正上下文下的表列后承：重构 Walukiewicz 的完备性证明

Kuniaki Tamura独立研究者，
日本东京kuniaki.tamura@gmail.com

arXiv:2611.30009v1 [cs.LO] 23 Nov 2026

摘要

我们为模态μ演算中的表列后承建立了一个正上下文提升定理：在明确的句法假设下，$\mathcal{T}_B \Rightarrow \mathcal{T}_C$ 蕴含$\mathcal{T}^{A(B)} \Rightarrow \mathcal{T}^{A(C)}$。证明按照出生时间排列给定关系的实例，并将重叠的公式出现归属于支撑它的最早实例。一个推论给出了在正上下文中以自动机范式进行双向替换的结论。结合一个独立的展开后果引理和 ANF 双模拟，该提升定理导出了对 Kozen 公理化之 Walukiewicz 完备性证明的自成一体的重构，并使其最小不动点步骤更加清晰。我们还给出了正则反驳存在性的有限奇偶博弈证明，以及从表列后承到薄反驳的双向传递。

关键词：模态 μ演算、Kozen 公理化、完备性、典范表列、表列后承、自动机范式、奇偶自动机。**MSC 2020：**03B45、03B70、68Q60。

1 引言

1.1 背景

模态 μ-演算由 Kozen [19] 发展为现代形式，它通过引入最小和最大不动点算子扩展了基础模态逻辑。它为描述和验证带标签迁移系统的性质提供了强大的框架，并涵盖了许多模态逻辑和时序逻辑，包括 LTL、CTL、CTL* 和 PDL。它与无限树上的自动机和奇偶博弈密切相关，因此成为理论计算机科学 [7, 12]中的核心研究课题。

Kozen [19] 提出了一种有限的希尔伯特式公理化 Koz：通过在最小正规模态逻辑 K 中加入前不动点公理和 Park 不动点归纳规则构造而成：

$$\alpha(\mu x.\alpha(x)) \to \mu x.\alpha(x) \quad \text{(Prefix)}, \qquad \frac{\alpha(\beta) \to \beta}{\mu x.\alpha(x) \to \beta} \quad \text{(Ind)}.$$

尽管这两条原则直接体现了 Knaster–Tarski 对最小不动点作为最小前不动点的刻画，要证明 Koz 的完备性却并不容易。Kozen 本人仅证明了语言中非合取的 片段的完备性；在该片段中，合取的两个分支不会同时展开同一个活跃 μ-变量（形式化定义见定义 2.5(4)）。完整的模态 μ-演算的完备性问题悬而未决十余年，直到 Walukiewicz [27]最终给出了证明。

他具有里程碑意义的证明结合了语义树与反驳 [21], 、 [13], 的析取范式、用于表列后承的博弈，以及控制无限轨迹的组合构造。

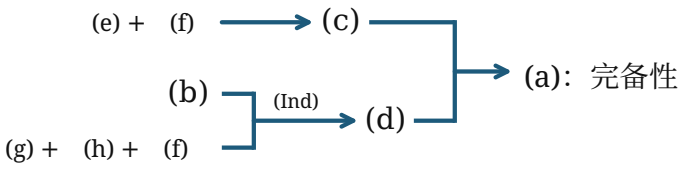

图 1：断言 (a)–(h) 之间的依赖关系。

1.2 Walukiewicz 归约

我们首先概述 Walukiewicz 的完备性证明的整体结构。本小节中使用的大多数技术概念将在第 2 节及后续各节中得到精确定义，相关结果也将在其中确立或引用；此处我们仅作非正式介绍。自动机范式（ANF）[1] 是一种析取语法，其中每个语义树分支都带有单一轨迹。反驳是这样一种语义树：它的所有无限分支都包含一条最小不动点轨迹；若某个活跃的最小不动点变量在合取延续中从未同时保留，则该反驳是细化的。表列后承是两个语义树之间保持轨迹的关系。有了这些概念，完备性归约可分解为八个断言：

(a) 如果 φ 不可满足，则 $\vdash \neg\varphi$。 (完备性，定理 6.8)

(b) 每个 φ都等价于一个自动机范式（ANF）中的公式 anf(φ)。（定理 4.19） [13]

(c) 如果一个 ANF 公式 $\widehat{\varphi}$ 不可满足，则 $\vdash \neg\widehat{\varphi}$。

(d) 每个 φ 都有一个等价的 ANF 公式 $\widehat{\varphi}$，且满足 $\vdash \varphi \to \widehat{\varphi}$。 (主引理，引理 6.7)

(e) 每个不可满足的 φ都有一个反驳。 [21] (Theorem 3.17)

(f) 如果 φ 有一个薄 反驳，那么 $\vdash \neg\varphi$。 （薄反驳定理，定理 3.21）

(g) 对于 ANF 公式 $\hat{\alpha}(x)$和 $\widehat{\varphi} = \text{anf}(\mu x.\hat{\alpha}(x))$， $\widehat{\varphi}$ 的语义树是 $\hat{\alpha}(\widehat{\varphi})$的语义树后承。（不动点步骤，命题 6.4）

(h) 如果 ANF 公式 $\widehat{\varphi}$ 的语义树是非合取公式 α的语义树后承，那么 $\alpha \vdash \widehat{\varphi}$ 有一个双侧薄反驳，从而根据 (f)， $\vdash \alpha \to \widehat{\varphi}$ 。（传递，定理 5.2）

断言 (c) 和 (d) 立即给出 (a)，而 (c) 由 (e) 和 (f) 得出，因为每个 ANF 公-式都是非合取的。断言 (d) 通过对 φ进行归纳法证明；唯一困难的情形是 $\varphi = \mu x.\alpha(x)$，因为即使 $\hat{\alpha}$处于 ANF 中， $\mu x.\hat{\alpha}(x)$也不一定是非合取的。令 $\widehat{\varphi} := \text{anf}(\mu x.\hat{\alpha}(x))$，根据 (g)、(h) 和 (f) 得到 $\vdash \hat{\alpha}(\widehat{\varphi}) \to \widehat{\varphi}$，再通过 (Ind) 得出结论（图 1）。

有三个特点使得 [27]中的证明难以验证：(1) 语义树取决于非模态规则的应用顺序；(2) 表列后承是一种带有“所有子节点”移动的博弈，其策略必须组合起来并转换为反驳；(3) 在集合标记节点中，产生相同公式的不同线程会合并，因此必须决定保留哪一段历史——断言 (f) 使用令牌列表，而断言 (g) 使用优先级和节点赋值。

[1] 自动机范式是 Janin 和 Walukiewicz 的析取公式 这一类公式 [13], ，也用于 [27]. 我们使用这个名称 ANF，因为在第 4 节中，这些公式是从一个确定性奇偶自动机中读出的。

1.3 相关工作

Enqvist、Seifan 和 Venema [10] 用交替模态奇偶自动机、一步逻辑、可满足性博弈和推论博弈重新表述了断言 (f)–(h)；该框架还可扩展到余代数 μ演算 [11]。另一条研究路线则将确定化嵌入带注释的语义树系统 [14, 15, 24]。Afshari 和 Leigh [4]提出了一种基于循环系统 Clo 的无切完备性证明，并由此推导出 Koz 的完备性。随后，Kloibhofer [17]证明 Clo 并不完备，揭示了这一方法中的一个漏洞（另见 [18]）；Afshari、Leigh 和 Menéndez Turata [5]通过同态可容许性和范式分析了非良基证明与循环证明，解释了这一反例，并证明了带切的完备性。他们揭示的循环证明、良基证明与 Kozen 公理化之间的联系，为这一微妙的完备性论证提供了另一种重构方式。

Walukiewicz 的原始证明及其自动机理论改写，尤其是 Enqvist、Seifan 和 Venema 的工作 [10], ，仍然是我们理解 Koz 的完备性的核心。特别是，能否在不将公式化为析取范式的情况下证明完备性，仍是一个开放问题。相关的带注释系统与重置系统 [8, 20, 1, 2, 3] 尚不能为完整语言下的 Koz 完备性提供证明。

本文修订并取代了作者早先的预印本 [25], 。该预印本中的基于规则的迹定义不明确，迹论证存在错误，而且显式的索引出现记录并未简化验证。我们以基于标签的边迹关系（定义 3.8）、黑盒确定化（第 4.2 节）、一步饱和、断言（e）的有限博弈证明、双向传递，以及基于正上下文提升、老化副本和盒隔离的最小不动点论证取而代之。

1.4 贡献

Walukiewicz 归约的八项断言出自 Walukiewicz。我们的主要贡献是针对表列后承提出一个独立的结构定理，并以模块化方式重构完备性证明（表 1）。

表列后承的正上下文提升。正上下文提升定理（定理 6.1）表明，在满足明确的句法假设时，任意表列推论关系$\mathcal{T}_B \Rightarrow \mathcal{T}_C$ 都可以经由正上下文 $A(X)$提升为$\mathcal{T}^{A(B)} \Rightarrow \mathcal{T}^{A(C)}$。 B 和 C 都不必处于 ANF 中。证明通过年长者优先规则控制给定关系的重叠副本，从而确保迹归属最终稳定化。作为直接应用，推论 6.5 给出了正上下文内的双向 ANF 替换，具体限定条件见该推论。这是 Enqvist、Seifan 和 Venema [10, 中的双向陈述的表列理论类比， 4], 并非对他们的自动机理论结果的形式化推广。

正则反驳的有限奇偶博弈构造。 用于 ANF 的确定性奇偶监视器还产生一个有限奇偶博弈，其位置策略可给出正则反驳（定理 4.14）。这通过一种标准方法，为断言（e）提供了自洽的证明，无需采用 [21]中的博雷尔确定性和独立的 Rabin树自动机论证。

一步饱和规范表与双向传递。 典范表以一步方式解析非模态规则，不受其应用顺序影响，并明确记录轨迹（第 3 节）。我们直接从评估博弈证明其充分性，并将表列后承传递到纤薄双侧反驳（断言（h）、定理 5.2）。附录 A 提供了相应的断言 (f) 证明。

完备性作为主要应用。 总体而言，这一重构并没有更简短；其优势在于模块化。最小不动点步骤的核心难点被独立于完备性归约，集中于提升

方面	Walukiewicz（2000）	Enqvist等（2018）	本文
主要对象	逐规则语义树	交替奇偶 au- 自动机	典范表列 with 一步饱和
轨迹	路径函数	状态关 系流	显式边迹关系
奇偶性	变量 依赖 顺序	状态优先级	绑定器嵌套顺序
后果	双玩家 语义树 game	自动机 后果 game	节点关系 Z；映射为 函数情形
范式	回边 树； 虚拟合取项	析取的 伴随项 和翻译	从 fi- 读取的公式 nite 前缀树 $\mathcal{G}_\Gamma$
断言 (f)： con- 文本控制权	令牌列表	lrd/mst 和重置	记录的出现次数
断言 (g)：合并- 历史	优先级函数和 节点赋值	命题 7.4 中的出生日期 tb sition 7.4	老化副本与年长者优先 所有权

表 1： [27], [10],与本文证明架构的比较 .

定理中。将其作为黑箱，与展开后果引理和 ANF 双模拟结合使用，可以简短地推导出断言 (g)（命题 6.4），并使这一步骤更加清晰。其余断言则导出 Koz 的完备性（定理 6.8）。

阅读指南与资料来源。本文证明了所有断言 (a)–(h)；附录 A 重现了 Kozen 和 Walukiewicz 的薄反驳论证 [19, 27]。我们引用求值博弈适切性 [26, 9], 、Büchi 确定化 [23, 22], 和位置确定性 [9, 26]。预备知识之后，第 3 节介绍典范表列与后承，第 4 节构造 ANF 和正则反驳，第 5 节证明双向传递。第 6 节从闭包与展开推出完备性；第 7 节则仅借助传递章节中的引理 5.1 证明这些结构性结果。对结构性论证感兴趣的读者，可以从表列后承直接转到这些陈述与证明；有限博弈 ANF 构造仅在完备性应用中才需要。

2 预备知识

2.1 记号

对于集合 X，$\mathcal{P}(X)$ 表示其幂集。树 $(T,\ C,\ r)$ 具有子关系 C，使得每个节点都恰好通过一条有限 C-路径从根节点 r 到达； $C(t)$ 是 t 的子节点集合，祖先、后代、子树和分支（从 r出发的极大 C-路径）均按通常方式定义，而 s 是 t 的祖先，当且仅当$proper$ $s \neq t$。从 s 到 t 的路径包含两个端点；带标记树及其节点集合用同一个字母表示。树的绘制方式与推导相同，根节点位于底部：节点的子节点位于其上方，从根节点向叶节点进行的构造称为自底向上。

2.2 语法

固定一个由命题变量构成的可数无限集 Prop。我们将标准模态算子 $\Diamond$ 和 $\Box$作为原始的，并将覆盖模态 ∇引入为一种结构化缩写。

定义 2.1（公式）。 正范式的模态 μ-演算公式由以下语法生成：

$$\varphi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \neg p \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \Diamond\varphi \mid \Box\varphi \mid \mu x.\varphi \mid \nu x.\varphi,$$

其中 $p,\ x \in$命题集，且在 $\eta x.\varphi(\eta \in \{\mu,\ \nu\})$ 中不出现文字 $\neg x$（正性条件）。在不会引起歧义时省略括号。文字 是形如$\top,\ \bot,\ p,\ \neg p$的公式。

对于公式的有限集 Φ，我们用 $\bigvee\Phi$ 和 $\bigwedge\Phi$ 分别表示其元素的析取和合取，并按照公式上的固定全局线性序向右嵌套，约定 $\bigvee\emptyset := \bot$、 $\bigwedge\emptyset := \top$，以及 $\bigvee\{\psi\} = \bigwedge\{\psi\} := \psi$。在还包含一个合取项的合取中，省略空合取： $\varphi \wedge \bigwedge\emptyset$ 表示 φ。

覆盖模态。沿用 [13, 27], ，对于有限集 Φ，我们使用以下缩写

$$\nabla\Phi := \Big(\bigwedge_{\psi\in\Phi} \Diamond\psi\Big) \wedge \Box\bigvee\Phi,$$

因此 $\Diamond\varphi \equiv \nabla\{\varphi,\ \top\}$、 $\Box\varphi \equiv \nabla\emptyset \vee \nabla\{\varphi\}$，而 $\nabla\emptyset$ 表示不存在后继。这使模态语义表规则保持统一（定义 3.5）。全文中， $\Diamond$ 和 $\Box$ 均写成 ∇-形式；公式 $\nabla\Phi$称为 ∇-公式。

定义 2.2（否定）。 公式 φ的德摩根对偶（否定范式） $\sim\varphi$ 通过以下方式归纳定义： $\sim\top := \bot,\ \sim\bot := \top,\ \sim p := \neg p,\ \sim\neg p := p;\ \sim(\alpha \vee \beta) := \sim\alpha \wedge \sim\beta,\ \sim(\alpha \wedge \beta) := \sim\alpha \vee \sim\beta;$

$$\sim\Diamond\varphi := \Box\sim\varphi, \qquad \sim\Box\varphi := \Diamond\sim\varphi;$$

$\sim\mu x.\alpha(x) := \nu x.\sim\alpha(\neg x)$，以及 $\sim\nu x.\alpha(x) := \mu x.\sim\alpha(\neg x)$，其中在 $\sim\alpha(\neg x)$中，任何由此产生的双重否定 $\neg\neg x$ 均读作 x。对原始语法中的公式应用归纳法， $\sim\sim\varphi = \varphi$ 作为语法恒等式成立；如果 x 在 $\alpha(x)$中是正的，那么 x 在 $\sim\alpha(\neg x)$中也是正的。

对于 ∇-公式，我们使用其德摩根对偶的以下 ∇形式：

$$\sim\nabla\Phi := \bigvee_{\psi\in\Phi} (\nabla\emptyset \vee \nabla\{\sim\psi\}) \ \vee\ \nabla\{\bigwedge\{\sim\psi \mid \psi \in \Phi\}, \top\}.$$

在 Koz 中，这可证明等价于 $\bigvee_{\psi\in\Phi} \Box\sim\psi \vee \Diamond\bigwedge_{\psi\in\Phi} \sim\psi$（第 2.4 节）。

我们用 Free(φ) 和 Bound(φ) 分别表示 φ的自由变量和约束变量的集合，用 Sub(φ) 表示 φ的集合 子公式。当公式写成 ∇形式时，我们将 $\nabla\Phi$ 视为单个语法构造，其 Sub($\nabla\Phi$) $= \{\nabla\Phi\} \cup \bigcup_{\psi\in\Phi}$Sub($\psi$)。我们用 $\varphi(x)$ 表示 x可能在 φ中自由出现，用 $\varphi(\psi)$（或 $\varphi[\psi/x]$）表示无捕获替换，即替换过程中 ψ 的任何自由变量都不会被不动点绑定符 μy 或 νy 绑定到 φ。

命名不动点。 通常， [19, 27], 中的每个约束变量 x 都有唯一的定义子公式$\eta_x x.\varphi_x$；展开会将 $\eta_x x.\varphi_x$ 替换为其体 φ_x，而 x的后续出现会被重新生成 为φ_x。

定义 2.3（干净公式与受保护公式）。 公式 φ称为干净的（或命名良好的），如果 Free(φ)∩Bound(φ) $= \emptyset$，并且对于每个 $x \in$Bound(φ)， φ 都存在唯一一个形如 $\eta x.\psi$的子公式；我们用 $\eta_x x.\varphi_x$ 表示这个唯一子公式（因此 $\eta_x \in \{\mu,\ \nu\}$ 是 x 的不动点类型，而 φ_x 是其体）。如果干净公式 φ 中的每个 x 出现都位于某个模态算子 $\Diamond$或 $\Box$（或者在 ∇-形式中，位于某个 ∇）在 φ_x内部的辖域内，那么称 φ 为受保护的。若有限公式集 Γ 的合取 $\bigwedge\Gamma$ 是干净（受保护的），则称该集合为干净（受保护的）。

备注 2.4（被代入公式的多次出现）。 由于 Sub(φ) 被定义为公式的集合，而非语法树位置的集合，因此较大公式中不动点公式 ψ 的多个相同出现都算作 Sub 中的单个元素。因此，只要 $\alpha(x)$ 和 ψ 是干净的，Bound(α)$\cap$(Bound(ψ) $\cup$Free(ψ)) $= \emptyset$，且 Bound(ψ) $\cap$ Free(α) $= \emptyset$，那么代入后的公式 $\alpha(\psi)$ 就是干净的，无论 x 在 $\alpha(x)$ 中自由出现多少次。这一观察使我们无需在不动点步骤 $\widehat{\alpha}(\widehat{\varphi})$（第 6 节）中为 ψ 的不同副本分别重命名约束变量。

定义 2.5（嵌套、依赖、活性与非合取性）。 设 φ 是干净的，且 $x, y \in$Bound(φ)。

1. 嵌套序： $x \sqsubseteq y$（x 相对于 y是外层的 ）当且仅当 $\eta_y y.\varphi_y \in$ Sub($\eta_x x.\varphi_x$)。这是 Bound(φ) 上的一个偏序；我们用 $x \sqsubset y$ 表示其严格部分。 2. 依赖序： $x \preceq y$（y 依赖 x）是关系“$x \in$ Free($\eta_y y.\varphi_y$)”的自反传递闭包。 3. 活性： 若子公式 ψ 中有 $y \in$Bound(φ) 在 ψ 中自由出现，且满足 $x \preceq y$，则 x 在该子公式中是活跃的 。 4. 非合取性： 若对于每个 μ-变量 $x \in$Bound(φ)（即 $\eta_x = \mu$）以及每个合取式 $\alpha \wedge \beta \in$ Sub(φ_x)（不包括隐藏在 $\nabla\Phi$缩写中的合取式），变量 x 在 α 和 β中至多有一个是活跃的，则称其为非合取的 。

例子 2.6（嵌套、间接依赖与活性）。 考虑这个干净的守卫公式 la

$$\varphi := \mu x.(p \vee \Diamond \nu y.((x \wedge q) \vee \Diamond \mu z.((y \wedge r) \vee \Diamond z))).$$

它的绑定符恰当地嵌套，因此 $x \sqsubset y \sqsubset z$。此外， x 在 y的定义公式中自由出现，而 y 在 z的定义公式中自由出现。因此

$$x \preceq y \preceq z, \qquad \text{and therefore} \qquad x \preceq z.$$

最后一个依赖是间接的： x 在 $\eta_z z.\varphi_z$中并非自由出现。对于子公式 $\psi := \Diamond z$，我们有 $z \in$ Free(ψ) 和 $x \preceq z$，因此 x 在 ψ 中是活跃的，尽管 $x \notin$Free(ψ)。所显示的公式是非合取的：在每个显式合取中， x 至多在一侧活跃。像 $\Diamond y \wedge \Diamond z$ 这样的合取若出现在 φ_x 中则不允许，因为 x 会在两个合取项中都活跃。

如果在一个干净公式中 $x \in$ Free($\eta_y y.\varphi_y$)，那么 $x \sqsubset y$；因此 $\preceq \subseteq \sqsubseteq$。非合取性确保活跃的 μ-变量的线程不会在显式合取处分叉（但它们仍可能在 ∇的模态后继处分叉）。

2.3 语义

一个 *Kripke* 模型 $\mathbb{S} = (S, R, \lambda)$ 由一个可能世界的集合 S、一个关系 $R \subseteq S \times S$ 和一个赋值λ : 命题 $\to \mathcal{P}(S)$ 构成；在环境 ρ 下的指称 $[\![\varphi]\!]^{\mathbb{S}}_{\rho} \subseteq S$ 按通常方式定义 [7]。对于不动点，令 $F_{\alpha,\rho}(U) := [\![\alpha]\!]^{\mathbb{S}}_{\rho[x \mapsto U]}$ 对于 $U \subseteq S$。根据正性$F_{\alpha,\rho}$ 是单调的，因此 Knaster–Tarski定理给出

$$[\![\mu x.\alpha]\!]^{\mathbb{S}}_{\rho} := \mathrm{lfp}(F_{\alpha,\rho}) = \bigcap \{U \subseteq S \mid F_{\alpha,\rho}(U) \subseteq U\},$$

$$[\![\nu x.\alpha]\!]^{\mathbb{S}}_{\rho} := \mathrm{gfp}(F_{\alpha,\rho}) = \bigcup \{U \subseteq S \mid U \subseteq F_{\alpha,\rho}(U)\}.$$

我们有

$$s \in [\![\nabla\Phi]\!]^{\mathbb{S}}_{\rho} \iff \forall \psi \in \Phi\, \exists t\, (sRt \wedge t \in [\![\psi]\!]^{\mathbb{S}}_{\rho}) \text{ and } \forall t\, (sRt \Rightarrow \exists \psi \in \Phi\, t \in [\![\psi]\!]^{\mathbb{S}}_{\rho}),$$

以及 $[\![\sim\varphi]\!]^{\mathbb{S}}_{\rho} = S \setminus [\![\varphi]\!]^{\mathbb{S}}_{\rho}$。对于闭公式，我们省略环境 ρ。我们将 $\mathbb{S}, s \models \varphi$ 写作$s \in [\![\varphi]\!]^{\mathbb{S}}$，并将 $\varphi \models \psi$ 和 $\varphi \equiv \psi$ 写作全局语义后承和语义等价。

2.4 Kozen 公理化

Kozen [19]将 Koz 表示为一个 Hilbert 风格系统：如引言中所示，在最小正规模态逻辑 K 的基础上扩展（Prefix）和（Ind）。我们采用一个等价的基于集合的 Tait 风格表示，并以双侧形式书写。其判断是序列式

$$\Gamma \vdash \Delta,$$

其中 Γ 和 Δ 是公式的有限集合，读作 $\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta$。我们将 α，Γ 写作 $\{\alpha\} \cup \Gamma$，右侧同理。由于序列式采用集合标记，交换和收缩是隐含的。

语义树和反驳采用单侧形式书写，使用

$$\Gamma \vdash \quad := \quad \Gamma \vdash \emptyset.$$

在以下规则下，双侧形式和单侧形式可相互推导

$$\Gamma \vdash \Delta \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma, {\sim}\Delta \vdash, \qquad {\sim}\Delta := \{{\sim}\delta \mid \delta \in \Delta\}. \tag{1}$$

初始序列式和结构规则。

$$\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \varphi \ (\mathrm{Id}), \qquad \bot, \Gamma \vdash \Delta \ (\bot L), \qquad \Gamma \vdash \Delta, \top \ (\top R),$$

$$\varphi, {\sim}\varphi, \Gamma \vdash \Delta \ (\mathrm{Tau}L), \qquad \Gamma \vdash \Delta, \varphi, {\sim}\varphi \ (\mathrm{Tau}R),$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\alpha, \Gamma \vdash \Delta} \ (\mathrm{Weak}L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha} \ (\mathrm{Weak}R) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \qquad \alpha, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \ (\mathrm{Cut}).$$

命题规则。

$$\frac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta \qquad \beta, \Gamma \vdash \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \vdash \Delta} \ (\vee L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \vee \beta} \ (\vee R),$$

$$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \vdash \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \vdash \Delta} \ (\wedge L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \qquad \Gamma \vdash \Delta, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \wedge \beta} \ (\wedge R).$$

模态规则。 对于有限集合，设 $\Box\Gamma := \{\Box\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ 和 $\Diamond\Delta := \{\Diamond\delta \mid \delta \in \Delta\}$。正规模态规则及其对偶表示为

$$\frac{\psi, \Gamma \vdash \Delta}{\Diamond\psi, \Box\Gamma \vdash \Diamond\Delta} \ (\Diamond L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Box\Gamma \vdash \Diamond\Delta, \Box\psi} \ (\Box R).$$

额外的旁公式通过弱化给出。这是同一正规模态规则的两种双边对偶表示；在 (1) 下，两者都化为以下将在下文使用的单边规则：

$$\frac{\psi, \{\alpha \mid \Box\alpha \in \Gamma\} \vdash}{\Diamond\psi, \Gamma \vdash} \ (\Diamond).$$

不动点原理。 对于 $\alpha(x)$ 中的正的 x，其中所有替换均假定为不捕获变量的，

$$\alpha(\mu x.\alpha(x)) \vdash \mu x.\alpha(x) \ (\mathrm{Prefix}), \qquad \frac{\alpha(\beta) \vdash \beta}{\mu x.\alpha(x) \vdash \beta} \ (\mathrm{Ind}).$$

它们的上下文形式可由 (Weak$L$)、(Weak$R$) 和 (Cut) 得出；相应的 ν-原理则由对偶性得出。

推导是由这些初始序列式和规则构成的有限树。对于任意公式，我们使用 $\alpha \to \beta := {\sim}\alpha \vee \beta$，并将 $\vdash \varphi$ 记作 $\emptyset \vdash \varphi$。根据 (1)、命题规则和 (Cut)，三个判断 $\vdash \alpha \to \beta$、$\alpha \vdash \beta$ 和 $\alpha, {\sim}\beta \vdash$ 可相互推导。我们记作 $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$，并称

若 α 和 β 可在 Koz 中被证明等价，也就是 $\alpha \vdash \beta$ 和 $\beta \vdash \alpha$ 均成立。对于任意公式φ，$\neg\varphi$ 表示其德摩根对偶 $\sim\varphi$（定义 2.2）；因此 $\vdash \neg\varphi$ 和 $\varphi \vdash$ 可相互推导。

当前件为空时，我们将（Bot）和（Tau）分别记作（$\Delta = \emptyset$ 实例）和（Tau$L$）的 $\bot L$ 实例，并将（$\vee L$）、（$\wedge L$）和（Weak$L$）的相应实例分别简写为（$\vee$）、（$\wedge$）和（Weak）。我们还使用以下单侧形式，它们都可由（1）导出：

$$\frac{\Gamma, \sim\alpha \vdash \qquad \alpha, \Gamma' \vdash}{\Gamma, \Gamma' \vdash}\ (\mathrm{Cut}), \qquad \alpha(\mu x.\alpha(x)), \sim\mu x.\alpha(x) \vdash\ (\mathrm{Prefix}),$$

$$\frac{\alpha(\beta), \sim\beta \vdash}{\mu x.\alpha(x), \sim\beta \vdash}\ (\mathrm{Ind}).$$

我们将这个导出的单边表示称为<同侧演算>；它是语义树和反驳所使用的形式。

备注 2.7（三种表示的等价性）。对于有限的 Γ，Δ，$\Gamma \vdash \Delta$ 当且仅当 Γ，$\sim\Delta \vdash$ 当且仅当 $\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta$ 可在 Kozen 希尔伯特系统中由结构规则和序列规则的希尔伯特式解读导出。在定义 2.2 的 ∇-形式中，$\sim\sim\varphi$是可证明等价的，而非与 φ 在句法上完全相同（引理 2.8(3)），因此（Tau$L$）、（Tau$R$）和（1）仍然可导出。

引理 2.8（标准事实）。 *1.* Koz 相对于 *Kripke* 语义是可靠的：如果 $\Gamma \vdash$，那么$\bigwedge\Gamma$ 是不可满足的。可导性在对自由变量进行公式的无捕获替换下保持封闭。

2.（展开与余归纳）$\vdash \eta x.\alpha(x) \leftrightarrow \alpha(\eta x.\alpha(x))$ 对于 $\eta \in \{\mu, \nu\}$。对偶于（Ind），如果 $\beta \vdash \alpha(\beta)$，那么 $\beta \vdash \nu x.\alpha(x)$。因此，展开规则

$$\frac{\alpha(\eta x.\alpha(x)), \Gamma \vdash}{\eta x.\alpha(x), \Gamma \vdash}\ (\eta\text{-unf})$$

是可导出的。

3.（单调性）如果 x 在 $\chi(x)$ 中是正的，并且 $\alpha \vdash \beta$，那么 $\chi(\alpha) \vdash \chi(\beta)$。如果 $\alpha(x) \vdash \beta(x)$，那么$\eta x.\alpha(x) \vdash \eta x.\beta(x)$。

4.（该 ∇-规则）令 $\Gamma = \{\nabla\Psi_1, \ldots\ldots, \nabla\Psi_i\} \cup \Delta$，令 $1 \le k \le i$ 和 $\psi \in \Psi_k$。则规则

$$\frac{\psi,\ \{\bigvee\Psi_n \mid n \neq k\} \vdash}{\Gamma \vdash}\ (\nabla)$$

可以推导，其前提中也包含 $\bigvee\Psi_k$ 的变体同样可以推导。以下双侧规则也可以推导。令 $A_1, \ldots, A_n, B$ 为公式的有限集，并为每个$b \in B$选取 $1 \le k_b \le n$ 和 $a_b \in A_{k_b}$：

$$\frac{\{\, a_b, \{\bigvee A_j \mid j \neq k_b\} \vdash b \ \mid\ b \in B \,\} \qquad \bigvee A_1, \ldots, \bigvee A_n \vdash \bigvee B}{\nabla A_1, \ldots, \nabla A_n \vdash \nabla B}\ (\mathrm{Cover}).$$

同样，如果 $\bot \in \Gamma$ 或 $\{p, \neg p\} \subseteq \Gamma$，那么 $\Gamma \vdash$。

5. 每个公式 φ 在 Koz 中都可证明地等价于一个具有相同自由变量的干净受保护公式（写作 ∇- 形式），且其中在 φ 中为正（受保护）的每个自由变量仍保持为正（受保护）。

6.（重命名）如果 φ' 是由 φ 对约束变量进行无捕获重命名得到的，那么$\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$。

证明。第 (1)–(3)、(5) 和 (6) 项是关于 Kozen 公理化 [19, 27]的标准事实。(4) 由于 $\nabla\Psi_k$ 包含合取项 $\Diamond\psi$，且每个 $\nabla\Psi_n$ 都包含合取项 $\Box\bigvee\Psi_n$，反复应用 (∧) 可将$\Gamma \vdash$ 化为 $\Diamond\psi,\ \{\Box\bigvee\Psi_n \mid n \neq k\}$ $\Gamma'' \vdash$，其中某个 Γ''是有限的。（对于变体，也保留 $\Box\bigvee\Psi_k$。）以主公式 $\Diamond\psi$ 为主元素应用规则 (◊)，可将其化为 $\psi,\ \{\bigvee\Psi_n \mid n \neq k\}\quad A \vdash$，其中 A 由其余方框公式构成，再应用（弱化规则）即可化为前提。对于（覆盖规则），展开 ∇ 的各个出现，并使用命题规则和模态规则：左侧前提族提供 ∇B的菱形义务，而最后一个前提提供其方框义务。最后一个断言由（Bot）或（Tau）再接（弱化规则）得到。 □

因此，第 3 节中典范表列和反驳的所有规则，要么是 Koz 的原始规则，要么是其可推导规则（自底向上阅读）：(∨)、(∧) 和（弱化规则）是原始规则，(∇) 是引理 2.8(4)，而展开和再生步骤则是在定义 3.1 的展开 · 下，对 (η-unf) 的实例。反驳与推导的唯一区别在于，反驳可能包含无限分支；Kozen 的上下文记录规则（附录 A 中的引理 A.1）是截断这些分支的工具。

2.5 ω-自动机与 ω-博弈的约定

我们假设读者熟悉 ω-自动机和无限双人博弈；参见 [12]。由于不同文献中的约定各异——接受条件是基于状态还是转移、优先级取最大值还是最小值，以及如何处理死端——我们在此明确本文采用的约定。

