要符号说明。

4.1 主循环

Divide （算法1）从空物品束和剩余部分开始 C。当被支配群体接管剩余部分时，群体中的参与者会将其当前物品束和分量记录带入递归调用。群体之外的每个人都保留自己的物品束。对于一名或两名参与者，递归调用会直接切分剩余部分，并将所得份额加入他们的物品束。对于人数更多的群体，递归调用会选定一名切割者，并重复图1中的步骤。

标签与持有者。在 Core 中，部分标签 j 表示切割者的份额 P_j。在 Divide 的一轮操作中，物品束标签 j始终对应参与者 j原有的物品束 X_j，即使该物品束易手也是如此。用 $\sigma(j)$ 表示其最终持有者。该物品束的两项新增内容是

$$X_j \xrightarrow{\text{③ add } Y_{\pi(j)}} D_j = X_j \cup Y_{\pi(j)} \xrightarrow{\text{④ add } Z_j} W_{\sigma(j)} = D_j \cup Z_j. \tag{1}$$

这里， Y_i是 Core 分配给代理人 i的后缀。重新分配会将 $Y_{\pi(j)}$分配给标签为 j 的物品束，而修复会向其中添加 Z_j。在下一轮，物品束会根据其当前持有者重新标记。

4.2 每个步骤所保证的内容

步骤1：切割者。Core 是 Aziz 和 Mackenzie 的 Core 协议 [2016, 2020]，，我们用自己的修剪程序替代 SubCore。在 Core(r,N,C) 中，代理人 r将 C切分为 n份对她而言价值相等的份额，而 Trim 会给每位代理人一份来自不同份额的后缀，且不会产生嫉妒（第 5 节）。Trim 使用 $O(n^5 \log n)$ 次查询（引理 7）。经认证的修剪会保留某一份额完整，尽管不一定是切割者的那份。对她而言，该份额的价值为 $v_r(C)/n$，且没有任何后缀的价值更高，因此根据无嫉妒性，她自己的后缀价值恰为 $v_r(C)/n$。因此，与其他任何份额的持有者相比，她的优势等于她对从该份额修剪掉部分的估值。这些修剪掉的部分构成剩余部分 U，所以如果 $v_r(U) > 0$，她就至少比某个修剪后份额的持有者多出 $v_r(U)/(n-1)$ 的优势。

引理1（切割者优势；证明见第 5.6 节）。对于每个代理人 r 和份额 C，$\textsc{Core}(r,N,C)$返回对 Y的部分进行的无嫉妒分配 C，剩余部分为 $U \subseteq C$，使用一次

算法 1： DIVIDE(N, R, X)

输入： 非空参与者集合 N、有序剩余物 R 和当前的无嫉妒分配束 X。初始时 $R = C$ 且所有分配束均为空。

输出： 在 N 中为 $R \cup \bigcup_{i \in N} X_i$ 完成无嫉妒分配。

若 $|N| = 1$，**则返回**加入 R 后的唯一分配束
如果 $|N| = 2$ **那么**
    通过切分选择来划分 R。**返回** X，并将每个份额加入相应接收者的分配束中
按照固定参与者顺序选择一名切割者 $r \in N$
当 *true* **时执行**
    ① $(Y, U) \leftarrow \text{Core}(r, N, R)$ ▷ 引理 1
    ② **若** $(X \oplus Y, U)$ 存在被支配群体 G **则** ▷ 图搜索，第 4.2 节
        ⑤ 集合 $V \leftarrow X \oplus Y$ 和 $W \leftarrow \text{Divide}(G, U, V|_G)$
        返回 W 在 G 和 V 上，在 $N \setminus G$ 上
    ③ $(a, b, \pi, \alpha) \leftarrow$ 重新分配(r, X, Y, U)，并为每个 i 设置 $D_i \leftarrow X_i \cup Y_{\pi(i)}$ ▷ 引理 2
    ④ $(W, \sigma, R') \leftarrow$ 修复(N, D, U, α)，并设置 $(X, R) \leftarrow (W, R')$ ▷ 引理 3 和 5

表格 2. Div 的一个轮次 ide。“之后”一栏列出了所有内容 供下一步依赖 n.

Step	执行内容	之后成立的条件	By
开始	—	X 无嫉妒，且有剩余部分 R	—
① Core	Core(r, N, R)：切割者 r 将 R 切分为 n 份额，对她而言价值相等；修剪为每位代理人提供不同份额的一个后缀 Y_i	$X \oplus Y$ 无嫉妒，且有剩余部分 $U \subseteq R$；一些 $h \neq r$ 拥有 $v_r(Y_r) - v_r(Y_h) \geq v_r(U)/(n-1)$	L1
② 测试	构建非支配图 Γ 的 $(X \oplus Y, U)$	存在一个被支配群体 G（转到 5），或者 Γ 是强连通的，并且每个 $v_i(U) > 0$	§4.2
③ 重新分配	选取一条弧 $a \to b$（Γ）；如有需要，旋转仅新后缀：$D_i = X_i \cup Y_{\pi(i)}$	有一点嫉妒：$v_i(D_i) \geq v_i(D_j) - \alpha v_i(U)$；一个优势：$v_a(D_a) - v_a(D_b) \geq (K-1)\alpha v_a(U)$	L2
④ 修复	修复(N, D, U, {v10)：放置 $n-1$ 个缓冲区在每个 D_j 之前，并在其后放置一个大份额 T_j 它；再次修剪	W 无嫉妒；每个 D_j 保持完整，现在由 $\sigma(j)$；添加项因 $\leq 2n\alpha v_i(U)$ 而不同；剩余部分 $v_i(R') \leq 2n^2\alpha v_i(U)$	L3
end	$(X, R) \leftarrow (W\ R')$	a 支配 $\sigma(b)$，不过她并没有支配 b；旧有的支配关系遵循其标签；因此，被支配对的数量增加	L4, L5
⑤ 递归	对 G 递归，其物品束位于 $X \oplus Y$ 以及剩余部分 U	完备且无嫉妒	定理 1

对 *Trim* 的调用以及 $O(n^2)$ 次其他查询，因此总计 $O(n^5 \log n)$ 次查询。切割者的后缀满足 $v_r(Y_r) = v_r(C)/n$。若 $v_r(U) > 0$，则对于某个代理人 $h \neq r$，有 $v_r(Y_r) - v_r(Y_h) \geq v_r(U)/(n-1)$。

步骤 2：检验被支配群体。无嫉妒分配的**非支配图** Γ 有一条弧 $i \to j$ 当且仅当 $i \neq j$ 且 i 不支配 j（它是Aziz 和 Mackenzie（2020年，图 4）中支配图的补图）。Γ 的真源强连通分量是一个被支配群体，因为没有弧进入其中。反过来，被支配群体没有入弧，因此Γ 不可能是强连通的。因此，我们可以找到这样一个群体，或者证明不存在这样的群体，

使用标准的图搜索。如果不存在这样的群体，则每个代理人都对剩余部分赋予正价值。事实上，对其价值为零的代理人支配其他所有人，而其他代理人随后构成一个被支配群体。

步骤 3：新的优势。切割者优势可能无助于推进，因为她可能已经支配了引理 h 中的参与者 1。步骤 3 会找到某个参与者 a 在某个标签 b 上的分配束上的优势，而她尚未支配该分配束。为此，它可以沿着一个环传递新后缀，代价是产生少许嫉妒，其程度由容差 α 衡量。当满足 $K = 4n^2$时，该优势至少是这种嫉妒的 $K-1$ 倍，这正是步骤4 所需的。

引理2（有用的重新分配；证明见第 6 节）。设 (X,R) 是无嫉妒的，且 $(Y,U) = \mathit{Core}(r,N,R)$。如果 $(X \oplus Y,U)$ 没有被支配群体，那么对于每个 i，都有 $v_i(U) > 0$，并且 *Reassign* 仅使用记录的价值，就能找到参与者 a,b，使得在 (X,R) 中，a 不支配 b，还找到一个排列π以及 $K^{-(n+1)} \le \alpha \le K^{-2}$，使得分配束 $D_i = X_i \cup Y_\pi(i)$ 满足

$$\begin{aligned} v_i(D_i) &\ge v_i(D_j) - \alpha v_i(U) \quad (i,j \in N), \\ v_a(D_a) - v_a(D_b) &\ge (K-1)\alpha v_a(U). \end{aligned} \tag{2}$$

步骤4：修复。修复接收略有嫉妒的分配束 D_j和剩余部分 U。它消除嫉妒时不会切分任何 D_j，并分配几乎所有的 U，使每位代理人眼中添加到每个分配束的价值几乎相同。其输出可能会将一个分配束转交给新的持有者。

引理 3（修复；证明见第 7 节）。设 D 是一个剩余部分为 U的部分分配，并且有$0 < \alpha \le 1/(8n^2)$。假设 $v_i(U) > 0$且 $v_i(D_i) \ge v_i(D_j) - \alpha v_i(U)$ 对所有 i,j均成立。那么 $\mathit{Repair}(N,D,U,\alpha)$ 返回一个无嫉妒分配 W 一个从标签到最终持有者的双射 σ，以及互不相交的添加项$Z_j \subseteq U$，使得 $W_\sigma(j) = D_j \cup Z_j$。其剩余部分 R'满足：对于每位代理人 i以及标签 j,l，

$$v_i(R') \le 2n^2 \alpha\, v_i(U), \qquad \bigl|v_i(Z_j) - v_i(Z_l)\bigr| \le 2n\alpha\, v_i(U).$$

该过程调用一次 *Trim*，并进行 $O(n^4 \log(n^4/\alpha))$ 次其他查询。

4.3 支配关系随标签传递

同一代理人不必在整个协议过程中始终持有同一个分配束。因此，在计算进展时，我们跟踪每个旧分配束的标签 。下一个引理表明，只要分配束仅通过从剩余部分取得蛋糕而扩增，对某个分配束的支配关系就会传递给接下来持有该分配束的人。

引理 4（支配关系随标签传递）。设(X,R) 是无嫉妒的，且W是一个剩余部分为 $R' \subseteq R$的无嫉妒分配。假设对于某个双射 σ，每个分配束$W_{\sigma(j)}$都由 X_j和 $R \setminus R'$中的若干份额组成。如果代理人 i在(X,R)中支配 j，那么 i就在(W,R')中支配 $\sigma(j)$。

证明。无嫉妒性以及包含关系$X_i \subseteq W_{\sigma(i)}$可得 $v_i(W_i) \ge v_i(W_{\sigma(i)}) \ge v_i(X_i)$。由于$W_{\sigma(j)}$由 X_j和 $R \setminus R'$中的若干份额组成，我们得到

$$v_i(W_i) - v_i(W_{\sigma(j)}) \ge v_i(X_i) - v_i(W_{\sigma(j)}) \ge v_i(X_i) - v_i(X_j) - v_i(R \setminus R').$$

若 i 在 (X, R) 中支配 j，则右侧至少为 $v_i(R) - v_i(R \setminus R') = v_i(R')$。 □

不同标签对应不同的持有者，因此物品束易手时，每个代理人所支配的代理人数量都不会减少。

4.4 进展，以及定理1

每一轮都会将第 3 步的优势转化为支配。选择 $K = 4n^2$ 留下了足够的优势来覆盖最终的剩余部分。从代理人 a的角度来看，以 $\alpha v_a(U)$为单位，引理 2 和 3 的界为

数量	界
修复前的优势	至少 $K-1$
不等量添加造成的可能损失	至多 $2n$
剩余残余物	至多 $2n^2$

由于 $K-1-2n \geq 2n^2$ for $n \geq 2$，优势变成了支配。我们将其与旧捆绑的最终持有者继承的支配一并计数。

引理 5（单轮进展）。*Divide* 的每次迭代只要继续执行第 2 步之后的步骤，就会保持无嫉妒性，并严格增加被支配对的数量

$$\Phi(X,R) = \left|\{(i,j) \in N^2 : v_i(X_i) - v_i(X_j) \geq v_i(R)\}\right|.$$

因此，在递归之前，*Divide* 会分别调用 *Core* 和 *Repair* $O(n^2)$ 次。

证明。*Repair* 会执行修复并恢复无嫉妒性。引理 2 给出的输入嫉妒界恰好是引理 3的输入嫉妒界，且 α保持不变。它还给出 $v_i(U) > 0$ 以及 $\alpha \leq K^{-2} \leq 1/(8n^2)$。因此，修复会返回一个无嫉妒分配$W$，其剩余部分为 R'，并让每个旧分配束保留原有标签，如（1）所示。

存续优势产生了新的支配关系。令 $\sigma(j)$为标签 j的最终持有者。代理人 a可以更改标签，但无嫉妒性意味着 $v_a(W_a) \geq v_a(W_{\sigma(a)})$。因此，引理 2和 3推出

$$\begin{aligned} v_a(W_a) - v_a(W_{\sigma(b)}) &\geq v_a(D_a) - v_a(D_b) + v_a(Z_a) - v_a(Z_b) \\ &\geq (K-1-2n)\alpha v_a(U) \\ &\geq 2n^2 \alpha v_a(U) \geq v_a(R'). \end{aligned}$$

因此，代理人 a 支配标签 b的最终持有者，尽管她在 (X,R) 中并不支配 b。

支配计数增加。每个最终分配束 $W_{\sigma(j)} = X_j \cup Y_{\pi(j)} \cup Z_j$由 X_j和 $R \setminus R'$的份额组成。根据引理 4，映射 $(i,j) \mapsto (i,\sigma(j))$ 将旧的被支配对映射为最终的被支配对。由于 σ是一个双射，该映射是单射。最终配对 $(a,\sigma(b))$ 不在其像中，因为它唯一可能的原像是 (a,b)，而 a在 (X,R) 中并不支配 b。因此，$\Phi(W,R') \geq \Phi(X,R) + 1$。计数包括自配对，且至多为 n^2。每次迭代若继续进行并越过第 2 步，都会各调用一次每个子程序；返回的迭代则会额外进行一次最终的 Core 调用。□

定理 1 的证明。递归调用在不包含某代理人时，将该代理人称为冻结的。我们证明，在每次已完成的更新之后，完整分配均为无嫉妒的，且每个冻结代理人都支配每个活跃代理人。初始时所有分配束均为空，所有代理人均处于活跃状态。记 X、R 和 W R' 分别表示一次更新前后的完整分配和剩余部分。根据（1），每个活跃标签 j 都传递给某个持有者 $\sigma(j)$，其中 $W_{\sigma(j)} = X_j \cup B_j$ 对某个 $B_j \subseteq R \setminus R'$ 成立。对于单独的 Core 步骤或最终分配，令 σ 为恒等式。在活跃代理人中，将 Core 或最终分配中的无嫉妒份额相加，根据可加性可保持无嫉妒性；而在修复轮次之后，由引理 3 可得该性质。因此，$v_i(W_i) \geq v_i(W_{\sigma(i)}) \geq v_i(X_i)$，所以活跃代理人 i 仍然至少同样偏好自己的分配束，而不是任何冻结代理人的分配束。对于冻结代理人 f 和活跃标签 j，先前的支配关系给出

$$v_f(W_f) - v_f(W_{\sigma(j)}) = v_f(X_f) - v_f(X_j) - v_f(B_j) \geq v_f(R) - v_f(B_j) \geq v_f(R').$$

当活跃集合缩小时，群组测试会为每个新冻结的代理人给出相同的支配关系。冻结代理人之间的比较保持不变。最后对一名或两名代理人的调用会分配全部剩余部分。

令 Φ 始终表示原始 n 代理人中的被支配对数量，如引理 5 所述。将 σ通过冻结代理人上的恒等式进行扩展。引理 4 通过 $(i,j) \mapsto (i,\sigma(j))$ 将旧的被支配对单射到最终的被支配对中。根据引理 5 在活跃集合上的证明，每个修复轮次都会在该像之外增加对 $(a,\sigma(b))$。缩小活跃集合的轮次不会减少 Φ。因此，修复轮次总数至多为 n^2，而缩小活跃集合的轮次至多为 $n-1$。

	P_1	P_2	P_3
代理人 1	1	1	1
代理人 2	1	2	4
代理人 3	1	2	5

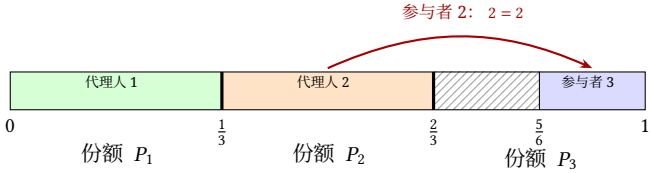

图2. 运行示例。左：每位参与者对每个三分之一份额的价值，均匀分布在其中。右：由 Y 计算得出的 Core 在第一轮中的分配，切割者为参与者 1。参与者 1 和 2 持有 P_1 和 P_2整个份额，参与者 3 持有 P_3 的最后一半。箭头表示用于证明修剪合理的平局关系（第5.1节），箭头从较早的持有者指向修剪后的后缀；她认为该后缀的价值恰好等于自己份额的价值。带斜线阴影的一半构成剩余部分 U。

查询计数。在一个包含 $m \geq 3$ 个活跃代理人的轮次中，引理 2 给出 $\log(1/\alpha) \leq (m+1)\log(4m^2)$。切割者使用一次经认证的修剪，并使用 $O(m^2)$ 次查询进行切分和记录。根据引理 3，修复使用一次经认证的修剪，以及 $O(m^4 \log(m^4/\alpha))$ 次其他查询。因此，一个轮次的成本为 $O(m^5 \log m)$ 次查询，其中包括对其保留边界的求值。重新分配、支配性测试和环搜索使用已记录的表格。基本情况使用分量记录，此外至多需要常数次查询。计入 $O(n)$ 次初始评估后，总体上界为

$$O(n) + (n^2 + n - 1)\, O(n^5 \log n) = O(n^7 \log n).$$

只有保留边界会进入后续调用（第 3 节），因此物理区间记录的数量是多项式级的。直接修剪实现对整个协议最多贡献 $n!$ $n^{O(1)}$ 次精确运算，其余所有算术运算的数量则关于记录数和 n 呈多项式级。□

4.5 运行示例，oneround

三位代理人将 $C = [0, 1]$ 分开，每个三分之一区间内的价值均匀分布，总价值如图 2 所示。我们逐步跟进第一轮。

1. 代理人 1 是切割者，她的等价值部分是三等分部分 P_1、P_2、P_3。参与者 2 和 3 都最看重 P_3，因此不存在对完整三等分部分的无嫉妒分配。Core 保持 P_1 和 P_2完整，以及 P_3 的后半部分（图2；第 5 节说明修剪如何找到这一点）。剩余部分U 是 P_3的前半部分，对三个参与者的价值分别为 1/2、2 和 5/2。代理人 1 对自己份额的估值比对代理人 3 的一半高出 1/2，是引理1 的界 $v_1(U)/2$ 的两倍。2 代理人 1 支配代理人 3，因为她 1/2 的优势等于 $v_1(U)$。没有其他人支配任何人。例如，代理人 3 的最大优势是相对代理人 1 的 3/2，低于 $v_3(U) = 5/2$，而代理人 2 相对代理人 1 的优势 1 低于 $v_2(U) = 2$。因此 Γ 包含除 $1 \to 3$ 之外的每一条弧，并且通过环 $1 \to 2 \to 3 \to 1$强连通。3 此处 $K = 36$。切割者优势针对的是代理人 3，而她已经支配该代理人，因此不能产生新的支配。然而，弧 $2 \to 1$、$3 \to 1$ 和 $3 \to 2$ 带有很大的优势，因此重新分配不移动任何内容（第 6 节中的情况 1）。按固定顺序取第一条弧，它选择 $a = 2$、$b = 1$、恒等置换和 $\alpha = K^{-2} = 1/1296$；另外两条弧会给出相同的排列和容差。因此 $D = 1$ 标签 1 承载 P_1，标签 2 承载 P_2，标签 3 承载代理人 3 对 P_3的一半。4 修复为每个标签添加一个大份额和两个缓冲区，它们合计几乎相当于每个代理人对 U 的价值的三分之一（图 7）。根据引理 3，这些添加量之差至多为每个代理人对 U 的价值的 $2n\alpha = 1/216$，而新的剩余部分的价值至多为 $2n^2\alpha = 1/72$

的那 t 价值。由于 $v_2(U) = 2$，代理人 2 相对标签 1 的优势 1 成为一种支配：

$$v_2(W_2) - v_2(W_{\sigma(1)}) \geq 1 - \frac{1}{108} > \frac{1}{36} \geq v_2(R').$$

以 $v_3(U)$为单位，参与者 3 对标签 1 和标签 2 的较小优势为 $(5/2 - 2)/(5/2) = 1/5$。修复后，标签 3 仍至少领先两者 $1/5 - 1/216 > 1/72$。因此，根据无嫉妒性，她获得标签 3，并支配另外两位持有者。所示不等式排除了参与者 2 获得标签 1 的可能，因此她持有标签 2，参与者 1 持有标签 1。根据引理 4 应用于 (Y,U)，参与者 1 先前对参与者 3 的支配关系仍然成立。

⑤因此，{1} 是一个被支配群体：参与者 2 和 3 都支配参与者 1。加入下一次 Core 调用所产生的无嫉妒分配后，这些支配关系仍然成立，因此第二轮的测试会发现一个被支配群体，而 Divide 在该次调用后递归。

5 修剪与切割者

本节证明引理1（步骤₁）。其核心部分是修剪程序 Trim，Core 在步骤₁ 中使用该程序，而 Repair 又在步骤₄ 中再次使用。修剪一份蛋糕会使它对所有人都变得一那么有吸引力。因此，我们寻求一种无嫉妒分配，其中每次修剪都有无差异作为依据：某位较早的持有者对修剪后的后缀的价值，恰好与她对自己所持份额的价值相同。

本节组织如下。第5.1 节定义经认证的分配并给出针对它们的计数检验，第5.2 节说明它们的后缀在正输入上是唯一的。第5.3节通过增加一个额外节点，将计数检验转化为匹配条件；该节点是固定点，代表“完整”。第5.4 节用参与者的价值重新表述这一条件，第5.5 节使用中位数算法计算认证价值。第5.6节回到切割者。

5.1 经认证的后缀分配

后缀分配为每位参与者提供一个不同标签份额的后缀。标签用于命名输入片段，而其持有者是接收该后缀的参与者。我们按标签为后缀编索引：S_j 是标签 j上的后缀，而 $\sigma(j)$ 是其持有者，因此参与者 $\sigma(j)$ 的分配束是 S_j。如果某份额的一部分被切掉，则其后缀是修剪后的；否则就是完整的。如果该分配是无嫉妒的，并且可以排列持有者，使每位持有者要么获得一个完整份额，要么获得一个后缀，而某位较早的持有者对该后缀的价值恰好等于她对那位较早持有者所持后缀的价值，则该分配是经认证的。沿着这些无差异关系反向追溯，最终会到达一个完整份额。

运行示例。 在Core中，标签 j 表示切割者的第 j 份额。在图 2 中，这是第 j 个三分之一，P_j。（在修复中，以及第 4.5 节中，标签改为表示旧捆绑。）经认证的分配保留 P_1 的 P_2 整份以及 P_3 的最后一半。参与者 1 和 2 分别完整持有标签 1 和 2。参与者 3 持有标签 3，而参与者 2 对其一半的价值恰好与 P_2 相同。因此，顺序 1、2、3 认证了该分配。

计数检验。 是否经认证可仅根据后缀确定。对于无嫉妒后缀分配 S，令 $\mathrm{M}_i(S)$ 表示使 $v_i(S_j)$ 最大的标签集合 j，即参与者 i 的最喜欢的标签。下一个引理刻画了经认证的后缀分配。

引理 6（认证检验）。 无嫉妒后缀分配 S 经认证，当且仅当每个非空的修剪后标签集合 H 都满足

$$\left|\{i : \mathcal{M}_i(S) \cap H \neq \varnothing\}\right| > |H|. \tag{3}$$

换言之，每组修剪后的标签所包含的最喜欢的标签，其对应的参与者数量多于该组标签的数量。

证明。 假设 S已获得认证，并固定 H。根据无嫉妒性，$|H|$的持有者中，持有 H-标签的持有者被计入（3）的左侧。在认证顺序中，最早持有 H-标签的持有者持有一个修剪后的

后缀，因此，较早的持有者对它的价值不低于对自己后缀的价值，并且它是她最喜欢的份额之一。她持有 H 之外的一个标签，也被计入，从而得到严格不等式。反过来，从每个持有者向持有者所持标签与其自身标签价值相同的其他持有者分别画一条弧。如果某些持有者无法从某个完整份额到达，那么它们的标签就构成一个非空集合 H 修剪后的标签，且没有弧指向该集合。持有 H 中最喜欢的标签的参与者必然持有 H 中的标签，因此只有 $|H|$ 名参与者被计入，这与（3）矛盾。现在按持有者到某个完整份额的距离对持有者排序，即可得到一个证书。□

如果所有 n 标签都经过修剪，那么将 H 视为集合（3）中的所有标签，需要超过 n 名参与者。因此，至少有一个份额保持完整。在运行示例中，$\mathcal{M}_1 = \{1,2\}$、$\mathcal{M}_2 = \{2,3\}$ 和 $\mathcal{M}_3 = \{3\}$。唯一的非空修剪后标签集合是 $H = \{3\}$，其中包含参与者 2 和 3 最喜欢的标签：两个参与者对应一个标签。

引理 7（多项式次查询的经认证的修剪）。给定每个参与者在 n 个互不相交的有序份额上的分量价值，*Trim* 返回一个无嫉妒后缀分配以及一个认证顺序，共需 $O(n^5 \log n)$ 次确定性的 *Robertson–Webb* 查询。该界包括空份额和零价值区间。

如果每个份额由一个或多个正长度区间组成，并且每个参与者都为每个正长度区间赋予正价值，则称输入为 正值 输入。于是，每个份额都具有正的区间总长度。我们首先证明这类输入的界。附录 B 通过在虚拟正曲线上运行算法，并将其证书映射回实际份额，处理一般估值和份额，包括孤立的端点分量。

5.2 认证后缀的唯一性

对于正输入，所有经认证的分配都具有相同的后缀，尽管价值相同的两个参与者可以交换这些后缀，如下例所示。这使算法只需寻找一个唯一的后缀向量。若没有正性，这一结论便不成立：如果两个相同的参与者对两份份额的价值都为 1，而对第二份份额的一个正长度前缀的价值为 0，那么在该前缀的不同位置切割就会得到不同的后缀；对这两个参与者而言，每个后缀的价值都恰好等于整份第一份份额的价值。

命题 1（最长后缀）。假设输入为正，并令 S 为一个经认证的分配。对于每个标签，无论由谁持有，S 都具有在将相同份额分配给相同参与者的任何无嫉妒后缀分配中最长的后缀。因此，所有经认证的分配都具有相同的后缀，但持有者可能不同。

证明。令 S' 为一个无嫉妒后缀分配，并令 H 为其中后缀比 S' 中更长的标签集合 S。若 H 非空，则其中所有标签在 S 中都被修剪，因此引理6 给出多于 $|H|$ 个最喜欢的标签属于 H 的参与者。对于任意这样的参与者 i，取一个最喜欢的 $k \in H$。对于每个 $l \notin H$，严格增长给出

$$v_i(S'_k) > v_i(S_k) \geq v_i(S_l) \geq v_i(S'_l).$$

S' 的无嫉妒性因此要求这些参与者中的每一个都持有 H 中的一个标签，但此类标签只有 $|H|$ 个。因此，在 S' 中没有更长的后缀。将这一结论分别应用于两个经认证的分配，可得它们在每个标签上都相等。□

两个代理人。将运行示例限制为代理人 2 和 3，以及份额 P_1、P_3。两者对 P_3 的价值最高，因此一人拿走 P_1 完整份额，另一人拿走 P_3 的一个后缀，该后缀对前者的价值恰好与 P_1 相同：如果代理人 2 持有 P_1，就是最后四分之一；如果代理人 3 持有，则是最后五分之一。只有四分之一可行：如果代理人 2 持有五分之一，她会嫉妒代理人 3，因为这五分之一对她的价值是 $4/5 < 1$。四分之一也是较长的后缀，正如命题 1 所预测的那样。而在 P_1 上，P_2 两位代理人的价值相同，因此 P_2 的最后一半对两人的价值都恰好与 P_1 相同，任一代理人都可以持有任一份额：得到相同后缀的两种经认证的分配。

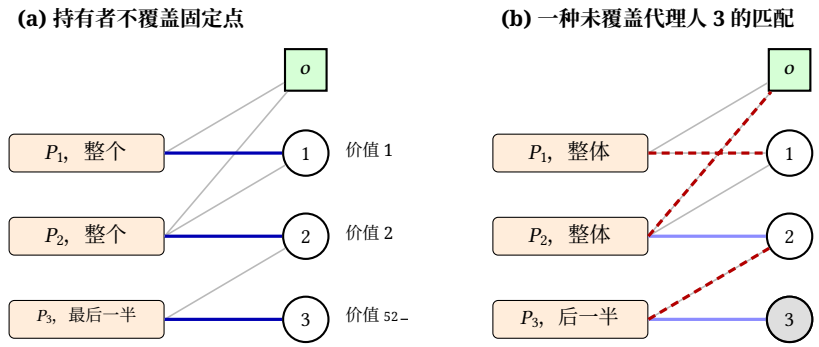

图 3. 示例（图 2）中经认证的分配的平局图。每份都与那些将其视为最喜欢的份额的参与者相连；如果该份完整，还与固定点相连 o。（a）持有者（蓝色）构成一个完美匹配，且固定点未被匹配；标注的数值是参与者对其最喜欢份额的估值。（b）一个未匹配参与者 3 的匹配（红色虚线）。它与持有者的边构成交替路径 3， P_3，2， P_2， o：参与者 3 的 P_3 的一半与参与者 2 的估值相同，而参与者 2 的份额 P_2 是完整的。反向读取这条路径，便是参与者 3 的修剪的证书。对于每个参与者和固定点，都存在这样的匹配，当且仅当该分配经认证。

5.3 认证作为匹配条件

引理 6 是霍尔婚姻定理中出现的那类计数条件；一旦明确标记完整份额，它就成为匹配条件。设 S 是一个无嫉妒后缀分配，并构造其 平局图。这个二分图的一侧为每个标签设置一个节点，另一侧则为每个代理人设置一个节点，并额外设置一个节点 o，即 固定点。如果 j 是代理人 i 最喜欢的标签之一，则将标签 j 与代理人 i 相连；如果 S_j 是完整份额，则将 j 与固定点相连。持有者构成标签与代理人之间的完美匹配，并使固定点未被覆盖。

现在统计该图中的邻居数。根据引理 6， S 经认证，当且仅当每个非空修剪后标签集合的邻居数都大于其成员数。包含完整标签的标签集合本来就满足这一性质，因为其邻居包括持有者和固定点。因此， S 经认证，当且仅当 每个非空标签集合的邻居数都大于其成员数。根据霍尔定理，这当且仅当对于参与者和固定点中的每个节点 c，这些标签都能沿平局图的边与其余 n 个节点匹配。事实上，删除任意一个节点后，严格的邻居不等式仍满足霍尔弱不等式。反过来，如果删除每个节点后都存在这样的匹配，选取一个固定非空标签集合的任一邻居，并在删除 c 后应用霍尔不等式 c，即可推出严格不等式。

这类匹配就是证书。将持有者的匹配与一个使代理人 i 未被覆盖的匹配叠加，并从 i开始在两者之间交替进行。代理人 i的标签与第二个代理人相连，后者对该标签的价值恰好与其自身后缀的价值相同；该代理人的标签又与第三个代理人相连，如此继续，直到到达一个与固定点相连的标签，也就是一个完整份额。反向读取这条交替路径，它就是一条从完整份额到 i的后缀的平局链。图 3 展示了运行示例的平局图。中位数算法会寻找参与者的价值，使得这类图能够容纳所有这些匹配。

5.4 从后缀到价值

中位数算法搜索的是参与者的价值，而不是后缀，因为价值决定后缀。令 $V_{ij}(t)$ 表示代理人 i 对份额 j 的后缀的价值，该后缀保留了份额总区间长度的 t，因此 $t = 0$ 是空后缀，而 $t = 1$ 是完整份额。在正输入上， V_{ij} 是连续且严格递增的。我们将其以斜率

为一的方式延拓，使其成为从 $[0,\infty)$ 到自身的连续严格递增双射。代理人 i 在份额 j 上、价值为 $u \geq 0$ 处的标记 是 $V_{ij}^{-1}(u)$。不超过一的标记表示对她而言价值为 u 的物理后缀的长度。大于一的标记意味着即使完整份额对她的价值也低于 u。正向查询 返回 $V_{ij}(t)$，而逆向查询 返回标记 $V_{ij}^{-1}(u)$。每次查询的成本至多为一次 Robertson–Webb 查询，即一次估值或切分：记录的分量价值可以定位有序片段的边界区间，而斜率为一的延拓只需要算术运算。

由价值确定长度。 一个价值向量 $x \in [0,\infty)^N$ 为每个代理人 i提出一个价值 x_i。如果代理人 i将获得 x_i，那么她会嫉妒任何持有份额 j 中比她的标记更长后缀的人。因此，份额 j最多只能保留其上的最短标记长度，也最多只能保留完整份额：

$$t_j(x) = \min\Big\{1,\ \min_{i \in N} V_{ij}^{-1}(x_i)\Big\}. \tag{4}$$

如果代理人 i在 x处对份额 j是紧的 ，则她的标记达到该最小值；如果 $t_j(x) = 1$，则份额 j在 x 处是完整的 。由于 $t_j(x)$不大于每个标记，

$$V_{ij}\big(t_j(x)\big) \leq x_i \quad \text{for every agent } i \text{ and piece } j, \text{ with equality exactly when } i \text{ is tight on } j. \tag{5}$$

如第 5.3节所示，现在将标签称为份额，位于 x 处的平局图 将每个份额与对其而言紧的参与者相连；若该份额完整，还会与固定点相连 o。在运行示例中，在 $x = (1,2,5/2)$ 处， P_3上的标记为 1、1/2 和 1/2。因此， P_3 保留其最后一半，参与者 2 和 3 对其而言是紧的，而 P_1 和 P_2 则保持完整。

无嫉妒且完全可揭示的价值向量。分配是一个双射 M： $N \to N$ 从份额标签映射到代理人； $M(j)$ 是被分配到份额 j 的代理人。若某个分配将每个份额分给对其价值紧的代理人，则称价值向量 x 无嫉妒。将每个份额中长度为 $t_j(x)$ 的后缀分给该代理人，便得到一个无嫉妒后缀分配，其中每位参与者 i 都恰好获得 x_i，根据式（5）可知。反过来，设 S 是一个无嫉妒后缀分配，且 x_i 是代理人 i对自己后缀的价值。每位持有者在自己份额上的标记长度等于该份额后缀的长度；无嫉妒性则意味着其他每个标记在该份额上的长度都至少与之相同。因此，每个份额 j在 S中的长度都是 $t_j(x)$，并且 x 通过 S的持有者而无嫉妒。

若对于参与者和固定点中的每个节点 c， x处的平局图都能将所有份额匹配到其他 n 个节点，则称其为完全可揭示。（在匹配术语中，未被匹配覆盖的顶点称为暴露，因此得名。）让固定点未被覆盖，就能沿着平局图边构成一个分配，因此完全可揭示向量是无嫉妒的。在完全可揭示的 x中，任何将每个份额分给对其价值紧的代理人的分配，都是支持分配。

完全可揭示意味着经认证。 设 x通过分配 M实现无嫉妒，并设 S 为由此产生的后缀分配。根据（5），代理人 i在 S 中的最喜欢的标签恰好是她所处于紧状态的份额，并且 S_j 当且仅当份额 j 在 x中是完整份额时才是完整的。因此， S 在第 5.3 节中的平局图就是 x处的平局图，并且 S 当且仅当 x完全可揭示时才是经认证的。于是，完全可揭示向量就是经认证分配的价值向量，而其支撑分配说明每个份额由谁持有。揭示固定点即可得到各持有者，揭示某个代理人即可得到从一个完整份额到其后缀的平局链。

运行示例。 在经认证的修剪的价值 $x^* = (1,2,5/2)$（图 2）中，标记$V_{ij}^{-1}(x_i^*)$ 如下，采用超出 1 的斜率为一的延拓：

	代理人 1 ($x_1^* = 1$)	代理人 2 ($x_2^* = 2$)	代理人 3 ($x_3^* = 5/2$)	长度 $t_j(x^*)$
P_1	**1**	2	5/2	1，整个
P_2	**1**	**1**	3/2	1，整体
P_3	1	**1/2**	**1/2**	1/2

粗体标记达到最小值，因此它们是紧边。再加上从完整份额 P_1 和 P_2 到固定点的边，它们构成图 3的平局图。沿紧边的唯一分配是 $P_j \mapsto j$，因此它是唯一支撑分配。让代理人 3 不被覆盖会迫使P_3 分配给代理人 2；当 P_2 位于固定点上时，这就是图 3（b）中的平局链。

下一个命题表明，完全可揭示向量存在且唯一，并且同时是对每个代理人而言最优的无嫉妒价值向量。

命题 2（认证价值）。假设输入为正。存在唯一的完全可揭示价值向量 x^*，它是逐坐标最大的无嫉妒价值向量。在每个支持性分配中，每个份额都有一条通向完整份额的平局路径；沿这条路径，下一个份额的持有者对前一个份额的价值都达到紧界。