对于无限序列 π，Inf(π) 是在 π 中无限次出现的元素集合，而映射 g 按字母逐个应用于 π。

自动机。一个 ω-自动机是一个元组

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_I, \delta, \mathsf{Acc}),$$

其中，Q 是有限状态集，Σ 是有限字母表，$Q_I \subseteq Q$ 是初始状态集，$\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ 是转移关系，而 Acc 是无限运行的接受条件。在 $a_0a_1\cdots \in \Sigma^\omega$ 上的运行是一个无限序列 $q_0q_1\cdots$，其中 $q_0 \in Q_I$，并且对每个 n，$(q_n, a_n, q_{n+1}) \in \delta$。如果 $Q_I = \{q_0\}$ 是单元素集（在元组中写作 q_0），且每个有序对 (q, a) 都恰有一个后继，则该自动机是确定性的。

我们使用两种 ω-自动机 [12]。NBA 是非确定性 Büchi 自动机：指定一个接受转移集 $F \subseteq \delta$，当且仅当运行无限次使用 F 中的转移时，该运行才是接受的。DPA 是确定性奇偶自动机：每个状态 q 都有一个优先级 pri(q) $\in \mathbb{N}$，其取值范围有限；当且仅当 max Inf(pri(π)) 为偶数时，运行 π 才是接受的。全文中，偶数对反驳者有利：偶数分支携带一条 μ-迹（定义 3.10），偶数优先级则产生一个 μ-绑定子（定义 4.16）。

博弈。我们在竞技场 $(V_{\mathsf{Modl}}, V_{\mathsf{Ref}}, E)$ 上使用双人博弈，其中 $V := V_{\mathsf{Modl}} \cup V_{\mathsf{Ref}}$ and $E \subseteq V \times V$；令 $E(v) := \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$。对局是竞技场中的极大路径。玩家 P 的策略为每个以位置 $v \in V_P$ 结束、且满足 $E(v) \neq \emptyset$ 的有限对局指定一个 $E(v)$中的后继。若在 P位置上采取的每一步都由该策略指定，则称对局与该策略相容；若每个相容对局都由 P获胜，则称该策略为获胜策略。若策略的选择仅取决于当前位置，则称其为位置策略；此时我们将其视为满足以下条件的映射$f : V_P \to V$：只要 $E(v) \neq \emptyset$，就有 $f(v) \in E(v)$。有限对局终止于一个死端（$E(v) = \emptyset$），其所有者输掉该局。在奇偶博弈中，给定值域有限的 $\Omega : V \to \mathbb{N}$，当且仅当 max Inf($\Omega(\pi)$) 为偶数时，Ref 赢得无限对局 π [12]。

定理 2.9 (位置确定性 [9])。在奇偶博弈中，从每个位置出发，恰有一名玩家拥有获胜策略，并且每名玩家都有一个位置策略，能够从其获胜区域内的每个位置获胜。关于有限竞技场，另见 *[6]*；关于任意竞技场，参见 *[26,*定理 *5.24]*。

通过将由 P 拥有的死端替换为一个自环来处理死端；该自环的优先级奇偶性对 P的对手有利。

本文中出现三种博弈。第 2.6 节的求值博弈是在可能无限的竞技场上进行的奇偶博弈；定义 3.11 中的表格博弈通常是无限的，且其获胜条件不是奇偶条件；第 4.4 节中的博弈则是有限奇偶博弈。只有第一种和第三种直接使用奇偶博弈确定性。

2.6 求值博弈

我们使用模态 μ-演算的标准求值博弈 [26, 定义 2.21 和表 3–4]；其充分性定理将作为黑箱使用。

定义 2.10（闭包）。对于一个 ξ 属于 ∇-形式的公式，$\mathsf{Cl}(\xi)$ 是满足以下条件的最小公式集合：

$$\mathsf{Sub}(\xi) \subseteq \mathsf{Cl}(\xi), \qquad \nabla\Psi \in \mathsf{Cl}(\xi) \Longrightarrow \mathsf{Sub}(\bigvee \Psi) \subseteq \mathsf{Cl}(\xi).$$

对于有限集 Γ，令 $\mathsf{Cl}(\Gamma) := \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\mathsf{Cl}(\gamma)$。

设 ξ 是一个 ∇-形式的干净公式。参与者为 $\exists$ 和 $\forall$；他们分别扮演上述约定中的 Modl 和 Ref，因此，若出现死端，则由其所有者输掉。

定义 2.11（求值博弈）。设 $\mathbb{S} = (S,\ R,\ \lambda)$ 是一个 Kripke 模型。求值博弈求值博弈$\mathrm{EG}(\xi,\ \mathbb{S})$ 的位置为 $(\varphi,\ w)$，其中 $\varphi \in \mathsf{Cl}(\xi)$ 且 $w \in S$；中间位置为$\langle\nabla\Psi,\ w,\ \psi\rangle\!\diamond$，其中 $\psi \in \Psi$；所有者和移动如下：

- $(\varphi_1 \vee \varphi_2,\ w)$：所有者为 $\exists$；可移动到 $(\varphi_1,\ w)$、$(\varphi_2,\ w)$。
- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2,\ w)$：所有者为 $\forall$；可移动到 $(\varphi_1,\ w)$、$(\varphi_2,\ w)$。
- $(\eta_x x.\varphi_x,\ w)$ 和 $(x,\ w)$，其中 $x \in \mathsf{Bound}(\xi)$：所有者为 $\exists$；有一次移动，至 $(\varphi_x,\ w)$；从 $(x,\ w)$ 出发的移动是 x 的再生 。
- $(l,\ w)$，l 一个文字：没有移动；若 l 在 w 处不成立，则所有者为 $\exists$；若 l 在 w 处成立，则所有者为 $\forall$。
- $(\nabla\Psi,\ w)$：所有者为 $\forall$；对于 $\psi \in \Psi$，移动到 $\langle\nabla\Psi,\ w,\ \psi\rangle\!\diamond$；对于 wRv，移动到 $(\bigvee\Psi,\ v)$。
- $\langle\nabla\Psi,\ w,\ \psi\rangle\!\diamond$：所有者为 $\exists$；对于 wRv，移动到 $(\psi,\ v)$。

$\forall$当且仅当无限次再生的变量中按 $\sqsubseteq$ 排序最小的变量是 a μ-变量时，才赢得无限对局。

定理 2.12 (评估博弈的适切性 [26, 定理 3。30], [9])。 设 ξ 是 ∇-形式的干净公式， $\mathbb{S}$ 是一个 *Kripke* 模型， s 是一个世界。那么， $\mathbb{S}$当且仅当 $\exists$ 在 $\mathrm{EG}(\xi, \mathbb{S})$ 中从 (ξ, s)开始有获胜策略。此外，每位玩家都有一个位置策略，能从其获胜区域中的每个位置获胜。

证明。 在 [26] 中，模态词 $\Diamond$ 和 $\Box$ 是原始的；将该博弈记作 $\mathrm{EG}^{\circ}(\xi,\ \mathbb{S})$，其中 $\nabla\Psi$读作 $\bigwedge_{\psi\in\Psi}\Diamond\psi \wedge \Box\bigvee\Psi$。位置是公式而非出现，因此按此读法，元素 ψ 的两次出现对应相同的位置（参见注记 2.4），且 [26]的证明适用于按此读法理解的干净公式。

对局。在 EG° 中，一场经过 $(\nabla\Psi,\ w)$ 的对局，会沿着该读法中的合取式继续，由 $\forall$ 移动至 $(\Diamond\psi,\ w)$ 或 $(\Box\bigvee\Psi,\ w)$；随后 $\exists$ 移动至某个 $(\psi,\ v)$，或 $\forall$ 移动至某个 $(\bigvee\Psi,\ v)$，其中 wRv。将每个这样的片段收缩为定义 2.11 中的移动（第一种情况下，经过 $\langle\nabla\Psi,\ w,\ \psi\rangle\!\diamond$），即可得到两个博弈中从 $(\xi,\ s)$ 出发的对局之间的一个双射。收缩后的片段不包含不动点公式或约束变量，因此该双射保留展开与再生的序列、对局的有限性以及最终死端的所有者。因此，一个博弈中任一玩家的策略都会诱导出另一个博弈中的策略，其相容对局

恰好是原博弈中相容对局的像；因此，只要获胜条件一致，一个博弈中从 $(\xi,\ s)$ 出发获胜的玩家，在另一个博弈中也当且仅当是同一玩家获胜。

获胜条件。 [26] 的获胜条件使用无限次展开的变量中依赖序最高的变量；根据 [26, 命题 2.24]，这样的变量必定存在。对于其中 $\preceq$最小的变量，由于其绑定子只会被进入有限次，因此无限次展开等价于无限次再生。因此它是无限次重新生成的变量中 $\preceq$最小的一个，因而也是 $\sqsubseteq$ 最小的一个，因为 $\preceq\ \subseteq\ \sqsubseteq$，所以两个获胜条件一致。第一个结论得证。

位置策略。 定义 2.11 的条件是一个奇偶条件：令 $d(x)$为 $x \in$ Bound(ξ)的严格 $\sqsubseteq$前驱数量，其中 $N :=$ |Bound(ξ)|；并令 $\Omega(x,\ w)$:=2($N - d(x)$)，当 $\eta_x = \mu$时；$\Omega(x,\ w) :=$ 2($N - d(x)$) $+1$ 当 $\eta_x = \nu$时；在所有其他位置，$\Omega := 0$ 。根据引理 3.9 的论证（该论证可原样应用于无限对局中的公式），会发生无限多次再生，而无限次重新生成的变量中存在一个 $\sqsubseteq$最小元素 x，其余变量都严格位于它 $\sqsubseteq$之上。因此，max Inf($\Omega(\pi)$) $= \Omega(x,\ \cdot)$，当且仅当$\eta_x = \mu$时为偶数。第二个结论现由奇偶博弈的位置确定性（定理 2.9）得出。 □

3 典范表列、反驳与后果

在本节中，Γ_0 是一个固定的有限、干净、受保护的公式集合，以 ∇-形式书写；所考虑的所有公式都取自其句法闭包 Cl(Γ_0)。双边序列式通过为公式标记其所属的侧，编码为单边序列式（第 3.5 节）。

定义 3.1（展开）。由于我们通过从 $\eta_x x.\varphi_x$ 逐步推进到 φ_x来分解不动点，公式 $\psi \in$Cl(Γ_0) 中可能有来自 Bound(Γ_0) 的变量自由出现。其展开 ψ 的构造方式是：反复将每个属于 Bound(Γ_0) 的变量 $x \in$ 的自由出现替换为其定义不动点公式 $\eta_x x.\varphi_x$，并按递减的 $\sqsubseteq$ 顺序处理变量（从最内层开始），直到不再有来自 Bound(Γ_0) 的变量自由出现。（例如，设 $\Gamma_0 = \{\mu x.(p \vee \Diamond \nu y.(x \wedge \Box y))\}$，因此 $\varphi_x = p \vee \Diamond \nu y.(x \wedge \Box y)$ 且 $\varphi_y = x \wedge \Box y$。那么 $y = \nu y.(\mu x.(p \vee \Diamond \nu y.(x \wedge \Box y)) \wedge \Box y)$：首先将 y 替换为其定义不动点公式 $\nu y.(x \wedge \Box y)$，然后展开其中出现的自由外层变量 x 。）对于集合 $\Gamma \subseteq$ Cl(Γ_0)，定义 $\Gamma :=$ $\{\psi \mid \psi \in \Gamma\}$。若 $\Gamma \subseteq$ Cl(Γ_0) 可满足，则称其为可满足，当且仅当 $\bigwedge\Gamma$ 可满足；记 $\Gamma \vdash$ 表示 $\Gamma \vdash$。

Cl(Γ_0)中的公式称为模态公式，当且仅当它是关于 Free(Γ_0) 的一个文字或一个 ∇-公式 $\nabla\Psi$；否则称为非模态公式（析取、合取、不动点公式 $\eta_x x.\varphi_x$，或约束变量 $x \in$Bound(Γ_0)）。模态公式的集合 M 称为一致的，当 $\bot \notin M$ 且$\{p,\ \neg p\} \nsubseteq M$ 对所有 $p \in$ Prop 都成立时；如果其中不包含 ∇-公式 $\nabla\Psi$，则称其为 ∇-无自由变量的；否则称其为 ∇-非无自由变量的。对于这样的 M，我们用 Lit(M) 表示 M 中文字的集合，因此 $M = \{\nabla\Psi \mid \nabla\Psi \in M\} \cup$Lit($M$)。

3.1 饱和

Walukiewicz 的表 tableaux 一次对一个公式应用非模态规则，且应用顺序会影响分支结构 [27]。相反，我们借助选择函数，在一个步骤中处理选择节点与其模态子节点之间的所有非模态联结词。

令 Dis 表示 Cl(Γ_0) 中所有析取式构成的集合。选择函数是一个映射 c，它为每个析取式 $\alpha \vee \beta \in$ Dis 指定其析取项之一 α 或 β。

定义 3.2 （饱和与迹关系）。 对于集合 $\Gamma \subseteq$Cl(Γ_0) 和选择函数 c，Cl(Γ_0) 上的分解图 E_c 是一个边集如下的有向图

$$\alpha \wedge \beta \to \alpha, \quad \alpha \wedge \beta \to \beta, \quad \alpha \vee \beta \to c(\alpha \vee \beta), \quad \eta_x x.\varphi_x \to \varphi_x, \quad x \to \varphi_x \ \ (x \in \mathsf{Bound}(\Gamma_0)),$$

且模态公式没有出边。我们将 $S_c(\Gamma)$ 记作从 Γ 出发沿 E_c 中的路径可达的公式集合（包括 Γ自身），将 $M_c(\Gamma)$ 记作模态公式集合

于 $S_c(\Gamma)$ 中。对于一条 E_c-路径 π，令 $\mathsf{Reg}(\pi) \subseteq \mathsf{Bound}(\Gamma_0)$ 表示满足以下条件的约束变量集合： x 使得π 经过再生边 $x \to \varphi_x$。(Γ, c) 的迹关系 是三元关系$R_c(\Gamma) \subseteq \Gamma \times M_c(\Gamma) \times \mathcal{P}(\mathsf{Bound}(\Gamma_0))$，其定义如下：

$$R_c(\Gamma) := \{(\gamma, m, \mathsf{Reg}(\pi)) \mid \gamma \in \Gamma,\ m \in M_c(\Gamma),\ \pi \text{ is an } E_c\text{-path from } \gamma \text{ to } m\}.$$

或 是 Γ 的不同有序对 $\mathsf{Out}(\Gamma) := \{(M_c(\Gamma)\ R_c(\Gamma)) \mid c$ 是一个选择函数 $\}$.

因此，下面的构造可以看作一棵普通语义树，其中每个有限的非模态片段都被收缩； $R_c(\Gamma)$ 保留了被收缩片段的转移和再生（参见定义 3.8 后关于实现的说明）。

引理 3.3 (饱和的无环性)。 对于每个选择函数 c，图 E_c 都是无环的。特别地，没有变量 $x \in \mathsf{Bound}(\Gamma_0)$ 会沿某条 E_c-路径被再生多于一次。每条极大 E_c-路径都是有限的，并以一个模态公式终止，而且$\mathsf{Out}(\Gamma)$ 是有限的。

证明。 E_c 中除再生边 $x \to \varphi_x$ 之外的每条边都会通向一个真子公式，因此 E_c 中的任何环都必须至少包含一条再生边。反设E_c 中含有一个环，并在该环上被再生的变量中，取一个关于 $\sqsubset$最小的变量 z。经过 $z \to \varphi_z$后，环立即到达 φ_z。它不可能离开 $\mathsf{Sub}(\varphi_z)$：这样做需要再生一个变量 w，其绑定子 $\eta_w w.\varphi_w$ 严格包含 $\eta_z z.\varphi_z$ （即 $w \sqsubset z$），这与 z的最小性矛盾。然而，要完成该环并返回 z，路径必须到达 φ_z内部 z 的一个自由出现。根据守卫性，φ_z 中 z 的每次出现都严格位于某个 ∇ 的辖域内；由于模态公式 $\nabla\Psi$ 在 E_c 中没有出边，因此没有任何 E_c-路径能够进入一个 ∇，矛盾。由于 $\mathsf{Cl}(\Gamma_0)$ 是有限的，无环性保证每条极大 E_c-路径都是有限的，因而最终以一个模态公式终止；它也能防止同一条路径上重复出现再生边。$\mathsf{Out}(\Gamma)$ 的有限性由 $\mathsf{Cl}(\Gamma_0)$ 的有限性推出。 □

例 3.4（一步饱和与路径合并）。令 $\Gamma = \{x, \nu y.(\nabla\{\psi\} \vee p)\}$，其中 x 是一个 μ 变量，其绑定定义为 $\mu x.((\nabla\{\psi\} \wedge q) \vee r)$，并令 c 选择左析取项。于是 x 再生并到达 $\nabla\{\psi\}$ 和 q，而 $\nu y.(\nabla\{\psi\} \vee p)$ 展开为 $\nabla\{\psi\}$，但不发生再生。这两条路径在 $M_c(\Gamma) = \{\nabla\{\psi\}\ q\}$ 中的 $\nabla\{\psi\}$ 处合并，而

$$R_c(\Gamma) = \{(x, \nabla\{\psi\}, \{x\}),\ (x, q, \{x\}),\ (\nu y.(\nabla\{\psi\} \vee p), \nabla\{\psi\}, \emptyset)\}$$

保留了它们各自不同的起源和再生成变量集。

3.2 典范表

根据 ∇ 的语义，满足一致标签 $\{\nabla\Psi_1, \ldots\ldots, \nabla\Psi_i\} \cup \mathsf{Lit}(M)$ 的世界，对每个 k 和 $\psi \in \Psi_k$，都有一个满足 ψ 及每个方框部分 $\bigvee \Psi_n$、 $n \neq k$ 的后继。

定义 3.5 （模态后继）。令 M 为一个一致的、 ∇-非 Free 的模态公式集合，其中包含 ∇-公式 $\nabla\Psi_1$, ……, $\nabla\Psi_i (i \geq 1)$。对于每个 $1 \leq k \leq i$和每个 $\psi \in \Psi_k$， M 的（k， ψ）-后继 是由下式定义的有序对 $(\Gamma_{k,\ \psi},\ R_{k,\ \psi})$ 。

$$\Gamma_{k,\psi} := \{\psi\} \cup \{\bigvee \Psi_n \mid n \neq k\}, \qquad R_{k,\psi} := \{(\nabla\Psi_k, \psi, \emptyset)\} \cup \{(\nabla\Psi_n, \bigvee \Psi_n, \emptyset) \mid n \neq k\}.$$

M 的后继 是以此方式得到的不同有序对 $(\Gamma_{k,\ \psi},\ R_{k,\ \psi})$ 。（若对所有k都有 $\Psi_k = \emptyset$，则 M 没有后继。）

定义 3.6 （典范表）。对于有限集 $\Gamma \subseteq \mathsf{Cl}(\Gamma_0)$，典范表 $\mathcal{T}_\Gamma$ 是一个二部标记树，其节点交替分为两类：选择节点 和模态节点，按自底向上的方式构造如下：

- 根节点是一个标签为 Γ 的选择节点。

- 每个标签为 Δ 的选择节点 t，对于每个结果（M，R）$\in$ Out(Δ)，都有一个标签为 $L(m) := M$ 的模态子节点 m；边（t，m）承载迹关系 $R_\circ$

- 带 m 标签 M 的模态节点 M 在以下情况下是叶节点：M 不相容、∇是 Free，或 M 中的每个 ∇-公式都是 $\nabla\emptyset$；否则，对于M的每个模态后继（$\Gamma_{k,\psi}$、$R_{k,\psi}$），它都有一个选择子节点 u，其标签为 $L(u) := \Gamma_{k,\psi}$；边（m、u）携带迹关系$R_{k,\psi}$。

我们将$\mathcal{T}_\varphi$ 记作$\mathcal{T}_{\{\varphi\}}$，将 $L(t)$ 记作节点 t的标签，并将 $R(x, y)$（或 R_e）记作边 $e = (x, y)$ 上的迹关系。

注 3.7（唯一性与标签确定性）。由于 Out(Δ) 以及 M 的模态后继集合完全由父节点的集合标签决定，$\mathcal{T}_\Gamma$ 是有限分支的，并且在保持标签和关系的树同构意义下唯一。此外，对于$\mathcal{T}_\Gamma$的任意选择节点 t，以 t 为根的子树与$\mathcal{T}_{L(t)}$同构。我们将这一性质称为标签确定性。

3.3 轨迹

定义 3.8（轨迹）。令 $\xi = t_0 t_1 t_2 \cdots$ 为 $\mathcal{T}_\Gamma$ 的一个（有限或无限）分支，并令 R_n 为边（t_n, t_{n+1}）上的迹关系。ξ 上的一条迹 τ 由公式 $\gamma_n \in L(t_n)$ 和集合$V_n \subseteq$ Bound（Γ_0）组成，并满足：只要 t_{n+1} 有定义，就有（$\gamma_n, \gamma_{n+1}, V_n$）$\in R_n$。对于一条无限迹$\tau$，我们将 Reg$^\infty$（$\tau$）：$= \{x \in$ Bound（Γ_0）$\mid x \in V_n$对无限多个 $n\}$定义为沿 τ无限次重新生成的变量集合。

根据定义 3.2 和定义 3.5，每个三元组（$\gamma_n, \gamma_{n+1}, V_n$）$\in R_n$ 都有一个由有限个单步组成的序列作为见证（对于选择到模态边，是一条 E_c-路径；对于模态到选择边，则是一个单模态步 $\nabla\Psi_k \to \psi$或 $\nabla\Psi_n \to \bigvee\Psi_n$）。将这些见证串接起来，就得到 τ 的一个实现，即由单个分解步连接起来的公式序列；而 Reg$^\infty$（τ）恰好是任意此类实现中无限次重新生成的约束变量集合。

尽管 $\sqsubset$ 只是部分的，但清洁性和守卫性确保了在一条迹上无限次重新生成的变量具有一个最小元素：

引理 3.9（最外层变量）。设 τ 是一条无限迹。则 Reg$^\infty$（τ）$\neq \emptyset$，且 Reg$^\infty$（τ）具有唯一的 $\sqsubseteq$-最小元素 x。此外，从某个位置开始，τ 的任意实现中的每个公式都属于 闭包（φ_x），并且从该点起重新生成的每个变量都严格 $\sqsubseteq$ 高于 x（即满足 $x \sqsubseteq y$）。

证明。按句法大小度量 Cl(Γ$_0$) 中的公式，并安排为使 $\nabla\Psi$ 的大小严格超过 $\bigvee\Psi$ 的大小。除再生 $z \to \varphi_z$ 之外，实现中的每一步都会严格减小公式大小（特别地，模态步骤从 $\nabla\Psi$ 要么到 $\psi \in \Psi$，要么到 $\bigvee\Psi$）。因此，无限实现必然包含无限多个再生步骤；又由于 Bound(Γ$_0$) 是有限的，Reg$^\infty$(τ) $\neq \emptyset$。

选取非空有限集 Reg$^\infty$(τ) 中一个关于 $\sqsubseteq$ 的最小元素 x，并选择一个位置 N，使得在此之后，Reg$^\infty$(τ) 之外的任何变量都不会在 τ 上再次生成。考虑位置 N 之后发生的第一次再生 $x \to \varphi_x$；此时，实现位于 $\varphi_x \in$ Cl(φ_x) 中。我们断言，此后该实现永远不会离开 Cl(φ_x)。从 Cl(φ_x) 中的公式出发所进行的任何非再生步骤（子公式分解或模态步）仍然处于 Cl(φ_x) 中。假设某个变量z 从公式 $z \in$ Cl(φ_x) 中再次生成（$z \to \varphi_z$）。由于 φ_x 是干净的，Γ_0 中唯一的绑定子$\eta_z z.\varphi_z$ 必须与 $\eta_x x.\varphi_x$处于以下三种关系之一：

(i) $\eta_z z.\varphi_z$ 严格位于 φ_x内部：那么 $x \sqsubset z$ 和 $\varphi_z \in$ Sub(φ_x) 都属于 $\subseteq$ Cl(φ_x)；

(ii) $\eta_z z.\varphi_z$ 就是 $\eta_x x.\varphi_x$ 本身：那么 $z = x$ 和 $\varphi_z = \varphi_x \in$ 闭包(φ_x)；

(iii) $\eta_z z.\varphi_z$ 严格包围 $\eta_x x.\varphi_x$：则有 $z \sqsubset x$。

情况 (iii) 不可能：由于这次对 z 的再生发生在位置 N 之后，我们将有$z \in \mathrm{Reg}^{\infty}(\tau)$，其中 $z \sqsubset x$，这与 x 在 $\mathrm{Reg}^{\infty}(\tau)$ 中的 $\sqsubseteq$-最小性相矛盾。因此，实现保持在 $\mathrm{Cl}(\varphi_x)$ 内，并且在此位置之后再生的每个变量 y 都满足 $x \sqsubseteq y$；特别地，$x \sqsubseteq y$ 对所有 $y \in \mathrm{Reg}^{\infty}(\tau)$ 都成立，所以 x 是其唯一的 $\sqsubseteq$-最小元素。 □

定义 3.10 （μ-迹与偶/奇分支）。如果无限迹 τ 上的 $\mathrm{Reg}^{\infty}(\tau)$ 中的 $\sqsubseteq$-最小元素是一个 μ-变量，则该无限迹是 μ-迹；否则，它是 ν-迹。语义树的无限分支 ξ 如果承载至少一条 μ-迹，则为偶分支；否则为奇分支。

按照这一约定，偶分支有利于反驳者；一些关于自动机博弈的文献采用相反的约定。

3.4 语义树博弈与反驳

典范表的语义由模型玩家 *Modl* 与反驳者 Ref 之间的博弈来刻画。该博弈同时在语义树和 Kripke 模型上进行：Modl 决定选择节点，Ref 则挑战模态节点。反驳（定义 3.13）具有对偶的结构：它保留选择节点的所有子节点，并保留模态节点的一个子节点，同时要求每条无限分支都是偶分支。我们采用第 2.5 节中的博弈术语。若命题集 l 在世界 w上满足条件 $\mathbb{S}, w \models l$。

定义 3.11 （表格博弈）。设 $\mathcal{T}$为一个典范表，$\mathbb{S} = (S,\ R,\ \lambda)$ 为一个 Kripke 模型，且 $s \in S$。表格博弈 $\mathcal{E}(\mathcal{T}\ \mathbb{S},\ s)$ 的位置、所有者和移动如下；其中，$t,\ m,\ u$ 取遍 $\mathcal{T}$ 的节点，$w,\ v$ 取遍 S。

- $(t,\ w)$，t 一个选择节点：所有者为 Modl；对于 $m \in C(t)$，可移动到 $(m,\ w)$。
- $(m,\ w)$，m 一个模态节点：– 若 $L(m)$ 中有某个文字在 w 处不成立：所有者为 Modl，且无移动；– 否则，若 $L(m)$ 是 ∇-free：所有者为 Ref，且无移动；–否则：所有者为 Ref；对于 $u \in C(m)$，可移动到 $\langle m,\ w,\ u\rangle_{\Diamond}$；对于 wRv，可移动到 $\langle m,\ w,\ v\rangle_{\Box}$。
- $\langle m,\ w,\ u\rangle_{\Diamond}, u \in C(m)$：所有者为 Modl；对 wRv，移动到 $(u,\ v)$。
- $\langle m,\ w,\ v\rangle_{\Box}, wRv$：所有者为 Modl；对 $u \in C(m)$，移动到 $(u,\ v)$。

初始位置为 $(\mathrm{root}_{\mathcal{T}},\ s)$。无限对局 π 中出现的表格节点依次构成 $\mathcal{T}$的一条无限分支 $\xi(\pi)$；当且仅当 $\xi(\pi)$ 为偶数时，Ref 获胜 π。

不一致标签总包含一个失败的文字，因此 Modl 失败。如果 $L(m)$ 的每个 ∇-公式都是 $\nabla\emptyset$，那么 $C(m) = \emptyset$，并且当且仅当 w 有一个 R-后继时，Modl 在 $(m,\ w)$ 处失败。

定理 3.12 (规范表格的充分性)。设 Γ 为有限干净守卫集，且 $\Gamma_0 := \Gamma$。那么 $\mathbb{S}, s \models \bigwedge\Gamma$ 当且仅当 Modl 在 $E(T_\Gamma, \mathbb{S}, s)$ 中有获胜策略。

其思路是，将 $\exists$ 在求值博弈中的位置策略用作指引：在世界 w，它解决每个析取，即作为一个选择函数，因此从选择节点中选出一个模态子节点。

证明。记 $\mathrm{E} := \mathrm{E}(\mathrm{T}_\Gamma, \mathbb{S}, s)$，$\mathrm{V} := \mathrm{EG}(\bigwedge\Gamma, \mathbb{S})$，并令 $W_\exists$ 为 $\exists$ 在 V 中的获胜区域。由于 $\forall$ 会在合取处选择合取项，定理 2.12 给出：$\mathbb{S}, s \models \bigwedge\Gamma$ 当且仅当对于每个 $\gamma \in \Gamma$，都有 $(\gamma, s) \in W_\exists$。集合 $\Theta \subseteq \mathrm{Cl}(\Gamma_0)$在 w 处获胜，当且仅当对于每个 $\theta \in \Theta$，都有 $(\theta, w) \in W_\exists$。文字 l满足 $(l, w) \in W_\exists$时，在 w 处成立，因为否则 (l, w) 就是一个由 $\exists$拥有的死端；特别地，$\bot$ 不属于任何获胜集合。$W_\exists$ 中 $\forall$ 的一个位置，其所有后继都属于 $W_\exists$。除从 (x, w) 出发且满足 $x \in \mathrm{Bound}(\Gamma_0)$ 的步之外，V 中没有其他步是再生。

(⇒) 固定 ∃在 $\mathcal{V}$ 中的一个位置策略 f，该策略从 $W_\exists$的每个位置出发均能获胜。Modl 保持这样一个不变量：当前节点的标签在当前世界处获胜；初始时，$=\Gamma$在 s处获胜，其中 L(root)。

- 在（t, w）处：令 c 为一个选择函数，只要（D, w）$\in W_\exists$，就有（c（D）w）$= f$（D, w）。从一个满足（φ, w）$\in W_\exists$ 的公式 φ 出发的每条 E_c-边，都是 V 的一次移动，并且仍停留在 $W_\exists$ 中：在析取处，这是 f 的移动；在合取处，这是 $\forall$ 的移动；其他情况下，则是唯一可行的移动。因此，S_c（L（t））在 w 处获胜。Modl 移动到 t 的子节点 m，其结果为（M_c（L（t））R_c（L（t））；L（m）在 w 处获胜，因此 L（m）中的每个文字在 w 处都成立；如果 L（m）是 ∇-free，则 Ref 无法移动。

- 在（m，w）处，若 L（m）$=\{\nabla\Psi_1, \ldots, \nabla\Psi_i\} \cup$命题集（$L$（$m$））， $i \geq 1$：每个（$\nabla\Psi_n$，w）都是 $W_\exists$ 中 $\forall$ 的一个位置，因此只要 wRv，就有（$\bigvee\Psi_n$，v）$\in W_\exists$，并且 $\langle\nabla\Psi_n, w, \psi\rangle_\Diamond \in W_\exists$ 适用于 $\psi \in \Psi_n$。

  – 在 $m, w, u\Diamond$ 处，u 是 m 的 (k, θ)-子节点：f从 $\nabla\Psi_k, w, \theta\Diamond$ 移动到某个满足 wRv 的 $(\theta, v) \in W_\exists$，而 Modl 移动到 (u, v)。– 在 $m, w, v\Box$ 处：由于 $(\bigvee\Psi_1, v) \in W_\exists$ 且 $\bigvee\emptyset = \bot$，$\Psi_1 \neq \emptyset$；沿着 $\nabla\Psi_1$ 的盒链，从 $(\bigvee\Psi_1, v)$ 出发，跟随 f经过 $W_\exists$ 的各个位置，可到达某个满足 $\theta \in \Psi_1$ 的 (θ, v)。Modl 移动到 (u, v)，其中 u 是 m 的 $(1, \theta)$-子节点。

  在这两种情况下，$L(u) = \{\theta\} \cup \{\bigvee\Psi_n \mid n \neq k\}$（第二种情况下带有 $k = 1$）在v处是获胜的。

因此，Modl 不会输掉任何与该策略一致的有限对局。设 π 是一场具有语义树分支 ξ 的无限对局，并假设 ξ 带有一条 μ-迹 τ，起始于某个 $\gamma \in \Gamma$。将 τ 实现为单步（见定义 3.8 后的注释）：沿着世界 w 处的选择到模态边，它是对在那里选定的 c 的一条 E_c-路径，由与 f 一致的 V 的移动组成；沿着从 (m, w) 到 (u, v) 的模态到选择边，它是满足 $n \neq k$ 的步骤 $\nabla\Psi_n \to \bigvee\Psi_n$，该步骤是 $\forall$ 的一次移动；或者是主步骤 $\nabla\Psi_k \to \theta$，在第一种情形下，我们用经过 $\nabla\Psi_k, w, \theta\Diamond$ 的移动替换它，在第二种情形下，则用经过 $(\bigvee\Psi_1, v)$ 及其盒链的移动替换它，这些移动都与 f 一致。由此得到一场从 $(\gamma, s) \in W_\exists$ 出发、与 f 一致的 V 的无限对局，其再生与 τ 的再生相同；其中 $\sqsubseteq$- 最小的无限再生变量是一个 μ- 变量，因此 $\forall$ 赢得了这场对局，这与 f 的选择相矛盾。因此，每场对局的每个无限分支都是奇数的，该策略是获胜策略。