证明。存在性。固定 $\varepsilon > 0$。考虑价值向量 x 以及分配 M，使得对每个份额 j，

$$V^{-1}_{M(j)j}\big(x_{M(j)}\big) \;\le\; \min\Big\{1,\; \varepsilon + \min_{i \in N} V^{-1}_{ij}(x_i)\Big\}.$$

因此，每个份额的分配标记不超过完整份额的长度，也不超过其上最短标记的长度加上 ε。在这些组合中，使价值总和最大，并在所有最大者中使分配标记总和最小。零向量是可行的，分配给代理人 i 的份额将其价值限制在 $\max_j V_{ij}(1)$ 以内，而可行集是有限个紧集的并集，因此最优解存在。

如果分配给 k 的代理人在 j 上的标记严格短于分配给 j 的代理人在 j 上的标记，则从份额 j 向份额 k 画一条箭头。将有向环上的每个份额分配给其后继份额的代理人，会保持可行性，并降低分配标记之和。因此，该图无环，且每个份额都有一条通往汇的路径。设汇 j 已经分配给一名在其上具有最短标记的代理人，该标记长度为 d。如果 $d < 1$，则根据连续性，可以提高该代理人的价值，使其在 j 上的标记增幅小于 $\min\{\varepsilon,\; 1 - d\}$。$j$ 上的最短标记仍至少为 d，因此界一和 ε 配额均得到满足。其他每个份额都保留其分配标记，而其最短标记只会增加。这将提高价值之和，与极大性矛盾。因此，每个汇都有 $d = 1$。

令 ε 沿着一个具有固定分配、固定箭头图且价值收敛的子序列趋于零。在极限情况下，每个份额的分配标记都是其上的最短标记，长度至多为一，因此其代理人在该份额上是紧的。从 j 到 k 的每条箭头都变成平局，因为其严格改进至多为 ε：分配给 k 的代理人在 j 上也同样是紧的。每个汇都是完整的。若要使给定代理人 i 未被覆盖，就从分配给 i 的份额出发，沿其路径走到一个汇，将路径上的每个份额分配给其后继份额的代理人，并将该汇连接到固定点。该分配本身使固定点未被覆盖。因此，该极限是完全可暴露的。

最大性与唯一性。设 x^* 为完全可暴露，并令 $t^*_j = t_j(x^*)$。这些长度构成一个经认证的分配。若 x 是任意一个无嫉妒价值向量，且 $s_j = t_j(x)$，命题 1 给出 $s_j \le t^*_j$对每个份额 j都成立。每位参与者在两种分配中都持有一个最喜欢的后缀，因此

$$x_i = \max_j V_{ij}(s_j) \le \max_j V_{ij}(t^*_j) = x^*_i \qquad (i \in N).$$

因此 x^* 是最大的。由于任何完全可暴露的向量本身都是无嫉妒的，对两个这样的向量分别双向应用这一不等式，即可证明其唯一性。

匹配性质。我们记录中位数算法所用的两条匹配性质。记$N_x(J)$为在平局图中与 x处的 J至少一个份额相邻的参与者和固定点。在完全可暴露的 x处，

$$|N_x(J)| \ge |J| + 1 \qquad (\varnothing \ne J). \tag{6}$$

事实上，我们可以让 J 的任意一个邻居不被覆盖，同时仍匹配所有 J。同样，一个覆盖所有份额的匹配，可以覆盖参与者和固定点的任意真子集，只需让该

子集中有一个节点不被覆盖即可。最后，将任意支持性分配与一个未覆盖代理人 i 的匹配叠加起来。从 i 到固定点的交替路径，便给出了分配给 i 的份额具有所述平局。□

要计算经认证的修剪，现在只需找到 x^* 和一个支持性分配。公式（4）便给出后缀长度。附录C 将论证推广到用于家务和分配市场的一般曲线。

5.5 通过中位数计算经认证的价值

现在我们计算 x^*。我们既不知道 x^*，也不知道其中的平局情况。我们知道的是有限个 $n!$ 将份额分配给参与者的分配，而命题2 保证其中一个是支持性分配。

如果已知一个支持性分配。令 M 为一个分配。先为每个代理人 i设置估计值 $\hat{x}_i = \infty$，其中无限大的估计值表示允许获得完整份额。每一轮中，根据当前估计值切分每个份额，使其长度符合相应估计值；然后，将该份额所分配代理人的估计值下调为其对剩余部分的价值：

$$\hat{x}_{M(j)} \leftarrow \min\left\{\hat{x}_{M(j)},\, V_{M(j)j}\left(t_j(\hat{x})\right)\right\} \qquad \text{for all pieces } j \text{ simultaneously.} \tag{7}$$

也就是说，将每个份额切分为不超过完整份额的最长后缀，使得没有代理人认为它的价值高于其当前估计值。如果 M 是支持性分配，那么在 x^*处，每个份额所分配的代理人对该份额都处于紧状态；通过归纳法可知，估计值永远不会低于 x^*。另一方面， x^* 的平局会拉低估计值。令 L 由固定点以及估计值已不高于 x^*的代理人组成。由于 x^* 是完全可暴露的，因此，只要 x^* 未覆盖 L 中的某个代理人，就存在一组沿着 x^* 处平局图边匹配所有份额的匹配；而它所用的份额会在每一轮中将至少一名其他代理人的估计值降至 x^* 或更低（引理8 的证明给出了细节）。因此，经过 n 轮后，估计值将等于 x^*，这与 Bellman–Ford 算法的距离估计值在经过与顶点数成线性关系的轮数后稳定下来颇为相似。

向下拉动并不取决于 M 是否为支撑分配：对于每个分配，（7）都会在 n 轮次内将所有估计值降至 x^* 或以下。只有支撑分配能保证维持在 x^*或以上。如果我们负担得起为这 n 个分配分别进行查询，那么经过 n 轮后，我们就可以将所有估计值的逐坐标最大值读作 x^*。但我们做不到，因为不同的分配会查询不同的点。

通过舍入共享查询。我们维护一个候选分配池 A，初始包含全部 n个候选分配；对每个 $M \in$ A，都有一个估计值 $\hat{x}^M$，并同时对它们全部运行（7）。为了让候选方案共享答案，我们将每个查询点向上舍入到一个公共网格。对于一列按大小排序（保留重复项）的 a 个数，分辨率为 γ 的网格由 0、 ∞ 以及秩为 $\lceil ha/\gamma \rceil$ 的条目组成，其中 $h = 1, \ldots\ldots, \gamma$。将每个条目舍入到不小于它的最小网格值。等于网格点的条目仍保持在该点，即使它出现多次（图 4）。每对相邻网格点之间的开区间隙至多包含列表中 a/γ 个条目，因为相邻选定秩之间至多跳过 $\lceil a/\gamma \rceil - 1$个条目。对于网格 G，记 $\lceil u \rceil_{\mathcal{G}}$ 为不小于 u的最小网格点。每条曲线以及每个标记在 0 和 ∞ 处的值都是已知的。代理人 i 的网格列出她被要求标记每个份额时对应的值，而份额 j 的网格列出每个代理人评估其后缀时对应的长度。每个候选方案读取其自身的值和长度向上舍入后的答案，因此查询数量取决于 n 和 γ，而与池的大小无关。

向上舍入会使上界估计变得较弱，但绝不会出错，因此支持候选项仍然保持在 x^*或其上方。代价是，逐坐标最大值不再可靠：估计值被舍入到真实价值之上的候选方案可能会继续位于其上方。然而，中位数仍然可靠，因为在每个价值或长度网格上，只有包含真实价值的开区间隙中的条目

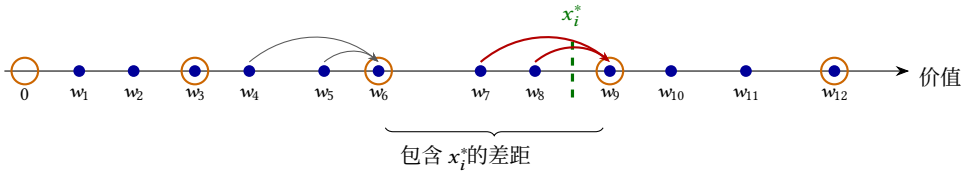

图 4. 分辨率为 $\gamma = 4$ 的网格，覆盖代理人 i 的价值估计值 $a = 12$ $w_1 \le \cdots \le w_{12}$。圆圈标出有限网格点，即 0 以及秩为 3、6、9、12 的条目。网格还包含 ∞，但图中未显示。网格点之间的条目向上取整到下一个网格点。只有当不高于真实价值 x_i^* 的条目位于包含 x_i^*的开区间隙中时，才会被移到其上方（红色箭头），因此跨越的条目至多为 a/γ。长度为的网格也以相同方式运作。

算法 2： 用于经认证修剪的中位数算法

输入： n 位参与者和 n 份额，以及对扩展后缀曲线 V_{ij} 的正向与逆向查询。

输出： 完全可揭示价值向量 x^* 和一个支持性分配。

将 A 设置为 $n!$；将份额分配给参与者，并且 $\gamma \leftarrow 8(2n+1)$

当 *true* **时执行** ▷ 一个阶段

  对于每个 $M \in$ A 集合$\hat{}x_i^M \leftarrow \infty$ 对每个参与者 i

  对于 $s = 1、\ldots\ldots、4n$ **执行** ▷ 池在一个阶段内保持不变

    对于每个代理人 i，构造由 $(\hat{}x_i^M)_{M\in\mathcal{A}}$ 组成的网格 G_i，并查询其在网格点上的标记 V_{ij}^{-1}，以获得每个份额 j

    对于每个 $M \in$A 和份额 j，令 $\hat{}t_j^M \leftarrow \min\{1, \min_i V_{ij}^{-1}(\lceil \hat{}x_i^M \rceil_{\mathcal{G}_i})\}$

    对于每个份额 j，构造由 $(\hat{}t_j^M)_{M\in\mathcal{A}}$ 组成的网格 G'_j，并查询每个代理人 i 在网格点上的 V_{ij}

    对于每个 $M \in$A 和份额 j，同时令 $\hat{}x_M^M(j) \leftarrow \min\{\hat{}x_M^M(j)\ V_{M(j)j}(\lceil \hat{}t_j^M \rceil_{\mathrm{G}'j})\}$

  对于每个代理人 i，令 y_i 为排序列表 $(\hat{}x_i^M)_{M\in\mathcal{A}}$ 的下中位数，即第 $\lceil |\mathrm{A}|/2 \rceil$ 项

  查询标记 $V_{ij}^{-1}(y_i)$ 对于所有 i，j并应用引理9的匹配检验

  如果检验确认 y **则返回** y 及其分配

  令 k 为检验指定的严格较短代理人，并令 A $\leftarrow \{M \in \mathrm{A}\colon \hat{}x_k^M > y_k\}$

或长度可能舍入到其上方（图4）。如果代理人 k 在 y 处严格较短，我们就称其 $y_k < x_k^*$。算法2分阶段运行。每个阶段在一个固定候选池上运行 $4n$ 个共享轮次，取每个代理人的候选方案对其价值的估计值的下中位数 y_i，并通过匹配计算测试 y。如果测试失败，它会指明一个代理人；通过比较候选方案对其价值的估计值，至少舍弃候选池的一半（图5）。

每一轮的两张表格由整个池共享。第一轮中所有估计值都变为有限值，因为每个长度至多为一，并且每个长度网格都包含其最大项。下一个引理解释了为什么在我们知道哪些候选方案正确之前就可以使用中位数。常数 $4n$ 和 $\gamma = 8(2n+1)$ 的选取使得池中停滞的部分至多为 $1/4 + 1/8$，并保持在一半以下。

引理 8（中位数是下界）。在一个阶段内，对于池中的每个支持M，$\hat{}x^M \ge x^*$。一个阶段经过 $4n$ 轮次后，池中至少有八分之五满足$\hat{}x^M \le x^*$，且对所有参与者同时成立。特别地 $y \le x^*$。

证明。用 $t_j^* = t_j(x^*)$ 表示 j 在 x^*处的份额长度。

支持候选项保持在上方。设 M 为支持候选项。若$\hat{}x^M \ge x^*$，则向上舍入会对每个份额 j给出$\hat{}t_j^M \ge t_j^*$。由于代理人 $M(j)$在 x^*时对 j是紧的，我们有$V_{M(j)\,j}(t_j^*) = x^*_{M(j)}$，因此

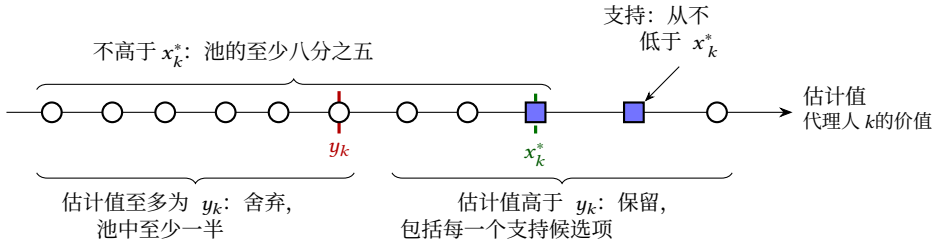

图 5. 算法 2的一次失败阶段结束时的情形，此时代理人 k 由匹配检验指定。每个点表示一个候选分配对其价值的估计值；方阵表示支持候选项。支持候选项的估计值绝不会低于真实价值 x_k^*，且池中至少有八分之五的候选项最终不高于该值（引理 8），因此下中位数 y_k 至多为 x_k^*。当检验报告 $y_k < x_k^*$时，没有估计值至多为 y_k的候选项是支持候选项，而这些候选项至少占池中的一半。

更新以及与旧估计值取最小值会保持该不等式。从初始化开始进行归纳法即可证明第一个结论。

大多数候选方案都低于该值。为固定候选池中的每个候选方案赋予相同权重；下文的概率和期望值仅表示池中的比例和平均值，且所有选择都是确定性的。对于轮次 $s = 1, \dots, 4n$，令 $L_{s-1}(M)$ 由固定点以及在更新前满足 $\hat{x}_i^M \le x_i^*$ 的参与者 i 组成，因此 $L_0(M) = \{o\}$，并令 $L_{4n}(M)$ 表示最后一轮结束后的这个集合。这些集合只会增大，因为估计值不会增加。在某一轮中，令 $e^{\text{agent}}(M)$表示满足 $\hat{x}_i^M \le x_i^* < \lceil \hat{x}_i^M \rceil_{\mathcal{G}_i}$ 的参与者 i 的数量，其估计值因舍入而高于真实价值；令 $e^{\text{piece}}(M)$ 表示满足 $\hat{t}_j^M \le t_j^* < \lceil \hat{t}_j^M \rceil_{\mathcal{G}'_j}$ 的份额 j 的数量。网格点阈值不可能被越过；否则，只有位于包含该阈值的单个开网格间隙中的条目可能越过它（图 4）。对每轮中参与者和份额的比例求和，可得

$$\mathbb{E}_M e^{\text{agent}}(M) \le n/\gamma, \qquad \mathbb{E}_M e^{\text{piece}}(M) \le n/\gamma.$$

固定 M 和一个 $L = L_{s-1}(M)$ 漏掉某个代理人的轮次，并从 L 中移除其交叉代理人。沿着 x^* 处平局图边对所有份额进行匹配可覆盖 L，因此至少有 $|L| - e^{\text{agent}}(M)$ 个不同的份额在 x^* 处连接到剩余集合中的某个节点。每个份额都有 $\hat{t}_j^M \le t_j^*$，并且其中除至多 $e^{\text{piece}}(M)$ 个之外，所有份额的取整长度仍至多为 t_j^*。这些份额所分配的代理人 $M(j)$ 在 $L_s(M)$ 中结束该轮，因为根据 (5)，$V_{M(j)\ j}(t_j^*) \le x^*_{M(j)}$。它们对应的是不同的代理人，而固定点是额外的一员。因此有如下界；当 L 已经包含每个代理人时，该结论显然成立：

$$|L_s(M)| - |L_{s-1}(M)| \ge \mathbf{1}_{\{L_{s-1}(M) \ne N \cup \{o\}\}} - e^{\text{agent}}(M) - e^{\text{piece}}(M).$$

令 η_s 表示池中具有 $L_s(M) \ne N \cup \{o\}$ 的比例；它关于 s 非递增。对池中元素取最后一个不等式的平均值，并对 $4n$ 个轮次求和，得到

$$4n\,\eta_{4n} \le \sum_{s=0}^{4n-1} \eta_s \le \mathbb{E}_M\big[|L_{4n}(M)| - |L_0(M)|\big] + \frac{4n \cdot 2n}{\gamma} \le n + \frac{8n^2}{\gamma}.$$

有了 $\gamma = 8(2n+1)$，这给出 $\eta_{4n} \le 1/4 + 2n/\gamma < 1/4 + 1/8 = 3/8$。因此，对于每个代理人，池中至少有八分之五的估计值不超过 x^*。因此，对每个代理人而言，超过一半的条目不超过她的真实价值，所以 $y \le x^*$。□

匹配检验。中位数 y 是一个试验向量，满足 $y \le x^*$。匹配检验要么在 y 找到一个支持性分配，要么识别出一个价值严格过低的代理人。检验所执行的搜索取决于：删除固定点后， y处的平局图是否具有完美匹配。

引理 9（匹配检验）。令 $y \le x^*$。仅根据标记表 $V_{ij}^{-1}(y_i)$，可以证明 $y = x^*$ 并得到一个支持性分配，或者找出一个满足 $y_k < x_k^*$ 的代理人 k。

该检验仅使用 y 处的表格。在 y处构造平局图，然后删除固定点，并求份额与参与者之间的最大匹配。如果有份额未匹配，就从该份额出发，沿平局图边到达参与者，再沿匹配边返回份额。返回任意一个到达的参与者。至少有一个参与者会被到达，且每个被到达的参与者都严格短缺。如果匹配是完美匹配，则恢复固定点（它现在是空闲的），并从该点出发，沿平局图边到达份额，再沿匹配边返回参与者。到达的参与者恰好是那些 i 满足 $y_i = x_i^*$的参与者。如果到达了每个参与者，就返回该匹配；否则返回任意一个未到达的参与者。所有选择均按固定顺序处理。附录 A 使用（6）证明了这些断言。

即使匹配不完备，价值已经精确的代理人也可能被排除在外。例如，假设 $V_{ij}(t) = t$对两位代理人的两份额都成立。那么 $x^* = (1, 1)$。在试验向量$y = (1, 1/2)$处，两份额都仅对代理人 2 是紧的，尽管代理人 1 的价值已经精确。在这两种失败情形中，测试都会指出一位代理人 k满足 $y_k < x_k^*$。筛选器会丢弃每个满足 $\hat{x}_k^M \le y_k$ 的候选方案 M，而每个支撑候选方案都会保留下来，因为其估计值至少为 x_k^*。

定理 2（中位数算法的查询成本）。对于正输入，算法 *2* 以x^*次确定性正向与逆向查询计算出 $O(n^5 \log n)$，并给出一个支撑性分配。

证明。如果某个阶段在代理人 k处失败，根据引理 8 和引理 9，所有支撑候选方案都会通过筛选器，因为 $\hat{x}_k^M \ge x_k^* > y_k$。根据下中位数的定义，估计值严格高于 y_k 的候选方案至多有 $\lfloor |A|/2 \rfloor$ 个，因此候选池至少缩小一半。初始时，候选池中包含一个支撑性分配（由命题 2 可知），且支撑分配不会被丢弃，因此至多经过 $1 + \lfloor \log_2(n!) \rfloor$ 个阶段，测试就会成功。每一轮都会在两个网格上各查询 $O(n^2\gamma) = O(n^3)$ 个点，因此， $4n$轮次和最后的 $O(n^2)$ 次查询在每个阶段的查询成本为 $O(n^4)$ 次查询。乘以阶段数即可得到该界。对列表排序、更新每个候选方案并计算匹配，总共需要 $n!\ n^{O(1)}$ 次精确算术运算和比较。□

两件计算。 取运行示例中的参与者 2 和 3，以及份额 P_1、 P_3，如第 5.2 节的双代理人示例所示。此处 x^* 赋予参与者 2 的价值为 1 ，赋予参与者 3 的价值为 5/4。共有两个候选方案。候选方案 M_1 将 P_1 分配给参与者 2，并将 P_3 分配给参与者 3；而 M_2 则反向分配。由于只有两个候选方案，每个网格都包含所有条目，因此不会进行舍入。该表列出了第一阶段每轮结束后每个候选方案对参与者 2 和 3 的估计值。

轮次	1	2	3	4	···	8
M_1: $P_1 \mapsto 2, P_3 \mapsto 3$	(1、 5)	$(1, \frac{5}{4})$	$(1, \frac{5}{4})$	$(1, \frac{5}{4})$	···	$(1, \frac{5}{4})$
M_2: $P_1 \mapsto 3, P_3 \mapsto 2$	(4, 1)	$(\frac{4}{5}, 1)$	$(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$	$(\frac{16}{25}, \frac{4}{5})$	···	$(\frac{256}{625}, \frac{64}{125})$

在第一轮中，所有估计值都是无穷大，因此两份额都保持完整，每个候选方案对某个代理人的估计值，就是该代理人被分配的完整份额的价值。在第二轮中，在 M_1下，份额P_3 发现代理人 2 在其最后四分之一份额上已经达到她的估计值 1，因此代理人 3 的估计值降为该四分之一份额对她而言的价值 5/4，而 M_1 随后在 x^*处保持稳定。在 M_2下，份额 P_3 发现代理人 3 在其最后五分之一份额上达到她的估计值 1，因此代理人 2 的估计值降至 4/5。在下一轮中，份额 P_1将代理人 3 的估计值拉低至 4/5，如此继续。候选方案 M_2 完全不支持任何正价值：要使代理人 2 在 P_3 上达到紧状态，她需要 $x_2 \le 4x_3/5$；而要使代理人 3 在 P_1 上达到紧状态，她需要$x_3 \le x_2$。相反，其估计值每两轮缩小为原来的 4/5。经过 $4n = 8$ 轮后，两者

候选方案均不超过 x^*，正如引理 8 所预测的那样；仅经过 $n = 2$ 轮次后，每个代理人的两个价值估计值中较大的那个，等于她在 x^*中的价值。

两个条目的下中位数是较小的那个，因此 $y = (256/625,\ 64/125)$。在 y 处，代理人 2 是唯一在 P_1 上紧的代理人，而两位代理人都在 P_3 上紧，因为她们在同一个后缀上达到各自的价值。份额与代理人之间的匹配是完美匹配，但没有完整份额，因此从自由销钉开始的搜索无法到达任何一位代理人：两者的价值都严格偏低。测试按固定顺序选中第一位代理人，即代理人 2。候选方案 M_1 的估计值为 $1 > y_2$，因此得以保留，而 M_2 被舍弃；若选中代理人 3，则 M_2 也会被舍弃。在第二阶段，池为 $\{M_1\}$，且 $y = x^*$。现在 P_1 是完整份额，代理人 2 在其上紧；两位代理人也都在 P_3 上紧，并在该份额的最后四分之一处达到各自的价值。从固定点开始的搜索到达 P_1，再通过匹配到达代理人 2，接着到达 P_3，然后到达代理人 3，因此测试认证了 y。支持性分配将 P_1 的完整部分分给代理人 2，并将 P_3 的最后四分之一分给代理人 3。代理人 2 对那四分之一的估值与对她的完整份额一样高，并见证了修剪。

引理的证明 7. 对 n 份额应用算法 2 。定理 5.4统计了它的所有正向与逆向查询，每次查询的成本至多相当于一次 Robertson–Webb 查询（第 5.4节）。根据（4）恢复物理后缀。对每个代理人求出每条保留边界的估值；这些 $O(n^2)$ 求值既记录了边界，以供后续调用使用，也确定了每个代理人对每个返回后缀的价值。随后通过图搜索，按照持有者与完整份额之间的距离为持有者排序，如引理 6所述。对于一般测度，附录 B 在虚拟正曲线上执行相同步骤，每次曲线查询至多对应一次物理查询。其投影保留了分配、所有弱比较、所有见证者平局以及每个完整份额。 □

5.6 切割者优势

Core 使用 Trim 替代 SubCore，即 Aziz 和 Mackenzie [2016]的修剪程序。在Core(r, N, C)中，代理人 r将 C切分为 n份对她而言等值的份额。我们在这些份额上调用 Trim，并返回其分配 Y 按代理人编索引，使得 Y_i是代理人 i的后缀，同时返回其剩余部分 U。

引理 1 的证明。该分配 Y根据引理 7 是无嫉妒的。切割者进行了 $n-1$ 次切割，为每位代理人记录一次切割最多需要 $n+1$ 次查询（第 3 节），因此 Core 除调用 $O(n^2)$ 外，还使用 Trim。

令 $\tau = v_r(C)/n$。有一份份额保持完整，对切割者的价值为 τ，而每个后缀对她的价值至多为 τ。根据无嫉妒性，$v_r(Y_r) = \tau$，这恰好是她对 C 价值的 $1/n$，即使在$\tau = 0$时也是如此。从 $n\tau$ 中减去所有已分配后缀的价值，得到

$$\sum_{h \neq r} \big(v_r(Y_r) - v_r(Y_h)\big) = n\tau - \sum_{h} v_r(Y_h) = v_r(U).$$

这 $n-1$ 项均为非负数，因此至少有一项不小于它们的平均值 $v_r(U)/(n-1)$。如果$v_r(U) > 0$，该项为正，其对应的代理人 $h \neq r$持有一份修剪后的份额。□

在运行示例中，$\tau = 1$，各项分别为0 （代理人 2）和 $1/2$ （代理人 3），因此 $h = 3$(第 4.5 节）。

分别以每位代理人为切割者调用Core 一次，就已经能得到一个公平的部分分配 [Aziz 和 Mackenzie， 2016]。

推论1（无嫉妒且比例公平）。从整块蛋糕 C开始，在连续剩余部分上调用 *Core* n *times*，每位代理人恰好作为切割者一次。返回的分配的并集是无嫉妒的，并且使每位代理人获得其对 C的价值的至少$1/n$。这需要 $O(n^6 \log n)$次查询。

证明。无嫉妒分配的并集仍然是无嫉妒的。固定一位代理人 i，令 A_k 为第 k次调用所分配的蛋糕，令 c 为 i 进行切分的那次调用，并令 R 为最后一次调用后的剩余部分。在每次调用 $k \neq c$ 中，无嫉妒性保证 i至少获得 $v_i(A_k)/n$。在调用 c中，引理1保证她恰好获得她所切分的剩余部分的$1/n$，其价值为$\sum_{k\geq c} v_i(A_k) + v_i(R)$。从第一个界中去掉 c之后的调用，她至少获得

$$\frac{1}{n}\Big(\sum_{k<c} v_i(A_k) + \sum_{k\geq c} v_i(A_k) + v_i(R)\Big) = \frac{v_i(C)}{n}.$$

每次调用使用 $O(n^5 \log n)$ 次查询，依据引理 1。 □

6 寻找新的优势

本节证明引理2（步骤 3）。始终假设 (X, R) 是无嫉妒的，$(Y, U) = \text{Core}(r, N, R)$，且 $(X \oplus Y, U)$ 没有被支配群体，因此其非支配图 Γ 是强连通的（第4.2节）。我们改编 Psomas 的重新分配引理 [2026, 引理 5] 以及 GoLeft协议 [Aziz 和 Mackenzie，2020年，第 3 节6]中的环交换。

6.1 需要什么，以及为什么

进展需要一种此前不存在的支配关系。 Core 使切割者相对于修剪后的份额的持有者具有优势 h（引理 1），但她可能已经支配了 h，这样便一无所获。 Γ 的弧显示了支配关系缺失的位置。一条弧 $a \to b$ 意味着 a 不支配 b在 $(X \oplus Y, U)$ 中，因此在 (X, R) 中也不支配，因为加入无嫉妒分配 $\varnothing$会保持支配关系。因此，我们希望存在一条弧 $a \to b$ 沿着该弧 a 具有优势。

这一优势必须有多大？它不必在绝对意义上很大，只需相对于我们为获得它而产生的嫉妒足够大。步骤 4 将剩余部分缩小为该嫉妒的一个较小倍数，并使 a的优势至多再改变一个较小倍数（引理 3）。一个为嫉妒的 $K = 4n^2$ 倍的优势在这两步之后仍然存在（第 4.4节）。正是这一相对要求使该步骤成为可能：如果 Γ 的任何弧都不具有较大优势，那么沿弧移动物品束的代价就很小。

以剩余部分为单位进行度量。如果某个代理人对 U 的价值为零，她就会支配其他所有人，而其他人将构成一个被支配群体。因此，对于每个 i，都有 $v_i(U) > 0$，且归一化间隔

$$g_{ij} = \frac{v_i(Y_i) - v_i(Y_j)}{v_i(U)}$$

是定义良好的；由于 $\varnothing$具有无嫉妒性，它是非负的，并且当 $i = j$时为零。它表示代理人 i持有 Y_i而非 Y_j所获得的优势，以她对 U的价值为分母表示。只有新后缀 $\varnothing$会移动；每个旧分配束 X_i 都留在标签 i 上。我们寻找一条弧 $a \to b$、一个排列 π，使代理人i获得$Y_{\pi(i)}$，以及一个容差 α，使得

$$g_{i,\pi(i)} \leq \alpha \quad (i \in N), \qquad g_{a,\pi(b)} \geq K\alpha. \tag{8}$$

换言之，每位代理人 i从 Y_i移至 $Y_{\pi(i)}$ 时，最多放弃 $\alpha v_i(U)$。代理人 a认为她原来的后缀 Y_a 至少比现在位于标签 b上的后缀高出 $K\alpha v_a(U)$。

6.2 算法

重新分配 （算法 3）区分两种情况。

情况 *1*：利用现有优势。如果某条弧 $a \to b$ 已经有至少为 K^{-n} 的差距，就无需移动任何内容。将容差 α 设定为使差距至少为 $K\alpha$，并将其上限设为 K^{-2}，以确保修复适用。

算法 3： 重新分配(r, X, Y, U)

输入： 切割者 r、一个带有剩余部分 R 的无嫉妒 X，以及 $(Y, U) = \text{Core}(r, N, R)$，其中没有被支配的群体属于 $(X \oplus Y, U)$。

输出： Γ 的一条弧 $a \to b$、一个新后缀排列 π，以及一个容差 α。

$K \leftarrow 4n^2$，并且对所有 i, j，$g_{ij} \leftarrow \left(v_i(Y_i) - v_i(Y_j)\right)/v_i(U)$

$\Gamma \leftarrow (X \oplus Y,\ U)$ 的非支配图 ▷ 强连通

如果某条弧 $a \to b$ 的 Γ 具有 $g_{ab} \geq K^{-n}$ **那么** ▷ 情况 *1*：一个大间隙；没有任何移动

  返回 a、b、$\pi = \text{id}$，以及 $\alpha = \min\{K^{-2},\ g_{ab}/K\}$

▷ 情况 *2*：Γ 的每条弧的差距都小于 K^{-n}

选择 h，使其满足 $g_{rh} \geq 1/(n-1)$ ▷ 由引理 *1* 可知

在 Γ 中取一条简单路径 $r = u_0,\ u_1,\ \ldots\ldots,\ u_\ell = h$

$s \leftarrow$ 满足以下条件的最小指标：$g_{u_s h} \leq K^{-(s+1)}$；令 $a \leftarrow u_{s-1}$，$b \leftarrow u_s$，并令 $\alpha \leftarrow K^{-(s+1)}$

在 Γ 中取一条简单路径 $h = v_0,\ v_1,\ \ldots\ldots,\ v_{\ell'} = b$

令 $\pi(v_\nu) \leftarrow v_{\nu+1}$，令 $\nu < \ell', \pi(b) \leftarrow h$，并对其他每个代理人令 $\pi(i) \leftarrow i$ ▷ 旋转

返回 a，b, π, α

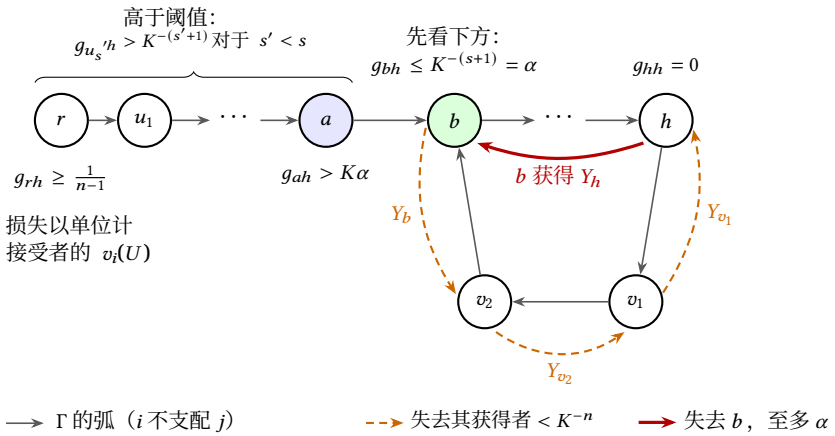

图 6。重新分配的情况 2。从切割者 r 走到 h 时，差距 $g_{u_s h}$ 起初高于其阈值 $K^{-(s+1)}$，最终降至 0，因此某条弧 $a \to b$ 跨越了这些阈值。沿环 $h \to \cdots \to b \to h$ 轮转新后缀，将 Y_h 交给 b。每位代理人的嫉妒都不超过 $\alpha\, v_i(U)$，而 a 现在认为自己的分配束至少比 b 的高出 $(K-1)\alpha\, v_a(U)$。旧捆绑 X_i 始终不会移动。

情况 2：沿低成本移动轮换。否则，Γ 的每条弧的差距都小于 K^{-n}。小差距意味着近乎无差异，因此沿弧向后传递新的后缀，对新的持有者造成的损失很小。然而，切割者对 h 的差距很大。沿着一条从 r 到 h 的路径前进，将每个代理人对 h 的差距与一个阈值进行比较，该阈值每经过一步就缩小为原来的 K 倍（图 6）。差距起初高于阈值，最终降至 $g_{hh} = 0$，因此某条弧 $a \to b$ 必然跨越这些阈值：a 认为 Y_h 的价值远低于她自己的后缀，而 b 只需付出很小的损失就愿意接受 Y_h。现在沿着一条从 h 返回 b 的路径前进。路径上的每位代理人都拿走其后继者的后缀，而 b 拿走 Y_h。这样便形成了一个环。每次移动对接受者造成的损失都很小，而 a 现在认为标签 b 上的后缀价值远低于她自己的后缀。

为什么阈值会以几何级数缩小。固定的阈值只能在高于该阈值的代理人与低于该阈值的代理人之间形成一条弧，而跨越该弧的下降幅度可能非常小。每一步缩小 K 倍的阈值会迫使单条弧上的下降幅度超过 K 倍：a 的差距超过 K

倍于 b 所允许的值。该路径至多包含 $n-1$ 条弧，因此在情况 2 中，容差不会低于 K^{-n}，总体上也不会低于 $K^{-(n+1)}$。

当切割者优势被浪费时。第一轮中，切割者相对于修剪后份额持有者的优势，等于她对该份额被移除前缀的价值。因此，当且仅当前缀占据了她对剩余部分的全部价值时，她才支配 h。在运行示例中，另一条弧为情况 1 提供了优势。

对于一个需要情况 2 的实例，令代理人 1 将蛋糕切分为三等分部分，她对这些部分的价值为 (1,1,1)，而代理人 2 和 3 对每一部分的价值均为 (1,1,4)，且每个三等分部分内部的价值均匀分布。经认证的分配将前两个三等分部分分给代理人 1 和 2，并将第三份额的最后四分之一分给代理人 3，因此切割者唯一的正差距是针对代理人 3 的，而她已经支配了代理人 3。代理人 2 和 3 对所有三个后缀都无差异，因此 Γ 的每条弧的差距都为零；交换她们的后缀后，切割者相对于先前未被支配的标签 2 获得了 3/4 的优势。

6.3 引理2证明

非支配图 Γ 在 $(X \oplus Y U)$ 中是强连通的。其弧在(X, R)中也未受支配，因为加入一个无嫉妒分配会保持支配关系。我们在上文证明了，对于每个 $v_i(U) > 0$，i，因此差距 g_{ij} 均有定义。我们先分别在两种情况下证明（8）。

情况 *1.* 如果某条弧 $a \to b$ 满足 $g_{ab} \geq K^{-n}$，则取恒等置换，并令 $\alpha = \min\{K^{-2}, g_{ab}/K\}$。于是 $g_{i,\pi(i)} = 0 \leq \alpha$ 且 $g_{a,\pi(b)} = g_{ab} \geq K\alpha$，因此（8）成立，且 $K^{-(n+1)} \leq \alpha \leq K^{-2}$。

情况 *2.* 现在每条弧的差距都小于 K^{-n}。根据引理 1，存在某个持有者 h 满足 $g_{rh} \geq 1/(n-1) > 1/K$。沿着 Γ 中的一条简单路径 $r = u_0, \ldots, u_\ell = h$ 前进。比较 $g_{u_s h}$ 与 $K^{-(s+1)}$：差距起始时高于其阈值，最终为零。在第一个满足 $g_{u_s h} \leq K^{-(s+1)}$ 的索引 s 处，令

$$a = u_{s-1}, \qquad b = u_s, \qquad \beta = K^{-(s+1)}.$$

那么，$a \to b$ 是一条弧，$g_{ah} > K\beta$、$g_{bh} \leq \beta$ 和 $K^{-n} \leq \beta \leq K^{-2}$，因为 $1 \leq s \leq \ell \leq n-$ 1.