(⇐) 假设 $\mathbb{S}, s \not\models \bigwedge\Gamma$。那么 $(\gamma, s) \notin W_\exists$对于某个 $\gamma \in \Gamma$成立，并且根据定理 2.12 $\forall$ 从 (γ, s) 出发有一个获胜策略 g。令 σ 为 Modl 在 $\mathcal{E}$ 中的任意策略。Ref 保持当前标签中的一个公式 φ，以及从 (γ, s) 出发、与 g一致并以 (φ, w) 结束的 $\mathcal{V}$有限对局 ρ；该终点对应当前世界 w；初始时 $\varphi = \gamma$。

- 在 (t, w) 处，σ 移动到某个 (m, w)；令 c 为实现边 (t, m) 的选择函数。从 (φ, w) 出发，通过在析取项 D 处移动至 $c(D)$（这是 $\exists$的一步），并在合取项处按 g 的指示行动，从而延长 ρ。这沿着一条从 φ出发的 E_c-路径前进；根据引理 3.3，该路径有限，并以模态公式 $\varphi' \in M_c(L(t)) = L(m)$ 结束；它见证了三元组 $(\varphi, \varphi' V) \in R_c(L(t))$，其中 V 是扩展过程中重新生成的变量集合。令 $\varphi := \varphi'$。

- 在（m，w）：如果 $L(m)$ 的某个文字在 w 处不成立，Modl 就输了。如果 φ 是一个文字，ρ 就会到达死端（φ，w），而 $\forall$ 并未在此处输掉，因此 φ 会在 w 处不成立。所以 $\varphi = \nabla\Psi_k$，并且 g 从（$\nabla\Psi_k$，w）移动，因为 $\forall$ 的死端会使他输掉。

  – 如果 g 移动到 $\nabla\Psi_k, w, \theta\Diamond$，Ref 就移动到 $m, w, u\Diamond$，即 m 的（k, θ）子节点 u。当 σ 用 wRv 回应（u, v）时，将 ρ 扩展为包含 $\exists$ 移动到（θ, v）这一步，并令 $\varphi := \theta \in L(u)$。– 如果 g 移动到（$\bigvee\Psi_k, v$），Ref 就移动到 $m, w, v\Box$。令 σ 用 u 回应（u, v），其中 u 是 m 的（k', θ'）子节点。如果 $k' \neq k$，令 $\varphi := \bigvee\Psi_k \in L(u)$。如果 $k' = k$，将 ρ 扩展为包含$\exists$ 沿着 $\nabla\Psi_k$ 的盒链移动到（θ', v）这几步，并令 $\varphi := \theta' \in L(u)$。

  在每种情况下（$\nabla\Psi_k$，φ，$\emptyset$）$\in R$（m，u），且 ρ 的扩展不会再生任何内容。

因此，除非 Modl 已经输掉，否则 Ref 可以维持这一构造。在无限对局中，公式 φ 在其语义树分支上构成一条无限迹 τ，而对局 ρ 构成从（γ，s）开始、与 g 一致的 $\mathcal{V}$ 的无限对局，其再生情况与 τ 相同。由于 g 获胜，无限次再生的、按 $\sqsubseteq$ 最小的变量是一个 μ 变量，因此 τ 是一条 μ 迹，该分支是偶的，Ref 获胜。因此，σ 并非获胜。 □

Niwiński 和 Walukiewicz [21] 直接通过签名证明了其语义树博弈中的相应命题；这里的序数论证仅限于定理 2.12。

定义 3.13（反驳与稀疏性）。有限集 $\Gamma \subseteq \mathsf{Cl}(\Gamma_0)$ 的一个反驳 是带标记树 $\mathcal{R}$，其节点交替为选择节点和模态节点，边上带有迹关系，且选择根的标签为 Γ，满足：

1. 标签为 Δ 的选择节点，对每个选择函数 c，都有一个标签为 $K_c \cap M_c(\Delta)$ 的模态子节点，其中 $K_c \subseteq S_c(\Delta)$ 是饱和集 $S_c(\Delta)$ 的稀疏化：K_c 中的每个元素都可通过一条完全处于 K_c 内的 E_c- 路径从 $K_c \cap \Delta$ 到达，并且对于每个非模态公式 $\psi \in K_c$：

   - 若 $\psi = \alpha \wedge \beta$，则 $K_c \cap \{\alpha,\ \beta\} \neq \emptyset$（至少保留一个合取项）；
   - 如果 $\psi = \alpha \vee \beta$，那么 $c(\psi) \in K_c$；
   - 如果 $\psi = \eta_x x.\varphi_x$，那么 $\varphi_x \in K_c$；
   - 如果 $\psi = x \in \mathsf{Bound}(\Gamma_0)$，那么 $\varphi_x \in K_c$。

   这条边承载的迹关系，正如定义 3.2 中的 $R_c(\Delta)$ 所定义，但将E_c-路径限制为 K_c；

2. 标记为 M 的模态节点若 M 不一致，则为叶节点；否则它是一致且∇-非自由的，并且恰有 一个 子节点，该子节点是 M 的一个 $(k,\ \psi)$-后继 $(\Gamma_{k,\ \psi},\ R_{k,\ \psi})$；

3. eR 的每个叶节点都是不一致模态节点，并且 R 的每条无限分支都是偶数 .

当且仅当：每当某个细化 K_c 包含一个合取 $\alpha \wedge \beta$ 以及两个合取项 α 和 β时，不存在某个 μ-变量 x，使得 $\alpha \wedge \beta \in \mathsf{Sub}(\varphi_x)$ 且该变量同时在 α和 β中处于活跃状态，该反驳才是细的 。

当 $K_c = S_c(\Delta)$ 时，细化才是完全的 。

引理 3.14（全局分解图的无环性）。设 $E := \bigcup_c E_c$ 在 闭包（Γ_0）上；因此 α 和 β 都是 $\alpha \vee \beta$的后继。则 E 是无环的。

证明。引理 3.3 的证明没有使用析取项的选择，因此可逐字应用于E。 □

定义 3.15（序列反驳）。设 $E := \bigcup_c E_c$，并设 $\prec$ 是E的拓扑序 。[2] 在标记为 Δ的选择节点处，设 K_c 是与选择函数 c相关联的细化。对于公式 ψ，令

$$H_c(\psi) := \{(D, c(D)) \mid D \in K_c \cap \mathsf{Dis},\ D \prec \psi\},$$

并将 ψ 处的稀疏化决策定义为

$$d_c(\psi) := \begin{cases} \mathbf{1}_{\psi \in K_c}, & \psi \in \mathsf{Dis}, \\ (\mathbf{1}_{\psi \in K_c},\ \{\chi \mid (\psi, \chi) \in E_c,\ \chi \in K_c\}), & \psi \notin \mathsf{Dis}. \end{cases}$$

[2]有限无环有向图的拓扑序是其顶点的一个线性序，其中每条边都指向前方。根据引理 3.14，它在此处存在。

如果在每个选择节点处，对于所有选择函数c, c'以及公式 $\psi \in S_c(\Delta) \cap S_{c'}(\Delta)$，反驳都关于 $\prec$ 是序贯的，

$$H_c(\psi) = H_{c'}(\psi) \quad \Longrightarrow \quad d_c(\psi) = d_{c'}(\psi).$$

如果相对于 E的某个拓扑序而言它是序贯的，那么它就是序贯的。

注 3.16（作为非预见性的序贯性）。序贯性意味着，细化决策遵循 $\prec$，只取决于较早保留的析取式，而绝不取决于未来的选择。对于每个拓扑序，完全细化都是序贯的。构造 3.22 使用了这种非预见性；例 3.25 展示了它的失效。

定理 3.17（反驳的存在性；断言（e））。设 Γ 是一个有限干净守卫集，并取 $\Gamma_0 := \Gamma$。如果 Γ 不可满足，那么 Γ 存在一个反驳，其中每次细化都是完全饱和 $K_c = S_c(\Delta)$（因此也是序贯的）。此外，可以选择该反驳使其正则：在同构意义下，它只有有限多个有根标记子树。

证明见定理 4.14，具体是在将典范表转化为有限奇偶博弈（第 4.4 节）之后。在 [21] 中，存在性由马丁的博雷尔可确定性定理推出，而正则性则通过拉宾树自动机 [21] 另行获得，并带有指数界；在此处，二者都来自有限奇偶博弈的位置确定性。

引理 3.18。假设 $\bigwedge \Gamma_0$ 是非合取的。那么，对于每个有限集 $\Gamma \subseteq$ 闭包(Γ_0)，其中所有删薄都是完全的，每个对 Γ 的反驳都是稀疏的。

证明。在 $\alpha \wedge \beta \in K_c$ 处违反稀疏性，是指存在一个 μ-变量 x，使得 $\alpha \wedge \beta \in \mathsf{Sub}(\varphi_x)$ 在两个合取项中都处于活跃状态，而非合取性排除了这种情况。 □

3.5 双侧反驳与断言 (f)

第 5 节构造双侧序列式 $\Gamma \vdash \Delta$ 的反驳。一个公式可能出现在两侧，而这两个出现必须独立分解。因此，我们为每个公式标注其所在的一侧。

定义 3.19（带标签闭包与双侧反驳）。设 Γ_0 和 Δ_0 是 ∇-形式的有限干净守卫集，且其中任一集合的约束变量都不出现在另一个集合中，并令$\sim\Delta_0 := \{\sim\delta \mid \delta \in \Delta_0\}$，同样是干净且受限的，具有相同的约束变量，并将 μ、ν互换。带标签闭包 是不交并

$$\mathsf{Cl}(\Gamma_0; \Delta_0) := \big(\{L\} \times \mathsf{Cl}(\Gamma_0)\big) \cup \big(\{R\} \times \mathsf{Cl}(\sim\Delta_0)\big).$$

带标签公式（s，χ）与 χ（文字、∇-公式、析取式，等等）属于同一类型；其 E_c-边、模态后继和轨迹步均与 χ相同，同时保留标签 s；选择函数是定义在带标签析取式上的映射，因此（L，D）和（R，D）分别独立求解；若一组带标签模态公式的底层公式构成一致集，则该集合一致；约束变量的不动点类型、φ_x、$\sqsubseteq$、$\preceq$ 及活性由其所属的一侧决定。按照这些解释，定义 3.2–3.15 可原样应用于有限子集 $\Theta \subseteq \mathsf{Cl}(\Gamma_0; \Delta_0)$。我们将$\langle\langle\Theta\rangle\rangle := \{\langle\langle\chi\rangle\rangle \mid (s,\ \chi) \in \Theta\}$ 和 $\Theta \vdash$ 记作$\langle\langle\Theta\rangle\rangle \vdash$；根据 (1)，$\Theta \vdash$ 当且仅当

$$\{\langle\!\langle\chi\rangle\!\rangle \mid (L, \chi) \in \Theta\} \vdash \{\sim\langle\!\langle\chi\rangle\!\rangle \mid (R, \chi) \in \Theta\}.$$

针对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的双侧反驳，对于 $\Gamma \subseteq$ 闭包(Γ_0) 和 $\Delta \subseteq \Delta_0$，是对（$\{L\} \times \Gamma$）$\cup$（$\{R\} \times \sim\Delta$）的反驳。

对于 $\Delta_0 = \emptyset$，我们将 $(L,\ \chi)$ 与 χ 视为相同。右侧公式 $(R,\ \chi)$ 表示后件公式 $\sim\chi$：右析取式是后件的合取，由 $(\wedge R)$ 分解；右合取是后件的析取，由 $(\vee R)$ 分解，并通过 $(\mathsf{Weak}R)$ 进行细化；右 μ-变量是 Δ_0 的 ν-变量。

引理 3.20 (带标签闭包)。 对于 闭包$(\Gamma_0;\ \Delta_0)$ 的有限子集，引理 *3.3*、*3.9* 和 *3.14* 均成立。

证明。 每条 E_c-边、模态步和轨迹步都连接两个标签相同的公式，并且在每一侧上都是闭包(Γ_0)或闭包$(\sim\Delta_0)$中的一条边或一步。这三个引理讨论单条路径，并可由单侧陈述推出；在引理 3.9 中，迹始终位于同一侧，而该侧的约束变量与另一侧的约束变量互不相交。 □

定理 3.21 （薄反驳；断言 (f)，Walukiewicz [27, 定理 31]）。 设 $\Theta \subseteq$ 闭包$(\Gamma_0;\Delta_0)$是有限的，并且假设 Θ 中的任何公式都不含有Bound$(\Gamma_0) \cup$Bound(Δ_0) 中的变量作为自由变量。若 Θ 有一个薄序贯反驳，则 $\Theta\vdash$。特别地，对于 $\Gamma \subseteq \Gamma_0$ 和 $\Delta \subseteq \Delta_0$，若 $\Gamma \vdash \Delta$有一个薄序贯双侧反驳，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 可在Koz中导出。

Walukiewicz 为由单规则应用构成的单个命名良好的公式的反驳证明了断言 (f)；我们将带标签集合的饱和反驳（其内部标签可能包含自由的约束变量）展开为单规则格式（构造 3.22），并在附录 A 中给出证明；该证明不使用第 3.6 节或第 4–7 节中的任何内容。

构造 3.22 （单规则展开）。 令$\mathcal{R}$ 为有限集 $\Gamma \subseteq$闭包$(\Gamma_0;\Delta_0)$的一个薄反驳，并且相对于 $\prec$ 的拓扑序 $E=\bigcup_c E_c$而言是序贯的（定义 3.15）；该构造使用这一 $\prec$。单规则展开 $\mathcal{R}^+$ 将$\mathcal{R}$的每个饱和步骤（从标记为 Δ 的选择节点到其模态子节点$\{K_c \cap M_c(\Delta)\}_c$）替换为以下由单规则应用构成的有限树，该树从 Δ向上构造。在一个序列式 Θ处，令 θ 为 Θ中按 $\prec$最小的非模态公式；若不存在这样的公式，则移除 Θ 中位于 K_c 之外的模态公式（使用弱化规则），该区块随即结束。

- 若 $\theta \notin K_c$，则通过弱化规则（Weak）将其移除。
- $\theta=\alpha\vee\beta$：两个前提，一个带有 α，另一个用 θ 代替 β （$\vee$）。
- $\theta=\alpha\wedge\beta$：一个前提，包含 α，β 中属于 K_c （$\wedge$）的那些项。
- $\theta=\eta_x x.\varphi_x$ 或 $\theta=x$：一个前提，用 θ 代替 φ_x （η），并应用正则规则（reg）。

该块的一条分支会为迄今已分解的析取式确定一个部分选择函数；对于任意总扩展，由 K_c 读出 θ 处的决策（是否 $\theta\in K_c$，以及对于合取，哪些合取项属于 K_c）（c）。根据下文的引理 3.23，这些决策不依赖于扩展，因此该构造定义良好；由于沿分支分解的公式构成一个按 $\prec$ 递增的序列，因此在该块后续部分不会修改任何决策。根据引理 3.14，每个块都是有限的，而延伸 c 的一条块分支最终会到达模态序列式 $K_c\cap M_c$（Δ）。导向同一块分支的选择函数具有相同的稀疏化和相同的迹关系（引理 3.23(3)）；对于每条分支，我们固定其中一个选择函数 c，并从该分支继续向上，接续$\mathcal{R}$在对应于 c的子节点处的子树；除非该子节点是$\mathcal{R}$的叶节点，否则从$\mathcal{R}$的模态规则（∇）开始。

引理 3.23 (展开的良定义性)。 考虑 *R* 中一个标签为 Δ 的选择节点处的构造 *3.22* 分块，以及该分块某条分支上的序列式 Θ。令 p 为在 Θ 之前于该分支上分解的析取式所确定的部分选择函数；若 Θ 中存在非模态公式，令 θ 为其中按 $\prec$ 排序最靠前的公式。那么，对于所有扩展 p 的选择函数 c、c'：

1. 在 Θ 之前于该分支上分解的每个公式都属于 K_c、$\Theta\subseteq S_c(\Delta)$，并且每个满足 $\psi\prec\theta$ 的非模态 $\psi\in K_c$ （若 Θ 不包含非模态公式，则为每个非模态 $\psi\in K_c$）都已在 Θ 之前于该分支上分解；

2. 如果存在 θ，那么 $H_c(\theta)=H_{c'}(\theta)$，因此 $d_c(\theta)=d_{c'}(\theta)$；

3. 如果 Θ 不包含非模态公式，那么 $K_c = K_{c'}$中属于 K_c 的模态公式 Θ 构成集合 $K_c \cap M_c$（Δ）$= K_{c'} \cap M_{c'}$（Δ），并且 R 在 c 和 c' 的模态子节点处的迹关系相同。

证明。 通过分解公式 χ引入的每个公式都是 χ的 E-后继，因此$\succ \chi$。分解 χ 时，它是当前序列式中按 $\prec$排序最靠前的非模态公式，因此之后出现的每个非模态公式都满足 $\succ \chi$；由此，沿分支分解的公式构成一个按 $\prec$递增的序列，并且它们都先于 θ。

我们对分支上 Θ 的位置进行归纳，同时证明 (1) 和 (2)。设Θ' 是严格早于 Θ的一个序列式，其按 $\prec$排序最靠前的非模态公式为 θ'，部分选择函数为$p' \subseteq p$。由关于 Θ'的 (2)，对每个扩展 p的 c，在 θ' 所作的决定都是 $d_c(\theta')$，因此与K_c一致： θ' 被弱化当且仅当 $\theta' \notin K_c$；若它被分解，则沿着$p(\theta') = c(\theta')$的前提跟随一个析取式，合取保留的恰好是 K_c中的合取项，而不动点公式或变量则传递到 φ_x，根据定义 3.13(1)，它属于 K_c。这证明了 (1) 的第一个断言，并且 $\Theta \subseteq S_c(\Delta)$，因为每个引入的公式都是从 Δ 经由与 p一致的 E_c-边到达的。对于 (1) 的最后一个断言，设 $\psi \in K_c$ 是一个满足 $\psi \prec \theta$的非模态公式，并在 K_c内选取一条满足 $\chi_0 \in \Delta$的E_c-路径 $\chi_0\chi_1 \cdots \chi_l = \psi$；所有 χ_i都是非模态的，且 $\preceq \psi \prec \theta$。由对 i的归纳， χ_i 已在分支上引入（$\chi_0 \in \Delta$，并且根据刚证明的一致性，在分解χ_i 时会引入 χ_{i+1}）。公式只有在被分解或弱化时才会离开序列式；由于 $\chi_i \prec \theta$， χ_i 不再出现在 Θ中；又因为 $\chi_i \in K_c$，它并未被弱化，因此它被分解了。对于 (2)，根据 (1) 和第一段，满足 $D \prec \theta$ 的析取式$D \in K_c$ 恰好是分支上被分解的析取式，并且对它们有 $c(D) = p(D)$。因此， $H_c(\theta) = \{(D, p(D)) \text{ 是分支上被分解的析取式}\} = H_{c'}(\theta)$。由于根据 (1)， $\theta \in S_c(\Delta) \cap S_{c'}(\Delta)$，相对于 $\prec$ 的序贯性给出 $d_c(\theta) = d_{c'}(\theta)$。对于 (3)，由 (1) 可知， K_c 的每个非模态公式都已被分解，因此 K_c 的所有析取式都已被分解，且它们上面的 $c = p$。每个模态 $m \in K_c$ 都属于 Θ：要么 $m \in \Delta$，要么 m 是 K_c中某个已分解公式的一个 E_c-后继，并在 K_c 中保留，且在该步骤被引入；模态公式在区块结束前不会被移除。反过来，根据 (1)， Θ 中的模态公式属于$M_c(\Delta)$。对于一个模态 $m \in \Theta$， $H_c(m) = \{(D, p(D)) \text{ 被分解的 } D \prec m\} = H_{c'}(m)$，因此根据序贯性， $d_c(m) = d_{c'}(m)$，也就是说， $m \in K_c$ 当且仅当 $m \in K_{c'}$。因此， K_c 和 $K_{c'}$ 由相同的已分解非模态公式以及 Θ中的相同模态公式构成，所以 $K_c = K_{c'}$；由于 c和 c' 在 K_c的析取式上相一致， K_c 内的 E_c-路径和 E_c-路径重合，迹关系也因此相同。

□

引理 3.24 (扩展的性质)。 R^+ 是一棵以 Γ 为根、由闭包$(\Gamma_0; \Delta_0)$ 的有限子集构成的有限分支树，并且：

1. 每个区块都终止于一个节点，其标签与 R 中某个节点的标签相同；收缩每个区块会将 R^+ 映射到 R 的一棵保标签子树上，且 R^+ 的每条无限分支都投影到 R 的一条无限分支；*2.* R^+ 的每条迹都投影到 R 的一条迹，且两者无限次重新生成的变量集合相同；R 对应分支的每条迹也都是这样的投影；特别地，R^+ 的每条无限分支都带有一条 μ-迹；*3.* R^+ 是细化的（参见 *[27]*）：没有任何合取 $\alpha \wedge \beta$ 会在一个 μ变量在两个合取项中都活跃时，同时分解为 α 和 β；并且 R^+ 的每个叶节点都是不一致序列式。

证明。 (1) 由构造可知；$\mathcal{R}^+$ 的叶节点就是$\mathcal{R}$中不相容的叶节点。(2) 在一个块内，分支上连续的公式由单条 E_c-边连接，而存留到块末的出现恰好是在 K_c内部可达的出现；因此，经过该块的迹是在 K_c 内部、从 Δ 中的某个公式到某个模态公式的 E_c-路径，其中再生变量为$\mathcal{R}$中相应三元组的 V；反过来，每个三元组(γ, m, V)都由这样一条路径实现。模态边保持不变，且不包含再生。因此，迹一一对应

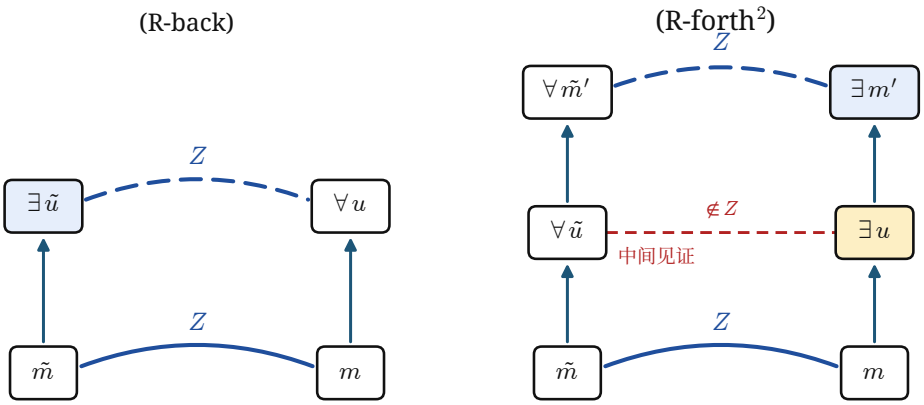

图2：定义 3.26 中的条款 (R-back) 和 (R-forth^2)。

各个块的再生集相同，最后一个结论由定义 3.13(3)得出。(3) 假设一个块分解为 $\alpha \wedge \beta$ 的两个合取项，并且一个 μ-变量 x 在两者中都活跃。那么 $\alpha \wedge \beta, \alpha, \beta \in K_c$，且 $\alpha \wedge \beta \in \mathsf{Sub}(\varphi_x)$：如果 x 通过一个在 α中自由出现的变量 y 在 α 中活跃，那么 $x \sqsubseteq y$（因为 $\prec \subseteq \sqsubseteq$），并且根据 $\alpha \wedge \beta$一侧的清洁性，公式 $\alpha \wedge \beta$（其中 y自由出现）属于$\mathsf{Sub}(\varphi_y) \subseteq \mathsf{Sub}(\varphi_x)$。这与$\mathcal{R}$的稀疏性矛盾。 □

例 3.25（为什么需要序贯性）。设 $P := p \vee \neg p$, $Q := q \vee \neg q$, $X := P \wedge r$, $Y := Q \wedge s$ 和 $\Delta = \{X, Y\}$。设 K_c 保留 X, Y, r, s，当且仅当 $c(Q) = q$ 时保留 P（以及 $c(P)$），并且当且仅当 $c(P) = p$ 时保留 Q（以及 $c(Q)$）。这些是删薄，但对于任何拓扑序 $\prec$，R 都不是序贯的。取选择函数 c, c'，使得 $c(P) = c'P = \neg p$、$c(Q) = q$ 以及 $c'(Q) = \neg q$。于是 $Q \notin K_c$ 和 $Q \notin K_{c'}$，因此没有保留的析取先于 P 和 $H_c(P) = H_{c'}(P) = \emptyset$；然而 $P \in K_c$ 和 $P \notin K_{c'}$。在逐规则展开中，无论先遇到哪个析取，都必须在另一个析取尚未分解之前将其保留或弱化。

3.6 表格后承关系

我们将表列后承表示为两个典范表的节点之间的一种关系；映射是其函数特例。

定义 3.26（后承关系）。设 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{T}$为典范表，其选择节点集合分别为 $\mathsf{Ch}(\mathcal{T})$、$\mathsf{Ch}(\mathcal{T})$，模态节点集分别为 $\mathsf{Mod}(\mathcal{T})$、$\mathsf{Mod}(\mathcal{T})$。从$T$ 到$\mathcal{T}$的后承关系是一个关系

$$Z \subseteq (\mathsf{Ch}(\widetilde{\mathcal{T}}) \times \mathsf{Ch}(\mathcal{T})) \cup (\mathsf{Mod}(\widetilde{\mathcal{T}}) \times \mathsf{Mod}(\mathcal{T}))$$

它关联这两个根节点，并满足以下条件（见图2）。

(R-ch) 若 $(\tilde{t}, t) \in Z$，则对每个 $\tilde{m} \in C(\tilde{t})$，都存在 $m \in C(t)$，使得 $(\tilde{m}, m) \in Z$。

(R-loc) 若 $(\tilde{m}, m) \in Z$，且 $L(\tilde{m})$ 一致，则 $L(m)$ 一致，$\mathsf{Lit}(L(m)) \subseteq \mathsf{Lit}(L(\tilde{m}))$；并且，若 $L(m)$ 为 ∇- 非 Free，则 $L(\tilde{m})$ 为 ∇- 非 Free。

(R-back) 如果 $(\tilde{m}, m) \in Z$, $L(\tilde{m})$ 一致，且 $L(m)$ 是 ∇-非自由的，那么对于每个 $u \in C(m)$，都存在 $\tilde{u} \in C(\tilde{m})$，使得 $(\tilde{u}, u) \in Z$。

(R-forth^2) 在相同假设下，对于每个 $\tilde{u} \in C(\tilde{m})$ 以及每个满足 $L(\tilde{m}')$ 一致的 $\tilde{m}' \in C(\tilde{u})$，都存在 $u \in C(m)$ 和 $m' \in C(u)$，使得 $(\tilde{m}', m') \in Z$。

(R-par) 称一列有限或无限的模态对 $(\tilde{m}_0, m_0)$，$(\tilde{m}_1, m_1) \ldots$ 为 Za Z-路径，如果$\tilde{m}_0$ 和 m_0 是两个根节点的子节点，且 $\tilde{m}_{j+1}$、m_{j+1} 是 $\tilde{m}_j$、m_j的孙节点；其

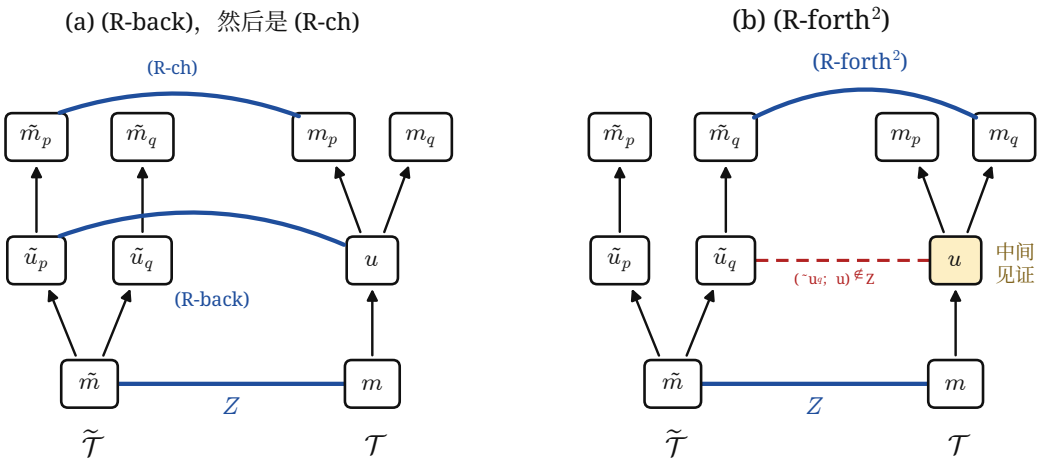

图3：例3.28。细箭头表示语义树边；粗线表示 Z的有序对。

左投影 和右投影 分别是路径 $\tilde{t}_0\tilde{m}_0\tilde{u}_1\tilde{m}_1\cdots$和 $t_0m_0u_1m_1\cdots$（当 Z-路径为无限时，它们是分支），其中 $\tilde{t}_0$，t_0 是根节点，$\tilde{u}_{j+1}$，u_{j+1} 是 $\tilde{m}_{j+1}$，m_{j+1}的父节点。如果一条无限 Z-路径的右投影为偶数，那么它的左投影也为偶数。

（R-forth²）中的右选择节点 u 可以依赖于 $\tilde{m}'$，而$(\tilde{u},\ u)$不必属于 $\sim Z$。如果 Z 是从$\mathcal{T}$到$\mathcal{T}$的后承关系，我们记作$\mathcal{T} \Rightarrow_Z \mathcal{T}$，或 $Z:\ \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}$；若这样的关系存在，则记作$\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}$。 Z-路径上的有序对具有相同深度，而该路径上某个有序对的祖先也位于这条路径上。

备注 3.27（设计选择）。(1)（R-back）必须应对每个右子节点：颠倒其量词会错误地使 $\nabla\{p\}$ 与 $\nabla\{p,\ q\}$建立关系。(2) 要求$(\tilde{u},\ u) \in Z$属于（R-forth²），将意味着对 $\tilde{u}$的所有子节点都满足（R-ch），尽管 u可能依赖于 $\tilde{m}'$（第 7 节；例3.28）。(3) 在典范树上，后承关系表示 Walukiewicz 博弈 [27]中的位置策略：（R-back）应对单后继移动，（R-forth²）应对全子节点步。

例3.28（一个后承关系）。令 $\alpha := \nabla\{p,q\}$ 且 $\hat{\varphi} := \nabla\emptyset \vee \nabla\{p \vee q\}$；则$\alpha \models \hat{\varphi}$。左侧，模态节点 $\tilde{m}$ 的标签为 $\{\nabla\{p,q\}\}$，其选择子节点 $\tilde{u}_p$、$\tilde{u}_q$ 的标签分别为 $\{p\}$、$\{q\}$，而其 ∇-free 模态子节点 $\tilde{m}_p$、$\tilde{m}_q$ 具有相同的标签。右侧，根有标签为 $\{\nabla\emptyset\}$ 和 $\{\nabla\{p \vee q\}\}$ 的模态子节点；后者 m有一个标签为 $\{p \vee q\}$ 的选择子节点 u，以及标签分别为 $\{p\}$、$\{q\}$ 的模态子节点 m_p、m_q。将 $\tilde{m}$与 m关联起来。(R-back) 由 $(\tilde{u}_p, u)$ 见证，而其中的 (R-ch) 则由 $(\tilde{m}_p, m_p)$ 见证；(R-forth²) 通过 (u, m_p) 和 (u, m_q) 回应 $\tilde{m}_p$ 和 $\tilde{m}_q$。这里，u 仅作为 $\tilde{m}_q$ 的中间见证：有序对 $(\tilde{u}_q, u)$ 不属于 Z。总而言之，$\sim$，其中 t_0、t_0 是根，

$$Z = \{(\tilde{t}_0, t_0),\ (\tilde{m}, m),\ (\tilde{u}_p, u),\ (\tilde{m}_p, m_p),\ (\tilde{m}_q, m_q)\}.$$

不存在无限分支，因此 (R-par) 空泛地成立（图3）。

定义 3.29（双模拟映射）。双模拟映射 $\zeta:\mathcal{T} \to \mathcal{T}$是一个从$\mathcal{T}$的节点到$\mathcal{T}$的节点的映射，它将根节点映射到根节点；对每个节点$\tilde{x}$，将 $C(\tilde{x})$映入 $C(\zeta(\tilde{x}))$；在选择节点处是满射，在一致的 ∇-非 Free 模态节点处是双射；双向保持一致性，并且在标签一致的模态节点处双向保持文字和 ∇-Free 性质；同时双向满足奇偶条件：$\mathcal{T}$的一条无限分支 ξ 是偶的，当且仅当 $\zeta(\xi)$ 是偶的。其图 Graph$(\zeta) := \{(\tilde{x}, \zeta(\tilde{x}))\}$ 是一个后承关系，其中每个模态对都位于一条 Graph(ζ)-路径上。

~**引理 3.30**（复合）。设 $Z : T \Rightarrow T$ 和 $Z' : T \Rightarrow U$ 是两个后承关系，且各自的每个模态对都位于相应关系的一条路径上。那么

$$Z' \circ Z := \{(\tilde{x}, y) \mid (\tilde{x}, x) \in Z \text{ and } (x, y) \in Z' \text{ for some } x\}$$

~是从 T 到 U 的一个后承关系，并且复合关系的每个模态对都位于从其根节点出发的复合关系有限路径上。根据定义 *3.29*，这适用于具有双模拟映射 f 的 $Z' = \text{图}(f)$。

证明。根节点彼此相关；通过复合见证可得 (R-ch)、(R-loc)、(R-back) 和 (R-forth^2)，其中 (R-loc) 在中间模态节点需要时确保一致性和 ∇-非自由性。(R-par)：设 $(\tilde{x}_i, y_i)_i$ 是一条无限的 $(Z' \circ Z)$-路径，其右投影是偶的，并固定 n。选取 x_n，使得 $(\tilde{x}_n, x_n) \in Z$ 且 $(x_n, y_n) \in Z'$。根据假设，这些有序对分别位于一条 Z-路径和一条 Z'-路径上，而这两条路径由相同深度处的祖先有序对组成（定义 3.26）；因此，x_n 的祖先 x_i 对所有 $i \leq n$ 都满足 $(\tilde{x}_i, x_i) \in Z$ 和 $(x_i, y_i) \in Z'$。对于每个 n，这些有限序列 $(x_i)_{i \leq n}$ 构成一个非空集合；由于 T 是有限分支的，该集合是有限的，并且对前缀封闭。由柯尼希引理，存在一个无限序列 $(x_i)_i$，使得 $(\tilde{x}_i, x_i)_i$ 是一条 Z-路径，而 $(x_i, y_i)_i$ 是一条 Z'-路径。由于 (y_i) 是偶的，根据 Z' 的 (R-par)，(x_i) 也是偶的；根据 Z 的 (R-par)，$(\tilde{x}_i)$ 也同样是偶的。对于路径性质，取一个复合模态对 $(\tilde{m}, n)$，其中间见证为 m。它在三棵树中的唯一模态祖先逐层相关：Z 和 Z' 的路径性质给出了路径上的祖先有序对 $(\tilde{m}_i, m_i) \in Z$ 和 $(m_i, n_i) \in Z'$，这些路径分别终止于所选有序对。因此，在每个深度都有 $(\tilde{m}_i, n_i) \in Z' \circ Z$，从而得到所需的复合关系有限路径。 □

~**命题 3.31**（模型策略的迁移）。设 $Z : T \Rightarrow T$ 是一个后承关系~，且 $(\mathbb{S}, s)$ 是一个指定点模型。若 Modl 在 $E(T \mathbb{S}, s)$ 中拥有获胜策略，那么她在 $E(T \mathbb{S}, s)$ 中也拥有获胜策略。对于一个双模拟映射 $f : T \to U$，Modl 在 $E(T \mathbb{S}, s)$ 中拥有获胜策略，当且仅当她在 $E(U \mathbb{S}, s)$ 中也拥有获胜策略。

证明。设 $\tilde{\sigma}$ 是左侧博弈中的一个获胜策略。Modl 在右侧博弈中行动，同时在同一世界模拟一局与 $\tilde{\sigma}$ 一致的左侧博弈，并维持一对 $(\tilde{x}, x) \in Z$，其中包含当前的选择节点或模态节点；起初它是 s 处的根对。

- 在 (t, w) 与 $(\tilde{t}, t) \in Z$ 处：$\tilde{\sigma}$ 从 $(\tilde{t}, w)$ 移动到某个 $(\tilde{m}, w)$；(R-ch) 给出 $m \in C(t)$，其中 $(\tilde{m}, m) \in Z$，于是她移动到 (m, w)。
- 在 (m, w) 与 $(\tilde{m}, m) \in Z$ 中：由于 $\tilde{\sigma}$ 获胜，$(\tilde{m}, w)$ 对 Modl 而言并非失败，因此 $L(\tilde{m})$ 的每个文字都在 w 处成立；特别地，$L(\tilde{m})$ 是一致的。根据 (R-loc)，$L(m)$ 的每个文字都在 w 处成立，并且如果 $L(m)$ 是 ∇- 非 Free 的，那么 $L(\tilde{m})$ 也是 ∇- 非 Free 的。如果 $L(m)$ 是 ∇-Free 的，Ref 就无法移动。否则：

  – 在 $m, w, u\Diamond$ 处：(R-back) 给出 $\tilde{u} \in C(\tilde{m})$，其中 $(\tilde{u}, u) \in Z$；在模拟对局中，Ref 移动到 $\tilde{m}, w, \tilde{u}\Diamond$，$\tilde{\sigma}$ 回答某个 $(\tilde{u}, v)$，答案为 wRv，随后她移动到 (u, v)；对局继续进行，$(\tilde{u}, u) \in Z$；– 在 $m, w, v_\Box$ 处：在模拟对局中，Ref 移动到 $\tilde{m}, w, v_\Box$，$\tilde{\sigma}$ 回答某个 $(\tilde{u}, v)$，答案为 $\tilde{u} \in C(\tilde{m})$，然后移动到某个 $(\tilde{m}', v)$，其中 $L(\tilde{m}')$ 是一致的，因为 $\tilde{\sigma}$ 获胜；(R-forth^2) 给出 $u \in C(m)$ 和 $m' \in C(u)$，其中 $(\tilde{m}', m') \in Z$；她移动到 (u, v)，然后移动到 (m', v)；对局继续进行，$(\tilde{m}', m') \in Z$。

Modl 永远不会陷入停滞，因此有限对局会在 Ref 无法行动的位置结束。在无限对局中，模态位置上的有序对构成一条无限 Z-路径：面对第一类挑战时，其步进依据 (R-back) 和 (R-ch)，面对第二类挑战时则依据 (R-forth^2)；其左投影是模拟对局的分支，右投影是实际对局的分支。前者是奇数，因为 $\tilde{\sigma}$ 是获胜策略，所以根据 (R-par)，后者也是奇数。因此，该策略是

获胜策略。对于双模拟映射 f，正向结论是将第一项断言应用于 Graph(f)。反过来，沿着 f提升获胜策略：在选择节点处利用满射性，并在一致的 ∇-非自由模态节点处利用双射性，来应对两类挑战。一致性、文字、 ∇-自由性和奇偶性的双向保持，确保每一场提升后的对局都能获胜。

□

引理 3.32 (双模拟映射的逆)。设 $\zeta\colon U_1 \to U_2$ 是典范表列之间的双模拟映射（定义 *3.29*）。那么它的逆图

$$\mathsf{Graph}(\zeta)^{-1} := \{(\zeta(s), s) \mid s \ is \ a \ node \ of \mathcal{U}_1\}$$

是一个表列 后承关系 $U_2 \Rightarrow U_1$, , 其中每个模态对都位于一条图（ζ）$^{-1}$-路径上 $th.$

证明。根据定义 3.29，根节点彼此对应。选择节点上的满射性给出 (R-ch)。一致的 ∇-非自由模态节点上的双射性，加上选择节点上的满射性，给出 (R-back) 和 (R-forth^2)。双向保持给出 (R-loc) 和 (R-par)，因为左投影是右投影在 ζ 下的像。任意模态节点的祖先链上的像对构成所需的有限逆图路径。

□

4 自动机范式

第 4.1 节介绍自动机范式。第 4.2–4.4 节为 $\mathcal{T}_\Gamma$ 配备确定性奇偶监视器，在循环节点处将其截断为有限前缀树 $\mathcal{G}_\Gamma$，并将带有折回至原处的循环节点的 $\mathcal{G}_\Gamma$ 视为有限奇偶博弈；由此证明断言（e）。第 4.5 节从 $\mathcal{G}_\Gamma$ 中读出 anf(Γ)（断言（b））， 第 4.6 节则加入第 6 节和第 7 节所需的句法正规化。

4.1 自动机范式

自动机范式（ [13]的析取公式；参见 [27]）将显式合取限制为文字集 $\bigwedge L$ 以及 $\nabla\Phi \wedge \bigwedge L$，其中 L 是一个文字集合，因此 ANF 表的每个分支都携带一条单一轨迹（引理 4.3）。

例 4.1。 公式 $\mu x.(\nabla\{p \vee x,\ \ q\} \wedge r)$ 符合自动机范式：约束变量 x 仅作为 $p \vee x$的析取项出现，而 $p \vee x$是在 ∇之下的 Φ 的一个元素； p、 q、 r和 x都是单元素文字集。公式 $\nu y.\mu x.\nabla\{x \wedge y\}$ 则不符合： x 和 y 同时出现在一个显式合取中，而定义 4.2 的第 4 条禁止这种情况。对 $\{x \wedge y\}$ 进行饱和后，经过 x 和经过 y 的路径都会到达 $\nabla\{x \wedge y\}$，但它们的再生集不同，因此一个分支可能携带不同的无限轨迹。

定义 4.2 （自动机范式）。 自动机范式（或自动机范式）公式的集合 ANF 是满足以下条件的最小干净受保护公式集合：

1. 对每个有限文字集合 L， $\bigwedge L \in$ 属于 ANF（特别是 $\top, \bot, p, \neg p$）； 2. 若 $\alpha, \beta \in$ 属于 ANF 且 $\alpha \vee \beta$ 是干净的，则 $\alpha \vee \beta \in$ 属于 ANF； 3. 若 $\Phi \subseteq$ 属于 ANF 且是有限的， L 是有限文字集合，并且 $\nabla\Phi \wedge \bigwedge L$ 是干净的，则 $\nabla\Phi \wedge \bigwedge L \in$ 属于 ANF（对于 $L = \emptyset$，根据第 2.2 节的约定，这就是 $\nabla\Phi$）； 4. 若 $\alpha \in$属于 ANF， x 在 α中是正的且受保护的，并且 x 在 α 中仅以单例 ANF 公式 $\bigwedge\{x\}$ 的形式出现，而不是作为显式合取中所用文字集合的成员（这样的单例可以是析取项、某个 Φ 的元素，或绑定子的体），则 $\eta x.\alpha \in$属于 ANF。

自由变量可能出现在文字集合 L 中（因此单个变量 x 是 ANF 公式 $\bigwedge\{x\}$），并且第 4 条允许出现空绑定子 $\eta y.\alpha$，其中 $y \notin$Free(α)。

引理 4.3 (ANF 表格结构)。 设 $\widehat{\varphi} \in \mathsf{ANF}$。那么，$T^{\widehat{\varphi}}$ 的每个选择节点都标记为单元素集合 $\{\widehat{\ }\gamma\}$，每个一致模态节点都标记为集合 $\{\nabla\Phi\} \cup L$，或标记为文字集合 L，并且 $T^{\widehat{\varphi}}$ 的每条无限分支都恰好带有一条无限迹。此外，$\widehat{\varphi}$是非合取的。

证明。 ANF 公式中不在文字集合内的每个子公式仍然属于 ANF，其中在该子公式外部绑定的变量被视为自由变量，因为第 1 条允许这样处理。根据定义 4.2 进行归纳，用 ANF 饱和 $\{\widehat{\ }\gamma\}$ 会沿着析取、绑定符和再生组成的一条链，直到 $\bigwedge L$ 或 $\nabla\Phi \wedge \bigwedge L$；因此，模态标签是 L 或 $\{\nabla\Phi\} \cup L$，其后继是单元素集合 $\{\psi\}$，其中 $\psi \in \Phi$，并且只有标签中的非文字公式在下一个迹关系中具有后继。根据第 4 条，合取的文字集合中不会出现约束变量，因此非合取性成立：在 $\nabla\Phi \wedge \bigwedge L$ 中只有 $\nabla\Phi$ 合取项可以具有活跃约束变量，而在 $\bigwedge L$ 中，即使带有 $|L| \geq 2$，两个合取项都不可能具有活跃约束变量。 □

虽然 ANF 对合取、νx 或替换不封闭，但对 ANF 公式应用这些运算会保留非合取性（对应于 Walukiewicz 对弱合取无关公式 [27] 的闭包性质，以及 Enqvist 等人对半析取自动机 [10] 的闭包性质）：

引理 4.4 (ANF 的合取无关闭包性质)。 设 $\widehat{\alpha}(x)$ β、$\widehat{\varphi} \in \mathsf{ANF}$ 的约束变量集合两两不相交，且其中任一集合的变量都不在其他公式中自由出现（并假设 x 在 $\widehat{\alpha}(x)$中为正的且受保护）。那么，$\widehat{\alpha} \wedge \beta$、$\nu x.\widehat{\alpha}(x)$和 $\widehat{\alpha}(\widehat{\varphi})$ 都是干净且非合取的。

证明。 由注记 2.4 可知其清洁性。考虑 $\widehat{\alpha}(\widehat{\varphi})$ 和一个 μ-变量 w。若 $w \in \mathsf{Bound}(\widehat{\alpha})$，则 $\mathsf{Bound}(\widehat{\alpha})$ 中没有变量出现在 $\widehat{\varphi}$ 中，因此没有依赖链从 w 开始并进入由 $\widehat{\varphi}$ 绑定的变量。因此，源自 $\widehat{\alpha}$ 的合取式保留其原有的活性模式，而 w 在替换副本中不活跃。若 $w \in \mathsf{Bound}(\widehat{\varphi})$，其定义体位于 $\widehat{\varphi}$ 内部；外部合取项不可能位于该体中，而内部合取项满足引理 4.3。重复替换会引入相同的子公式集合，而不会引入额外的定义绑定子（注记 2.4）。$\widehat{\ }$ 情形 $\widehat{\alpha} \wedge \beta$ 和 $\nu x.\widehat{\alpha}(x)$ 类似且更简单：新的合取项位于所有不动点体之外，而新的 ν- 绑定子没有非合取性约束，也不可能依赖内部的 μ-变量。 □

4.2 通过 Büchi 确定化识别偶数分支

在第 4.2–4.5 节中，$\Gamma = \Gamma_0$ 始终是一个固定的有限干净受保护集合。$\mathcal{T}_\Gamma$ 的一条分支可以携带多条轨迹；当且仅当其中一条是 μ-轨迹时，该分支才是偶分支；而$\mathcal{T}^{\mathsf{anf}(\Gamma)}$ 的一条分支只携带一条轨迹。因此，我们用非确定性 Büchi 自动机 NBA_Γ识别$\mathcal{T}_\Gamma$ 的偶分支：该自动机猜测一条 μ-轨迹及其 $\sqsubseteq$-最小且被无限次重新生成的变量，并将其确定化。

具体而言，$\mathcal{T}_\Gamma$的每条边 $e = (t, u)$ 都确定一个来自有限字母表 Σ_Γ 的字母 $a_e := (L(t)\ R_e, L(u))$（该字母表是有限的，因为 $L(t)\ L(u) \subseteq \mathsf{Cl}(\Gamma_0)$，且 $R_e \subseteq \mathsf{Cl}(\Gamma_0) \times \mathsf{Cl}(\Gamma_0) \times \mathcal{P}(\mathsf{Bound}(\Gamma_0))$)。因此，$\mathcal{T}_\Gamma$ 的一条无限分支 ξ 会导出一个无限字 $w(\xi) \in \Sigma_\Gamma^\omega$。

定义 4.5 （分支 Büchi 自动机 NBA_Γ）。 定义在 Σ_Γ 上的非确定性 Büchi 自动机 NBA_Γ 的状态形式为 γ （在提交到 x 之前跟踪一条迹）和 (γ, x)（跟踪一条已提交到 μ-变量 x 的迹），其中 $\gamma \in \mathsf{Cl}(\Gamma_0)$，$\mu$-变量 $x \in \mathsf{Bound}(\Gamma_0)$，初始状态为 $\gamma \in \Gamma$，并且在字母 $(\Delta, R, \Delta') \in \Sigma_\Gamma$ 上具有以下转移：

- 从 γ 到 $\gamma\prime$，以及从 γ 到 (γx)，只要存在某个 V，使得 $(\gamma, \gamma V) \in R$；
- 从 (γ, x) 到 $(\gamma\prime\, x)$，只要存在某个 V，使得 $(\gamma, \gamma V) \in R$，且对所有 $y \in V$ 都有 $x \sqsubseteq y$；若 $x \in V$，则此转移为接受 。

Lemma 4.6. 对于 T_Γ 的每条无限分支 ξ，NBA_Γ 接受 $w(\xi)$ 当且仅当 ξ 为偶数 .

证明。 如果 ξ 是偶数，则它携带一个 μ-迹 τ，其中具有 $\sqsubseteq$-最小的、无限次再生的变量 x（$\eta_x = \mu$）。引理 3.9 提供了一个位置，在该位置之后沿 τ 再生的每个变量都$\sqsubseteq$-高于 x；在该位置之后的第一条边处从 γ_n 转移到 $(\gamma_{n+1},\ x)$，得到 NBA_Γ的一个接受运行，因为 $x \in \mathrm{Reg}^\infty(\tau)$。反之，$\mathrm{NBA}_\Gamma$ 在 $w(\xi)$上的任何接受运行最终都会停留在状态 $(\gamma_n,\ x)$ 中，其中 μ是一个固定的变量 x；该运行的状态，连同其转移所对应的见证再生集，共同定义了 ξ上的一个迹 τ，沿着该迹，在此点之后再生的所有变量都 $\sqsubseteq$-高于 x，且 x自身被无限次再生；因此， x是 $\mathrm{Reg}^\infty(\tau)$ 的 $\sqsubseteq$-最小元素，并且 τ 是一个 μ-迹。 □

定理 4.7 (Büchi 确定化 [23, 22])。对于每个非确定性 *Büchi* 字自动机，都存在一个等价的 DPA（第 *2.5* 节）。

固定一个与 NBA_Γ 等价的确定性奇偶自动机 $\mathrm{DPA}_\Gamma = (Q,\ \Sigma_\Gamma,\ q_0,\ \delta,\ \mathsf{pri})$。对于 $\mathcal{T}_\Gamma$的每个节点 t，令 $q_t \in Q$ 表示 DPA_Γ 读取从 $\mathcal{T}_\Gamma$ 的根到 t的唯一路径上的字母后到达的状态。根据引理 4.6，$\mathcal{T}_\Gamma$的一条无限分支$\xi = t_0 t_1 \cdots$是偶的，当且仅当 $\max \mathrm{Inf}(\mathsf{pri}(q_{t_0})\mathsf{pri}(q_{t_1})\cdots)$ 是偶数。下文不会用到 DPA_Γ 内部结构的其他性质。

4.3 将 $\mathcal{T}_\Gamma$ 切割为有限前缀树 $\mathcal{G}_\Gamma$

我们从根节点开始沿着 $\mathcal{T}_\Gamma$ 运行 DPA_Γ，并在循环节点处将其切断；循环节点会重复某个祖先的种类、标签和自动机状态，且它们之间不存在优先级更高的节点。将循环节点折叠到其返回节点上，即得到一个有限奇偶博弈的竞技场（第 4.4 节）；而由此得到的有限树 $\mathcal{G}_\Gamma$ 是 $\mathrm{anf}(\Gamma)$ 的骨架（第 4.5 节）。

定义 4.8 （循环节点、返回节点与有限树 $\mathcal{G}_\Gamma$）。 T_Γ 中的节点 t 是一个循环节点，如果它有一个同类（同为选择节点或同为模态节点）的真祖先 t'，使得

$$L(t') = L(t),\quad q_{t'} = q_t,\quad \text{and}\quad \mathsf{pri}(q_u) \le \mathsf{pri}(q_t) \text{ for every node } u \text{ on the path from } t' \text{ to } t.$$

距离最近（最深）的此类真祖先 t' 称为 t的返回节点，记作 $\mathrm{ret}(t)$。我们将$\mathcal{G}_\Gamma$ 定义为$\mathcal{T}_\Gamma$ 中所有真祖先均不是循环节点的节点所组成的集合，并用$\mathcal{G}_\Gamma^\circ$ 表示$\mathcal{G}_\Gamma$ 中不是循环节点的节点集合，即$\mathcal{G}_\Gamma$ 的内部节点以及$\mathcal{T}_\Gamma$ 中属于$\mathcal{G}_\Gamma$的叶节点。

在引理 22 中，回边只出现在选择节点上，这要求选择状态在优先级上支配模态状态；两类循环节点可避开这一预处理。

引理 4.9 （G的性质）。 *1.* 前缀树 G_Γ 是有限的。

2. 对于 T_Γ 的每个节点 t，归纳定义 $\rho(t) \in G_\Gamma$： $\rho(root) := root$；如果 u 是 t 的子节点，则 $\rho(u)$ 是 G_Γ 中 $\rho'(t)$ 的子节点，并且具有与 u （注 *3.7* 中的对应关系）相同的标签和入边迹关系，其中，如果 $\rho(t)$ 是循环节点，则 $\rho'(t) := ret(\rho(t))$；否则 $\rho'(t) := \rho(t)$。那么， $\rho(t)$ 定义良好， $\rho'(t)$ 是 $\in G_\Gamma^\circ$ 的 $L(\rho'(t))$， $= L(\rho(t)) = L(t)$，并且 $q_{\rho'(t)} = q_{\rho(t)} = q_t$。

3. 设 ξ 是 T_Γ 的一条无限分支，并设 R_ξ 为满足以下条件的返回节点 r 的集合：对于无穷多个 $t \in \xi$，都有 $r = \mathrm{ret}(\rho(t))$。那么， R_ξ 有一个深度最小的唯一元素 r， R_ξ 的每个元素都位于 r 的子树中，并且当且仅当 $\mathsf{pri}(q_r)$ 为偶数时， ξ 为偶数。

图 4 展示了第 (3) 部分；树段表示路径，虚线箭头表示返回，数字表示 $\mathsf{pri}(q_t)$。如果对 a 的返回被无限次使用，则 $\mathrm{ret}(a)$ 是最浅的循环返回节点，优先级 5 决定奇偶性；如果游走最终停留在 b-循环中，则由优先级 2 决定。在第 4.5 节的 ANF 构造中，更靠近根的返回节点给出一个外层绑定子。

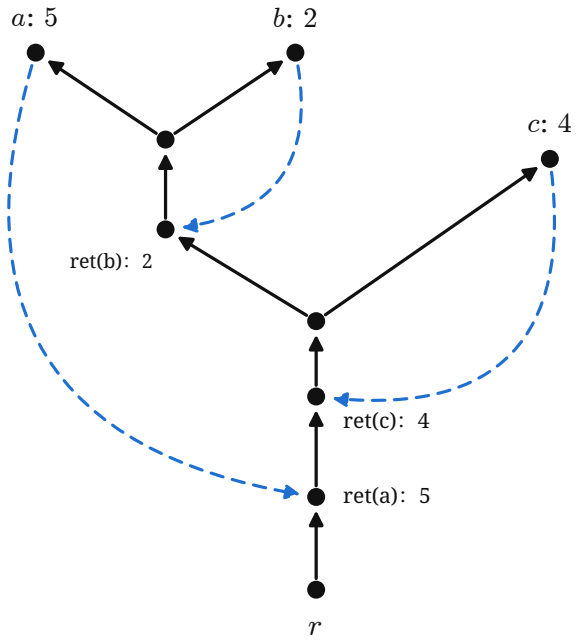

图 4：嵌套返回及其优先级 ies.

证明。（1）在任意无限分支上，在最后一个优先级超过最大循环优先级 p 的位置之后，根据鸽巢原理，存在两个优先级为 p 的节点，它们在种类、标签和状态上相同；它们之间的所有优先级都不超过 p，因此后一个节点是循环节点。于是 G_Γ 没有无限分支，根据柯尼希引理可知它是有限的。（2）按深度归纳：循环节点的返回指向一个具有相同种类、标签和状态的非循环祖先；标签确定性匹配子节点和边关系，而确定性匹配它们的状态，从而证明所有断言。（3）记 $\rho(\xi)$ 为 G_Γ 中的无限游走 $\rho(t_0)\rho(t_1)\cdots$；它沿着 G_Γ 的树边从一个节点移动到一个子节点，但访问循环节点 ℓ 后，会跳转到 ret(ℓ)，然后继续移动到 ret(ℓ) 的一个子节点。根据第 (2) 部分，ξ 和 $\rho(\xi)$ 访问相同的自动机状态和优先级序列。由于 G_Γ 是有限的，R_ξ 非空，并且存在 N，使得在位置 N 之后，$\rho(\xi)$ 的每次跳转都指向 R_ξ 中的一个元素。令 d 为 R_ξ 中某个元素的最小深度，并令 $r \in R_\xi$ 为深度 d 的元素。在首次跳转到超过 N 的 r 后，该游走将永远不会离开 r 的子树：移动到子节点会留在其中，而从子树中的循环节点 ℓ 跳转时会到达 ret(ℓ)，它是 ℓ 的祖先；如果 ret(ℓ) 位于子树之外，那么它将是 r 的真祖先，而 r 是 R_ξ 中深度小于 d 的一个元素。因此，R_ξ 中的每个元素都位于 r 的子树中，而 r 是深度为 d 的唯一元素。从此以后，$\rho(\xi)$ 分解为从 r 返回到 r 的一系列有限循环。

我们断言，在这样的环上访问的每个节点都满足 pri(q_n) ≤pri(q_r)。从 r到 r 的环是一系列树路径 $s_i \to \ell_i$ ($0 \le i \le k$)，从 s_i 向上到达一个循环节点 ℓ_i，其中 $s_0 = r$,s_{i+1} = ret(ℓ_i) 对于 $i < k$成立，并且 ret(ℓ_k) $= r$；所有 s_i 都位于 r的子树中。由于第 i 条路径上的每个节点都位于从 r 到 ℓ_i的树路径上，因此只需通过对 i从 k 递减到 0 进行归纳，证明从 r 到 ℓ_i 的路径上的每个节点的优先级都不超过 pri(q_r)。对于 $i = k$，这是定义 4.8 中针对 ℓ_k 且 ret(ℓ_k) $= r$的循环条件。对于 $i < k$，从 r 到 ℓ_i 的路径是先沿着从 r 到 ret(ℓ_i) $= s_{i+1}$ 的路径，再接上从 ret(ℓ_i) 到 ℓ_i的路径。第一部分是从 r 到 ℓ_{i+1} 的路径的前缀（因为 s_{i+1} 是 ℓ_{i+1}的祖先），所以根据归纳假设，其优先级不超过 pri(q_r)；第二部分的优先级根据定义 4.8 不超过 pri($q_{\text{ret}(\ell_i)}$)，并且 pri($q_{\text{ret}(\ell_i)}$) ≤pri(q_r)，因为 ret(ℓ_i) $= s_{i+1}$ 位于第一部分上。

因此，从第一次跳转到 r beyond N on开始，沿 ξ 出现的所有优先级都至多为 pri(q_r)，而 pri(q_r) 会在位置 t 处无限次出现；对于这些位置，$\rho(t)$ 是一个循环节点 $\ell$with ret(ℓ) $= r$，因为 $q_t = q_\ell = q_r$。根据引理 4.6 和定理 4.7，ξ 为偶数当且仅当 pri(q_r) 为偶数。 □

4.4 折叠表列作为有限奇偶博弈

现在，我们将折回其循环节点的 $\mathcal{G}_\Gamma$视为一个有限奇偶博弈，并证明定理 3.17。与 Kirsten 在瓷砖上的奇偶博弈一样， [16], 选择节点处的饱和步骤发挥着瓷砖的作用；根据标签确定性（注 3.7），无需单独定义瓷砖。

对于 $g \in \mathcal{G}_\Gamma$，若 g 是循环节点，则令 $\hat{}g :=$ret(g)；否则令 $\hat{}g := g$；因此 $\rho'(t) = \widehat{\ }$引理 4.9(2) 中的 $\rho(t)$。对于 $t \in \mathcal{G}_\Gamma^\circ$，$\mathcal{T}_\Gamma$ 中 t 的所有子节点都属于 $\mathcal{G}_\Gamma$。

定义 4.10（折叠表列博弈）。奇偶博弈$\mathcal{P}_\Gamma$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
V :=& \mathcal{G}_\Gamma^\circ,\ V_{\mathsf{Modl}} := \{t \in V \mid t \text{ 是选择节点，或是模态节点且 } L(t) \text{ 不相容}\},\\
V_{\mathsf{Ref}} :=& \{t \in V \mid t \text{ 是模态节点且 } L(t) \text{ 一致}\},\ E := \{(t,\ \hat{}g) \mid t \in V,\ \ g \in C(t)\},\\
\Omega(t) :=& \mathsf{pri}(q_t),
\end{aligned}
$$

初始位置为根节点$\mathcal{G}_\Gamma$。

$\mathcal{P}_\Gamma$ 的死端正好是$\mathcal{G}_\Gamma^\circ$ 中作为$\mathcal{T}_\Gamma$叶节点的节点。不相容的模态位置对 Modl 而言是失败；没有子节点的一致模态位置（其标签是 ∇-free，或其所有 ∇-公式都是 $\nabla\emptyset$）对 Ref 而言是失败。选择位置永远不是死端，因为 Out(Δ) $\neq \emptyset$。

引理 4.11 (对局与分支)。对于 T_Γ 的分支 $\xi = t_0 t_1 \cdots$，令 $\rho'(\xi) := \rho'(t_0)\,\rho'(t_1)\cdots$。

1. $\rho'(\xi)$ 是从初始位置开始的 P_Γ 的一场对局，并且对于所有 i，$\Omega(\rho'(t_i)) = \mathsf{pri}(q_{t_i})$。*2.* 如果 $v = \rho'(t)$ 且 $(v, v') \in E$，那么 t 有一个子节点 u，满足 $\rho'(u) = v'$。因此，从初始位置开始的每场对局都是某个分支 ξ 的 $\rho'(\xi)$。*3.* 无限分支 ξ 是偶的，当且仅当 *Ref* 赢得 $\rho'(\xi)$。

证明。由引理 4.9(2)，$u \mapsto \rho(u)$ 是从 $C(t)$ 到 $\rho'(t)$ 的子节点的双射，并且 $\frown\rho'(u) = \rho(u)$；因此，从 $\rho'(t)$ 出发的移动恰好是满足 $u \in C(t)$ 的有序对 $(\rho'(t)\ \rho'(u))$。此外，$L(\rho'(t)) = L(t)$，且 $q_{\rho'(t)} = q_t$，所以 t 是叶节点当且仅当 $\rho'(t)$ 是死端。这就证明了 (1) 和 (2)。对于 (3)，ξ 为偶数当且仅当 DPA_Γ 接受 $w(\xi)$（引理 4.6 和定理 4.7），也就是说，当且仅当 max Inf(pri(q_{t_0})pri(q_{t_1})$\cdots$) 为偶数；这又当且仅当 Ref 根据 (1) 赢得 $\rho'(\xi)$。 □

引理 4.12 (位置式模型策略是有限模型)。设 $\sigma : V_{\mathsf{Modl}} \to V$ 是 *Modl* 从 P_Γ 的初始位置出发的一个位置式获胜策略，而 W 是从初始位置出发且与 σ一致的对局中出现的位置集合。定义 $\mathbb{S}_\sigma = (S_\sigma, R_\sigma, \lambda_\sigma)$ 以及 s_σ为

$$
\begin{aligned}
S_\sigma &:= \{n \in W \mid n \textit{ is a modal node}\},\\
n\, R_\sigma\, n' &:\iff \sigma(u) = n' \textit{ for some } u \textit{ with } (n,u) \in E,\\
\lambda_\sigma(p) &:= \{n \in S_\sigma \mid p \in L(n)\},\\
s_\sigma &:= \sigma(\mathrm{root}_{\mathcal{G}_\Gamma}).
\end{aligned}
$$

那么 $\mathbb{S}_\sigma$ 是一个有限 *Kripke* 模型，并且 $\mathbb{S}_\sigma, s_\sigma \models \bigwedge\langle\langle\Gamma\rangle\rangle\bot$。

证明。没有与 σ 一致的对局会到达 Modl 的死端，因此每个 $n \in S_\sigma$ 都有一致标签，并且 $L(n)$ 的每个文字在 n处都成立。如果 $n \in S_\sigma$ 且 $(n,\ u) \in E$，那么 $u \in W$ 且 $\sigma(u) \in S_\sigma$，所以 $R_\sigma \subseteq S_\sigma \times S_\sigma$。根据定理 3.12，只需为 Modl 在$\mathcal{E}(\mathcal{T}_\Gamma,\ \mathbb{S}_\sigma,\ s_\sigma)$中给出一个获胜策略。她保持以下不变量：截至目前访问过的语义树节点在 ρ' 下投影为与 σ一致的对局的一个 Prefix；选择位置 $(t,\ w)$ 处的世界为 $w = \sigma(\rho'(t))$；模态位置 $(m,\ w)$ 处的世界为 $w = \rho'(m)$。