取一条从 h 到 b 的简单返回路径。将 b 之前路径上的每位代理人的后缀分给其后继者，并将 b 后缀 Y_h 分给 $K^{-n} \leq \beta$，其他人保持不变。这是一个循环置换。沿返回路径的每次移动，使接受者损失的相对价值都小于 b，而闭合移动使 β 至多损失8。因此，式 $\alpha = \beta$ 成立。所有选择都使用已记录的价值。

将这些界转换为修复的输入。X 和 Y 的无嫉妒性给出：对于每个 j，$v_i(D_j) \leq v_i(X_i) + v_i(Y_i)$；而由式（8）可得 $v_i(D_i) \geq v_i(X_i) + v_i(Y_i) - \alpha v_i(U)$。这证明了式（2）中的第一个不等式。此外，由于根据 X 的无嫉妒性，$v_a(X_a) \geq v_a(X_b)$，

$$v_a(D_a) - v_a(D_b) \geq \big(g_{a,\pi(b)} - g_{a,\pi(a)}\big) v_a(U) \geq (K-1)\alpha v_a(U).$$

损失一个单位 使 a 她在轮换过程中获得价值略低的后缀 .

□

容差可以有多小。容差 α 可以小至 $K^{-(n+1)} = 2^{-\Theta(n \log n)}$。这就是引理3 对 $1/\alpha$ 的依赖仅为对数级的原因：若修复的成本随 $1/\alpha$ 线性增长，则单凭这一点，每次调用就需要 $2^{\Theta(n \log n)}$ 次查询。

7 修复嫉妒并缩小剩余部分

本节证明引理 3（步骤 4）。输入是一种分配 D，其中包含剩余部分 U 和少量嫉妒：$v_i(D_i) \geq v_i(D_j) - \alpha v_i(U)$，对所有 i，j 均成立，其中 $0 < \alpha \leq 1/(8n^2)$。标签以拥有输入分配束的参与者命名，因此标签 j 携带 D_j，参与者 j 是其 所有者；修复后，其 持有者 $\sigma(j)$ 可能是其他人。

7.1 修复必须实现的目标

修复必须同时完成四件事：

(i) 消除嫉妒，使输出达到无嫉妒；(ii) 保持每个输入捆束 D_j 完整无损，从而保留原有的支配关系（引理 4）；(iii) 分配 U 的几乎全部，使剩余部分低于代理人 a 的优势；(iv) 在每个代理人看来，给每个分配束增加几乎相同的价值，从而使优势本身得以保留。

修剪可以消除嫉妒，因此单独实现 (i) 很容易。但直接修剪分配束 D_j 会切入其中，违反 (ii)。给每个分配束增加 U 价值完全相等的份额，虽能实现 (iii) 和 (iv)，因为这会保留所有价值差距，却会让嫉妒依旧存在。 修复兼顾两者。它给每个分配束附加 U，每个代理人对其估值都几乎相同的一大份额，在 $n-1$ 前面放置一些小缓冲区，然后调用一次 修剪。修剪会移除一个前缀，因此在触及分配束之前，必然先消耗缓冲区；第 7.4 节将证明它绝不会越过缓冲区。在 Aziz 和 Mackenzie [2016], 的协议中，还要进一步调用 Core，使剩余部分不断缩小，直至某个优势变成支配关系 [Aziz 和 Mackenzie，2020年，第 3 节。2]。 修复只需调用一次便能实现所需的缩减。

例 *1*（为何需要缓冲区）。令 $n=3$ 和 $\alpha = 1/(8n^2) = 1/72$，这是允许的最大容差。输入捆束是三个区块 D_1，D_2，D_3，而剩余部分 U是一个对每位代理人都价值 72 的区块。每位代理人在每个区块中的价值均匀分布：

	D_1	D_2	D_3	U
代理人 1	**8**	5	4	72
代理人 2	4	**7**	4	72
代理人 3	4	5	**4**	72

因此 $\alpha v_i(U) = 1$。代理人 3 嫉妒 D_2，恰好相差1，其他人则都不嫉妒任何人。假设我们给每个分配束后面都放上 U的三分之一，并称对由此得到的三份额进行修剪。等分成三份不会改变任何比较，因此代理人 3 仍然嫉妒标签 2，差1。 修剪保留标签 1 和 3 的完整份额，并从标签 2 的前端修剪，直到持有标签 3 的代理人 3 认为它与自己的份额价值恰好相等。标签 2 的前端是 D_2，因此一份输入捆束的五分之一回到了剩余部分。我们将在第7.3节借助缓冲区再次讨论这个例子。

7.2 近似共同份额

该构造需要较大的份额和较小的缓冲区，并且对于每位代理人而言，它们的价值都接近指定目标。重要的是所有份额的总误差，而不是每一份的误差。

引理 10（近似共同份额）。令 $w_1, \ldots\ldots, w_m \geq 0$ 的总和为 1，令 $0 < \delta < 1$，并将 $v_i(U) = 1$归一化，使其对所有 i 都成立。我们可以找到互不相交的份额 $A_q \subseteq U$，使得对于每个 i、q，均有 $v_i(A_q) \leq w_q$，并留下剩余部分 U_0，使得对于每个 i，均有 $v_i(U_0) \leq \delta$。等价地，总亏缺为

$$\sum_{q=1}^{m} \big(w_q - v_i(A_q)\big) = v_i(U_0) \leq \delta.$$

该过程使用 $O(n^2 m \log(n^2 m/\delta))$ 次查询，并执行关于区间记录大小、 n、 m 以及 $\log(1/\delta)$的多项式数量的精确算术运算。

表 3. Repair(N， D， U， α) 的参数，其中每位代理人对 U 的价值均为 1 .

符号	价值	Role
B	$n(n-1)$	每个标签的缓冲区数量， $n-1$
p	2α	每个缓冲区的目标价值：大于嫉妒 α 加舍入损失 δ
t	$(1-Bp)/n$	每个大份额的目标价值；这些份额几乎承载了全部 U
δ	$\alpha/2$	引理 10 中允许的总舍入损失10

算法 4: 修复(N， D， U， α)

输入：一个部分分配 D，其剩余部分为 U，容差为 α，且满足引理 3。输出：一个无嫉妒分配W，其中每个 D_j均保持完整，持有者映射为 σ，剩余部分为 R'。1 对于本次调用，对每个价值测度进行缩放，使得 $v_i(U) = 12$ 设 $B \leftarrow n(n-1)$， $p \leftarrow 2\alpha$， $t \leftarrow (1-Bp)/n$，以及 $\delta \leftarrow \alpha/2$ 3 使用引理 10 构造目标为 t 的 n 个大份额 T_j，以及目标为p的 B 个缓冲区 $Q_{j,k}(j \in N,$ $1 \le k \le n-1)$，使总亏缺至多为 δ4 对每个标签 j，构造 $P'_j \leftarrow Q_{j,n-1} +\!\!+ \cdots +\!\!+ Q_{j,1} +\!\!+ (D_j +\!\!+ T_j)$ 5 $W \leftarrow$ 修剪$(N, (P'_j)_{j\in N})$，并令 $\sigma(j)$ 为标签 j 的持有者 6 返回 W, σ 和 $R' \leftarrow (U \cup \bigcup_j D_j) \setminus \bigcup_i W_i$

我们 请参阅第7.5节中的引理。下文将用到的一个推论是，对于任意一组 F 份额槽 ，

pro

$$\sum_{q\in F} w_q - \delta \le v_i\left(\bigcup_{q\in F} A_q\right) \le \sum_{q\in F} w_q. \tag{9}$$

因此，许多份额的并集所产生的总误差仍至多为 δ。

7.3 构造

修复（算法4）将每位参与者对 U的价值归一化为1，并将 U切分为 n^2 个近似相同的份额，目标值见表格3。在标签 j上，它放置 $n-1$ 个缓冲区，然后放置 D_j，再放置一个大份额 T_j。我们称 $D_j \cup T_j$标签的受保护部分为标签 j（图7）。由于每位参与者对每个缓冲区的估值都近乎相同，因此缓冲区分配给哪个标签并不重要。

如何消除嫉妒。修复本身并不消除嫉妒，而是安排各个份额，使一次修剪调用就能安全地消除嫉妒；修剪总会返回一个无嫉妒分配。修剪通过两种方式消除嫉妒。如果多个参与者都想要某个份额，可以从其前端修剪，直到其中一位对它的估值不高于对另一个后缀的估值；由于缓冲区排在前面，这样会消耗缓冲区材料。或者，心生嫉妒的参与者可以拿走自己所嫉妒的分配束，而该分配束的持有者则拿走另一份，这就是标签的持有者可能发生变化的原因。

示例 *1*，续。 这里 $p = 1/36$ 和 $t = 5/18$，因此每个缓冲区的价值为 2，每个大份额的价值为 20，对每位代理人而言都是如此。每位代理人的价值均匀分布在 U上，因此，长度合适的区块就是精确的共同份额。对于每位代理人，每个标签除了其输入捆束外，还包含 24；将 P'_j 记为标签 j上形成的份额：

	P'_1	P'_2	P'_3
代理人 1	**32**	29	28
代理人 2	28	**31**	28
代理人 3	28	29	**28**

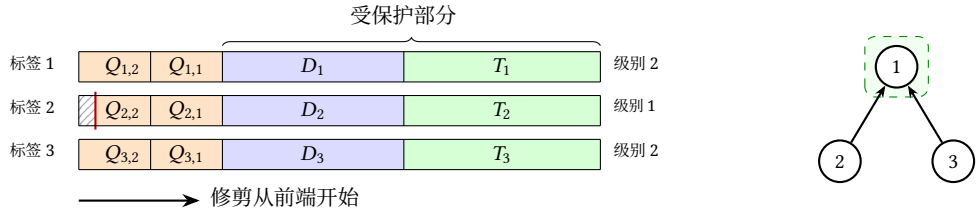

图7。 修复 运行示例中（不按比例绘制），在第一轮中， $D = Y$。标签 1 携带代理人 1 的份额 $D_1 = P_1$，标签 2 携带代理人 2 的份额 $D_2 = P_2$，标签 3 携带代理人 3 的后缀 D_3（最后一半的P_3）。左：每个标签携带两个缓冲区 $Q_{j,2}$、$Q_{j,1}$、其输入捆束 D_j和一份大份额 T_j。如果共同份额是精确的，就不会进行任何修剪。外部缓冲区中所示的切分，是舍入的一种可能结果；层级统计保留的完整缓冲区数量。在每种结果中，每个受保护部分 $D_j \cup T_j$ 都得以保留。右：在每种结果中，参与者 2 和 3 都支配代理人 1，因此 {1} 是一个被支配群体（第 4.5节）。这里的箭头表示支配关系，不同于非支配图中的弧。

代理人 3 仍然嫉妒标签 2，差值为 1。现在，修剪通过修剪 P_2'外部缓冲区的一半来消除这种嫉妒；这部分对每个人的价值都是 1，因此代理人 3 对标签 2 的估值为 28，与她对自己标签的估值相同。每个输入捆束都保持完整。标签 1 和 3 的层级为 2，标签 2 的层级为 1；增加的部分价值分别为 24、23 和 24，剩余部分为半个缓冲区。

7.4 为什么每个输入捆束都能存活

现在证明引理 3。使用算法 4 的归一化价值。由于 $nt + Bp = 1$和 $Bp \le 1/4$，目标值是有效的。根据引理 7，输出是无嫉妒的。剩下需要证明的是，没有受保护部分会被切割，并界定不等附加物和剩余部分。

层级。 令 S_j为标签 j上的返回后缀，无论谁持有它。若其切入受保护部分，则其层级 $\ell(j)$为 -1；否则，其层级是它保留的完整缓冲区数量。层级为 $\lambda \ge 0$的后缀包含其受保护部分、 λ 个完整缓冲区，以及至多一个额外缓冲区的一部分。完整份额的层级为 $n - 1$。仅当不存在层级为 -1的部分时，修复才会成功。

步骤 *1*：相差两个层级意味着价值严格更高。 令 j和 l为满足 $\ell(j) = \lambda$和$\ell(l) \ge \lambda + 2$的标签，并从上方标签 l的所有者 l的视角来观察；此人不一定是该标签的最终持有者。标签 l至少携带了比标签 j多一个完整缓冲区，即使 S_j保留了其下一个缓冲区的一部分（图 8）。根据（9），

$$v_l(S_l) \ge v_l(D_l) + t + (\lambda + 2)p - \delta, \qquad v_l(S_j) \le v_l(D_j) + t + (\lambda + 1)p.$$

第二个界在 $\lambda = -1$处也成立，因为该后缀位于其受保护部分内。因此，输入嫉妒界 $v_l(D_l) \ge v_l(D_j) - \alpha$给出

$$\ell(l) \ge \ell(j) + 2 \quad \Longrightarrow \quad v_l(S_l) - v_l(S_j) \ge p - \delta - \alpha = \tfrac{\alpha}{2} > 0. \tag{10}$$

换句话说：多一个缓冲区就值 $p = 2\alpha$，这超过了嫉妒 α和总舍入损失 $\delta = \alpha/2$。相邻层级之间可能只相差部分缓冲区，因此需要两个层级。

第 2 步：不会切分受保护部分。假设某个受保护部分被切分，从而层级 -1 出现。层级 $n - 1$ 也会出现，因为经认证的分配会使某个份额保持完整。在有 n 个标签和 $n + 1$种可能层级 -1、0、……、 $n - 1$的情况下，必然缺少某个中间层级 μ。令 $H = \{j\colon\ \ell(j) < \mu\}$ 表示差距下方的标签；它非空。 H之外的每个标签都至少比 H中的每个标签高两个层级。根据（10）， H之外每个标签的所有者对其自身标签后缀的价值严格高于 H中的每个后缀，因此她最喜欢的标签中没有一个位于 H中。因而，只有 H中的标签的 $|H|$位所有者才能

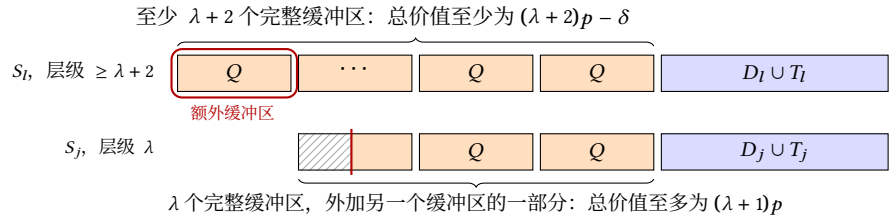

图 8. 从上方标签 l的所有者视角看证明的步骤 1 l，其中 $v_l(U) = 1$。高出两个或更多层级的后缀至少包含一个额外的完整缓冲区（轮廓线所示），对她而言价值约为 $p = 2\alpha$。这超过了她的输入嫉妒 $v_l(D_l) \geq v_l(D_j) - \alpha$，因为根据 (9)所有亏缺合计对她而言至多价值 $\delta = \alpha/2$。

在 H 中拥有最喜欢的标签，而 H 中的每个标签都经过修剪，因为其层级低于 $\mu \leq n - 2$。这与认证检验（引理 6）矛盾。因此，每个受保护部分都会保留下来。设置缓冲区正是为了让差距上方的所有者严格偏好自己一侧。

步骤 *3*：只剩下缓冲区和舍入余项。令 $\sigma(j)$ 为标签 j 的最终持有者。现在有 $W_{\sigma(j)} = S_j = D_j \cup Z_j$，其中 Z_j由 T_j以及保留的缓冲区和缓冲区部分组成。对于每个 i， j，

$$t - \delta \leq v_i(Z_j) \leq t + (n-1)p.$$

因此 $|v_i(Z_j) - v_i(Z_l)| \leq (n-1)p + \delta \leq 2n\alpha$。剩余部分只包含丢弃的缓冲区部分和引理 10 中的U_0，因此 $v_i(R') \leq Bp + \delta \leq 2n^2\alpha$。重新缩放即可得到所述结论。共有 $n + B = n^2$ 个份额槽，因此除了一次 Trim 调用外，还需要 $O(n^4 \log(n^4/\alpha))$ 次查询。这证明了引理 3。□

7.5 计算共同份额

接下来需要证明引理10。我们改造Alon and Graur [2021],的分数舍入方法。他们将一条项链切分为窃取者之间的等分份额；而在这里，份额是预先指定且大小不等的，并且要使用 Robertson–Webb 查询来切分单元。这个思路分为三步。首先，通过分数分配精确满足每个目标，使每个代理人对每个份额槽的价值都恰好等于其目标值。其次，利用分割单元的数量不超过方程数量这一事实，在不破坏任何目标的前提下，将除少数单元外的所有单元都变为整数形式。第三，只对分割单元反复细分。每个子单元的总质量至多为其父单元的四分之三。经过 d 轮后，每个仍被共享的单元的总质量因此至多为 $n(3/4)^d$。仍被共享的单元至多有 nm 个，因此它们的总质量至多为 $n^2m(3/4)^d$。

应当如何细分一个分割单元？若分别将每个代理人的价值减半，就需要在多达 n 个位置进行切分。若选择合适的位置，只需切一刀：在各代理人的半值标记中取加权中位数处切分，做法与Even and Paz [1984]在中位标记处将一组代理人分开类似。

引理 11（对共享单元进行一次切分）。设有序单元 E 上的 n 归一化测度为μ_i，且 $W(E) = \sum_i \mu_i(E) > 0$。通过 $O(n)$ 次查询，可以将 E 切分并记录所得的两个子单元，使得每个子单元的总质量至多为 $3W(E)/4$。

证明。对于每个满足 $w_i = \mu_i(E) > 0$ 的代理人，从前端获取一个 $w_i/2$ 的标记。为其赋予权重w_i，并选择累积权重达到$W(E)/2$ 的第一个标记。两侧不超过该标记的标记，其总权重至少为$W(E)/2$。每个不超过该标记左侧的标记，都会将其所有者的质量至少一半贡献给左子单元，因此该子单元的质量至少为$W(E)/4$。右子单元同样满足这一界。二者之和为$W(E)$，从而得到两个上界。只保留中位标记。其位置至多细分一个物理分量，并且每个代理人进行一次估值，通过减法记录所得质量。该推理允许重合标记和零权重代理人。□