- 在（t，w）处：根据引理 4.11(2)，存在 $m \in C(t)$，使得 $\rho(m) = \sigma(\rho(t)) = w$，并且她移动到（$m$，$w$）。
- 在（m, w）处，对于 $n := w = \rho'(m)$：$L(m) = L(n)$，因此其所有文字在 w 处均成立；如果 $L(m)$ 是∇-Free，Ref 无法移动。否则：– 在 $m, w, u^{\Diamond}$ 处，她移动到（u, v），并带有 $v := \sigma(\rho'(u))$，该式满足 $nR_\sigma v$，因为（$n, \rho'(u)$）$\in E$；– 在 $m, w, v_{\Box}$ 处，其中 $nR_\sigma v$，她取 u'，且（n, u'）$\in E$，并且 $\sigma(u') = v$，然后移动到（u, v），对应于子节点 $u \in C(m)$，其中 $\rho'(u) = u'$；该子节点的存在性由引理 4.11(2) 得出。

在这两种情况下，对局都在（u，v）处继续，并带有 $v = \sigma(\rho'(u))$。

她从不会陷入无路可走的境地。对于带有语义树分支 ξ的无限对局，不变量使得 $\rho'(\xi)$成为与 σ一致的对局，而 Ref 会输掉该对局；因此，根据引理 4.11(3)，ξ 是奇数。所以该策略是获胜策略。

□

构造方法与 [16]相同。

引理 4.13 (位置反驳者与正则反驳)。 如果Ref 从 P_Γ 的初始位置出发有一个位置式获胜策略 τ，那么 Γ就有一个正则反驳，其中每次稀疏化都是完全的。

证明。 对于每个不是死端的位置 $n \in V_{\mathsf{Ref}}$，固定选择 n 的一个子节点 g_n，使得 $\hat{}g_n = \tau(n)$。令 U 为从$\mathcal{T}_\Gamma$ 中得到的子树：保留所有选择节点的子节点；而对于满足 $C(m) \neq \emptyset$的相容模态节点 m，则只保留满足 $\rho(u) = g_{\rho'(m)}$的子节点 u。对于 U的每个分支 ξ，$\rho'(\xi)$都是与 τ一致的对局，因此 Ref 会赢得该对局。因此，U 的每个叶节点都是不相容的模态节点（相容的叶节点会是 Ref 的死端），而 U 的每个无限分支根据引理 4.11(3)都是偶数。

将 U 构造成一个反驳$\mathcal{R}$：对于每个选择函数c，添加一个标记为 Δ的选择节点，并将 U 中其子节点处、结果为（M_c（Δ） R_c（Δ））的子树复制一份。这样，每种稀疏化都是 $K_c = S_c$（Δ）；每个一致模态节点都是 ∇-非自由的，且恰有一个子节点，即一个模态后继；$\mathcal{R}$的每个叶节点都不相容，并且每条无限分支都投影到 U的一条偶分支上；因此$\mathcal{R}$ 满足定义 3.13。

为保证正则性，将$\mathcal{R}$ 中每个复制节点的值设为其在 U中原节点处 ρ' 的值。值相同的节点具有相同的标签。在选择节点处，将由同一选择函数索引的子节点相匹配；在一致模态节点处，保留的子节点彼此对应，因为每个博弈位置 n的 g_n都是固定的。根据引理 4.9(2)，对应的子节点具有相同的标签、边迹关系以及 ρ'的值。递归地匹配这些子节点，即可得到一个保标签、保关系的有根子树同构。因此，$\mathcal{R}$ 至多有 $|\mathcal{G}^\circ_\Gamma|$ 个同构意义下的有根标记子树。

□

定理 4.14（正则反驳的有限博弈存在性）。 如果 Γ 不可满足，那么 Γ 就有一个带完全稀疏化的正则反驳。因此，定理 *3.17* 成立。

备注 4.15（提取的见证的大小）。 有限博弈中的位置策略所产生的见证，其大小受显式构造的前缀博弈中的位置数限制；特别是，按所示局部选择，其大小与 $|\mathcal{G}^\circ_\Gamma|$ 成正比。这里并未声称其相对于输入公式具有单指数上界：深度和分支数均为指数级的前缀树本身就可能达到双指数规模。要获得规模更小的商博弈，需要另行证明，按标签、节点类型和监控器状态合并位置，不会影响相关的策略和迹信息。本文不声称存在这样的商博弈或更优的上界。

证明。 根据定理 2.9，从$\mathcal{P}_\Gamma$ 的初始位置出发，其中一方拥有位置式获胜策略。若该方是 Modl，则引理 4.12 将推出 $\bigwedge\langle\langle\Gamma\rangle\rangle$ 可满足。因此该方是 Ref，而引理 4.13 可得反驳。

□

4.5 读取$\mathsf{anf}(\Gamma)$

定义 4.16（构造 anf(Γ)）。 设 $\Gamma \neq \emptyset$；那么，$\mathcal{T}_\Gamma$ 的每个标签都非空，因为将非空集合饱和后会得到一个模态公式，且模态后继非空。为每个非循环节点 $t \in \mathcal{G}_\Gamma^\circ$分配一个新的约束变量 x_t，并为每个循环节点 $\ell \in \mathcal{G}_\Gamma \setminus \mathcal{G}_\Gamma^\circ$分配一个新的虚设 约束变量 y_ℓ。对于每个 $t \in \mathcal{G}_\Gamma^\circ$，若 pri($q_t$) 为偶数，则令 $\eta_t := \mu$；若 pri(q_t) 为奇数，则令$\eta_t := \nu$。我们通过归纳法，从有限树 $\mathcal{G}_\Gamma$ 的叶节点向根节点，为每个节点 $t \in \mathcal{G}_\Gamma$ 定义公式 anf(t)：

- 若 t 是循环节点：anf(t) := $\nu y_t.\, x_{\mathsf{ret}(t)}$；
- 若 $t \in \mathcal{G}_{\circ\Gamma}$ 是模态节点：anf$^-$(t) := $\bot$ 若 $L(t)$ 不相容；anf$^-$(t) := $\bigwedge L(t)$，若 $L(t)$ 一致且为 ∇-free；否则

$$\mathsf{anf}^-(t) := \nabla\{\mathsf{anf}(u) \mid u \text{ is a child of } t \text{ in } \mathcal{G}_\Gamma\} \wedge \bigwedge \mathsf{Lit}(L(t));$$

- 如果 $t \in \mathcal{G}_{\circ\Gamma}$ 是一个选择节点：anf$^-$(t) := $\bigvee${anf(m) | m 是 $\mathcal{G}$ t 中的 | m 子节点}；
- 对于每个非循环节点 $t \in \mathcal{G}_{\circ\Gamma}$：anf($t$) := $\eta_t x_t$.anf$^-$(t)。

最后，我们设 anf(Γ) :=anf(root$_{\mathcal{G}_\Gamma}$)，以及 anf(φ) := anf($\{\varphi\}$)。

图 5 展示了模态子句和选择子句，以及不动点类型的赋值；中间节点在示意性的返回树中被省略。

定义 4.17（模态分量标签）。 对于一致模态节点 $n \in \mathcal{G}_\Gamma^\circ$，令 Lab($n$) 表示通过对 anf$^-$($n$) 进行饱和所得到的模态分量集合：即，当 n 是 ∇-free 时，Lab(n) := $L(n)$，并且

$$\mathsf{Lab}(n) := \{\nabla\{\mathsf{anf}(u) \mid u \in C_{\mathcal{G}_\Gamma}(n)\}\} \cup \mathsf{Lit}(L(n))$$

如果 $L(n)$ 是 ∇-非 free。

备注 4.18（句法单射性与空绑定子的作用）。 在定义 4.16 中，绑定子 νy_ℓ 以及非返回节点 t 的绑定子 $\eta_t x_t$ 都是空绑定子；它们只会被展开，不会重新生成。由于每个节点 $v \in \mathcal{G}_\Gamma$ 都带有自己的最外层绑定符，$v \mapsto$ anf(v) 在 $\mathcal{G}_\Gamma$ 上是单射的。由于树中不同节点的子节点集合互不相交，$u \mapsto$ anf(u) 的单射性意味着，具有非空子节点集合的不同模态节点，其集合{anf(u) | $u \in C_{\mathcal{G}_\Gamma}(n)$}彼此不同。因此，对于具有子节点的一致模态节点 $n \in \mathcal{G}_\Gamma^\circ$，Lab($n$) 的 ∇-公式（定义 4.17）能够确定 n；这种单射性发挥了与 [27, 观察 22.2] 相同的作用。

定理 4.19（自动机范式；断言（b））。 对于每个非空有限干净受保护集合 Γ，$\mathsf{anf}(\Gamma) \in \mathsf{ANF}$，$\mathsf{Free}(\mathsf{anf}(\Gamma)) \subseteq \mathsf{Free}(\Gamma)$；$\Gamma$ 中每个为正的（受保护的）自由变量在 $\mathsf{anf}(\Gamma)$ 中也为正的（受保护的）；并且存在一个双模拟映射 $\zeta_{\mathsf{anf}} : \boldsymbol{T}_\Gamma \to \boldsymbol{T}^{\mathsf{anf}(\Gamma)}$。因此，$\bigwedge\langle\langle\Gamma\rangle\rangle \equiv \mathsf{anf}(\Gamma)$。

证明。句法形式。新鲜且两两不同的绑定符确保了清洁性：每个 x_r 只在返回 r 的循环节点处出现，且位于其子树内。返回循环路径连接同类的不同节点，并穿过一个模态节点，因此每个 x_r 都是受保护的。其出现形式是在空绑定子 νy_ℓ 下的单元素文字集，而这些绑定子本身是析取项或 ∇-元素；因此定义 4.2(4) 成立，并且 anf(Γ) ∈ANF。自由变量只来自模态文字集，因此 Free(anf(Γ)) ⊆Free(Γ)；分解保持极性，而通向受保护自由文字的任何路径都会穿过一条模态边，使其 ANF 出现位于 ∇ 之下。

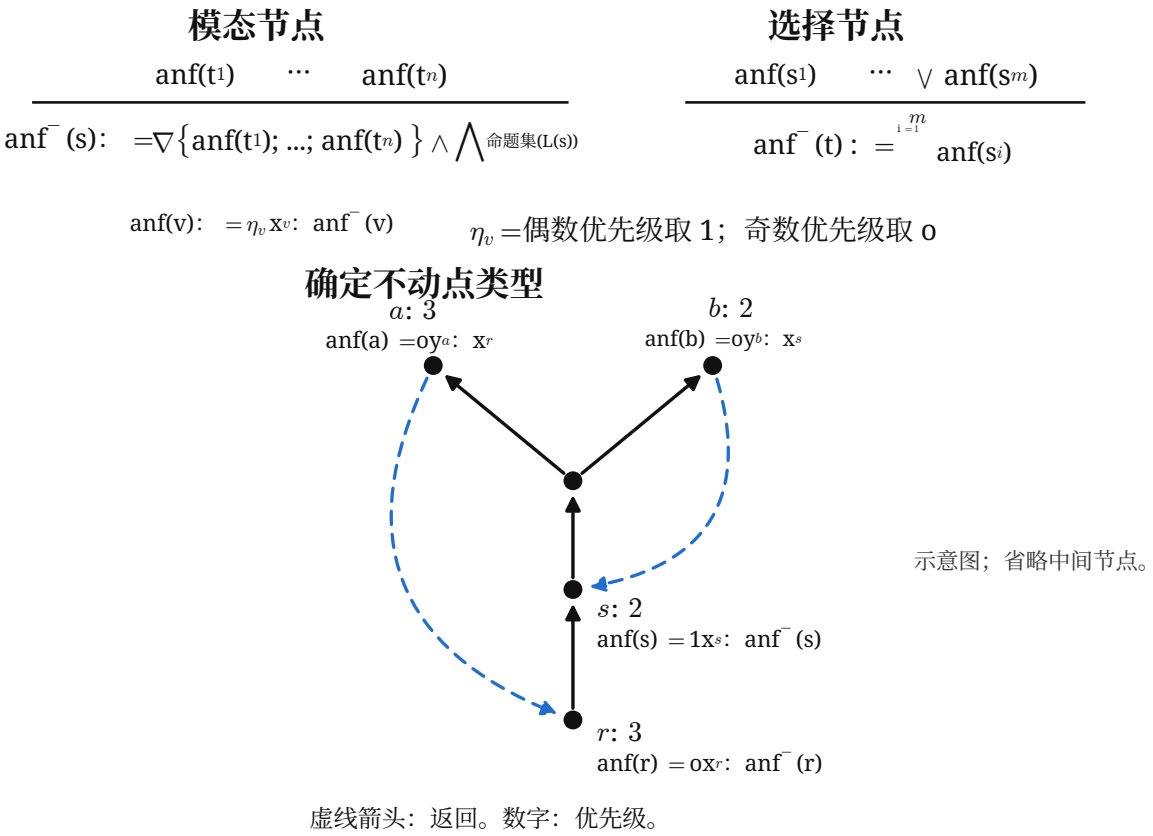

图 5：从 $\mathcal{G}_\Gamma$ 读取 anf(Γ)：模态子句和选择子句，以及不动点类型的判定。

双模拟映射 ζ_{anf}。对于模态节点 $n \in \mathcal{G}_\Gamma^\circ$，令 Lab($n$) 如定义 4.17 中所述（其中，如果 n 不相容，则 Lab(n) := $\{\bot\}$ L）。根据引理 4.3，$\mathcal{T}^{\mathsf{anf}(\Gamma)}$ 的每个选择节点都由单个公式标记。利用引理 4.9(2) 的投影 ρ，我们从根节点开始归纳地构造 ζ_{anf}，同时保持

$$L(\zeta_{\mathsf{anf}}(t)) = \{\mathsf{anf}(\rho(t))\} \text{ for choice nodes } t, \qquad L(\zeta_{\mathsf{anf}}(m)) = \mathsf{Lab}(\rho'(m)) \text{ for modal nodes } m.$$

根节点映射到根节点。

在选择节点 $t\mathrm{T}_\Gamma$ 处，对 $\mathrm{T}^{\mathsf{anf}(\Gamma)}$ 中的单元素集合 {anf($\rho(t)$)} 进行饱和时，首先展开虚拟绑定符 $\nu y_{\rho(t)}$，并重新生成 $x_{\mathsf{ret}(\rho(t))} \to$anf$^-$($\rho'(t)$)（如果 $\rho(t)$ 是循环节点），或者展开$\eta_{\rho(t)} x_{\rho(t)} \to$ anf$^-$($\rho'(t)$)（如果 $\rho(t) \in \mathrm{G}_\Gamma^\circ$）；随后为模态子节点选择一个析取项 anf($\tilde{m}$)$\tilde{m} \in C_{\mathcal{G}_\Gamma}(\rho'(t))$，将 anf($\tilde{m}$) 展开或重新生成至 anf$^-$($\rho'(\tilde{m})$)，并将其拆分为模态集合 Lab($\rho'(\tilde{m})$)。定义 $\zeta_{\mathsf{anf}}(m)$ 为由这一饱和结果确定的 $\zeta_{\mathsf{anf}}(t)$ 的子节点，其中包括其迹关系。根据引理 4.9(2)，T_Γ 中的子节点 $m \in C(t)$ 与 $\rho(m) = \tilde{m} \in C_{\mathcal{G}_\Gamma}(\rho'(t))$ 中的子节点一一对应。由于所有选择函数均已穷尽，这就给出了从 $C(t)$ 到 $C(\zeta_{\mathsf{anf}}(t))$ 的一个满射；它不必是单射，因为 $\rho'(t)$ 的不同子节点可能生成相同的 (M_c, R_c)，随后被合并为 $\zeta_{\mathsf{anf}}(t)$ 的单个模态子节点。

在 T_Γ 中一个一致的 ∇-非 Free 模态节点 $m$of T_Γ with $n := \rho'(m)$ 处，$\zeta_{\mathsf{anf}}(m)$ 的选择子节点（标记为 Lab(n)）是形如 {anf($\tilde{u}$)} 的单元素集合，其中 $\tilde{u} \in C_{\mathcal{G}_\Gamma}(n)$ 两两不同（根据注 4.18）；而 T_Γ 中的选择子节点 $u \in C(m)$ 与 $\rho(u) \in C_{\mathcal{G}_\Gamma}(n)$ 双射对应。将 u 映射到 $\zeta_{\mathsf{anf}}(m)$ 的、标记为 {anf($\rho(u)$)} 的子节点，给出了从 $C(m)$ 到 $C(\zeta_{\mathsf{anf}}(m))$ 的双射。一致性，以及在一致模态节点处的文字和 ∇-Free 性，在两个方向上均得到保持：$L(m)$ 不相容，当且仅当 $L(\zeta_{\mathsf{anf}}(m)) = \{\bot\}$；对于一致的 $L(m)$，Lab($\rho'(m)$) 的文字和 ∇-Free 性分别与 $L(\rho'(m)) = L(m)$ 的相同（定义 4.17）。

双向奇偶条件 *(R-par)*。令 ξ 为$\mathcal{T}_\Gamma$ 的一条无限分支。根据引理 4.3，$\mathcal{T}^{\mathsf{anf}(\Gamma)}$ 中的像分支 $\zeta_{\mathsf{anf}}(\xi)$ 携带唯一无限迹 $\hat{}\tau$。沿 $\hat{}\tau$ 无限次重新生成的变量恰好是

$$\mathsf{Reg}^{\infty}(\hat{\tau}) = \{x_r \mid r \in R_\xi\},$$

其中 R_ξ 如引理 4.9(3) 所述。事实上，每次访问循环节点 ℓ 都会在相应的饱和中再生 $x_{\mathsf{ret}(\ell)}$，且这是唯一的再生：非返回绑定器和虚拟绑定器只会被展开。设 $r \in \mathcal{G}_\Gamma^\circ$ 是沿着 $\rho(\xi)$ 无穷次访问的最浅返回节点，正如引理 4.9(3) 所述。于是 $x_r \in \mathsf{Reg}^{\infty}(\hat{}\tau)$，而每个其他属于 r 子树中某个返回节点的变量$x_{r'} \in \mathsf{Reg}^{\infty}(\hat{}\tau)$，都满足 $\mathsf{anf}(r')$ 是 $\mathsf{anf}(r)$ 的子公式，因而 $x_r \sqsubset x_{r'}$。因此，x_r是 $\mathsf{Reg}^{\infty}(\hat{}\tau)$ 中按 $\sqsubset$ 排序最小的元素。所以，$\zeta_{\mathsf{anf}}(\xi)$ 为偶数，当且仅当 $\eta_r = \mu$ 为偶数；根据定义 4.16，这当且仅当 $\mathsf{pri}(q_r)$ 为偶数；根据引理 4.9(3)，这又当且仅当 ξ 为偶数。将命题 3.31 和定理 3.12 应用于 $\Gamma_0 = \Gamma$ 以及 $\Gamma_0 = \{\mathsf{anf}(\Gamma)\}$，证明即告完成。 □

4.6 盒隔离

正上下文提升（定理 6.1）和展开引理（引理 6.3）还需要进行一项句法正规化。此正规化使模态步骤 $\bigvee\Psi$ 所产生的方框部分不依赖于任何其他公式。

定义 4.20 （盒链与方框隔离公式）。 对于一个有限集 $\Psi = \{\theta_1, \dots, \theta_s\}$，其中$s \geq 2$按固定的全局顺序列出，$\nabla\Psi$ 的盒链 为

$$\left\{ \bigvee\{\theta_i, \dots, \theta_s\} \;\middle|\; 1 \leq i < s \right\};$$

其头部 是 $\bigvee\Psi$。对于 $|\Psi| \leq 1$，盒链为空。 ∇-形式的干净公式 χ 是方框隔离的，当且仅当对每个 $\nabla\Psi \in \mathsf{Sub}(\chi)$:

1. 每个 $\theta \in \Psi$ 都是不动点公式 $\eta_z z.\varphi_z$;
2. χ 中任何 $\theta \in \Psi$ 的每次出现，都是作为 $\nabla\Psi$的一个元素而出现。

特别是，盒隔离公式的不同 ∇-子公式具有互不相交的元素集合。

引理 4.21 (盒隔离)。 *1.* 对于每个 $\widehat{\alpha}(x) \in \mathsf{ANF}$，若其为正且受保护，则存在一个盒隔离的 $\widehat{\alpha}^\dagger(x) \in \mathsf{ANF}$，它具有相同的自由变量，其中 x 为正且受保护，使得 $\vdash \widehat{\alpha}(x) \leftrightarrow \widehat{\alpha}^\dagger(x)$。

2. 对于每个非空有限干净守卫集 Γ，公式 $\mathsf{anf}(\Gamma)$ 都是盒隔离的。

3. 若 $\widehat{\alpha}(x)$ 和 β 均为盒隔离的，x 在 $\widehat{\alpha}(x)$ 中为正，它们的约束变量集合互不相交，且任一方的约束变量均未在另一方中自由出现，则 $\mu x.\widehat{\alpha}(x)$ 和 $\widehat{\alpha}(\beta)$均为盒隔离的。

4. 设 χ 为盒隔离的，取 $\Gamma_0 := \{\chi\}$，并设 $\nabla\Psi \in \mathit{Cl}(\chi)$。则：*(a)* $\nabla\Psi$ 的盒链中没有析取项属于 $\mathit{Sub}(\chi)$；*(b)* 在 $E := \bigcup_c E_c$ 中，盒链内析取项的每个前驱都位于同一盒链中，且头部 $\bigvee\Psi$ 没有前驱；*(c)* 盒链内部没有边是再生。因此，若 $\Delta \subseteq \mathit{Cl}(\chi)$ 不包含 $\nabla\Psi$ 盒链中的析取项，则对于每个选择函数 c，集合 $S_c(\Delta)$ 均不包含此类析取项，并且 $S_c(\Delta)$、$M_c(\Delta)$ 和 $R_c(\Delta)$ 均不依赖于 c 在该盒链上的取值。

证明。 (1) 将约束变量彼此区分开，并从内到外处理 ∇ 的出现，将每个元素 θ 替换为 $\nu z.\theta$，并使用一个新鲜的 z；引理 2.8(2)、(3)、(6) 保持可证等价，而空约束符保持 ANF、自由变量、正性和守卫性，同时使每个

元素 anf(u) 都拥有自己的绑定子，并且只在其父级的 ∇ 中使用（定义 4.16）。（3）添加 μx 不会改变 ∇-子公式，而分离的 $\widehat{\ }$ 替换保留了用于唯一标识它们的绑定子，其中 β 的元素仅限于 $\widehat{\ }$ 的副本 β中。（4）闭包 Cl(χ) 由 Sub(χ) 及其 ∇-子公式的盒链组成，因为 $\bigvee\Psi$ 的子公式就是其盒链的析取式和元素的子公式。（a）盒链的一个析取式 D 具有一个元素 θ 作为直接析取项。若 $D\in$属于 Sub(χ)，则 θ 会在 χ 中出现，而不只是作为 $\nabla\Psi$ 的元素。（b）进入 D 的 E-边起始于一个以 D 为直接子公式的公式，或起始于一个具有 $\varphi_y = D$ 的变量 y。根据（a），二者都不属于 Sub(χ)，因此它是某条盒链的析取式 D'，该盒链属于 $\nabla\Psi'$，且 D 是其尾部。于是 D 的元素都是 Ψ'的元素，所以 $\nabla\Psi' = \nabla\Psi$。头部是其链中最大的析取式，因此没有前驱。（c）盒链内部的所有边都是析取边。根据（b），没有E-边从外部进入盒链。由于 Δ 与该链不相交，因此没有从Δ 出发的 E_c-路径能够到达它。于是，饱和过程从不会查询盒链上的 c，从而证明最后的断言。 □

5 从表格后果到细化反驳

以下宏步骤是在传递构造中以及之后的第 7 节中，用于菱形节点的饱和计算。

引理 *5.1*（菱形宏步骤）。设 $\tilde{m}$ 是 T_α 中一个一致的、 ∇-非 *Free* 模态节点，且具有 $L(\tilde{m}) = \{\nabla\Psi_1, \dots, \nabla\Psi_i\} \cup Lit(L(\tilde{m}))$；令 $B := \{\bigvee\Psi_1, \dots, \bigvee\Psi_i\}$，并设 c 为一个选择函数。对于每个满足 $\Psi_n \neq \emptyset$ 的 n， c 沿着 $\bigvee\Psi_n$ 的盒链到达一个元素 $\theta_n \in \Psi_n$；该元素定义为在由 c 选择的路径上遇到的 Ψ_n 中的第一个成员（若适用，也包括其起始公式）。这是依赖路径的选择，并非断言该句法表达式能唯一确定 n。固定满足 $\Psi_k \neq \emptyset$ 的 k，令 $\tilde{u}$ 为 $\tilde{m}$ 的 (k, θ_k)-子节点， $\tilde{m}'$ 为结果为 c 的 $\tilde{u}$ 的模态子节点。则

$$M_c(B) = L(\tilde{m}') \qquad and \qquad \{(\nabla\Psi_n, \varpi, V) \mid (\bigvee\Psi_n, \varpi, V) \in R_c(B)\} = R(\tilde{m}, \tilde{u}) \circ R(\tilde{u}, \tilde{m}'),$$

其中 $\circ$ 表示迹关系的复合（再生集的并集）。若对于某个 n有 $\Psi_n = \emptyset$，则 $\bot \in M_c(B)$。

证明。对于每个满足 $\Psi_n = \emptyset$ 的 n，令 $\theta_n := \bot$。于是，对于每个 n，从 $\bigvee\Psi_n$ 到θ_n 的 c-选择路径仅由析取边组成，也可能不含任何边。因此 $S_c(\bigvee\Psi_n)$ 由链的一段以及 $S_c(\theta_n)$ 组成，并且三元组 $(\bigvee\Psi_n, \varpi, V)$ 属于 $R_c(B)$，当且仅当 $(\theta_n, \varpi, V) \in R_c(\{\theta_n\})$。对单个图 E_c 上的每个 $\bigvee\Psi_n$，都使用相同的选择函数 c。因此，任何共享子公式都以相同方式处理，且可达性对并集可分配： $S_c(\bigcup_n \Gamma_n) = \bigcup_n S_c(\Gamma_n)$；对于模态结果，以及按其起始公式分组的迹三元组，也有类似的分解。无需对 Ψ_n 作任何不相交假设。因此 $M_c(B) = \bigcup_n M_c(\theta_n) = M_c(\{\theta_k\} \cup \{\bigvee\Psi_n \mid n \neq k\}) = M_c(L(\tilde{u})) = L(\tilde{m}')$。典范复合由满足以下条件的三元组 $(\nabla\Psi_k, \varpi, V)$ 构成：对于 $n \neq k$， $(\theta_k, \varpi, V) \in R_c(L(\tilde{u}))$，且存在 $(\nabla\Psi_n, \varpi, V)$ 使得 $(\bigvee\Psi_n, \varpi, V) \in R_c(L(\tilde{u}))$；这就是所示集合。最后， $\bigvee\emptyset = \bot$ 是模态的。 □

因此，一次性饱和所有方框部分（就像反驳会在菱形节点处所做的那样），会生成典范两步后继节点 $\tilde{m}'$ 及其轨迹；由 c 可以恢复 (k, θ_k)-子节点 $\tilde{u}$，因此它不必是反驳中的节点。

设 $Z : \mathcal{T}_\alpha \Rightarrow \mathcal{T}_{\widehat{\varphi}}$。我们从各自的根节点出发，沿着 Z 向上遍历两棵语义树，并将该游走记录为 $\alpha \vdash \widehat{\varphi}$ 的双侧反驳（定义 3.19）。对于每一对选择节点，我们保留完全左饱和，并使用 Z 选取一个匹配的右侧饱和结果：

$$L(\tilde{t}) \vdash L(t) \xrightarrow{\text{decompose left}} L(\tilde{m}) \vdash L(t) \xrightarrow{Z,\ \text{decompose right}} L(\tilde{m}) \vdash L(m).$$

右侧由带标签的对偶公式表示（R， $\sim\hat{}\gamma$）；因此，选择一个右侧析取项就等同于对其对偶合取进行细化。在双侧记法中，这就是向上读取的右弱化（Weak$R$）。全文中， $\Gamma_0 := \{\alpha\}$ 以及 $\Delta_0 := \{\widehat{\varphi}\}$。

对于一个一致的模态对（$\tilde{m}$， m） $\in Z$，将左侧的覆盖公式写作 $\nabla\Psi_1$，……， $\nabla\Psi_i$，将右侧的覆盖公式写作 $\nabla\Phi$。右侧文字替代项可由（R-loc）立即闭合。对于其余的覆盖部分，回顾引理 2.8(4)中的双侧规则，用本节的记号写作：

$$\frac{\overbrace{\{\theta_\psi, \{\bigvee \Psi_n \mid n \neq k_\psi\} \vdash \psi \mid \psi \in \Phi\}}^{\text{(a) (R-back), then (R-ch)}} \qquad \overbrace{\bigvee \Psi_1, \ldots, \bigvee \Psi_i \vdash \bigvee \Phi}^{\text{(b) (R-forth}^2\text{)}}}{\nabla\Psi_1, \ldots, \nabla\Psi_i \vdash \nabla\Phi}\ (\text{Cover}),$$

其中 $1 \leq k_\psi \leq i$ 和 $\theta_\psi \in \Psi_{k_\psi}$。从下往上看，它的两类前提说明了图 6 中的两种延续方式。在单侧标记表示中，定义 $\sim\nabla\Phi$ 的析取（定义 2.2）将这些义务分配给模态子节点；不相容的选项会立即闭合。

对节点，图 *6(a)*。对于每个 $\psi \in \Phi$，右侧子节点 u 的标签为 $\{\psi\}$。子句 (R-back) 选择左侧子节点 $\tilde{u}$，使得 $(\tilde{u}, u) \in Z$，从而在覆盖规则的左侧族中给出一个前提。然后，我们将左侧完全饱和。对于每个由此得到的模态子节点 $\tilde{m}'$，子句 (R-ch) 选择一个匹配的$m' \in C(u)$，并对右侧对偶分解进行细化，使其遵循该结果。

菱形节点，图 *6(b)*。对于框前提，置 $B := \{\bigvee \Psi_1, \ldots, \bigvee \Psi_i\}$。首先将$B$ 完全饱和。引理 5.1 将每个一致结果与位于 $\tilde{m}$上方两个语义树步骤处的模态节点 $\tilde{m}'$ 对应起来。只有在此之后，(R-forth^2) 才会选择一个右侧子节点 u，使得 $L(u) = \{\psi^*\}$ 对于某个 $\psi^* \in \Phi$成立，并选择一个模态子节点 $m' \in C(u)$，使得 $(\tilde{m}', m') \in Z$。首先将右侧细化为 ψ^*，然后沿着结果 m'继续细化。中间菱形节点在 Z中并不是一个对节点：只有在模态层面，对应关系才得以恢复。下面的构造还处理不相容的结果和空覆盖情形。

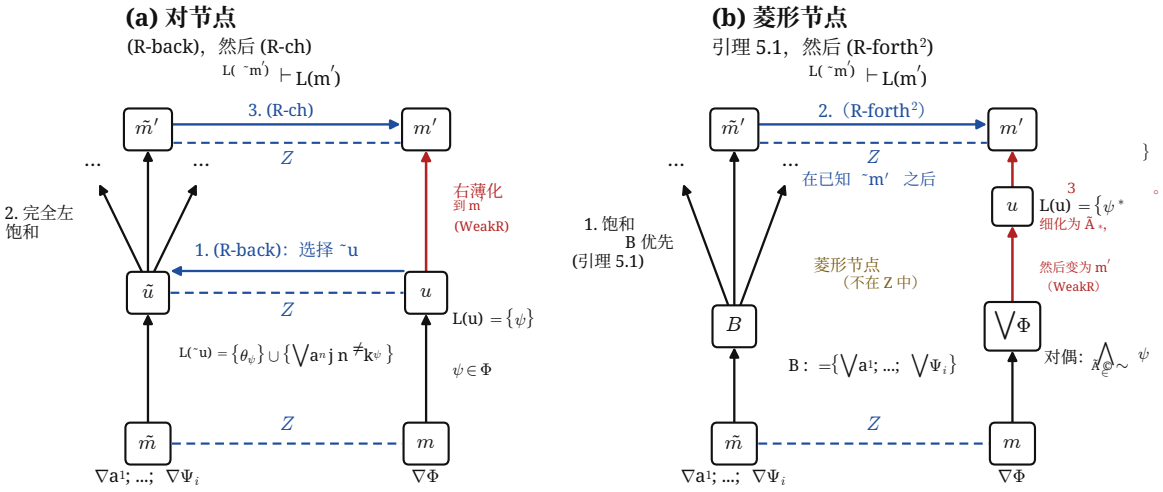

图 6：向上阅读的（覆盖规则）的两种延续。黑色箭头保留完整的左侧展开；蓝色箭头在 Z中选择见证；红色箭头表示右侧细化（向上应用（Weak$R$））。在（b）中，只有在已知左侧饱和结果后，才选择右侧见证。右侧公式展示的是对偶化前的形式；在标记反驳中，它们的对偶式会被稀疏化。

定理 5.2（从后承关系传递到薄反驳；断言（h））。设 α 是一个干净受保护的非合取公式，且 $\hat{\varphi} \in$ANF，两个公式的约束变量互不出现在对方公式中。若 $Z : T_\alpha \Rightarrow T\hat{\varphi}$ 是一个后承关系，那么 $\alpha \vdash \hat{\varphi}$ 有一个薄序贯双侧反驳。

证明。约定。为定义 3.26 的三个存在性子句固定 Skolem见证：对于 (R-ch)，$\mathsf{ch}(\tilde{t}, t, \tilde{m}) \in C(t)$；对于 (R-back)，$\mathsf{bk}(\tilde{m}, m, u) \in C(\tilde{m})$；对于 (R-forth^2)，$\mathsf{fo}(\tilde{m}, m, \tilde{u}, \tilde{m}') = (u, m')$。对于每个满足 $L(t) = \{\hat{}\gamma\}$ 的右选择节点 t 以及每个 $m \in C(t)$，固定一个选择函数 c_m，其饱和结果为 m。标记为 L 的公式构成标签的左侧，标记为 R 的公式构成右侧；选择函数 c分解为分别作用于两侧的限制 c_L 和 c_R。由于没有 E-边连接两侧，$S_c(\Theta)$、$M_c(\Theta)$ 和 $R_c(\Theta)$ 是两侧对应项的并集，分别使用 c_L 和 c_R计算。我们固定 E 的一个拓扑序，其中所有左侧公式都先于右侧公式；基于同样的原因，这样的拓扑序存在。

根据引理 4.3，$\mathsf{T}\widehat{\varphi}$ 的每个选择节点都带有单元素标签 $\{\hat{}\gamma\}$，每个一致的 ∇-非 Free 模态节点都带有标签 $\{\nabla\Phi\} \cup L$。在 $\hat{}\gamma \in \mathsf{ANF}$ 中，∇的辖域之外唯一的合取式具有 $\bigwedge L$ 和 $\nabla\Phi \wedge \bigwedge L$ 的形式（定义 4.2），对这些合取式进行分解只会得到模态公式。因此，∇的辖域之外，$\sim\hat{}\gamma$ 中唯一的合取式是析取式 D 的对偶式$\sim D$，其中这些析取式属于 $\hat{}\gamma$；沿着其中每个合取项对 $\sim\hat{}\gamma$ 进行饱和，要么会到达一个文字，要么会到达 $\sim(\nabla\Phi \wedge \bigwedge L)$，即一个析取式，其析取项是文字 $\sim l\,(l \in L)$，以及 $\sim\nabla\Phi$ （定义 2.2 ）中的析取项 $\nabla\emptyset$, $\nabla\{\sim\psi\}$ （$\psi \in \Phi$）和 $\nabla\{\bigwedge_{\psi\in\Phi} \sim\psi, \top\}$。合取项 $\bigwedge_{\psi\in\Phi} \sim\psi$ 位于 ∇ 之下，不会在饱和过程中被分解。因此，一旦每个 $\sim D$ 都细化为一个合取项，饱和的右侧便是一条单一路径，而通过c_R 消解其中的析取式，恰好会得到一个右侧模态公式。

反驳的结构。我们自底向上构造 R。除模态子节点全部为不一致叶节点的辅助选择节点外，R 中的每个选择节点都是对节点或菱形节点。对节点连接到选择对 $(\tilde{t}, t) \in Z$ with $L(t) = \{\hat{}\gamma\}$，并标记为 $(\{L\} \times L(\tilde{t})) \cup \{(R, \sim\hat{}\gamma)\}$，即它表示序列式 $L(\tilde{t}) \vdash \hat{}\gamma$。每个不是不一致叶节点的模态节点都连接到模态对 $(\tilde{m}, m) \in Z$and，并针对某个模态公式 δ标记为 $(\{L\} \times L(\tilde{m})) \cup \{(R, \delta)\}$。根节点是根对的对节点。下文中，当侧别明确时，我们省略标签。

对节点 $(\tilde{t}, t)$。对于选择函数 c，左侧以规范方式饱和，从而得到 $\tilde{t}$ 的模态子节点 $\tilde{m}$，其结果为 c_L；置 $m := \mathsf{ch}(\tilde{t}, t, \tilde{m})$。在右侧，每个合取项$\sim D$ 都细化为合取项 $\sim c_m(D)$；剩余的右侧析取式由 c_R求解，从而得到一个模态公式 δ。c 的模态子节点标记为 $L(\tilde{m}) \cup \{\delta\}$，并连接到 $(\tilde{m}, m) \in Z$。

连接到以下公式的模态节点：$(\tilde{m}, m)$，其标签为 $L(\tilde{m}) \cup \{\delta\}$。如果 $L(\tilde{m})$ 不相容，该节点就是叶节点。否则，根据 (R-loc)，$L(m)$ 一致，且 δ 是以下情况之一。

- $\delta = \sim l$ 对于文字 $l \in L(m)$，或者 $\delta = \bot$。根据 (R-loc)，$l \in L(\tilde{m})$，因此该标签不一致（一致性是根据底层公式计算的），该节点是叶节点。当 $L(m)$是 ∇-Free 时，这涵盖了所有 δ。

- $L(m) = \{\nabla\Phi\} \cup L$ 不是 ∇-Free；此时 $L(\tilde{m}) = \{\nabla\Psi_1, \ldots, \nabla\Psi_i\} \cup \mathsf{Lit}(L(\tilde{m}))$ 根据 (R-loc) 不是 ∇-Free。

  - $\delta = \nabla\emptyset$ $(\Phi \neq \emptyset)$。由于 $C(m) \neq \emptyset$，(R-back) 得出 $C(\tilde{m}) \neq \emptyset$，因此存在某个 $\Psi_k \neq \emptyset$；该节点有一个针对某个 $\theta \in \Psi_k$ 的 (k, θ)-后继。其标签包含 δ的方框部分 $\bigvee\emptyset = \bot$，因此它的所有模态子节点都是不相容的叶节点。

  - $\delta = \nabla\{\top\}$，$\sim\nabla\emptyset = \bot \vee \nabla\{\top\}$ 的一个析取项（$\Phi = \emptyset$，因此 $\bigwedge_{\psi\in\Phi} \sim\psi = \top$，定义 2.2 的最后一个析取项是 $\nabla\{\top, \top\} = \nabla\{\top\}$；析取项 $\bot$ 会产生一个不一致叶节点）。该节点有一个后继，其主公式为 δ，元素为 $\top$，标签为$\{\top\} \cup B$，其中 B 如引理 5.1 所述。对于每个 c，其模态子节点都包含 $L(\tilde{m}')$，对应于 $\tilde{m}$ 的一个两步后继节点 $\tilde{m}'$（引理 5.1；若某个 $\Psi_n = \emptyset$，则为 $\bot$）；并且每个这样的 $\tilde{m}'$ 都不相容，因为否则 (R-forth^2) 将要求 m有一个子节点，而它没有子节点。所有模态子节点都是叶节点。

  - $\delta = \nabla\{\sim\psi\}$对于某个 $\psi \in \Phi$。令 $u \in C(m)$ 为满足 $L(u) = \{\psi\}$ 且$\tilde{u} := \mathsf{bk}(\tilde{m}, m, u)$ 的子节点，称为 $\tilde{m}$ 的 (k, θ)- 子节点。该节点具有 (k, θ)- 后继，其标签为

$L(\tilde{u}) \cup\{\sim\psi\}$，其中 $\sim\psi = \bigvee\{\sim\psi\}$ 是 δ 的方框部分：这是 $(\tilde{u}, u) \in Z$ 的对节点。– $\delta = \nabla\{\bigwedge_{\psi\in\Phi} \sim\psi, \top\}$ $(\Phi \neq \emptyset)$。该节点具有主公式为 δ 且元素为 $\bigwedge_{\psi\in\Phi} \sim\psi$ 的后继，标签为 $D := B \cup\{\bigwedge_{\psi\in\Phi} \sim\psi\}$：附加到 $(\tilde{m}, m)$ 的 菱形节点 。

菱形节点 D 附属于$(\tilde{m}, m)$。如上，某些 $\Psi_k \neq \emptyset$；固定这样一个 k，并一次性固定某个 $\psi_0 \in \Phi$，即子节点 $u_0 \in C(m)$，满足 $L(u_0) = \{\psi_0\}$，以及某个 $m'_0 \in C(u_0)$（它存在，因为 Out$(\{\psi_0\}) \neq \emptyset$）。对于选择函数 c，将引理 5.1 应用于 c_L，得到 $\tilde{m}$ 的两步后继节点 $\tilde{m}'$（经由 (k, θ_k)-子节点 $\tilde{u}$），且 $M_{c_L}(B) = L(\tilde{m}')$。

- 若 $L(\tilde{m}\upsilon)$ 一致，则令 $(u, m\upsilon) :=$ fo$(\tilde{m}, m, \tilde{u}, \tilde{m}\upsilon)$，于是对于某个 $\psi \in \Phi$，有 $L(u) = \{\psi\}$，并且 $(\tilde{m}\upsilon\, m\upsilon) \in Z$，再令 $(\psi^*, m^*) := (\psi, m\upsilon)$。
- 如果 $L(\tilde{m}\upsilon)$ 不一致，则置入 $(\psi^*,\ m^*) := (\psi_0,\ m\upsilon 0)$。

将右合取 $\bigwedge_{\psi\in\Phi} \sim\psi$ 细化为 $\sim\psi^*$，将从 $\sim D'$ 到 $\sim\psi^*$ (D') 的每个合取 $\sim c_{m^*}$细化，并通过 c_R消解剩余的右侧析取式；由于在对节点处，这会产生一个右侧模态公式 δ'。D 关于 c 的模态子节点标记为 $L(\tilde{m}') \cup\{\delta'\}$；在第一种情况下，它连接到 $(\tilde{m}',\ m')$，在第二种情况下，它是不一致叶节点。

局部条件。的每个模态节点要么不一致，要么恰好有一个后继；每个选择节点对于每个 c都有一个子节点，并且每个叶节点都不一致；因此$\mathcal{R}$ 满足定义 3.13(1)– (2) 以及(3)的叶节点条件。

序贯性。删薄只针对右合取式，且每次都删至单个合取项；左侧公式绝不删薄，因此 $S_c(\Delta)$ 的每个左侧公式都属于 K_c。在对节点处，合取项由 m 确定，因此也由 $\tilde{m}$ 确定，即由 c_L 确定；在菱形节点处，合取项由 c_L通过 $\tilde{m}'$ 和固定见证确定。一个右侧公式属于 K_c 当且仅当它位于约定中描述的唯一右侧路径上，而该路径由这些合取项以及该路径上位于它之前的右析取式处 c_R 的取值确定。所有这些析取式都属于 K_c，且在拓扑序中，左侧析取式先于每个右侧公式；因此 $\mathcal{R}$ 相对于此序是序贯的。

稀疏性。删薄中出现的每个右合取式都删至单个合取项，包括不一致菱形步骤中固定合取项 $\sim\psi_0$ 内部的右合取式，因此没有右合取式会保留两个合取项。（这一点很重要：$\sim\widehat{\varphi}$ 未必是非合取的。）左合取属于 Sub(α)，而活性是在 α（定义 3.19）中计算的；α 的非合取性排除了一个 μ-变量同时在两个合取项中活跃。因此，$\mathcal{R}$是稀疏的。

无限分支。R 的一条分支上的模态节点附着于构成 Z-路径的模态对：对节点后接模态节点构成一个 (R-ch) 见证；带有$\delta = \nabla\{\sim\psi\}$ 的模态节点后接其后继，构成一次由 (R-back) 和 (R-ch) 执行的步；经过菱形节点则构成一次由 (R-forth^2) 执行的步。设 B 为一条无限分支，其左投影为 $\tilde{\xi}$，右投影为$\tilde{}\,\xi$。B 的左侧恰好承载 ξ 的那些迹，且再生集相同：在对节点和单后继步骤处，左侧饱和是规范的；在菱形节点处，带有右侧主公式 δ的模态步将每个 $\nabla\Psi_n \in L(\tilde{m})$ 发送到 $\bigvee\Psi_n \in B$，且不发生再生；引理 5.1 表明，复合关系与从 $\tilde{m}$ 到 $\tilde{m}'$ 的规范迹关系相同。B 的右侧恰好承载一条无限迹，即 ξ 唯一无限迹 $\hat{}\tau$ 的对偶（引理 4.3）：经过变薄合取和元素 $\bigwedge_\psi \sim\psi$ 的额外步骤不会再生任何变量；再生变量则是 $\hat{}\tau$中的变量，其中 μ 与 $\nu\tilde{}$互换。若 ξ 为偶数，则其 μ-迹是 B 的一条 μ-迹。否则，(R-par) 强制 ξ 为奇数，因此 $\hat{}\tau$ 中无限再生变量里最小的 $\sqsubseteq$变量是 $\widehat{\varphi}$的 ν变量，也就是 $\sim\widehat{\varphi}$的 μ变量；于是对偶迹是 B 的一条 μ-迹。因此，每条无限分支都是偶的。

□

推论 5.3。在定理 *5.2* 的假设下，$\vdash \alpha \to \widehat{\varphi}$。

证明。由定理 5.2 和定理 3.21，$\{(L,\ \alpha),\ (R,\ \sim\widehat{\varphi})\} \vdash$，即 $\alpha \vdash \widehat{\varphi}$。 □

6 正上下文提升与完备性

6.1 正上下文提升与最小不动点步骤

定理 6.1 (正上下文提升的表列后承)。 设 $A(X)$、 B 和 C 是 ∇-形式的公式，满足以下条件：

1. $A(X)$、 B 和 C 是干净的、受保护的，并且是盒隔离的（定义 *2.3* 和 *4.20*）。*2.* 变量 X 在 $A(X)$ 中仅以正的形式出现（即文字 $\neg X$ 不出现在 $A(X)$ 中），且不出现在 B 或 C 中。*3.* 集合 $\mathit{Bound}(A(X))$、$\mathit{Bound}(B)$ 和 $\mathit{Bound}(C)$ 两两不交，并且这三个公式中任意一个公式的约束变量，都不在另外两个公式中的任一个里出现（无论是自由出现还是约束出现）。*4.* B 和 C 都具有最外层不动点绑定符：对于某些 η_{z_B}、$\eta_{z_C} \in \{\mu, \nu\}$，分别为 $B = \eta_{z_B} z_B.\, B_0$ 和 $C = \eta_{z_C} z_C.\, C_0$，其中 $z_B \in \mathit{Bound}(B)$ 且 $z_C \in \mathit{Bound}(C)$（因此根据（*3*），二者都不出现在 $A(X)$ 中）。*5.* 存在一个表列后承关系 $W\colon T_B \Rightarrow T_C$，其含义见定义 *3.26*。

那么 $A(B)$ 和 $A(C)$ 是干净的、受保护的且盒隔离的，并且存在一个表列后承关系

$$Z : \mathcal{T}_{A(B)} \Rightarrow \mathcal{T}_{A(C)}.$$

此外， Z 可以选取得使得 Z 中的每个模态对都位于一条从根节点出发的有限 Z-路径上 $s.$

注记 6.2（提升定理的适用范围）。 盒隔离使盒链支撑彼此独立（引理 7.8），而假设（4）的最外层绑定符使两种替换都具有单射性（引理 7.3）。这些是本证明的假设，并非声称它们是必要条件；闭包仅针对满足所有这些条件的上下文得到保证。

引理 *6.3*（重命名的不动点的展开后承）。设 $\alpha(x)$ 是干净的、受保护的且盒隔离的，其中 $x \in \mathit{Free}(\alpha)$ 是正的且受保护的，并令 $\psi := \mu x.\alpha(x)$。设 $\psi' := \mu x'.\alpha'(x')$ 由 ψ 重命名其中每个约束变量 $z \in \mathit{Bound}(\psi)$ 为一个不出现在 ψ 中的新变量 z' 而得到。那么 $\alpha(\psi') := \alpha(x)[\psi'/x]$ 是干净的、受保护的且盒隔离的，并且存在一个表列后承关系

$$U : \mathcal{T}_{\alpha(\psi')} \Rightarrow \mathcal{T}_{\psi}$$

其中每个模态对都位于一条 U-路径上。

定理 6.1 和引理 6.3 的证明见第 7 节；它们不使用本节中的任何结果，而在第 5 节中只用到引理 5.1，因此不存在循环论证。

命题 *6.4*（不动点步骤；断言 *(g)*，*Walukiewicz* [27, 引理 39]）。设 $\widehat{\alpha}(x) \in \mathit{ANF}$ 是盒隔离的，且 $x \in \mathit{Free}(\widehat{\alpha})$ 为正的并受保护的；令 $\psi := \mu x.\widehat{\alpha}(x)$ 和 $\widehat{\varphi} := \mathit{anf}(\psi)$，其中 $\widehat{\varphi}$ 的约束变量与 $\widehat{\alpha}$ 的约束变量互不相同。则 $T_{\widehat{\alpha}}(\widehat{\varphi}) \Rightarrow T_{\widehat{\varphi}}$，因此 $\vdash \widehat{\alpha}(\widehat{\varphi}) \to \widehat{\varphi}$。

证明。 令 $\psi' := \mu x'.\widehat{\alpha}'(x')$ 为从 ψ 得到的式子：将每个约束变量 $z \in \mathrm{Bound}(\psi)$ 重命名为一个新变量 z'，该变量在 $\widehat{\alpha}(x)$ 或 $\widehat{\varphi}$ 中均未出现；并令 $\iota : \mathcal{T}_{\psi} \to \mathcal{T}_{\psi'}$ 为由 $z \mapsto z'$ 诱导的规范语法同构（它尤其是一个双模拟映射）。由定理 4.19， $\widehat{\varphi} = \mathrm{anf}(\psi) \in \mathrm{ANF}$，$\mathrm{Free}(\widehat{\varphi}) \subseteq \mathrm{Free}(\psi) = \mathrm{Free}(\widehat{\alpha}) \setminus \{x\}$，且存在一个双模拟映射 $\zeta_{\mathsf{anf}} : \mathcal{T}_{\psi} \to \mathcal{T}_{\widehat{\varphi}}$。由引理 3.32 和引理 3.30，

$$W := \mathsf{Graph}(\iota) \circ \mathsf{Graph}(\zeta_{\mathsf{anf}})^{-1} : \mathcal{T}_{\widehat{\varphi}} \Rightarrow \mathcal{T}_{\psi'}$$

是一种表列推论关系。

现在，我们将定理 6.1 应用于以下替换

$$A(X) := \widehat{\alpha}(X) \quad (\text{with fresh } X \text{ replacing free } x),$$
$$B := \widehat{\varphi}, \qquad C := \psi' = \mu x'.\widehat{\alpha}'(x').$$

假设 (1)–(5) 成立：(1) 由假设、定理 4.19 和引理 4.21(2),(3) 得出；正性和新鲜性给出 (2)；新鲜的约束变量、 $\widehat{\alpha}$ 的清洁性以及 Free($\widehat{\varphi}$) ∪Free(ψ') ⊆ Free($\widehat{\alpha}$) \ $\{x\}$ 给出 (3)；定义 4.16 和 ψ' 的定义给出 (4) 中最外层的绑定子；而 W 则见证 (5)。因此，定理 6.1 得出一个后承关系 $Z_1 : \mathcal{T}_{\widehat{\alpha}(\widehat{\varphi})} \Rightarrow \mathcal{T}_{\widehat{\alpha}(\psi')}$ 其中每个模态对都位于从根节点出发的一条有限 Z_1-路径上。接下来，引理 6.3 给出一个后承关系 $U : \mathcal{T}_{\widehat{\alpha}(\psi')} \Rightarrow \mathcal{T}_{\psi}$ 其中每个模态对都位于一条 U- 路径上，而 Graph(ζ_{anf}) : $\mathcal{T}_{\psi} \Rightarrow \mathcal{T}_{\widehat{\varphi}}$同样使每个模态对都位于一条路径上。两次应用引理 3.30（后承关系的复合）可得

$$Z := \mathsf{Graph}(\zeta_{\mathsf{anf}}) \circ U \circ Z_1 : \mathcal{T}_{\widehat{\alpha}(\widehat{\varphi})} \Rightarrow \mathcal{T}_{\widehat{\varphi}}.$$

最后，根据引理 4.4， $\widehat{\alpha}(\widehat{\varphi})$是非合取的；将右侧 $\widehat{\alpha}(\widehat{\varphi})$中的约束变量重命名，使其与 $\widehat{\varphi}$ 中的约束变量不同，再应用推论 5.3，并利用引理 2.8(6)进行切割，得到$\vdash \widehat{\alpha}(\widehat{\varphi}) \to \widehat{\varphi}$。

□

双向应用定理 6.1，便得到上下文稳定的 ANF 替换。

推论 6.5 (上下文稳定范式)。 设 $A(X)$ 和 φ 是干净、受保护、盒隔离的 ∇-范式公式，且满足：

(i) X 仅以正的形式出现在 $A(X)$ 中，且不出现在 φ中；

(ii) 界 定$(A(X)) \cap$Bound$(\varphi) = \emptyset$，且任一公式的约束变量都不出现在另一公式中 r;

(iii) φ具有最外层不动点绑定符（特别地，这对每个不动点公式$\varphi = \eta x.\, \varphi_0$都成立）。

令 $\widehat{\varphi}$:=anf(φ)，并将其中的新鲜约束变量选在 $A(X)$ 和 φ之外。则 $A(\varphi)$ 和$A(\widehat{\varphi})$ 均干净、受保护且盒隔离，并且存在表列推论关系

$$\mathcal{T}_{A(\varphi)} \Rightarrow \mathcal{T}_{A(\widehat{\varphi})} \qquad and \qquad \mathcal{T}_{A(\widehat{\varphi})} \Rightarrow \mathcal{T}_{A(\varphi)},$$

每个关系都使所有模态对位于从根节点出发的有限路径上。

证明。将定理 4.19 应用于 $\Gamma = \{\varphi\}$，得到 $\widehat{\varphi} \in$ ANF、Free($\widehat{\varphi}$) ⊆ Free(φ)，以及一个双模拟映射 $\zeta_{\mathsf{anf}} : \mathsf{T}_{\varphi} \to \mathsf{T}_{\widehat{\varphi}}$。公式 $\widehat{\varphi}$ 是干净且受保护的（定义 4.2）、盒隔离的（引理 4.21(2)），并且其根节点 r 具有最外层不动点绑定符 $\eta_r x_r$ （定义 4.16）。我们针对两个三元组 ($A(X)$ φ, $\widehat{\varphi}$) 和 ($A(X)$ $\widehat{\varphi}, \varphi$) 检查定理 6.1 的假设 (1)–(5)：(1) 由假设以及刚才提到的 $\widehat{\varphi}$ 的性质成立；(2) 由 (i)、Free($\widehat{\varphi}$) ⊆Free(φ) 以及 Bound($\widehat{\varphi}$) 的新鲜性得出；(3) 由 (ii)、Bound($\widehat{\varphi}$) 的新鲜性以及 Free($\widehat{\varphi}$) ⊆ Free(φ) 连同 φ的清洁性得出；(4) 由 (iii) 和$\widehat{\varphi}$的最外层绑定符成立；(5) 的见证是 Graph(ζ_{anf}) : $\mathsf{T}_{\varphi} \Rightarrow \mathsf{T}_{\widehat{\varphi}}$（定义 3.29）以及 Graph($\zeta_{\mathsf{anf}}$)$^{-1}$: $\mathsf{T}_{\widehat{\varphi}} \overset{\Rightarrow}{} \mathsf{T}_{\varphi}$（引理 3.32）。两次应用定理 6.1 得到所有断言，包括句法保持和有限路径性质。

□

注 6.6。 (a) 如果 φ 没有最外层不动点绑定符，则对 φ° 应用定理 6.1：$= \nu z.\varphi$ 取一个新的 z（根据引理 2.8(2)为$\vdash \varphi^{\circ} \leftrightarrow \varphi$ ），使用根展开双模拟 $\kappa : \mathcal{T}_{\varphi^{\circ}} \to \mathcal{T}_{\varphi}$以及 $\zeta_{\mathsf{anf}} \circ \kappa_{\circ}$。绑定符一般不能省略：对于 $A(X) = (X \vee p) \wedge ((q \vee r) \vee p)$ 和 $\varphi = q \vee r$，代入出现与外层子公式合并，因此 $\mathcal{T}_{A(\varphi^{\circ})}$ 和$\mathcal{T}^{A(\varphi)}$ 不一定双模拟等价。

(b) 推论 6.5 是 [10, 定理 4], 中双向陈述的表列理论类比，其中 anf(φ) 扮演 sim(A) 的角色；这是一种类比，而非形式蕴含。这里，上下文 $A(X)$ 既不必属于 ANF，也不必是非合取的；在正向关系中，内部左侧公式 φ也不必属于 ANF。

(c) 此处不主张在 Koz 中可证明：定理 5.2 要求左侧公式是非合取的，右侧公式是 ANF，因此对于任意正上下文 $A(X)$，都不能推出 $\vdash A(\varphi) \to A(\widehat{\varphi})$。

6.2 主要归纳引理与完备性

引理 6.7 (主要归纳引理；断言 (d)，Walukiewicz [27, 定理 38])。 对于每个干净受保护公式 φ，都存在一个公式 $\widehat{\varphi} \in$ ANF 使得 $\varphi \equiv \widehat{\varphi}$，Free($\widehat{\varphi}$) $\subseteq$ Free(φ)，并且在 φ 中为正（受保护）的每个自由变量，在 $\widehat{\varphi}$ 中也为正（受保护），且 $\vdash \varphi \to \widehat{\varphi}$。

证明。 对 φ 的结构进行归纳（在原始语法中，含 $\Diamond, \Box$，通过引理 2.8(5) 将 ∇-$\widehat{\ }$缩写形式转换）。在每种情形下，归纳假设都给出 $\widehat{\alpha}, \beta \in$ ANF，且满足 $\alpha \vdash \widehat{\alpha}$ 和 $\vdash \beta \to \beta$；必要时将约束变量彼此改名，以保持这些可推导性，这由引理 2.8(6) 和 (Cut) 保证。

- 文字： $\varphi \in \{\top, \bot, p, \neg p\}$ 已经处于 ANF（$\bigwedge\{\varphi\}$ 或 $\bigwedge\emptyset$），因此取 $\widehat{\varphi}$: $= \varphi$.
- 析取 $\varphi = \alpha \vee \beta$: $\widehat{\varphi} := \widehat{\alpha} \vee \beta \in$ 根据定义 4.2(2) 属于 ANF，而单调性 $\widehat{\ }$（引理 2.8(3)）给出 $\vdash \alpha \vee \beta \to \widehat{\alpha} \vee \beta$。
- 模态词 $\varphi = \Diamond\alpha$和 $\varphi = \Box\alpha$：根据定义 4.2， $\nabla\{\widehat{\alpha}, \top\} \in$属于 ANF，且 $\nabla\emptyset \vee \nabla\{\widehat{\alpha}\} \in$ 属于 ANF。单调性（引理 2.8(3)，其中模态情形对应规则（$\Diamond$））结合引理 2.8(5)的等价关系，给出 $\vdash \Diamond\alpha \to \Diamond\widehat{\alpha}$和 $\vdash \Diamond\widehat{\alpha} \leftrightarrow \nabla\{\widehat{\alpha}, \top\}$，因此根据（Cut）， $\vdash \Diamond\alpha \to \nabla\{\widehat{\alpha}, \top\}$；同理, $\vdash \Box\alpha \to \Box\widehat{\alpha}$和 $\vdash \Box\widehat{\alpha} \leftrightarrow \nabla\emptyset \vee \nabla\{\widehat{\alpha}\}$ 给出 $\vdash \Box\alpha \to \nabla\emptyset \vee \nabla\{\widehat{\alpha}\}$。
- 合取 $\varphi = \alpha \wedge \beta$ 和最大不动点 $\varphi = \nu x.\alpha(x)$： 设 $\psi := \widehat{\alpha} \wedge \beta$，分别有 $\psi := \nu x.\widehat{\alpha}(x)$；则由单调性（引理 2.8(3)）可得 $\vdash \varphi \to \psi$ 。根据引理 4.4， ψ 是干净且非合取的，并且由于归纳假设保持守卫性，它也是受保护的。令$\widehat{\varphi} :=$anf(ψ) $\in$ ANF；其约束变量均为新变量。定理 4.19 给出一个双模拟映射（因而也给出一个后承关系）$\mathcal{T}_\psi \to \mathcal{T}_{\widehat{\varphi}}$，因此推论 5.3（断言 (h) 和 (f)）推出 $\vdash \psi \to \widehat{\varphi}$，进而由 (Cut) 得到 $\vdash \varphi \to \widehat{\varphi}$ 。
- 最小不动点 $\varphi = \mu x.\alpha(x)$： 根据引理 4.21(1)，我们可以将 $\widehat{\alpha}(x)$替换为一个可证明等价的盒隔离 ANF 公式，并由 (Cut) 保持归纳假设。因此，$\widehat{\alpha}(x)$是盒隔离的，其中 x 是正的且受保护的。令 $\psi := \mu x.\widehat{\alpha}(x)$。根据归纳假设和单调性， $\vdash \mu x.\alpha(x) \to \psi$，且归纳假设还给出$\varphi \equiv \psi$。若 $x \notin$ Free($\widehat{\alpha}$)，取 $\widehat{\varphi} := \widehat{\alpha}$。由于 x 不出现在 $\widehat{\alpha}$中，展开（引理 2.8(2)）可得 $\vdash \psi \leftrightarrow \widehat{\alpha}$，因此 $\vdash \varphi \to \widehat{\varphi}$ 且 $\varphi \equiv \widehat{\varphi}$。否则，令 $\widehat{\varphi} :=$ anf(ψ) $\in$ ANF；其约束变量均为新变量，因此与 $\widehat{\alpha}$的约束变量不同。命题 6.4 给出 $\vdash \widehat{\alpha}(\widehat{\varphi}) \to \widehat{\varphi}$，而 Park 归纳推出 $\vdash \psi \to \widehat{\varphi}$；因此由 (Cut) 得到 $\vdash \varphi \to \widehat{\varphi}$ 。在此情形下，由定理 4.19 可得 $\psi \equiv \widehat{\varphi}$ ，故再次有 $\varphi \equiv \widehat{\varphi}$。

在每种情况下，对自由变量、正性和守卫性的要求均由归纳假设以及上述构造的保留性质推出（尤其是定理4.19和引理4.21(1)）。

□

定理 6.8 （Koz 的完备性；断言 (a)，Walukiewicz [27, 定理 37]）。 如果模态 μ-演算中的公式 φ 不可满足，则 $\vdash \neg\varphi$。因此， $\models \varphi$ 蕴含 $\vdash \varphi$，且 $\alpha \models \beta$蕴含 $\vdash \alpha \to \beta$。

证明。设 φ 不可满足。根据引理 2.8(5)，φ 在 Koz 中可证明地等价于一个干净受保护公式 φ'，后者同样不可满足。根据引理 6.7（断言 (d)），存在 $\widehat{\varphi} \in$ ANF，使得 $\varphi' \equiv \widehat{\varphi}$ 且 $\vdash \varphi' \to \widehat{\varphi}$。由于 φ' 不可满足，$\widehat{\varphi}$也不可满足。取 $\Gamma_0 := \{\widehat{\varphi}\}$，定理 3.17（断言（e））给出 $\Gamma := \{\widehat{\varphi}\}$ 的一个序贯反驳，其中所有删薄都是完全的。根据引理 4.3，$\widehat{\varphi}$ 是非合取的，因此根据引理 3.18，该反驳是细化的。根据定理 3.21（断言 (f)），我们得到 $\{\widehat{\varphi}\} \vdash$，即 $\vdash \neg\widehat{\varphi}$（断言 (c)）。对 $\vdash \varphi \to \varphi'$、$\vdash \varphi' \to \widehat{\varphi}$ 和 $\widehat{\varphi} \vdash$ 应用两次（Cut），得到 $\varphi \vdash$，即 $\vdash \neg\varphi$。将此应用于 $\sim\varphi$ 以及 $\alpha \wedge \sim\beta$（第 2.4 节），即可得到相应的后果。 □

7　Pr正上下文提升和展开后承的证明

本节证明定理 6.1 和引理 6.3，这两项内容在第 6 节中暂缓证明。在介绍语法预备知识后，我们构造旧者优先中继，验证迹保持，并将该机制专门应用于展开的双通道。

7.1 完全的后继标签与语法预备知识

根据定义 3.5，模态步的主公式 $\nabla\Psi_k$ 会从后继标签中省略其 own 盒部分 $\bigvee\Psi_k$。由于环境目标表可能将 $\nabla\Psi_k$ 视为非主元素，而某个副本将其视为主元素（或反之），我们将省略的盒部分附加回来。对于典范表中一个一致的 ∇-非 Free 模态节点 n，若其具有 $L(n) = \{\nabla\Psi_1, \dots, \nabla\Psi_i\} \cup$命题集$(L(n))$，且其 (k,θ)-子节点为 u，令

$$L^+(u) := L(u) \cup \{\bigvee\Psi_k\},$$

对于根节点 r，令 $L^+(r) := L(r)$。对于实现一条边 (u, m') 的选择函数 c，令 c^+ 与 c 一致，但在 $\nabla\Psi_k$ 的盒链上除外；沿着该盒链，c^+ 通向 θ（根节点处为 $c^+ := c$）。

引理 7.1 (完整后继标签)。设 $\Gamma_0 = \{\chi\}$ 是方框隔离的，且 n、u、$m' \in C(u)$、c 和 c^+ 如上所述。那么：

1. $S_{c^+}(L^+(u)) = S_c(L(u)) \cup \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{C}$ 是 $\nabla\Psi_k$ 从 $\bigvee\Psi_k$ 到 θ的路径上盒链的析取式集合；特别地，$M_{c^+}(L^+(u)) = L(m')$；
2. $R(n,u) \circ R(u,m') = \{(\nabla\Psi_j, \varpi, V) \mid 1 \le j \le i,\ (\bigvee\Psi_j, \varpi, V) \in R_{c^+}(L^+(u))\}$.