引理的证明 10。 如果 $m = 1$，则将 U全部分配给唯一无需查询的份额槽。对于 $m \geq 2$，份额只是记账变量，而非物理分配。将每个份额槽视为一个具有目标值w_q的接收者。最初 U是一个单元，并且其在份额槽 q中的份额为 w_q。

尽量减少分割单元。对于单元 E，将其在位置 q中的当前份额记为 x_{Eq}。对每个单元 E保留方程 $\sum_q x_{Eq} = 1$，并对每个 i， q保留方程 $\sum_E v_i(E)x_{Eq} = w_q$。有 κ个单元时，约束条件至多有$\kappa + nm$ 个。如果正份额多于 $\kappa + nm$ 个，相应的列就线性相关。沿着一个线性相关关系调整份额，直到其中一个变为零，同时保持所有份额非负。该线性相关关系保持每个单元的份额总和不变，因此其中既有正项也有负项。只有正份额会发生变化，最终正份额至多有 $\kappa + nm$ 个。分配给同一份额槽的单元不会改变：其单元方程将唯一的正份额固定为 1。每个单元至少需要一个正份额，因此至多有 nm 个单元仍在不同份额槽之间分割。

细化共享单元。将每个完整分配单元永久分配给其所在的份额槽。总质量为零的单元也可以直接分配给任意份额槽。根据引理 11，将每个剩余的共享单元分割一次，把其子单元的份额设为与父单元相同，然后再次消除相关列。在经过 d轮次后仍处于共享状态的任何单元，都已历经 d次分割，因为完整分配单元不会再变成共享单元。初始总质量为 n，因此每个仍处于共享状态的单元的总质量至多为$n(3/4)^d$。此类单元至多有 nm 个。取

$$d = \lceil \log_{4/3}(n^2 m/\delta) \rceil.$$

将这些单元留在剩余部分中，损失的总质量至多为 $n^2 m(3/4)^d \leq \delta$，因此对任何参与者而言，损失至多为δ。由于所有被舍弃的份额均非负，整数份额仍低于各自的目标值。每轮至多有 nm 个单元，每个单元需要 $O(n)$次查询，其中包括记录。消除步骤的复杂度关于单元数、目标值数量和轮次数为多项式。固定的枢轴和标记顺序使所有选择都具有确定性。□

8 结论

无嫉妒切蛋糕问题由Gamow 和 Stern [1958], 提出，历史悠久：Selfridge 和 Conway 解决了三位参与者的情形；针对任意数量参与者的有限但无界协议由Brams 和 Taylor [1995], 提出，而有界查询次数的方案则由Aziz 和 Mackenzie [2016]提出。基于后者的支配框架，我们给出了一种确定性协议，能够将异质蛋糕完整且无嫉妒地分配给 n 位参与者，所用 Robertson–Webb 查询次数为多项式级， $O(n^6 \log n)$ 是我们分析中得到的界。主要的新要素是在支持性分配未知时进行经认证的修剪：共享查询表服务于所有候选分配，其估计值的中位数给出每位参与者价值的下界，而每次匹配检验失败都会排除至少一半剩余候选方案。再对参与者的半值标记取中位数，便可通过一次修复将优势转化为支配。

我们预计，这些思路将催生更简单、更快速的协议。经认证的后缀分配本身似乎也值得研究：其结构与竞争均衡、拍卖和稳定匹配自然相连，探索这些联系或许能为公平分配与市场设计之间建立新的关联。

本工作的进展与人工智能的使用

作者使用了大语言模型，尤其是 ChatGPT 和 Claude，进行数学探索并协助撰写说明。与许多后续研究一样，本文建立在 Aziz 和 Mackenzie [2016, 2020] 的框架之上。研究重点是将 Core 协议多项式时间归约为计算一个经过认证的无嫉妒后缀分配，并对这些分配的结构性质进行形式化。其中一些性质在 2016年 已为人所知，但由于瓶颈 Aziz 和 Mackenzie [2016, 2020] 位于其他环节，因此未被使用。在确定新的归约之后

并对这些结构性质进行形式化，作者与大语言模型开展了广泛合作，引导它们以算法方式利用这些性质，并建立在查询高效中位数这一思想之上；该思想既用于筛选候选分配，也用于按加权中位数切分共享份额。研究成果源于密集的人机协作。

致谢

作者感谢萨尔马德·阿巴西（提供编辑意见）、弗洛里安·布兰德尔（提出将查询限制在端点已确定的区间内的问题），以及阿里尔·普罗卡西亚（就改进查询界的线性方法提出建议）。附录H 中的论证源自 Procaccia 分享的一份笔记。如今已有一个较小的多项式上界，多位专家正携手合作，朝着最终确定下界和上界查询界迈出最后一步。

参考文献

赛义德·阿莱伊、卡马尔·贾恩和阿扎拉赫什·马莱基安。2016年。具有一般效用函数的双边匹配市场中的竞争均衡。《运筹学》64，3（2016），638–645。doi:10.1287/opre.2016.1509 诺加·阿隆和安德烈·格劳尔。2021年。项链的高效分割。载于《国际自动机、语言与编程研讨会》第48届会议（《莱布尼茨国际信息学论文集》，第198卷）。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，德国达格施图尔，14:1–14:17。doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2021.14 Haris Aziz。2026年。单指数协议。2026年11月。工作论文。Haris Aziz和西蒙·麦肯齐。2016年。适用于任意数量参与者的离散有界无嫉妒切蛋糕协议。载于《第57届IEEE计算机科学基础研讨会论文集》。IEEE，洛斯阿拉米托斯，加利福尼亚州，416–427。doi:10.1109/FOCS.2016.52 Haris Aziz和西蒙·麦肯齐。2020年。有界无嫉妒切蛋糕算法。《ACM通讯》63，4（2020），119–126。doi:10.1145/3382129 邓肯·布莱克。1948年。论群体决策的依据。《政治经济学杂志》56，1（1948），23–34。doi:10.1086/256633 史蒂文·J·布拉姆斯和Taylor。1995 102，1 1995 9 18 10 1080 00029890 1995 11990526。无嫉妒切蛋糕协议。《美国数学月刊》（），–。doi:。/。。纪尧姆·谢兹。2026年。无嫉妒切蛋糕：以高概率使用多项式数量的查询。《社会选择与福利》67，1（2026），1–20。doi:10.1007/s00355-025-01633-7 阿格妮丝·切赫和塔马什·弗莱纳。2020年。不等份额切蛋糕的复杂性。《美国计算机协会算法汇刊》16，3，文章29（2020），21页。doi:10.1145/3380742 西纳·德赫加尼、阿里雷扎·法尔哈迪、穆罕默德·塔吉·哈吉阿加伊和哈迪·亚米。2018年。任意数量参与者的无嫉妒家务分配。载于《第二十九届年度ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，2564–2583。doi:10.1137/1.9781611975031.164 保罗·迪廷、莫妮卡·亨青格和英格玛·韦伯。2015年。用于网络拍卖的表达力强的机制。《美国计算机协会经济学与计算汇刊》4，1，文章1（2015），34页。doi:10.1145/2716312 杰克·埃德蒙兹。1965年。路径、树与花。《加拿大数学杂志》17（1965），449–467。doi:10.4153/CJM-1965-045-4 希蒙·埃文和阿扎里亚·帕兹。1984年。关于切蛋糕的一则注记。《离散应用数学》7，3（1984），285–296。doi:10.1016/0166-218X(84)90005-2 阿里雷扎·法尔哈迪和穆罕默德·塔吉·哈吉阿加伊。2018年。论家务分配的复杂性。载于《第二十七届国际人工智能联合会议论文集》。国际人工智能联合会议组织，瑞典斯德哥尔摩，226–232。doi:10.24963/ijcai.2018/31 阿里雷扎·法尔哈迪和穆罕默德·塔吉·哈吉阿加伊。2026年。无嫉妒分配的查询复杂度：蛋糕、家务与混合资源。arXiv:2611.11424 [cs.GT] doi:10.48550/arXiv.2611.11424 第2版，2026年11月10日。乔治·伽莫夫和马文·斯特恩。1958年。《数学谜题》。维京出版社，纽约。西蒙·麦肯齐和马什巴特·铃木。2026年。使用多项式期望查询次数的精确无嫉妒切蛋糕。arXiv:2610.28535 [cs.GT] https://arxiv.org/abs/2610.28535 埃尔韦·穆兰。1980年。论策略无关性与单峰性。《公共选择》35，4（1980），437–455。doi:10.1007/BF00128122 伊莱沙·彼得森和弗朗西斯·爱德华·苏。2002年。四人无嫉妒家务分配。《数学杂志》75，2（2002），117–122。https://scholarship.claremont.edu/hmc_fac_pub/668/ 伊莱沙·彼得森和弗朗西斯·爱德华·苏。2009年。N人无嫉妒家务分配。arXiv:0909.0303 [math.CO] doi:10.48550/ arXiv.0909.0303

Ariel D. Procaccia。2009年。你应觊觎邻居的蛋糕。载于《第二十一届国际人工智能联合会议论文集》。IJCAI，加利福尼亚州帕萨迪纳，239–243。https://www.ijcai.org/proceedings/2009/49 Ariel D. Procaccia。2013年。切蛋糕：不只是儿童游戏。《ACM通讯》56，7（2013），78–87。doi:10.1145/2483852.2483870 Ariel D. Procaccia。2020 63，4 2020 118 10 1145 3382131。技术视角：回答公平分配领域最神秘的问题。《ACM通讯》（），。doi：。/ Ariel D. Procaccia和Moshe Tennenholtz。2009年。无金钱的近似机制设计。载于《第十届ACM电子商务会议论文集》。计算机协会，纽约州纽约市，177–186。doi:10.1145/1566374.1566401 Alexandros Psomas。2026年。供人类食用的蛋糕切分：一种基础的 n参与者切蛋糕协议。arXiv:2610.30370 [cs.GT] https://arxiv.org/abs/2610.30370 Jack Robertson和William Webb。1998年。蛋糕切分算法：若能做到公平，就请公平。A K Peters，马萨诸塞州纳蒂克。https: // www.routledge.com/Cake-Cutting-Algorithms-Be-Fair-If-You-Can/Robertson-Webb/p/book/9781568810768 Georgy Sokolov。2023年。面向 n 参与者的指数时间嫉妒无关蛋糕切分协议。arXiv:2306.03854 https://arxiv.org/abs/2306.03854 Walter Stromquist。2008年。有限协议无法找到无嫉妒的蛋糕分配。《电子组合学期刊》15，1，文章R11（2008），10页。doi:10.37236/735 Qilin Ye和Yannan Bai。2026年。削低高塔：单指数时间嫉妒无关蛋糕切分。arXiv:2609.05191 [cs.GT] https://arxiv.org/abs/2609.05191v2 第2版，2026年11月3日。

表 4. 一次Divide轮次和经认证的修剪的符号说明。

符号	含义	其中
X, R	轮次开始时的分配和剩余部分	§4.1
Y, U	按接收者索引的来自Core的后缀及其剩余部分	§4.1
$\pi(i)$ $\sigma(j)$	代理人 i在重新分配时获得 $Y_{\pi(i)}$。修复后，标签 j转给持有者 $\sigma(j)$。	§4.1
D_j, Z_j	$D_j = X_j \cup Y_{\pi(j)}$进入修复阶段，将 Z_j添加到标签 j	§4.1
W_i, R'	修复后的分配和剩余部分，其中 $W_{\sigma(j)} = D_j \cup Z_j$和 $R' \subseteq U \subseteq R$	§4.2
Γ	非支配图	§4.2
g_{ij}	归一化间隔 $(v_i(Y_i) - v_i(Y_j))/v_i(U)$	§6
P_j, S_j	标签 j 上的输入片段及其保留后缀	§5.1
$\mathrm{M}_i(S)$	代理人 i在后缀分配 S中的最喜欢的标签	§5.1
o	固定点，即在平局图中代表“整体”的节点	§5.3
V_{ij}, $t_j(x)$	代理人 i对份额 j的后缀的价值随其长度变化的函数，其逆函数给出她的标记；以及份额 j 在价值 x处的长度	§5.4
M, $\mathcal{A}$	份额到参与者的分配，以及候选分配池	§5.4, §5.5
x^*, $\hat{x}^M$	经认证的分配中参与者的价值（完全可揭示向量）及其估计值针对候选分配 M	§5.4, §5.5
y	候选方案估计值的下中位数，由匹配检验核验	§5.5

A 匹配检验

本附录证明引理 9，该引理用于在算法2中筛选候选方案。两次搜索都使用标准二分图匹配。我们说明每次搜索如何仅依据 y处的表格来证明有关试探值的结论。

引理 9 的证明。对于一份额 j，令 $N_x(j)$表示平局图中在 x处与 j相连的节点集合：即在 x处对 j紧的参与者，以及当 j为完整份额时的固定点。对份额集合 $N_x(J) = \bigcup_{j \in J} N_x(j)$，记作 J。我们在6处使用严格霍尔不等式（x^*）。

令 E由固定点以及满足 $y_i = x_i^*$的参与者 i组成，也就是价值已经精确确定的节点。由于 $y \le x^*$，每一份额在 y处的长度都不超过在 x^*处的长度。每当 $N_y(j)$ 与 E相交时，份额 j因此

在 x^* 处的长度与在 y 处相同，而标记的严格单调性给出 $N_{x^*}(j) = N_y(j) \cap E$。我们在两种情况下都会用到这一观察。

在 y 处构建平局图，删除固定点，然后求份额与参与者之间的最大匹配。所有长度均在删除固定点之前计算。

仍有一个未匹配的份额。从一个未匹配的份额出发，j_0 沿平局图边到参与者，再沿匹配边返回。记 J' 和 I' 分别为已到达的份额和参与者。中的每个参与者 I' 都已匹配，因为若到达一个空闲参与者，就会形成一条增广路径。此外 $I' \neq \varnothing$：否则 j_0 只与固定点相连，于是 $N_{x^*}(j_0) = \{o\}$，这与（6）矛盾。

对于 $\varnothing \neq T \subseteq I'$，令 $J_T = \{j \in J' : N_y(j) \cap T \neq \varnothing\}$。与 T 匹配的份额已经给出 $|T|$ 个成员。首次进入 T 的搜索路径会再提供一个，因为在 T 中，位于其首个参与者之前的份额未匹配，或匹配给了 T 之外的参与者。因此 $|J_T| \geq |T| + 1$。取 $T = I' \cap E$。若它非空，则 J_T 中的每个份额长度都保持不变，而在 x^* 处对其而言紧的每个参与者都属于 T。考虑到固定点，这将得到

$$|J_T| + 1 \;\leq\; |N_{x^*}(J_T)| \;\leq\; |T| + 1 \;\leq\; |J_T|,$$

其中第一个不等式为（6）。因此 $I' \cap E = \varnothing$，且每个 $k \in I'$ 都满足 $y_k < x^*_k$。

所有份额都已匹配。恢复现在已空闲的固定点，并沿平局图边向份额搜索，再沿匹配边返回参与者。令 A 由该固定点和所有到达的参与者组成。这些恰好是沿平局图边对 y 处的所有份额进行匹配时，可能未被覆盖的节点。沿搜索路径切换匹配可证明一个方向；将当前匹配与一个使给定节点未被覆盖的匹配叠加，则可证明反向结论。

如果这样的匹配使 E 之外的某个节点未被覆盖，它就会覆盖 E 的所有 $|E|$ 节点。与它们匹配的份额 J 会保持其长度，并满足 $N_{x^*}(J) \subseteq E$，因此 $|J| + 1 \leq |N_{x^*}(J)| \leq |E| = |J|$。这就证明了 $A \subseteq E$。如果 $T = E \backslash A$ 非空，令 J 为与其匹配的 $|T|$ 份额。在 y 处，这些份额都不会与 A 中的节点相连，因为那条边会使与该份额匹配的参与者变得可达。每个份额都通过其在 T 中的匹配参与者保持长度不变，因此 $N_{x^*}(J) \subseteq T$，同样有 $|J| + 1 \leq |N_{x^*}(J)| \leq |T| = |J|$。因此 $A = E$。如果 A 包含每个参与者，那么 $y = x^*$，且当前匹配就是一个支持性分配。否则，每个参与者 $k \notin A$ 都满足 $y_k < x^*_k$。□

B 零价值区间与空片段

正值求解器对所有参与者使用相同的后缀位置，并比较某一参与者对不同份额的估值。在零质量区间上，多个位置可能对应相同的价值，因此若针对每个参与者–份额对分别打破平局，就可能破坏比较。我们模拟参与者的后缀曲线 V_{ij} 本身；中位数算法使用的标记则是这些曲线的逆函数。叶和白 [2026]也使用有序键来打破平局。

引理 12（修剪记录的实现与投影）。设 $F_{ij}(p)$ 为参与者 i 在有序份额 j 的物理位置 p 处对后缀的质量。随着后缀从空片段扩展至整个份额，F_{ij} 在每个分量上连续且非递减。空片段只有一个位置。孤立的端点分量有两个位置，分别位于其纳入之前和之后，且质量相等。给定分量记录，对虚拟严格递增后缀曲线进行的每次正向或逆向查询，至多需要一次物理查询。每个有限的自适应记录都可由单个正估值配置实现。对于一个在正输入上正确的确定性求解器，为所有参与者登记其返回的后缀长度，至多需要 n^2 次最终求值。随后，其返回的分配可投影为具有相同分配和认证顺序的物理认证分配。

证明。对于每个代理人—份额对（i，j），令 T_{ij} 为已登记的虚拟长度—数量对的有限表格。该模拟在已登记的键上维护三个不变量。

（i）对于每个份额 j，单个非递减映射 ϕ_j 将 $[0,1]$ 中的虚拟长度映射到物理后缀位置。每个代理人都在 j 上使用此映射。（ii）对于每个代理人 i，单个非递减映射 ψ_i 将虚拟数量映射到真实价值。她在每个份额上都使用此映射。（iii）对于每个对（i，j），T_{ij} 中的长度—数量对（t，x）按照相同顺序在两个坐标上均严格递增，并且满足

$$F_{ij}(\phi_j(t)) = \psi_i(x) \qquad ((t,x) \in T_{ij}). \tag{11}$$

不同的键可能对应相同的物理像。因此，即使是空片段，其虚拟曲线也可以严格递增。

初始化。将每个份额上的 0,1 映射到其空位置和完整位置，即使两者重合也是如此。对于每个代理人 i，按完整份额的价值对其排序；若价值相同，则按固定标签顺序排列。按此顺序为它们赋予不同的秩 $w_{ij} \in \{1,\dots,n\}$。令 $\psi_i(0) = 0$，将每个秩映射到其真实完整数量，并从 T_{ij} 的 $(0,0),(1,w_{ij})$ 开始。三个不变量均成立。