证明。若 $|\Psi_k| = 1$，则 $\bigvee\Psi_k = \theta$、$L^+(u) = L(u)$，且 $\mathcal{C} = \emptyset$。否则，$L(u) = \{\theta\} \cup \{\bigvee\Psi_j \mid j \ne k\}$ 不包含 $\nabla\Psi_k$的盒链中的析取式：θ 是一个不动点公式，而方框隔离公式的不同 ∇-子公式的元素集合互不相交，因此其盒链也互不相交。由引理 4.21(4)，从 $L(u)$ 出发的任何 E_c-路径都不会与此盒链相交，因此从 $L(u)$ 出发的 E_{c^+}-路径与 E_c-路径重合；而从 $\bigvee\Psi_k$ 出发的 E_{c^+}-路径沿着 $\mathcal{C}$ 到达 θ，期间不会发生再生，随后从 θ继续作为一条 E_c-路径。由于 $\mathcal{C}$ 不包含模态公式，(1) 和 (2) 由定义 3.2 和 3.5 得出。 □

在本节余下部分，我们用 $r_{\mathcal{U}}$ 表示典范表 $\mathcal{U}$ 的根节点，并为每条选择到模态边 $(u,\ m')$ 固定一个实现 $(u,\ m')$ 的选择函数 $c_{(u,m')}$。

引理 7.2（句法保持）。在满足定理 *6.1* 的假设（*1*）–（*4*）的条件下，A（B）和 A（C）都是 ∇-形式的干净、受保护且盒隔离的公式。

证明。令 $D \in \{B,\ C\}$；X 的正性确保 $A(D)$ 满足定义 2.1。假设（3）给出 Free$(D) \cap$Bound$(A(X)) = \emptyset$ 以及 Free$(A(X)) \cap$ Bound$(D) = \emptyset$；结合不相交的绑定变量集合与假设（1），这通过通常的替换论证（注记 2.4）给出了清洁性，并保持了守卫性。对于盒隔离，$A(D)$ 的每个 ∇-子公式要么是 $\nabla\Xi \in$ Sub(D)，要么是对于某个 $\nabla\Psi \in$ Sub$(A(X))$ 的 $\nabla(\Psi[D/X])$。对于 $\nabla\Xi \in$ Sub(D),

每个 $\xi \in \Xi$ 都具有 $\eta_w w.\varphi_w$ 的形式，且满足 $w \in \mathsf{Bound}(D)$；由于 w 不出现在 $A(X)$ 中，ξ 不可能对于 $\gamma \in \mathsf{Sub}(A(X)) \setminus \{X\}$ 具有 $\gamma[D/X]$ 的形式，因此 $A(D)$ 中 ξ 的每次出现都位于 D 内，在那里它是 $\nabla\Xi$ 的一个元素。对于 $\nabla\Psi \in \mathsf{Sub}(A(X))$，每个 $\theta \in \Psi$ 都是满足 $z \in \mathsf{Bound}(A(X))$ 的 $\eta_z z.\varphi_z$（特别是 $\theta \neq X$）。由于 z 不出现在 D 中，$\theta[D/X] = \eta_z z.(\varphi_z[D/X])$ 不可能出现在 D 内；因此，$A(D)$ 中 $\theta[D/X]$ 的任何出现，都来自某个满足 $\gamma[D/X] = \theta[D/X]$ 的 $\gamma \in \mathsf{Sub}(A(X)) \setminus \{X\}$；通过比较最外层绑定符以及 $A(X)$ 的清洁性，这迫使 $\gamma = \theta$ 成为 $\nabla\Psi$ 的一个元素。因此，$A(D)$ 是盒隔离的。 □

对于 $\gamma \in \mathsf{Sub}(A(X))$，令 $\gamma^\flat := \gamma[B/X] \in \mathsf{Sub}(A(B))$ 和 $\gamma^\sharp := \gamma[C/X] \in \mathsf{Sub}(A(C))$，于是 $X^\flat = B$ 且 $X^\sharp = C$。对于 $\nabla\Psi \in \mathsf{Sub}(A(X))$，令 $\Psi^\flat := \{\theta^\flat \mid \theta \in \Psi\}$，$\Psi^\sharp := \{\theta^\sharp \mid \theta \in \Psi\}$，$(\bigvee \Psi)^\flat := \bigvee(\Psi^\flat)$，且 $(\bigvee \Psi)^\sharp := \bigvee(\Psi^\sharp)$，并设

$$\mathrm{Head}(A(X)) := \{\bigvee \Psi \mid \nabla\Psi \in \mathsf{Sub}(A(X)),\ |\Psi| \geq 2\}.$$

由引理 4.21(4)(a)，$\mathrm{Head}(A(X)) \cap \mathsf{Sub}(A(X)) = \emptyset$。

引理 7.3（外部替换的单射性与局部交换性）。在定理 *6.1* 的假设 *(1)–(4)* 下：

(a) $\gamma \mapsto \gamma^\flat$ 和 $\gamma \mapsto \gamma^\sharp$ 在子式集 $(A(X)) \cup$ 头部$(A(X))$ 上均为单射；

(b) 对于 $\gamma \in \mathit{Sub}(A(X)) \cup \mathit{Head}(A(X))$，$\gamma^\flat = B$ 蕴含 $\gamma = X$，且 $\gamma^\sharp = C$ 蕴含 $\gamma = X$；此外，如果 $\gamma \in \mathit{Sub}(A(X)) \setminus \{X\}$ 在 $\mathit{Cl}(A(X))$ 中是非模态的，并且 $\gamma^\sharp \in \mathit{Cl}(C)$，那么 $X \notin \mathit{Free}(\gamma)$ 且 $\gamma^\flat = \gamma = \gamma^\sharp$；

(c) 对于 $\gamma \in \mathit{Sub}(A(X)) \setminus \{X\}$：$\gamma$ 是一个文字（不同于 X、$\neg X$）当且仅当 $\gamma^\sharp$ 是 $\mathit{Cl}(A(C))$ 的一个文字，当且仅当 $\gamma^\flat$ 是 $\mathit{Cl}(A(B))$ 的一个文字；在这种情况下，$\gamma^\flat = \gamma = \gamma^\sharp$；$\gamma = \nabla\Psi$ 当且仅当 $\gamma^\sharp = \nabla(\Psi^\sharp)$，当且仅当 $\gamma^\flat = \nabla(\Psi^\flat)$；并且如果 γ 是非模态的（$\alpha_1 \wedge \alpha_2$、$\alpha_1 \vee \alpha_2$、$\eta_y y.\varphi_y$，或 $y \in \mathit{Bound}(A(X))$），则其在 $\mathit{Cl}(A(B))$ 中关于 $(\cdot)^\flat$ 以及在 $\mathit{Cl}(A(C))$ 中关于 $(\cdot)^\sharp$ 的直接约简式，分别是 $\mathit{Cl}(A(X))$ 中 γ 的 $(\cdot)^\flat$-像和 $(\cdot)^\sharp$-像，并具有相同的再生集（当 $\gamma = y \in \mathit{Bound}(A(X))$ 时为 $\{y\}$，否则为 $\emptyset$）。

证明。将每个公式 χ 视为有限有序语法树 $T(\chi)$，其内部节点标记为 $\wedge$、$\vee$、$\eta_w w$ 或 ∇，叶节点则标记为文字。对于任一 $D \in \{B, C\}$，假设（4）给出一个最外层绑定符 $\eta_{z_D} z_D$，其 z_D 不在 $A(X)$ 中。在 $\gamma[D/X]$ 的有序语法树中，替换副本 D 的根恰好是带有该绑定符标签的节点：清洁性使其定义绑定子在 D 内唯一，而分离性则将其排除在外部上下文之外。将这些极大子树折叠为 X，即可还原 γ。这证明了两个翻译在 $\mathsf{Sub}(A(X))$ 上都是单射，并表明 $\gamma[D/X] = D$ 蕴含 $\gamma = X$。如果 $\gamma \in \mathsf{Sub}(A(X)) \setminus \{X\}$ 是非模态的，$\gamma^\sharp \in \mathsf{Cl}(C)$，且 $X \in \mathsf{Free}(\gamma)$，那么 C 就会是 $\mathsf{Cl}(C)$ 中某个元素的真子公式。这与其最外层定义绑定子的唯一性相矛盾，包括通过盒链到达的子公式。因此 $X \notin \mathsf{Free}(\gamma)$ 且 $\gamma^\flat = \gamma = \gamma^\sharp$，从而证明了 (b)。对于 (a) 的其余部分，盒隔离意味着翻译后的盒链头不属于相应的替换子公式集。每个头都是不动点公式的析取，其元素可以从析取项中还原。因此，子公式上的单射性可扩展至头部，对 B 和 C 均成立。(c) 可通过直接检查 $\gamma \neq X, \neg X$ 的根得出；对于再生 $y \to \varphi_y^\flat$ 和 $y \to \varphi_y^\sharp$，需用到 $A(B)$ 和 $A(C)$ 的清洁性（引理 7.2）。 □

引理 *7.4*（迹尾的反向延拓）。设 $\xi = t_0 t_1 \cdots$ 是典范表 T_Γ *($\Gamma_0 := \Gamma$ 干净且受限)* 的一个无限分支，并假设对于所有 $n \geq N$，$\gamma_n \in L(t_n)$ 和 $V_n \subseteq \mathit{Bound}(\Gamma_0)$ 满足 $(\gamma_n, \gamma_{n+1}, V_n) \in R(t_n, t_{n+1})$。那么存在 $\gamma_n \in L(t_n)$ 和 $V_n \subseteq \mathit{Bound}(\Gamma_0)$，对于 $0 \leq n < N$ 使得 $\tau = (\gamma_n, V_n)_{n \geq 0}$ 从 t_0 出发在 ξ 上构成一条无限迹，并且 $\mathit{Reg}^\infty(\tau) = \{x \in \mathit{Bound}(\Gamma_0) \mid x \in V_n$ 对无穷多个 $n \geq N\}$。

证明。 $L(t_n)$ 中的每个公式 $n \geq 1$ 在 $R(t_{n-1},\ t_n)$ 下于 $L(t_{n-1})$ 中都有一个前驱：在选择到模态边上，根据定义 3.2（从 $L(t_{n-1})$ 在 E_c 中的可达性）；在模态到选择边上，根据定义 3.5（$\nabla\Psi_k \to \psi$ 和 $\nabla\Psi_j \to \bigvee \Psi_j$）。向后移动 N 次得到τ，而有限个初始集合 V_0、……、V_{N-1} 不会影响 $\mathrm{Reg}^{\infty}(\tau)$。 □

7.2 位置、单轮构造与年长者优先合并

出生时间的排序与 [10, 命题 7.4]证明中的迹历史排序有关。这里排序的对象是任意后承关系 W 的实例，而不是通向析取伴随的历史；当支撑集合合并时，所有权则按公式逐一分配。

在第 7.2–7.8 节中，$\mathcal{T}$ 始终固定为定理 6.1 的假设（R-bck），（R-ch），以及 (R-forth^2)~的固定见证归纳地对根对 $(r_{\mathcal{T}_B}, r_{\mathcal{T}_C})$ 取闭包（并仅保留这些有序对），我们可以不失一般性地假设，W 中的每个模态对都位于从 $(r_{\mathcal{T}_B}, r_{\mathcal{T}_C})$ 出发的有限 W-路径上——由于 $\mathcal{T}_B$ 和 $\mathcal{T}_C$ 都是树，该路径唯一——因为 (R-loc) 和 (R-par) 对 W 的任意子关系均成立。

~**定义 7.5** (位置与所有权)。 在 $(\tilde{m}, m) \in \mathsf{Mod}(\mathcal{T}) \times \mathsf{Mod}(\mathcal{T})$ 处的一个位置 由一个有限的出生时间集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{N}$ 以及一个模态对 $(b_h, c_h) \in W$ 的赋值构成，该赋值对应于每个$\mathcal{H}$，并满足

$$L(b_h) \subseteq L(\tilde{m}) \qquad \text{for every } h \in \mathcal{H}, \tag{2}$$

$$L(m) \subseteq \bigcup_{h\in\mathcal{H}} L(c_h) \ \cup\ \{\gamma^{\sharp} \mid \gamma \in \mathsf{Sub}(A(X)) \setminus \{X\},\ \gamma^{\sharp} \text{ modal in } \mathsf{Cl}(A(C)),\ \gamma^{\flat} \in L(\tilde{m})\}. \tag{3}$$

$\varpi \in L(m)$ 的所有者 是

$$\mathsf{own}(\varpi) := \min\Big(\{h \in \mathcal{H} \mid \varpi \in L(c_h)\} \cup \{\infty \mid \exists \gamma \in \mathsf{Sub}(A(X)) \setminus \{X\}\ (\gamma^{\sharp} = \varpi \wedge \gamma^{\flat} \in L(\tilde{m}))\}\Big),$$

由 (3) 可知这一定义良好；当 $\mathsf{own}(\varpi) = \infty$ 时，依据引理 7.3(a)，γ 是唯一的。

引理 7.6 (局部条件)。 每个承载一个位置的模态对$(\tilde{m}, m)$ 都满足 *(R-loc)*。

证明。假设 $L(\tilde{m})$ 一致。由 (2)，每个 $L(b_h)$ 都一致，因此，在 (b_h, c_h) 处对 W 应用 (R-loc)，可得 $L(c_h)$ 一致，$\mathsf{Lit}(L(c_h)) \subseteq \mathsf{Lit}(L(b_h)) \subseteq \mathsf{Lit}(L(\tilde{m}))$，且若 $L(c_h)$ 是 ∇-非自由的，则 $L(b_h)$ 也是 ∇-非自由的。对于满足 $\mathsf{own}(\varpi) = \infty$ 且见证为 $\gamma \in \mathsf{Sub}(A(X)) \setminus \{X\}$ 的 $\varpi \in L(m)$，引理 7.3(c) 给出：若 ϖ 是文字，则 $\gamma^{\flat} = \varpi \in \mathsf{Lit}(L(\tilde{m}))$；若 $\varpi = \nabla(\Psi^{\flat})$，则 $\gamma^{\flat} = \nabla(\Psi^{\flat}) \in L(\tilde{m})$。因此，$\mathsf{Lit}(L(m)) \subseteq \mathsf{Lit}(L(\tilde{m}))$，$L(m)$ 一致；并且只要 $L(m)$ 是 ∇-非自由的，$L(\tilde{m})$ 就是 ∇-非自由的。 □

不变量指南。 中继维护三个事实，每个事实都对应一个后果子句：

- 左支撑：每个活跃的 h 都有 $(b_h,\ c_h) \in W$ 以及 $L(b_h) \subseteq L(\tilde{m})$ ((2))。这使得W-见证可用于 (R-back) 和 (R-forth^2)。
- 右覆盖：$L(m)$ 由副本标签和经过传递的外部模态公式 ((3)) 覆盖；最小支撑出生时间定义了 own。结合左支撑以及 W 的 (R-loc)，即可证明 Z 的 (R-loc)。
- 迹单调性：对于目标轨迹步，每一轮都按 $0 < 1 < 2 < \cdots < \infty$ ((4)) 的顺序满足 $\mathsf{own}_{\mathrm{next}}(\varpi) \leq \mathsf{own}(\varepsilon)$。稳定化通过外部上下文或持久副本传递一条轨迹，从而得到 (R-par)。

令 $N_{\mathrm{born}} \in \mathbb{N}$ 表示截至（$\tilde{m}$，m）出生的副本总数，因此 $\mathcal{H} \subseteq \{0,\ \ldots\ldots,\ N_{\mathrm{born}} - 1\}$。图7展示了一个活跃副本如何遵循构造 7.7 中的左饱和选择，以及其支撑集如何通过年长者优先规则与较年轻副本的支撑集和上下文支持相结合。

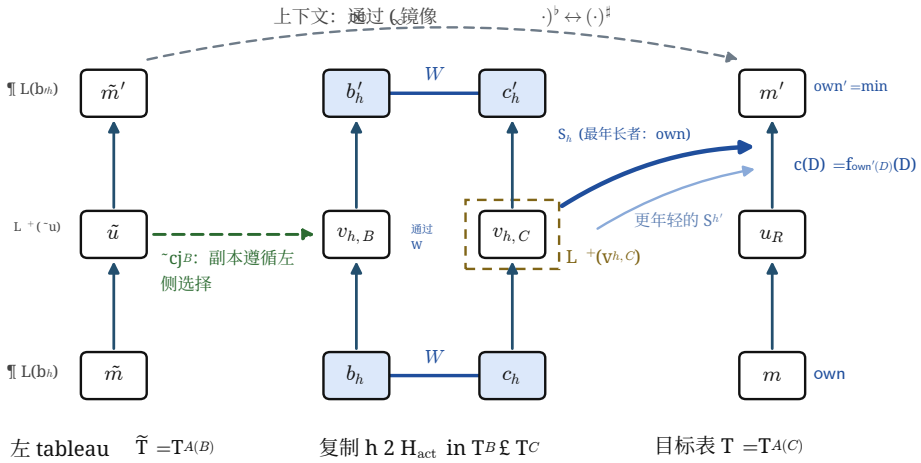

图7：老者优先构造的一轮。左侧语义树提供饱和选择；一个活动副本沿着 W 前进，并提供目标支撑 S_h。遇到共享公式时，最年长的支撑副本决定目标选择；外部上下文提供S_∞。

构造 7.7（从一个位置进行一轮）。设（$\tilde{m}$，m）携带一个位置（$\mathcal{H}$，{（b_h，c_h）}$_{h\in\mathcal{H}}$），其中 L（$\tilde{m}$）一致，且 L（m）为 ∇-Free（因此根据引理 7.6 一致）。

步骤1（丢弃）。设$\mathcal{H}_{\text{act}} := \{h \in \mathcal{H} \mid L(c_h)$是 ∇-非自由的$\}$。丢弃$\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{\text{act}}$ 后，对于每个 $\nabla\Xi \in L(m)$，own($\nabla\Xi$)保持不变。根据 W的(R-loc)，对于所有 $h \in \mathcal{H}_{\text{act}}$，$L(c_h)$和 $L(b_h)$都是一致且 ∇-非自由的。

步骤 2a（(R-back)入口）。给定 $u_R \in C(m)$，设它是 $\nabla\Xi_k \in L(m)$和$\theta \in \Xi_k$的(k,θ)-后继，令 $\kappa_0 :=$ own($\nabla\Xi_k$) $\in \mathcal{H}_{\text{act}} \cup \{\infty\}$。

- 若 $\kappa_0 = h_0 \in \mathcal{H}_{\text{act}}$，令 $v_C^0 \in C(c_{h_0})$ 的主公式为 $\nabla\Xi_k$，元素为 θ。根据 W 在 (b_{h_0}, c_{h_0}) 处的 (R-back)，选取 $v_B^0 \in C(b_{h_0})$，使得 $(v_B^0, v_C^0) \in W$；设 v_B^0 的主公式为$\nabla\Theta_* \in L(b_{h_0}) \subseteq L(\tilde{m})$，元素为 $\vartheta_* \in \Theta_*$。令 $\tilde{u} \in C(\tilde{m})$ 为 $L(\tilde{m})$ 的后继，其主公式为 $\nabla\Theta_*$，元素为 ϑ_*。

- 若 $\kappa_0 = \infty$，令 $\nabla\Psi \in$ 为 Sub($A(X)$)，并令 $\theta_0 \in \Psi$ 为满足 $\nabla(\Psi^\sharp) = \nabla\Xi_k$、$\nabla(\Psi^\flat) \in L(\tilde{m})$ 和 $\theta_0^\sharp = \theta$ (引理 7.3(a),(c)) 的唯一公式，同时令 $\tilde{u} \in C(\tilde{m})$ 的主公式为$\nabla(\Psi^\flat)$，元素为 $\theta_0^\flat$。

对于每个 $\tilde{m}' \in C(\tilde{u})$：如果 $L(\tilde{m}')$ 不相容，则将有序对 $\tilde{m}'$ 与一个固定的 $m'_{\text{inc}}(u_R) \in C(u_R)$ 配对，并在不添加位置的情况下结束该轮次；如果 $L(\tilde{m}')$ 一致，则继续执行步骤 3。

步骤 2b（（R-forth^2）入口）。给定 $\tilde{u} \in C$（$\tilde{m}$）和 $\tilde{m}' \in C(\tilde{u})$，且 $L(\tilde{m}')$ 一致，先执行步骤 3，然后在步骤 4 中选取 $u_R \in C(m)$。

步骤 3（推进有限副本和新生副本）。设 $\tilde{c}_0 := c_{(\tilde{u},\tilde{m}')}$ 且 $\tilde{c} := \tilde{c}_0^+$，因此根据引理 7.1(1)，$M_{\tilde{c}}(L^+(\tilde{u})) = L(\tilde{m}')$。由于 $L(\tilde{m}')$ 一致，$\nabla\emptyset \notin L(\tilde{m})$（否则 $\bigvee\emptyset = \bot$ 在 $L(\tilde{u})$ 中；由于 $\bot$ 是模态的，它会保留在 L（$\tilde{m}'$）中）。

- 有限副本 $h \in$Hact：将 $L(b_h) \subseteq L(\tilde{m})$ 的 ∇-公式写为 $\nabla\Theta_{h,1}, \ldots, \nabla\Theta_{h,r_h}(\Theta_{h,j} \neq \emptyset)$。然后 $B_{b_h} := \{\bigvee\Theta_{h,1}, \ldots, \bigvee\Theta_{h,r_h}\} \subseteq L^+(\tilde{u})$（包括某些 $\nabla\Theta_{h,j}$ 根据 $L^+(\tilde{u})$ 的定义是 $\tilde{u}$ 的主元素的情况）。在 b_h 处应用引理 5.1 于 $\tilde{c}|_B := \tilde{c}|\text{Cl}(B)$，令 $\vartheta_{h,j} \in \Theta_{h,j}$ 为从 $\bigvee\Theta_{h,j}$ 到达的元素。在带有 $\kappa_0 = h_0$ 和 $h = h_0$ 的 (R-back) 模式中，$\tilde{c} = \tilde{c}_0^+$ 从 $\bigvee\Theta_*$ 导向 ϑ_*，因此选择 $\nabla\Theta_*$ 得到 $v_{h_0,B} := v_B^0$ 以及模态子节点 $b'_{h_0} \in C(v_B^0)$，其结果为 $\tilde{c}|_B$；在 (v_B^0, v_C^0) 处对 W 应用 (R-ch)，得到 $c'_{h_0} \in C(v_C^0)$，其中 $(b'_{h_0}, c'_{h_0}) \in W$，并令 $v_{h_0,C} := v_C^0$。对于所有其他 $h \in$Hact，令 $v_{h,B} \in C(b_h)$ 为该

(1 $\vartheta_{h\,1}$ $b'_h \in C$ $v_{h\,B}$ $\tilde{c}|_B$ L $b'_h = M_{\tilde{c}|_B}$ $B_{b_h} \subseteq$,)-子节点，以及 (,) 其 L $\tilde{m}'$ $_2$ W b_h c_h $v_{h\,C} \in C$ c_h $c'_h \in C$ $v_{h\,C}$
结果为 的子节点。由于 ( ) ( ) ( ) 是一致的，在 (,) 处对 应用 (R-forth)，得到 ,( ) 和 (,)，其中 $(b'_h, c'_h) \in W$。在这两种情况下，令 $f_h := c^+(v_h, C, c'_h)$ 以及 $S_h := S_{f_h}(L^+(v_h, C))$。

- 新生副本：根据引理 4.21(4) 和 7.1(1)，$B \in S_{\tilde{c}}(L^+(\tilde{u}))$ 当且仅当 $B \in S_{\tilde{c}_0}(L(\tilde{u}))$，且不存在从 B 进入任何盒链的E-路径。若 $B \in S_{\tilde{c}}(L^+(\tilde{u}))$，令 $b'h$新 $\in C(r\mathrm{T}_B)$ 的结果为$\tilde{c}_0|\mathsf{Cl}(B)$，于是 $L(b'h$新$) = M_{\tilde{c}}(\{B\}) \subseteq L(\tilde{m}')$ 一致；对 $(r\mathrm{T}_B, r\mathrm{T}_C)$ 处的 W 应用 (R-ch)，得到$c'h$新 $\in C(r\mathrm{T}_C)$，满足 $(b'h$新$\, c'h$新$) \in W$。令 h新 $:= N$born，H′ $:=$ Hact $\cup\{h$新$\}$，N'born $:= N$born $+ 1$，f_h新 $:= c(r\mathrm{T}_C, c'h$新$)$，且 S_h新 $:= S_{f_h}$新 $(\{C\})$。否则令 H′ $:=$ Hact 且N'born $:= N$born。

步骤 4（在 (R-forth^2) 模式中选择 u_R）。注意 $\nabla\emptyset \notin L(m)$：所有者 ∞ 会给出 $\nabla\emptyset \in L(\tilde{m})$，而所有者 $h \in \mathrm{H}_{\mathrm{act}}$ 会将 $\bigvee\emptyset = \bot$ 置于 $L(v_h, C)$ 中；由于 $\bot$ 是模态的，它会保留在 $L(c'_h)$ 中，从而违反 (b'_h, c'_h) 处 W 的 (R-loc)。在 (R-forth^2) 模式中，任取一个$\nabla\Xi_k \in L(m)$ $(\Xi_k \neq \emptyset)$，并令 $\kappa_0 :=$拥有$(\nabla\Xi_k)$。若 $\kappa_0 = h_0 \in \mathrm{H}_{\mathrm{act}}$，则令 $\theta \in \Xi_k$ 由 f_{h_0}从 $\bigvee\Xi_k \in L^+(v_{h_0}, C)$ 到达；若 $\kappa_0 = \infty$，且 $\nabla(\Psi^\sharp) = \nabla\Xi_k$，则令 $\theta := \theta_0^\sharp \in \Xi_k$，其中 $\theta_0^\flat \in \Psi^\flat$ 由 $\tilde{c}$从 $(\bigvee\Psi)^\flat \in L^+(\tilde{u})$ 到达。令 $u_R \in C(m)$ 为 (k, θ)-后继。

步骤 5（上下文支持 S_∞ 和年长者优先选择 c）。令 $\Lambda_\infty := \{\gamma \in$ (子式集$(A(X)) \setminus \{X\}) \cup$头部$(A(X)) \mid \gamma^\sharp \in L(u_R) \wedge \gamma^\flat \in S_{\tilde{c}}(L^+(\tilde{u}))\}$。对 X 的排除是明确的：$L(u_R)$ 的元素要么是不动点公式 $\theta_0^\sharp$，且具有 $\theta_0 = \eta_z z.\chi \neq X$（通过盒隔离），要么是析取式$\bigvee\Xi_j (|\Xi_j| \geq 2)$；而 $X^\sharp = C = \eta_{z_C} z_C.C_0$，因此根据引理 7.3(b)，$\gamma^\sharp \neq C$。在 $\mathsf{Cl}(A(C))$ 上定义 f_∞ 如下：(i) 对于 $D_0 = \alpha_1 \vee \alpha_2 \in$ 子式集$(A(X))$，其中 $D_0^\flat \in S_{\tilde{c}}(L^+(\tilde{u}))$，$f_\infty(D_0^\sharp) := \alpha_i^\sharp$，其中$\tilde{c}(D_0^\flat) = \alpha_i^\flat$；(ii) 对于 $\bigvee\Psi \in \Lambda_\infty \cap$头部$(A(X))$，$f_\infty$沿着 $\nabla(\Psi^\sharp)$ 的盒链通向 $\theta_\Psi^\sharp$，其中 $\tilde{c}$从 $(\bigvee\Psi)^\flat$ 通向 $\theta_\Psi^\flat \in \Psi^\flat$；(iii) 其他位置的左析取项。令 $S_\infty \subseteq \mathsf{Cl}(A(C)) \setminus \{C\}$ 为从 $\Lambda_\infty^\sharp$ 出发、沿不经过 C的 E_{f_∞}-路径可达的公式集合。对于 $\delta \in \mathsf{S} := \bigcup_{\kappa \in \mathrm{H}' \cup \{\infty\}} S_\kappa$，令 $\mathsf{own}'(\delta) := \min\{\kappa \mid \delta \in S_\kappa\}$，对 $D \in \mathsf{S}$ 定义 $c(D) := f_{\mathsf{own}'(D)}(D)$（S 外的左析取项），并令 $m' \in C(u_R)$ 为结果为 $(M_c(L(u_R))\ R_c(L(u_R)))$ 的子节点。

引理 7.8（个体副本和上下文支持）。在构造 7.7（带有 $L(\tilde{m}')$ 一致性）中：

(a) 对于每个 $h \in H'$，$S_h \subseteq$ 闭包(C) 在 闭包$(A(C))$ 中关于 E_{f_h}-边闭合，$L(b'_h) \subseteq L(\tilde{m}')$，并且公式 $\varpi \in S_h$ 在 闭包$(A(C))$ 中是模态的，当且仅当 $\varpi \in L(c'_h)$。若 $h_{\mathrm{new}} \in H'$，则 $C \in S_{h_{\mathrm{new}}}$。

(b) f_∞ 定义良好；每个 $\delta \in S_\infty$ 要么是从 $(\bigvee\Psi)^\sharp$ 到 $\theta_\Psi^\sharp (\bigvee\Psi \in \Lambda_\infty \cap$头部$(A(X)))$ 的 E_{f_∞}-路径上的盒链析取，要么对于唯一的 $\gamma \in$子式集$(A(X)) \setminus \{X\}$ 有 $\gamma^\flat \in S_{\tilde{c}}(L^+(\tilde{u}))$；并且如果 $\varpi \in S_\infty$ 在闭包 $(A(C))$ 中是模态的，则 $\varpi = \gamma^\sharp$，其中 $\gamma^\flat \in L(\tilde{m}')$。

(c) 如果 $\delta \in S_\infty$ 且 $(\delta, \delta') \in E_{f_\infty}$，那么要么 $\delta' \neq C$ 且 $\delta' \in S_\infty$，要么 $\delta' = C$；在后一种情况下，$B \in S_{\tilde{c}}(L^+(\tilde{u}))$，$h_{\mathrm{new}} \in H'$ 存在，且 $C \in S_{h_{\mathrm{new}}}$。

(d) 如果对于 $\varepsilon \in L(m)$，$(\varepsilon, \delta_0, \emptyset) \in R(m, u_R)$，那么 $\delta_0 \in S_{\mathsf{own}(\varepsilon)}$。

证明。(a) 根据假设（3）和引理 7.2，C 与 $A(C)$ 中 $\mathsf{Cl}(C)$ 上的出向分解边和模态重合，因此 S_h 是 E_{f_h}-闭的；$L(b'_h) \subseteq L(\tilde{m}')$ 已在步骤 3 中证明，且 $C \in \{C\} \subseteq S_{h_{\mathrm{new}}}$。由于 C 是盒隔离的，将引理 7.1(1) 应用于 $\mathcal{T}_C$，可得 $M_{f_h}(L^+(v_h, C)) = L(c'_h)$ 对于 $h \in \mathcal{H}_{\mathrm{act}}$ 成立，而根据定义，$M_{f_{h_{\mathrm{new}}}}(\{C\}) = L(c'_{h_{\mathrm{new}}})$。

(b) 在定义 f_∞时，由于 $(\cdot)^\sharp$ 和 $(\cdot)^\flat$ 在 $\mathrm{Sub}(A(X))$ 上具有单射性（引理 7.3(a)），条款 (i) 不存在冲突；由于对 $A(C)$ 进行盒隔离，并由引理 4.21(4)(a) 可知，条款 (ii) 中的方框链析取式与 $\mathrm{Sub}(A(C))$ 不相交，且在不同的 $\nabla(\Psi^\sharp)$ 之间两两不相交，因此 f_∞ 定义良好。对从 $\Lambda_\infty^\sharp$出发的避开 C 的 E_{f_∞}- 路径进行归纳，并利用引理 7.3(b),(c) 以及 f_∞ 的条款 (i)，可得出 $\delta \in S_\infty$ 的刻画。模态 $\varpi \in S_\infty$ 不是析取式，因此在 $S_{\tilde{c}}(L^+(\tilde{u}))$ 中具有 $\gamma^\flat$ 模态的 $\varpi = \gamma^\sharp$，即 $\gamma^\flat \in L(\tilde{m}')$。