在有序映射中插入。令 h 表示其已登记键上的 ϕ_j 或 ψ_i。假设两个已有键 $a < b$ 夹住了请求的像 u，即 $h(a) \le u \le h(b)$。在从 a 到 b 的已登记键中，存在相邻键 $d < e$，使得 $h(d) \le u \le h(e)$。检查第一个不小于 u 的像即可得出这一点；若 $h(a) = u$，则使用第一个相邻对。插入新中点 $(d+e)/2$，其像为 u。这能保持顺序，即使三个像都相等也是如此。反过来，要插入一个指定的新键，其两个全局邻居的像之间的任意像都是可行的。对于这些选择，固定第一个可用间隙以及较低邻居的像。

在 t 处进行正向查询。如果 T_{ij} 中已包含 t，则返回已存储数量。否则，其相邻条目 (t^-,x^-)、(t^+,x^+) 将 t 夹在其中。如果 t 在 ϕ_j 下没有像，则如上所述插入该指定键。计算 $u = F_{ij}(\phi_j(t))$。根据单调性和（11），$\psi_i(x^-) \le u \le \psi_i(x^+)$。对 x^-, x^+ 之间的 ψ_i 使用插入规则，选择一个像为 u 的新 x。将 (t,x) 加入 T_{ij}，并返回 x。

在 x 处进行逆向查询。如果 x 位于 T_{ij} 的第二列中，则返回已存储长度。否则，用 (t^-,x^-)、(t^+,x^+) 将其夹住。必要时，将指定键 x 插入 ψ_i，位置在其全局邻居的像之间。令 $u = \psi_i(x)$。在 j 上请求数量为 u 的物理后缀，并将返回位置限制在 $[\phi_j(t^-)\ \phi_j(t^+)]$ 之间。这能保持其数量不变。例如，若返回位置位于夹定区间左侧，则其数量为 u；而左端点的数量根据（11）至多为 u，根据单调性至少为 u。另一端点的情形对称。将所得位置作为新键 t 在全局映射 ϕ_j 中的像，插入于 t^-, t^+ 之间。加入 (t,x) 并返回 t。两条规则都只在虚拟端点对内部起作用。超出此范围时，无需进行物理查询，直接使用已知的斜率为一的延拓 $w_{ij} + t - 1$ 或其逆函数。

一次物理查询就足够了。每次更新都会保留已登记数对，并在两个坐标上都严格位于相邻数对之间插入新数对。恒等式（11）根据构造成立，包括平坦区间上任何有效的切分答案。分量记录会定位边界区间，因此新的虚拟查询至多需要在那里进行一次常规求值或切分。

实现完整的交互记录。固定一份有限交互记录，其中包括为读取输出而进行的任何求值。对于每一对 $(i,\ j)$，用直线连接 T_{ij} 中连续的条目，并接上其规定的尾部。由此得到的严格递增曲线与该数对的每个正向和逆向答案都一致。它在虚拟片段上的增量定义了一个正的无原子测度。将这些测度在互不相交的虚拟片段上相加，即得到一个实现完整交互记录的估值配置。如果模拟求解器超出了统一查询上界，那么这个有限前缀也会出现在某个正输入上。同样的论证也适用于其操作上界，除了维护有限表所需的操作。

投影证书。为每个代理人登记求解器返回的每个后缀长度，使用至多 n^2 次最终求值。在实现这一扩展交互记录的每个正估值配置上，确定性

给出相同的返回长度、分配和认证顺序。根据 (i)，每个选定的长度都为所有人表示一个物理后缀。根据 (ii) 和 (11)，代理人 $x \le x'$ 对两个份额进行i比较得到 $\psi_i(x) \le \psi_i(x')$，而见证等式给出相等的物理价值。完整的虚拟份额仍然投影为完整份额。如果另一个后缀也投影为完整份额，则它已经满足完整份额条款。因此，相同的分配在物理上是无嫉妒的，并且相同的顺序为每个物理修剪提供认证。 □

例*2*（两个零价值部分上的虚拟平局）。假设一位代理人在份额 A、B、C 上看到的质量分别为 0、0 和 1，其中 A 为空，B 非空但毫无价值。标签顺序为 A、B、C 时，初始化得到 $\psi_i(0) = \psi_i(1) = \psi_i(2) = 0$ 和 $\psi_i(3) = 1$。要求在 B 上取 1 的量，会返回一个介于 0 和 1 之间的内部虚拟长度，因为 T_{iB} 的端点量分别为 0 和 2。其实际映像可以位于 B 上任何允许的零质量位置。它的真实量恰好与整个 A 相同，后者的虚拟量也为 1。证书必须保留的正是这种相等关系。

C 一般带上限方阵

第5.4 节和5.5 节以及附录 A中的论证，仅将标记用作 $[0,\infty)$ 自身上的连续严格递增双射，而长度仅通过最小值（4）使用，上限为 1。本附录将针对这类一般曲线陈述相同的结果。附录 D 和 E将这些结果用于家务和分配市场。

一个带上限方阵有 q 行和 $q+1$ 列：q 个普通列以及一个备用列 o，即固定点。记 K 为所有列的集合。向量 $x \in [0,\infty)^{\mathcal{K}}$ 为每一列分配一个层级。每一行 i和每一列 j都有一条成本曲线 f_{ij}，它是从 $[0,\infty)$到自身的连续严格递增双射。正向查询返回 $f_{ij}(x)$，逆向查询返回 $f_{ij}^{-1}(z)$。在层级 x处，行 i 的成本为

$$z_i(x) = \min_{j \in \mathcal{K}} f_{ij}(x_j),$$

而达到最小值的列就是它的紧列。固定点固定在层级 $x_o = 1$，行 i 在其上的线性曲线为 $f_{io}(t) = c_i t$。因此，固定点为行 i 提供了一个成本固定为$c_i > 0$的替代选项，即其上限。如果行与普通列之间存在一个完美匹配，使每一行都分配到成本最低的普通列，且成本不超过其上限，则普通层级向量是带上限均衡。向量 x 满足 $x_o = 1$ 时，如果对于每一列 $j \in \mathrm{K}$（包括固定点），紧边都能匹配所有行，同时使 j 不被覆盖，则称其为完全可暴露。在完全可暴露向量处，使所有行均通过紧边匹配且固定点不被覆盖的匹配称为支持性分配。

经认证的蛋糕修剪是一个带上限方阵，其中 $q = n$，份额为行，参与者为普通列，标记 $f_{ji} = V_{ij}^{-1}$为曲线，且每个上限均为一。此时，行 j的成本为长度 $t_j(x)$ 的长度（4），当且仅当行与参与者或固定点在平局图中相连时，该行与之紧；有上限均衡即为无嫉妒价值向量，而完全可暴露性和支撑分配的定义见第5.4节。

反过来，将每行的曲线除以其上限，令 $f'_{ij} = f_{ij}/c_i$。这样可使上限为一，并在每个向量处保留每行的极小化列。查询归一化曲线或其逆函数，成本为一次原始查询和一次算术运算。将行 i 视为一份蛋糕，普通列 j视为一位参与者。在实际长度 $0 \le t \le 1$上，令 $V_{ji}(t) = (f'^{ij})^{-1}(t)$。这些连续严格递增函数从零开始，因此其增量定义了各份额上的正的无原子估值。按照第5.4节所述，以斜率一延拓 V_{ji}。对于高于 $V_{ji}(1)$的目标值，原始标记和新标记都大于一，因此有上限长度和紧边保持一致。记录下 q^2 整块价值后，每次估值或标记的成本至多为一次原始查询。

命题 2 现在给出了唯一的完全可揭示向量 x^*，其普通层级构成逐坐标最大的有上限均衡。在 x^* 的平局图中，每个支持性分配

都为每一行提供了一条通往达到其上限的行的平局路径。引理8 和 9 以及定理 2 适用于这些价值曲线。因此，对于 $q \geq 2$，算法 2 通过 x^* 以及在$O(q^5 \log q)$次正向与逆向查询计算出一个支持性分配。对于一行，其唯一的普通层级为 $f_{11}^{-1}(c_1)$。

D 蛋糕、家务与均衡之间的多项式归约

对后缀函数求逆并交换参与者与份额的角色，即可得到两个方向上的多项式归约。其中一个方向需要额外增加一名参与者和一份份额，以便对端点进行归一化。

假设每份由一个或多个正长度区间组成，且每位参与者对每个正长度区间都赋予正价值或正成本。用其保留长度对 $[0,1]$ 中的每个后缀进行参数化，可得到连续、严格递增且在零处取零的后缀函数。我们使用 Robertson–Webb 查询、精确算术以及第 3 节的分量记录。因此，多项式时间 表示多项式次预言机调用和额外的精确运算。这并不是针对不受限制的实函数的位复杂度声明。以下归约要求严格递增；附录 B 则处理经认证修剪本身中的零价值情形。

D.1 经认证修剪的双向归约

对于家务，每位无嫉妒参与者都会获得一个最低成本后缀；认证会对持有者排序，使得每个真后缀的持有者都与较早持有者的后缀打平。对于两种符号，经认证的后缀向量都是逐坐标最大的无嫉妒向量，而且该向量的每种无嫉妒匹配都是经认证的。对于蛋糕，这由命题 1、引理 6 和第5.4节得出。对于家务，使用一个带上限方阵（附录 C），其中参与者为行、份额为普通列、曲线为成本f_{ij}，上限为 $c_i = \min_j f_{ij}(1)$。每个实际无嫉妒匹配都满足这些上限，而在任何带上限均衡中，分配给每个普通列的行都会将其层级限制在一以内。在最大向量 x^*处，达到其上限的持有者会与一整份打平。事实上，若 $f_{ik}(1) = c_i$，则 $c_i \leq f_{ik}(x_k^*) \leq c_i$，因此 $x_k^* = 1$。命题 2（采用附录 C 的一般形式）会沿着平局关系引导每位持有者到达这样一行，从而认证每个普通紧匹配。反过来，在实际家务认证中，每位持有者都能到达一位整份持有者。该持有者达到其上限。沿着以固定点结尾的路径进行切换，可以腾出任意选定的普通列，这刻画了同一个最大向量。

命题3（多项式时间预言机等价性）。在 n 名参与者和份额的情形下，经认证的家务修剪可归约为在 n 名参与者和份额的情形下的经认证的蛋糕修剪。反向归约至多使用$n+1$ 名参与者和份额。两种归约均只需调用一次目标求解器，使用 $O(n^2)$ 次预处理和恢复查询，每次模拟查询使用$O(1)$ 次原始查询，并对可用记录进行多项式级别的额外计算。两者都能恢复最大的后缀向量和一个经认证的分配。

证明。从家务到蛋糕。设 $f_{ij}(x)$为家务代理人 i对物品 j上长度为 x的后缀的成本，并令 $b_i = \min_j f_{ij}(1) > 0$。为每个家务物品 j创建一个蛋糕代理人，并为每个家务代理人 i创建一块蛋糕，其后缀价值为

$$G_{ji}(s) = f_{ij}^{-1}(b_i s), \qquad 0 \leq s \leq 1. \tag{12}$$

逆函数的定义是合理的，因为 $b_i \leq f_{ij}(1)$。每个 G_{ji}都是连续且严格递增的，并且在零处取值为零，因此它定义了新物品上的一个有效无原子估值。图9 展示了匹配对及其后缀价值如何转换。

以下映射可双向转换无嫉妒分配，并反转其匹配：

$$x_j = \max_i G_{ji}(s_i), \qquad s_i = \frac{\min_j f_{ij}(x_j)}{b_i}. \tag{13}$$

对于第一个映射，假设蛋糕代理人 j持有蛋糕份额 i。无嫉妒性得出 $G_{ji}(s_i) = x_j$，因此$f_{ij}(x_j) = b_i s_i$。对于其他每个家务标签 k，根据 x_k的定义，有 $f_{ik}(x_k) \geq b_i s_i$。将家务

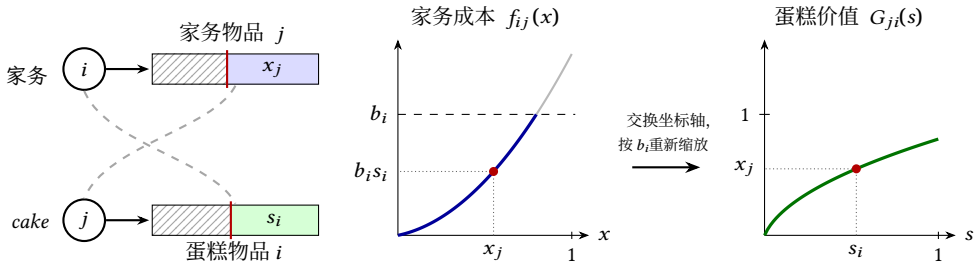

图 9. 匹配对的家务到蛋糕的构造 (12)。左侧，家务代理人 i 在份额 j 上持有长度为 x_j 的后缀，蛋糕代理人 j 在份额 i 上持有长度为 s_i 的后缀。虚线表示角色互换，修剪后的前端以阴影标出。f_{ij} 的高亮部分延伸至 $b_i = \min_k f_{ik}(1)$。交换坐标轴并将成本除以 b_i，即可得到蛋糕价值 $G_{ji}(s) = f_{ij}^{-1}(b_i s)$。标记点展示了式 (13) 中的 $f_{ij}(x_j) = b_i s_i$ 和 $G_{ji}(s_i) = x_j$，图中的点为 $b_i = 1$。

份额 j 分配给代理人 i，因此是无嫉妒的。反过来，在家务分配中，令 $d_i = \min_j f_{ij}(x_j)$。由于 $x_j \le 1$，我们有 $0 \le d_i \le b_i$。结合 $s_i = d_i/b_i$，每个 $G_{ji}(s_i) \le x_j$，且当 i 时有 j 时取等号。因此，反向匹配是蛋糕无嫉妒的。

匹配等式还表明，式 (13) 中的两个映射在无嫉妒后缀向量上互为逆函数。这两个映射都按坐标非递减。因此，它们会将任一实例的最大无嫉妒向量映射为另一个实例的最大向量。根据上述刻画，经认证的蛋糕输出可还原出经认证的家务分配。

从蛋糕到家务：将整块价值归一化。令 $v_{ij}(s)$ 表示输入蛋糕价值。令 $M = 2\max_{i,\ j} v_{ij}(1)$ 和 $h_{ij} = v_{ij}/M$。这种统一缩放不会改变任何比较或证书。添加一个虚拟代理 0 和一份虚拟物品 0。令 $\delta_i = \frac{1}{2}\min_j h_{ij}(1) > 0$，定义

$$H_{ij}(s) = h_{ij}(s)\ (i, j \neq 0), \qquad H_{i0}(s) = \delta_i s\ (i \neq 0), \qquad H_{0j}(s) = s\ (\text{all } j). \tag{14}$$

因此，对于每份物品 j，都有 $\max_i H_{ij}(1) = 1$。

这种填充保留了经认证的解。为说明这一点，令 s^* 表示原始的经认证向量。某份原始物品 k 是整块的。根据无嫉妒性，每个真实代理人的自身价值至少为 $h_{ik}(1) \ge 2\delta_i$，因此她不会嫉妒整块虚拟物品。虚拟代理人可以无嫉妒地持有该物品，因为每个后缀的长度至多为一。将她置于原始证书的首位：这就为扩展实例中的 $(s^*,\ 1)$ 提供了证书。唯一性迫使其中每个经认证的输出都具有这些相同的长度。在任何此类输出中，真实代理人都不能持有物品 0，因为她会嫉妒原始整块物品 k。因此，移除代理人和物品 0 后，剩下的是一个 s^* 的无嫉妒匹配，该匹配由引理 6 认证。

将每个 H_{ij} 延伸至超过 1，延伸量为 $H_{ij}(s) = H_{ij}(1) + s - 1$，针对 $s \ge 1$。再次转置参与者和标签，定义家务实例如下：

$$F_{ji}(x) = H_{ij}^{-1}(x), \qquad 0 \le x \le 1. \tag{15}$$

这里 $\min_i F_{ji}(1) = 1$：所有完整份额的蛋糕价值至多为 1，而虚拟代理的价值恰好为 1。因此，将式 (12) 应用于此家务实例，恰好返回在 $[0, 1]$ 上扩展后的蛋糕实例。此前已经证明的双向对应关系，会将任何经认证的家务输出转换为其经认证的蛋糕输出；删除虚拟代理和份额即可解决原实例。

预言机成本。计算 G_{ji} 使用一次原始后缀切分；其逆函数 $G_{ji}^{-1}(z) = f_{ij}(z)/b_i$ 使用一次后缀求值。逆向构造仅增加显式缩放和线性函数。完整份额记录和输出恢复的成本为 $O(n^2)$ 次查询。借助这些记录，任意虚拟求值和切分仅使用 $O(1)$ 次边界查询，并对中间的完整份额求和已知价值

。搜索记录、逆转匹配以及通过可达性恢复证书都需要多项式工作量。□

D.2 与最低价格均衡的联系

为每个蛋糕代理人创建一个买方，为每份创建一个不可分物品，并设置效用为零的外部选项。买方 i对价格为 $p \geq 0$ 的物品 j的效用为

$$U_{ij}(p) = \begin{cases} v_{ij}(1-p), & 0 \leq p \leq 1, \\ 1-p, & p \geq 1. \end{cases} \tag{16}$$

这些效用是连续且严格递减的，不必是拟线性的。竞争均衡为每位买方分配一个效用最大化的物品或外部选项，且每件未分配物品的价格均为零 [Alaei 等人， 2016]。

每个均衡都会匹配所有买方：否则，未匹配的买方会严格偏好一件未分配的零价格物品，而非外部选项。个体理性意味着 $p_j \leq 1$。因此，均衡恰好对应于 $s_j = 1 - p_j$所示的无嫉妒后缀分配，且匹配相同。根据命题 1，经认证的向量 s^* 对应于逐坐标最小的均衡价格 $p_j^{\min} = 1 - s_j^*$。由此，对于该类问题（16），经认证的蛋糕修剪与最低价格均衡之间存在双向多项式时间预言机归约。如果返回的只有价格， $O(n^2)$ 效用求值和完美匹配即可恢复分配。效用查询和逆效用查询可通过常数开销转换为后缀求值和切分。

这些约化将多项式查询保证扩展到所展示的非线性市场类别，其中配备效用与逆效用预言机。附录E直接应用定理2 的中位数算法于更一般的分配市场。

E 买方最优分配与非线性效用

附录C 中的带上限方阵还给出了一个单位需求分配市场中的查询界，其中包含物品保留价和买方外部选项。Alaei 等人 [2016] 刻画了一般效用曲线的极值均衡。Dütting 等人 [2015] 研究了具有显式表示的一般效用曲线的分配。在这里，每条曲线均由精确的正向与逆向查询给出。结论涉及此类查询的数量。

有 $b \geq 1$ 个买方和 $m \geq 1$ 件物品。买方 i 的外部效用为 ω_i，当她以价格 P_j 获得物品 j 时，其效用为 $U_{ij}(P_j)$。物品 j 的保留价为 r_j。竞争均衡由一个部分匹配和价格 $P_j \geq r_j$ 构成。已匹配的买方会获得一件物品，使其在所有物品和外部选项中的效用最大。未匹配的买方在外部选项处达到其最大效用。每件未售出物品的价格均为 r_j。该模型中的保留价仅取决于物品。

推论 2（买方最优分配的多项式查询）。假设每个 U_{ij} on $[r_j, \infty)$ 都是连续且严格递减的，并且在某个有限价格下严格低于 ω_i。正向查询返回 $U_{ij}(P)$，逆向查询则返回曲线值域中达到指定效用的价格。借助这些预言机，一种确定性算法可以计算逐分量最小均衡价格向量以及一个支持匹配。

$$O((b+m)^5 \log(2(b+m)))$$

查询。返回的均衡同时最大化每位买方的均衡效用。直接实现使用 $(b+m)!\,(b+m)^{O(1)}$ 精确运算。

证明。归一化并延拓曲线。令 $p_j = P_j - r_j$和 $V_{ij}(p) = U_{ij}(r_j + p) - \omega_i$，其中 $p \geq 0$。外部效用和保留价现在均为零。将每条 V_{ij}延拓至负价格，令 $V_{ij}(p) = V_{ij}(0) - p$，其中 $p < 0$。记 $w_{ij}(u)$ 为其在 $u \geq 0$ 处的逆函数。逆函数存在，因为延拓后的函数

在上方无界，且原始曲线最终会降至零以下。如果 $u > V_{ij}(0)$，其价格为$V_{ij}(0) - u < 0$，可通过算术计算得出。否则，一次原始逆向查询便足够。因此，这种延拓并未对原始市场中负价格下的偏好作出任何假设。

使每个分配都成为完全匹配。 添加 m 个虚拟买家和 b 个虚拟物品，得到 $N = b + m$ 个买家和 N 个物品。涉及虚拟对象的每一对的效用均为 $-p$，且外部效用为零。原始均衡可扩展为填充市场中的完全匹配。将未匹配的真实买家与虚拟物品配对，将未售出的真实物品与虚拟买家配对，然后再将剩余的虚拟对象配对。保留真实物品的原始价格，并将每个虚拟物品的价格设为零。对于连续严格递减效用和有限支付意愿，存在性由 Alaei 等人 [2016]的竞争均衡定理推出。

反过来，在这个填充市场的任何完全个体理性均衡中，每个虚拟物品的价格都为零。其持有者的效用为 $-p \geq 0$，且其价格非负。每个虚拟买家也获得零效用，并且只能持有价格为零的物品。删除虚拟对象后，未匹配的真实买家的效用因此为零，未售出的真实物品的价格也为零。其余所有需求不等式仍然成立，因此该限制构成一个原始均衡。

将市场编码为带上限方阵。 将物品作为行，将买方作为普通列。选择

$$c_j = 1 + \max\big(\{0\} \cup \{w_{ij}(0) : i \text{ a padded buyer}\}\big).$$

对于买方列层级 $x \geq 1$，定义成本

$$f_{ji}(x) = c_j - w_{ij}(x - 1).$$

在 $0 \leq x \leq 1$上使用直线 $x(c_j - w_{ij}(0))$。由于 $c_j > w_{ij}(0)$ 且 $w_{ij}(u) \to -\infty$作为 $u \to \infty$，这些函数是非负射线上的连续严格递增双射。通过固定点给第 j 行设置c_j上限。对这些成本曲线的每次正向或逆向查询，除初始值外，至多使用一次原始效用或逆效用查询。例如，在线性段上方，对成本 z进行逆向查询会返回 $x = 1 + V_{ij}(c_j - z)$。其参数至多为 $w_{ij}(0)$，因此所需效用为非负值。负参数使用已知的延拓。

具有效用 $u_i \geq 0$ 和价格 $p_j \geq 0$ 的填充均衡满足

$$w_{ij}(u_i) \leq p_j \quad \text{for every } i, j, \qquad w_{ij}(u_i) = p_j \quad \text{on matched pairs.}$$

因此 $x_i = 1 + u_i$，反向匹配构成一个带上限均衡，其行成本为 $c_j - p_j \leq c_j$。根据附录 C一般形式中的命题 2，最大的带上限均衡 x^* 支配该均衡。特别地，每个 $x_i^* \geq 1$。应用附录 C一般形式中的定理 2，反转其普通匹配，并令

$$u_i^* = x_i^* - 1, \qquad p_j^* = c_j - \min_i f_{ji}(x_i^*) = \max_i w_{ij}(u_i^*).$$

上限给出 $p_j^* \geq 0$。所展示的方程恰好给出需求不等式，并在完全匹配上满足等式。前述虚拟配对论证在删除并恢复保留价和外部效用后，得出一个原始均衡。

每个原始均衡都嵌入同一个带上限方阵中。 x^* 的最大性使所有返回的买方效用都不低于任何原始均衡中的相应效用。每个w_{ij}都是递减的，因此 p_j^*的公式使每个返回的物品价格都不高于原来的价格。这证明了两个最优性断言。 $O(bm)$初始评估和保留价格求逆，以及虚拟配对上的算术曲线，均符合所述界限。□

F 完全无嫉妒任务分配

本附录说明，本文的修剪界和修复界如何利用家务协议，得到第 $O(n^7 \log n)$节中所述的完整无嫉妒家务分配查询界：1。

该协议由 Aziz [2026] 提出。记 c_i 为代理人 i 的成本测度。若家务分配 X 的剩余部分为 R，且对所有 i、j，均有 $c_i(X_i) \le c_i(X_j)$，则该分配无嫉妒；若 $c_i(X_i) + c_i(R) \le c_i(X_j)$，则代理人 i 支配 j。

修剪。 在我们的构造中，蛋糕与家务在修剪的见证上有所不同：对于蛋糕，较早的持有者对较晚的后缀无差异；对于家务，较晚的持有者对较早的部分无差异。同样，对于蛋糕，每个局外人都支配划分剩余部分的群体；而对于家务，该群体支配每个局外人。对于正输入，引理 3 以每次查询的常数开销，将修剪界转移到家务上。对于任意非负成本，将该归约应用于附录 B 的虚拟正曲线。投影保留每个持有者的弱成本比较关系，以及与见证家务修剪的较早后缀之间的相等关系。

修复。Aziz [2026] 中的修复步骤使用与引理 10相同的指定份额和总亏缺。将该引理应用于归一化成本测度，可在 $O(m^4 \log(m^4/\alpha))$ 次查询中，为 m活跃代理人构造 m^2 份额和缓冲区。由于 $\log(1/\alpha) = O(m \log m)$，一轮（包括其中的修剪）需要 $O(m^5 \log m)$ 次查询。

保留的捆绑物与轮数。 负责分割剩余家务的群体成员也可以保留其分配束，如定理 1 的证明中所示。对于家务，每个存续代理人都支配其分配束被冻结的每个代理人。用 X, R 和 W, R' 表示更新前后的分配与剩余部分。标签 j 的新持有者 $\sigma(j)$获得 $W_{\sigma(j)} = X_j \cup B_j$，其中 $B_j \subseteq R \backslash R'$。对于活跃代理人 i，活跃代理人之间的无嫉妒性意味着

$$c_i(W_i) + c_i(R') \le c_i(W_{\sigma(i)}) + c_i(R') \le c_i(X_i) + c_i(R).$$

冻结代理人也满足相同的界，其分配束保持不变。因此，如果 i 支配 j，则右侧至多为 $c_i(X_j) \le c_i(W_{\sigma(j)})$，所以 i仍然支配标签 j的持有者。尤其是，活跃代理人仍然支配冻结代理人。冻结代理人会继续偏好自己的分配束，因为每个活跃标签只能获得更多家务。如 Aziz [2026]所述，每个修复轮次都会产生新的支配。根据原始群体中的被支配对计数，总共至多有 n^2 个修复轮次，因此至多需要 $O(n^7 \log n)$次查询。

G 在端点已确定的区间上进行查询

我们为定理 1 之后所描述的实现提供依据。令 S 由 0、1以及截至目前切分查询返回的每个点组成，其中包括未保留在分配中的试探标记。每次估值都针对单个区间 $[a, b]$，其端点为 a、$b \in S$。每次切分都在这样的区间内请求，随后将其返回点添加到 S中。端点不必在 S中相邻。

对有序份额进行查询。维护第3节中的分量记录，并将所有分量端点纳入 S。对于有序份额 $P = (I_1, \ldots, I_k)$，记 $I_h = [a_h, b_h]$和 $s_r = \sum_{h \le r} v_i(I_h)$，其中$s_0 = 0$。要标记价值为 w的前缀，如果对于某个 r有 $w = s_r$，则使用已有的组成部分边界。否则选择满足 $s_{r-1} < w < s_r$ 的分量 I_r，并要求代理人 i 从 a_r 开始以价值$w - s_{r-1}$进行切分。每个有效回复都位于 I_r内，因为所请求的价值严格介于零和$v_i(I_r)$之间。后缀标记通过使用互补的前缀价值获得。如果一个后缀从已确定点 $p \in I_r$开始，则其价值为

$$v_i([p, b_r]) + \sum_{h > r} v_i(I_h).$$

因此，对 $[p, b_r]$ 进行一次估值即可，其他项均已记录。空份额和完整份额不需要新的边界。即使某些分量价值为零，这些规则仍然适用。

修剪查询。 在算法 2中，每个候选后缀长度 $\hat{t}_j^M$是整份物理区间长度与对物理区间 j的逆向查询回复中的最小值。因此，其边界是现有分量端点或返回的切分标记。长度网格按秩选取条目，因此每个

对物理区间的正向查询都使用已确定的边界。匹配检验和输出恢复使用相同的逆向查询和最小操作。物理范围之外的值使用已知的斜率为一的延拓，无需进行物理查询。

对于非负估值，附录 B中的模拟具有相同的性质。初始时，虚拟长度键的物理映像是空位置和整个位置。指定的新键被赋予其下方相邻键的物理映像。逆向查询通过上述组件规则获得一个物理切点，并在必要时将其回复限制为一个已注册的物理位置。因此，归纳地说，每个物理映像都是一个已确定的边界。插入虚拟键不会引入新的物理端点，并且所有正向查询都遵守所要求的限制。

其余操作和查询次数。 切割者在 Core 中的等分份额以及最后的切分选择步骤使用相同的组件规则。在 Repair中，引理 11 选择参与者的一个半价值标记，因此所选边界已经通过切分查询返回。拼接、重新分配和分数记账不会引入新的物理端点。在保留的切分处，记录新分量的估值也具有位于 S中的端点。

向 S 添加试探标记并不要求在每个此类标记处分割分量记录。一个查询区间的内部可能包含 S 的其他点。因此，实现只使用分析中已经计入的组件估值和边界查询，无需为维护 S而增加额外查询。这证明了对于每一种有效切分答案的选择，在相同的$O(n^7 \log n)$查询界内，都满足所声称的限制。

蛋糕切分的六次方查询界

外层循环可以一次使用同一切割者的多个分配。在这些分配之间交换后缀，一次修复后即可形成一个被支配群体。必要时再进行第二次修复，就能将剩余部分划分给所得划分中规模较小的一方。

命题 4。 在定理 *1*的假设下，对于任意有效切分答案，确定性协议都能在 $O(n^6 \log n)$ 次 *Robertson–Webb* 查询内返回一个完整且精确无嫉妒的蛋糕分配。

证明。一个或两个参与者可以直接划分蛋糕。对于 $m \geq 3$ 个参与者，固定一个切割者 r，并让该切割者在 $s = m - 1$ 个连续剩余部分上运行 Core。记 Y_i^t为参与者 i在第 t次调用中获得的份额，记 U为最终剩余部分。这些分配的并集是无嫉妒的。如果所有人对 U的价值都为零，就将其分给任意一位参与者，然后结束。如果只有部分人对其价值为零，则取 $W_i = \bigcup_t Y_i^t$和 $R = U$。正估值者构成一个被支配群体 B，因此我们可以直接进入下文的递归。

交换后缀。 假设每个 $v_i(U) > 0$。记 $g_{ij}^t = (v_i(Y_i^t) - v_i(Y_j^t))/v_i(U) \geq 0$。对每个$t$，选择一个非切割者 h_t，使得 $g_{rh_t}^t \geq 1/s$。引理 1 给出了这一点，因为调用 t刚结束时的剩余部分包含 U。令 $K = 8m^2 s$。在阈值 z处，构造二分图 $H(z)$，其两侧分别为 s次调用和s 非切割者；当 $g_{bh_t}^t \leq z$时，将 t 与 b 相连。每个 t 在每个阈值下都与 h_t 相连。因此，最大匹配的大小介于 1 和 s之间，并随 z单调不减。在 K^{-1}、……、$K^{-(s+1)}$ 中两个连续的阈值处，最大匹配的大小相同。将较小的阈值记为 x，较大的记为 Kx。

在调用 t中，当 $g_{ij}^t \leq x$时，画出弧 $i \to j$。如果其中一个有向图具有真源强连通分量 B，则让每个份额仍由原持有者持有，并令 $\alpha = x/(4m^2)$。在该次调用中，每个局外人对 B 中每个成员的差距都大于 x。其他调用产生的差距均非负。因此，所得分配束 $D_i = \bigcup_t Y_i^t$ 无嫉妒，并且每个局外人 i相较于每个 $b \in B$都具有大于 $4m^2 \alpha v_i(U)$的优势。

否则，所有有向图都是强连通的。 $H(x)$的最大匹配也是 $H(Kx)$中的最大匹配。如果它是完美匹配，令 B为所有非切割者。否则，从一个未匹配的调用开始，在 $H(Kx)$中搜索，沿着边走向非切割者，再沿着匹配边返回调用。令 B 为

到达的非切割者。这个集合非空，且其中每个元素都已匹配，因为若存在一条通向未匹配非切割者的路径，就能增广该匹配。在这两种情况下，已匹配的调用 $t(b)$、 $b \in B$互不相同，并且 $H(Kx)$中 $t(b)$的所有邻居都属于 B。

在调用 $t = t(b)$ 中，让 b拿走 h_t的份额。如果 $b \neq h_t$，则用一条从 h_t返回 b 的简单有向路径闭合弧 $b \to h_t$，并将环上每位代理人的份额分配给其后继者。其他所有份额仍由其持有者持有。相对于其原始份额，每位代理人在每次调用中损失至多 $xv_i(U)$。对于每个 $b \in B$，每位局外人 i对调用 $t(b)$ 中现在标记为 b的份额的差距都大于 Kx。这是因为非切分者的邻域 $t(b)$，而切割者的差距为 $1/s > Kx$。令 $\alpha = sx$，并将每个标签上的份额合并为 D_j。在代理人 i看来，每个 D_j的价值至多为 $\sum_t v_i(Y_i^t)$，而她自己的分配束与该总和相差不超过 $\alpha v_i(U)$。对于局外人 i和 $b \in B$，标签 b的价值比该总和低超过 $Kxv_i(U)$。因此， i相对于 b的优势超过 $(K - s)xv_i(U) > 4m^2\alpha v_i(U)$。

构造支配关系。在这两种情况下， $0 < \alpha \leq 1/(8m^2)$、$\log(1/\alpha) = O(m \log m)$，且对每个 i，输入嫉妒至多为 $\alpha v_i(U)$。应用引理 3，得到 $W_\sigma(j) = D_j \cup Z_j$和剩余部分 R。对于 $i \notin B$和 $b \in B$，无嫉妒性给出 $v_i(W_i) \geq v_i(W_{\sigma(i)})$。不等附加物的成本至多为刚证明的优势的 $2m\alpha v_i(U)$，因此

$$v_i(W_i) - v_i(W_{\sigma(b)}) > (4m^2 - 2m)\alpha v_i(U) \geq v_i(R).$$

因此，没有局外人能持有 B 中的标签。由双射性， $\sigma(B) = B$，且每个局外人都支配 B 中的每个成员。

划分剩余部分。设 $F = N \setminus B$，其中 N是当前代理集合。若 $|B| \leq |F|$，则递归地将 R 分配给 B，并将所得份额加入其当前分配束。每个局外人都能容忍 B 中任意成员拿走全部 R。否则，令 $P = \{i \in B : v_i(R) > 0\}$，并令 $p = |P|$。若 $p \leq 1$，则将 R分给 B 中唯一的正价值评估者；若 $p = 0$，则分给其中任意成员，然后结束。对于 $p \geq 2$，仅对 R应用修复，参与者为 P，输入分配束为空，容差为 $1/(8p^3)$。记 A_i 为按持有者划分的无嫉妒添加物，在 $B \setminus P$上取 $A_i = \varnothing$，并记 R' 为剩余部分。对于 $i \in P$，引理 3 给出 $v_i(R') \leq v_i(R)/(4p)$，因此

$$v_i(A_i) \geq \frac{v_i(R) - v_i(R')}{p} \geq v_i(R').$$

对于 $i \in B \setminus P$，同样的最终不等式仍然成立。将这些份额加在一起，既能保持B 内部无嫉妒，也能使 B 中的每个成员都支配 F中的每个成员。每个 $f \in F$ 仍然支配每个$b \in B$，因为 A_b 和 R' 是 R中互不相交的部分。现在，我们可以在 F之间递归分配 R'。每次递归调用只对新的剩余部分进行分配，并将其份额加到现有分配中。

查询计数。用 $T(m)$表示一次经认证修剪的非递减查询界，其中包括其保留边界记录。根据引理 1和引理3，切割者调用的成本为 $s(T(m) + O(m^2))$，第一次修复的成本为 $T(m) + O(m^5 \log m)$。使用时，对 P进行修复的成本为 $T(p) + O(p^4 \log p)$。在每个新保留的边界处，对其他每个代理人额外进行一次估值查询，就足以记录其分量价值，供下一次调用使用。即使在对 P 进行修复时的每次切分都计入这些估值查询，单阶段总成本也为 $O(mT(m) + m^5 \log m)$。所有图操作和交换步骤都使用已记录的价值。所有选择均按固定顺序确定，所有实际查询均采用附录 G 的组件规则。

递归调用至多一次，且至多涉及 $\lfloor m/2 \rfloor$ 个参与者。每个阶段至多使用 $m+1$ 次修剪，因此 $O(n)$ 在整个执行过程中。将各阶段的成本按减半规模求和可得$O(nT(n) + n^5 \log n)$次查询，其中包括初始价值记录。引理 7给出 $T(n) = O(n^5 \log n)$，符合要求。 □