(c) 如果 $\delta' \neq C$，则附加 (δ, δ') 会保持 C-规避性，因此 $\delta' \in S_{\infty}$。假设 $\delta' = C$。由于对 $A(X)$ 进行盒隔离，ld̈ ü $\theta_{\Psi} \in \Psi$ 等于 X，所以引理 7.3(b) 排除了 $\delta' = \theta_{\Psi}^{\sharp}$；于是 $\delta = \gamma^{\sharp}$ 满足 $\gamma \in \mathrm{Sub}(A(X)) \setminus \{X\}$ 以及 $\gamma^{\flat} \in S_{\tilde{c}}(L^{+}(\tilde{u}))$。由引理 7.3(c) 和 f_{∞}的条款 (i)，$\delta' = (\gamma')^{\sharp} = C$ 对某个 $\gamma' \in \mathrm{Sub}(A(X))$ 成立，其中 $(\gamma^{\flat}, (\gamma')^{\flat}) \in E_{\tilde{c}\circ}$ 引理 7.3(b) 给出 $\gamma' = X$，因此$B = X^{\flat} \in S_{\tilde{c}}(L^{+}(\tilde{u}))$，生成 $h_{\mathrm{new}} \in \mathrm{H}'$，其中 $C \in S_{h_{\mathrm{new}}\circ}$

(d) 写作 $\varepsilon = \nabla\Xi \in L(m)$ 和 $\kappa := \mathrm{own}(\varepsilon)$。首先假设 $\kappa = h \in \mathrm{H}_{\mathrm{act}}$，因此 $\nabla\Xi \in L(c_h)$。若 ε 对 (m, u_R) 是非主元素，则 $\delta_0 = \bigvee\Xi$；即使 $\nabla\Xi$ 是副本 h 在步骤 (c_h, v_h, C) 中的主元素，完全的后继标签 $L^{+}(v_h, C) = L(v_h, C) \cup \{\bigvee\Xi\}$ 仍保留 $\bigvee\Xi$，因此 $\delta_0 = \bigvee\Xi \in L^{+}(v_h, C) \subseteq S_{h\circ}$ 若 $\varepsilon = \nabla\Xi_k$ 是 (m, u_R) 的主元素，则 $h = h_0$ 和 $\delta_0 = \theta$；在步骤 2a 中，$\theta \in L(v_C^0) \subseteq S_{h_0}$，而在步骤 4 中，$f_{h_0}$ 从 $\bigvee\Xi_k \in L^{+}(v_{h_0}, C)$ 到达 θ，因此 $\theta \in S_{h_0\circ}$ 现在假设 $\kappa = \infty$，其中 $\nabla(\Psi^{\sharp}) = \nabla\Xi$ 且 $\nabla(\Psi^{\flat}) \in L(\tilde{m})$。若 ε 是非主元素，则 $(\bigvee\Psi)^{\flat} \in L^{+}(\tilde{u}) \subseteq S_{\tilde{c}}(L^{+}(\tilde{u}))$，因此$\bigvee\Psi \in \Lambda_{\infty}$且 $\delta_0 = (\bigvee\Psi)^{\sharp} \in S_{\infty}$；若 ε 是主元素，则 $\delta_0 = \theta_0^{\sharp}$ $(\theta_0 \in \Psi, \theta_0 \neq X)$，并且依据步骤 2a 或步骤 4 有 $\theta_0^{\flat} \in S_{\tilde{c}}(L^{+}(\tilde{u}))$，因此 $\theta_0 \in \Lambda_{\infty}$ 且 $\delta_0 \in S_{\infty\circ}$

□

引理 7.9（旧者优先合并和位置保持）。 在构造 7.7（其中 L（$\tilde{m}'$）一致）中，令 $S := \bigcup_{\kappa \in \mathcal{H}' \cup \{\infty\}} S_{\kappa}$。则：

(a) L（u_R） ⊆S 以及 S_c（L（u_R））⊆ S;

(b) 沿每条边 (δ, δ') $\in E_c$，其中 $\delta \in S_c$（L（u_R））， own′（δ'） ≤ own′（δ）；

(c) S_c（L（u_R））中的任意 E_c-路径 $\pi = \delta_0 \cdots \delta_l$，若 own′（$\delta_0$） ＝等于own′（$\delta_l$） $= \kappa$，则具有常值所有者 κ，并且是其中的 E_{f_κ}-路径；

(d) （ $\tilde{m}', m'$） 配备 H' 和 {（b'_h, c'_h）}$_{h \in \mathcal{H}'}$ 的是一个位置，其所有者函数 $\mathrm{own}_{\mathrm{next}}$等于$\mathrm{own}'|_{L(m')}$。

证明。 根据引理 7.8(d)， $L(u_R) \subseteq \mathcal{S}$。令 $\delta \in \mathcal{S}$ 且 $(\delta, \delta') \in E_c$，其中 $\kappa := \mathrm{own}'(\delta)$（因此 $\delta \in S_\kappa$）。我们检查以下三种情况：

- 情况 *A*（$\kappa = h \in \mathcal{H}\prime$）： δ 要么不是析取的，要么 $\delta\prime = c(\delta) = f_h(\delta)$；在这两种情况下，$(\delta, \delta\prime) \in E_{f_h}$，因此根据引理 7.8(a)， $\delta\prime \in S_h \subseteq \mathcal{S}$，且 $\mathrm{own}\prime(\delta\prime) \leq h = \mathrm{own}\prime(\delta)$。
- 情况 *B*（$\kappa = \infty$ 且 $\delta\prime \neq C$）：类似地，$(\delta, \delta\prime) \in E_{f_\infty}$，因此由引理 7.8(c) 得到 $\delta\prime \in S_\infty \subseteq \mathcal{S}$，且 $\mathrm{own}\prime(\delta\prime) \leq \infty = \mathrm{own}\prime(\delta)$。
- 情形 *C (*$\kappa = \infty$ 和 $\delta\prime = C$*): </style}*此处 *(*, C) $\in E_{f_\infty}$，因此根据引理 7.8(c)，新生副本$h_{\mathrm{new}} \in \mathcal{H}\prime$ 存在，且 $C \in S_{h_{\mathrm{new}}} \subseteq \mathcal{S}$*</style}*，从而 *own′(*$C$)≤ $h_{\mathrm{new}} < \infty$ =own$\prime(\delta)$。

选择冲突。如果一个析取 $\delta = D$ 属于多个支撑集 S_λ，且这些支撑集中的选择相冲突，则令 $\kappa = \mathrm{own}'(D) = \min\{\lambda \mid D \in S_\lambda\}$（当 $|\{\lambda \mid D \in S_\lambda\}| \geq 2$ 时，这必然是有限的）。在 E_c 中，从 D 出发的唯一出边是 $(D, f_\kappa(D))$；未选择的析取项 $f_\lambda(D)$ $(\lambda > \kappa)$ 没有来自 D 的入边（位于 E_c 中），因此不需要延续；而情形 A 保持 $\delta' = f_\kappa(D) \in S_\kappa \subseteq \mathrm{S}$，并满足 $\mathrm{own}'(\delta') \leq \kappa = \mathrm{own}'(D)$。沿着从 $L(u_R)$ 出发的 E_c-路径进行归纳，可得 (a) 和 (b)。对于 (c)，(b) 强制 $\kappa = \mathrm{own}'(\delta_l) \leq \cdots \leq \mathrm{own}'(\delta_0) = \kappa$，因此在 π上的每个析取处都有 $c(\delta_i) = f_\kappa(\delta_i)$，从而在 S_κ中形成一条 πan E_{f_κ}-路径。

对于 (d)，根据引理 7.8(a)，(2) 成立。对于 $\delta \in L(m') = M_c(L(u_R)) \subseteq \mathcal{S}$，如果 $\mathrm{own}'(\delta) = h \in \mathcal{H}'$，那么根据引理 7.8(a) 有 $\delta \in L(c'_h)$；而如果 $\mathrm{own}'(\delta) = \infty$，那么根据引理 7.8(b) 有 $\delta = \gamma^{\sharp}$ with $\gamma^{\flat} \in L(\tilde{m}')$，从而证明 (3)。由于对于模态 $\delta \in L(m')$，对每个$\mathcal{H}'$（引理 7.8(a)）都有 $\delta \in S_h \iff \delta \in L(c'_h)$，$\mathrm{own}_{\mathrm{next}}(\delta)$ 和 $\mathrm{own}'(\delta)$ 都是在$\mathcal{H}'$的同一个子集上取最小值（并且当且仅当该子集为空时，二者相等 ∞）。

□

初始轮次。从 ($\tilde{t}_0\ t_0 \ = \ r\sim\ r_{\mathcal{T}} \ = \ A\ B \ , \ A\ C$ $\tilde{m}_0 \in$,) : (T) $C\ \tilde{t}_0$ $m_{0\,\mathrm{inc}} \in C\ t_0$ $\tilde{m}_0 \in C\ \tilde{t}_0$ $\tilde{c}_0$ 3 ({ ( )} { ( )}) 出发，将每个不相容的 ( ) 与一个固定的 , ( ) 配对。对于与 := $c_{(\tilde{t}_0,\tilde{m}_0)}$ 一致的 ( )，使用 $\mathrm{H}_{\mathrm{act}} := \emptyset$, $N_{\mathrm{born}} := 0$, $\tilde{u} := \tilde{t}_0$ and $u_R := t_0$ 运行步骤和第 5 步：如果 $A(X) = X$，则创建新生副本 0（$\mathrm{H}' = \{0\}$，$S_\infty = \emptyset$, $C \in S_0$）；如果 $A(X) \neq X$，则 $\Lambda_\infty = \{A(X)\}$（$A(C) \in S_\infty$，依据引理 7.3(b)），并且当且仅当 $B \in S_{\tilde{c}_0}(\{A(B)\})$ 时创建新生副本 0。引理 7.8(a)–(c) 和 7.9(b)–(d) 原样适用，从而得到位于 ($\tilde{m}_0, m_0$) 的位置，其中 $\mathsf{own}_0 = \mathsf{own}'|_{L(m_0)}$。

7.3 证明的迹保持与补全

定义 7.10（关系 Z）。通过对 d 递归，定义层 $Z^{(d)}$ ($d \geq 0$)，为每个具有一致左标签的模态对附加一个位置和 N_{born}:

- $Z^{(0)}$ 包含 ($r_{\sim\mathcal{T}} r_{\mathcal{T}}$) 以及所有初始轮次模态对 ($\tilde{m}_0, m_0$) ($\tilde{m}_0 \in C(r_{\sim\mathcal{T}})$)。
- 对于每个模态对 ($\tilde{m}, m$) $\in Z^{(d)}$，若 $L(\tilde{m})$ 一致且 $L(m)$ 为 ∇-非 Free：首先添加条款 (a) 中的所有有序对：对于每个 $u_R \in C(m)$， $Z^{(d+1)}$ 从步骤 2a 中包含 ($\tilde{u}, u_R$)，并且对于所有 $\tilde{m}\prime \in C(\tilde{u})$，添加由此得到的模态对 ($\tilde{m} m\prime$)。然后，仅对条款 (a) 中未与任何 $u_R \in C(m)$ 配对的每个 $\tilde{u} \in C(\tilde{m})$，以及每个一致的 $\tilde{m}\prime \in C(\tilde{u})$，应用条款 (b)。添加由步骤 2b–5 产生的模态对。条款 (a) 中构造的有序对均不会被重新处理。

令 $Z := \bigcup_{d\geq 0} Z^{(d)}$。

引理 7.11（位置的唯一性和局部条款）。每个模态对（$\tilde{m}, m$）$\in Z$ 都位于深度 $2d+1$，处于唯一的有限 Z-路径上；并且当 L（$\tilde{m}$）一致时，它具有唯一的位置。此外， Z 关联根节点，并满足 *(R-ch)*、*(R-loc)*、*(R-back)* 和 *(R-forth^2)*。

证明。 $Z^{(d)}$ 中的选择对和模态对分别具有深度为 $2d$ 和 $2d+1$的分量。任一语义树中的每个模态节点都有唯一的父选择节点和唯一的祖父模态节点（初始深度处除外）。条款 (a)处理每个被选中的左选择节点的所有子节点；条款 (b)仅处理未在 (a) 中选中的左选择节点。这些集合互不相交。在条款 (a)中，不同的右子节点 u_R 具有互不相交的子节点集合 C（u_R），因此，即使同一个左选择节点被选中多次，生成的模态对也具有不同的右分量。因此，深度为 $2d+3$ 的每个模态对都由其唯一确定的祖父对在 $Z^{(d)}$ 中恰好经一轮生成；当其左侧标签一致时，它具有唯一的位置。该祖父对必然属于 $Z^{(d)}$；因此，对 d 作归纳可得，每个模态对都有唯一的有限 Z-路径。此构造直接满足 (R-ch)、(R-back) 和 (R-forth^2)，而引理 7.6 满足 (R-loc)。

□

引理 7.12 (轮次步骤迹保持)。*(A)* 设 ($\tilde{m}', m'$) $\in Z^{(d+1)}$ *(*$L(\tilde{m}')$ 一致) ，由 ($\tilde{m}, m$) $\in Z^{(d)}$ 经由 ($\tilde{u}, u_R$)生成。对于每个 (ε, ϖ, V) $\in R(m, u_R) \circ R(u_R, m')$,

$$\mathsf{own}_{\mathrm{next}}(\varpi) \leq \mathsf{own}(\varepsilon). \tag{4}$$

若等式 $\mathsf{own}_{\mathrm{next}}(\varpi)$ =$\mathsf{own}(\varepsilon) = \kappa$ 成立:

(i) 若 $\kappa = h \in H_{\mathrm{act}}$，则 $V \subseteq$ *Bound(C)*，且 *(*ε, ϖ, V*)* $\in R($*c*$_h$, *v*$_{h,C}$*)* 。 *R(*$v_{h,C}, c'_h$*)* 属于 T_C；*(ii)* 若 $\kappa = \infty$，则对于唯一的 $\gamma, \tilde{\gamma} \in$ *Sub(A(X)) | {X}*，满足 $\gamma^\sharp = \varepsilon$ 和 $\tilde{\gamma}^\sharp = \varpi$，有 $V \subseteq$ *Bound(A(X))*，且 *(*$\gamma^\flat, \tilde{\gamma}^\flat, V$*)* $\in R($ $\tilde{m}, \tilde{u}$*)* 。 *R(*$\tilde{u}, \tilde{m}'$*)* 属于 $\tilde{}\,T$。

（*B*）在初始轮次中，若 *L(* $\tilde{m}_0$*)* 一致，且 *(A(C)* ϖ_0, V_0*)* $\in R(r_{\mathcal{T}}, m_0)$ 并且 *own*$_0$*(*ϖ_0*)* $=\infty$，那么 $V_0 \subseteq$ *Bound(A(X))*，且 *(A(B)* $\gamma_0^\flat, V_0$*)* $\in R(r_{\sim T}$ $\tilde{m}_0$*)* 对于 $\gamma_0^\sharp = \varpi_0$。

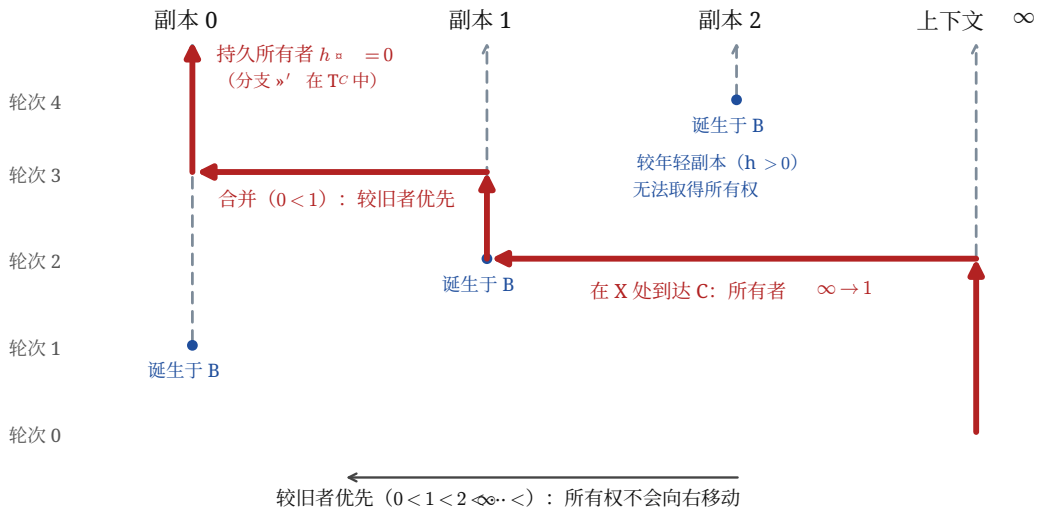

图8：较旧者优先中继示意图。轮次向上运行；目标迹只能向较旧的副本转移所有者，最终沿着一条持久通道前进。虚线表示副本通道，而非语义树边。

证明。（A）选取 $\delta_0 \in L(u_R)$，以及一条从 δ_0 到 ϖ 的 E_c-路径 π，其中 Reg(π) $= V$ 见证- ing (ε, δ_0, $\emptyset$) $\in R(m, u_R)$，且 $(\delta_0, \varpi, V) \in R(u_R, m')$。引理7.8(d)和7.9(b)、(d)给出 own$_{\text{next}}(\varpi)$ = own′(ϖ) ≤ own′(δ_0) ≤ own(ε)，从而证明（4）。当等式以 valueκ 成立时，引理 7.9(c) 使 π 成为 S_κ 内的一条 E_{f_κ}-路径。

对于 (i)，$\kappa = h \in \mathcal{H}_{\text{act}}$ 和 $\varepsilon = \nabla\Xi \in L(c_h)$。如果 $\delta_0 = \bigvee\Xi$，那么 $\bigvee\Xi \in L^+(v_h, C)$；如果 $\delta_0 = \theta \in \Xi_k(\varepsilon$ 主元素，因此 $h = h_0)$，那么根据步骤 2a 或步骤 4，f_{h_0} 沿着 $\bigvee\Xi_k \in L^+$的盒链前进，而无需再生（引理4.21(4)(c)），到达 $\theta\,(v_{h_0}, C)$。在需要时为该盒链添加 Prefix，得到 $(\bigvee\Xi, \varpi, V) \in R_{f_h}(L^+(v_h, C))$，并且对 $\mathcal{T}_C$ 应用引理 7.1(2)即可得到 (i)。

对于 (ii)，$\kappa = \infty$ 和 $\varepsilon = \nabla(\Psi^\sharp)$，其中 $\nabla(\Psi^\flat) \in L(\tilde{m})$。无论是 $\delta_0 = (\bigvee\Psi)^\sharp$（使用 f_∞的条款 (ii)），还是 $\delta_0 = \theta_0^\sharp$ (ε 主元素，使用步骤 2a 或步骤 4)，$\tilde{c}$ 都会沿着从 $(\bigvee\Psi)^\flat \in L^+(\tilde{u})$到 $\theta_*^\flat \in \Psi^\flat$的盒链前进而无需再生，其中 $\theta_*^\sharp$ 是由 π进入 $\Psi^\sharp$ 的元素。从 $\theta_*^\sharp$到 $\tilde{\gamma}^\sharp$，π 属于 $S_\infty \cap$子式集($A(C)$)（避开 C），并通过引理7.3(c)和 f_∞ 的条款 (i)逐边转换为一条从 $\theta_*^\flat$ 到 $\tilde{\gamma}^\flat$ 的 $E_{\tilde{c}}$-路径，其再生集 $V \subseteq$Bound($A(X)$)保持不变。因此 $((\bigvee\Psi)^\flat, \tilde{\gamma}^\flat, V) \in R_{\tilde{c}}(L^+(\tilde{u}))$，再对 $\tilde{}$T 应用引理 7.1(2)即可得到 (ii)。

部分 (B) 是沿着从 $A(X)^\sharp = A(C)$ 到 $\gamma_0^\sharp = \varpi_0$ 的避开 C的 E_{f_∞}路径进行的相同逐边翻译。

□

定理 6.1 的证明。句法保持是引理 7.2，而 Z（连同 Z 中的每个模态对都位于从根节点出发的有限 Z-路径上的性质）的局部条款是引理 7.11。对于 (R-par)，设 $(\tilde{m}_j, m_j)_{j\geq 0}$ 是一条无限 Z-路径，其左投影为 $\xi = t_0\tilde{m}_0\tilde{u}_0\tilde{m}_1\cdots$，偶数右投影为 $\xi = t_0 m_0 u_0 m_1 \cdots$。由于该路径是无限的，每个$L(\tilde{m}_j)$ 都是一致的，并且每个 $L(m_j)$ 都是 ∇-非 Free 的，因此每个 $(\tilde{m}_j, m_j)$ 都携带其唯一位置 (H$_j$, {($b_{j,h}, c_{j,h}$)})，其所有者函数为 own$_j$。令 τ 是 ξ 上的一条 μ-迹，其中 $(A(C)\ \varepsilon_0, V_{-1}) \in R(t_0, m_0)$，且 $(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}, V_j) \in R(m_j, u_j) \circ R(u_j, m_{j+1})$ ($j \geq 0$)；其 $\sqsubseteq$-最小的无限再生变量 $z^* \in \text{Reg}^\infty(\tau)$ 在 $A(C)$ 中具有 $\eta_{z^*} = \mu$。每个 ε_j 都是一个 ∇- 公式。根据 (4)，$o_j := \text{own}_j(\varepsilon_j)$ 在 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 中单调不增，因此存在 $J \geq 0$ 和 $\kappa^* \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，使得对所有 $j \geq J$ 都有 $o_j = \kappa^*$。情形 1：$\kappa^* = \infty$。于是对所有 $j \geq 0$ 都有 $o_j = \infty$。写作 $\varepsilon_j = \gamma_j^\sharp$ ($\gamma_j \in \text{Sub}(A(X)) \setminus \{X\}$)，由引理 7.12(B) 和 (A)(ii) 可得一条经过 $\gamma_j^\flat \in L(\tilde{m}_j)$、位于 $\tilde{\xi}$ 上的无限迹 $\tilde{\tau}$，其再生集相同，因此 Reg$^\infty(\tilde{\tau})$ = Reg$^\infty(\tau) \subseteq$ Bound($A(X)$)。根据假设（3）和引理 7.2，

绑定器类型和 Bound($A(X)$) 上的 $\sqsubseteq$ 在 $A(C)$ 和 $A(B)$ 中一致，因此 z^* 是 $A(B)$ 中 $\mathrm{Reg}^{\infty}(\tilde{\tau})$ 的 $\sqsubseteq$- 最小元素，而 ξ 是偶数。

情况 2：$\kappa^* = h \in \mathbb{N}$。令 $r_0 \le J$ 为副本 h 首次出现在 H_{r_0}（$r_0 = 0$ 若出生于根节点，$r_0 = b+1$ 若出生于 $(\tilde{u}_b, \tilde{m}_{b+1})$）中的索引，于是 $b_{r_0,h} \in C(r_{\mathcal{T}_B})$ 且 $c_{r_0,h} \in C(r_{\mathcal{T}_C})$。对于 $j \ge J$，$\varepsilon_j \in L(c_{j,h})$ 是一个 ∇-公式，因此 $h \in \mathrm{H}_{j,\mathrm{act}}$；由于在 $j \ge r_0$ 新出生的副本会获得出生时间 $N_{\mathrm{born}} > h$，副本 h 不可能在被丢弃后重新进入，因此对所有 $j \ge r_0$，均有 $h \in \mathrm{H}_{j,\mathrm{act}}$。因此 $(b_{j,h}, c_{j,h})_{j \ge r_0}$ 是从 $(r_{\mathcal{T}_B}, r_{\mathcal{T}_C})$ 出发的一条无限 W- 路径，其在 T_B 中的投影为 $\xi_B = r_{\mathcal{T}_B} b_{r_0,h} v_{r_0,h,B} \cdots$，在 T_C 中的投影为 $\xi_C = r_{\mathcal{T}_C} c_{r_0,h} v_{r_0,h,C} \cdots$。

对于所有 $j \ge J$，引理 7.12(A)(i) 给出 $(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}, V_j) \in R(c_{j,h}, v_{j,h,C}) \circ R(v_{j,h,C}, c_{j+1,h})$，且 $V_j \subseteq \mathrm{Bound}(C)$。根据引理 7.4，该尾部可向后延伸为一条无限迹 τ_C on ξ_C from $r_{\mathcal{T}_C}$，满足 $\mathrm{Reg}^{\infty}(\tau_C) = \mathrm{Reg}^{\infty}(\tau) \subseteq \mathrm{Bound}(C)$。由于在 $A(C)$ 和 C（假设（3））中，定义子公式、$\sqsubseteq$ 以及 Bound(C) 上的 μ/ν-类型相同，τ_C 是一个 μ-迹，并且 ξ_C 还是偶的。根据 W 的 (R-par)，ξ_B 是偶的，并携带一条 μ-迹 τ_B，其步骤为 $(\beta_j, \beta_{j+1}, U_j) \in R(b_{j,h}, v_{j,h,B}) \circ R(v_{j,h,B}, b_{j+1,h})$（$j \ge r_0$，$\beta_j = \nabla\Theta_j \in L(b_{j,h}) \subseteq L(\tilde{m}_j)$，$U_j \subseteq \mathrm{Bound}(B)$），以及 $\sqsubseteq$-最小的无限再生 μ-变量 $w^* \in \mathrm{Bound}(B)$。对于每个 $j \ge r_0$，取 $\tilde{c}_j := c^+(\tilde{u}_j, \tilde{m}_{j+1})$，引理 5.1 的迹恒等式（在步骤 3 中使用）给出 $(\bigvee \Theta_j, \beta_{j+1}, U_j) \in R_{\tilde{c}_j|_B}(B_{b_{j,h}}) \subseteq R_{\tilde{c}_j}(L^+(\tilde{u}_j))$（因为 $B_{b_{j,h}} \subseteq L^+(\tilde{u}_j)$ 且 $\mathrm{Bound}(B) \cap \mathrm{Bound}(A(X)) = \emptyset$），而 T 上的引理 7.1(2) 给出 $(\beta_j, \beta_{j+1}, U_j) \in R(\tilde{m}_j, \tilde{u}_j) \circ R(\tilde{u}_j, \tilde{m}_{j+1})$。根据引理 7.4，将 $(\beta_j)_{j \ge r_0}$ 从 $\tilde{m}_{r_0}$ 向后延伸至 $\tilde{t}_0$，得到一条无限迹 $\tilde{\tau}$ on ξ，满足 $\mathrm{Reg}^{\infty}(\tilde{\tau}) = \mathrm{Reg}^{\infty}(\tau_B) \subseteq \mathrm{Bound}(B)$。同样，$B$ 和 $A(B)$ 中 Bound(B) 上的 $\sqsubseteq$ 和 μ/ν-类型相同，因此 w^* 见证了 $\tilde{\tau}$ 是一条 μ-迹，且 ξ 是偶的。因此 $\mathrm{T}^{A(B)} \Rightarrow_Z \mathrm{T}^{A(C)}$。 □

示例 7.13（共享目标公式的两个老副本）。下面给出一个局部支撑集计算，用于说明步骤 5，而不是规定一棵完整的语义树。假设副本 0 出生于较早的轮次，副本 1 出生于下一轮，且二者均处于活跃状态。设 $D = \alpha \vee \beta$ 是一个目标析取式，其中有 $D \in S_0 \cap S_1$、$f_0(D) = \alpha$ 和 $f_1(D) = \beta$。于是

$$\mathsf{own}'(D) = \min\{0, 1\} = 0, \qquad c(D) = f_0(D) = \alpha.$$

因此，目标得以推出，尽管较年轻的副本会选择 β。如果 $\alpha \in S_0$，那么 $\mathsf{own}'(\alpha) \le 0$，因此 $\mathsf{own}'(\alpha) = 0$。两个副本都保留其原始出生时间及各自的 W-有序对；只有公式的所有者会被选定。在下一轮中，只要两个支撑集再次都包含 D，就适用同样的计算。这个局部示例隔离出了合并机制，但并未断言每一对冲突支持都必须在同一个指定分支上产生。

7.4 展开后果引理的证明

引理 6.3 的证明。由引理 4.21(3)，ψ 及其重命名副本 ψ' 都是干净、受保护且盒隔离的，因此根据引理 7.2，$\alpha(\psi')$ 也具有这些性质（其中 $A(X) := \alpha(X)$ 且 $D := \psi'$）。记 $\tilde{\mathrm{U}} := \mathrm{T}_{\alpha(\psi')}$ 且 $\mathrm{T} := \mathrm{T}_{\psi}$。每个 $\gamma \in \mathsf{Cl}(\psi)$ 都有一个同构副本 $\gamma' \in \mathsf{Cl}(\psi') \subseteq \mathsf{Cl}(\alpha(\psi'))$，该副本通过 $z \mapsto z'$（$z \in \mathrm{Bound}(\psi)$）建立对应，将盒链匹配为宏步骤 $\bigvee \Psi \to \theta$，并且 $\bigvee(\Psi') \to \theta'$。对于 $\gamma \in \mathsf{Sub}(\alpha(x)) \cup \mathsf{Head}(\alpha(x))$，令 $\gamma^\flat := \gamma[\psi'/x] \in \mathsf{Cl}(\alpha(\psi'))$ 且 $\psi^\flat := \alpha(\psi')$，于是 $x^\flat = \psi'$；而在右侧，$\mathsf{Sub}(\alpha(x))$ 通过恒等映射嵌入 $\mathsf{Cl}(\psi)$（在构造 7.7 中起到 $(\cdot)^\sharp$ 的作用）；注意，将引理 7.3(a) 应用于 $C = \psi'$ 后，$\gamma \mapsto \gamma^\flat$ 在 $\mathsf{Sub}(\alpha(x)) \cup \mathsf{Head}(\alpha(x))$ 上是单射。

我们使用两个所有者通道 $0 < \infty$：一个模态对 $(\tilde{m},\ m) \in \mathrm{Mod}(\mathcal{U}) \times \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ 承载一个双通道位置当且仅当

$$L(m) \subseteq \{\varpi \in \mathsf{Cl}(\psi) \mid \varpi' \in L(\tilde{m})\} \cup \{\varpi \in \mathsf{Sub}(\alpha(x)) \setminus \{x\} \mid \varpi^\flat \in L(\tilde{m})\}, \tag{5}$$

满足 $\mathsf{own}(\varpi) := 0$ 若 $\varpi' \in L(\tilde{m})$，否则 $\mathsf{own}(\varpi) := \infty$。对于一致的 $L(\tilde{m})$，(5) 立即蕴含 (R-loc)，因为 $l' = l = l^\flat$ 作用于文字，而 $(\nabla\Xi)'$，$(\nabla\Xi)^\flat$ 是 ∇-公式。

来自 $(\tilde{m},\ m)$（$L(\tilde{m})$ 一致，$L(m)$ ∇-非自由）。在（R-back）模式下，给定 $(k,\ \theta)$-后继 $u_R \in C(m)$，它对应于 $\nabla\Xi_k \in L(m)$，令 $\tilde{u} \in C(\tilde{m})$ 的主公式为 $\nabla(\Xi'_k)$，并且

元素 θ' if own$(\nabla\Xi_k) = 0$，以及主公式 $\nabla(\Xi_k^\flat)$ 和元素 $\theta^\flat$ if own$(\nabla\Xi_k) = \infty$；与固定的 $m'_{\mathrm{inc}}(u_R) \in C(u_R)$ 构成不一致对 $\tilde{m}' \in C(\tilde{u})$。给定 $\tilde{u} \in C(\tilde{m})$ 和一致的$\tilde{m}' \in C(\tilde{u})$，令 $\tilde{c}_0 := c_{(\tilde{u},\tilde{m}')}$ 和 $\tilde{c} := \tilde{c}_0^+$；则 $\nabla\emptyset \notin L(\tilde{m})$，因此根据（5）有 $\nabla\emptyset \notin L(m)$。在（R-forth^2）模式下，任取 $\nabla\Xi_k \in L(m)$，并令 $u_R \in C(m)$ 为 (k,θ)-后继，其中 $\tilde{c}$从 $\bigvee(\Xi'_k) \in L^+(\tilde{u})$ 导向 θ'（若 own$(\nabla\Xi_k) = 0$），或从 $\bigvee(\Xi_k^\flat) \in L^+(\tilde{u})$ 导向 $\theta^\flat$（若 own$(\nabla\Xi_k) = \infty$）。

定义选择函数 f_0、f_∞ 于 Cl(ψ) 上：对于 $D \in$ Sub(ψ)，$f_0(D)$ 是 $\tilde{c}(D')$ 的逆 $'$-像；并且在 $\nabla\Xi \in$ Sub(ψ) 的盒链上，借助 $\bigvee(\Xi') \in S_{\tilde{c}}(L^+(\tilde{u}))$，它导向从 $(\,)$ 到达的 $\theta \in \Xi$，其中 $\theta' \quad \tilde{c} \quad \bigvee \Xi' \quad S_0 \subseteq \quad \psi \quad E_{f_0} \quad \delta \in \quad \psi \cup \quad \psi \mid^\flat$；令 Cl$(\,)$ 为 $\{\delta' \in S_{\tilde{c}}\ L^+\ \tilde{u} \quad \varpi \in S_0 \quad \varpi' \in L\ \tilde{m}' \quad f_\infty \quad \tilde{c}$ Sub$(\,)$ Head$(\,)$ $(\,(\,))\}$ 的 -闭包，于是模态满足 $(\,)$。定义通过外部上下文中的 $(\cdot)$ 进行镜像，并令 S_∞ 为这样一组公式：它们可由不穿过 $x \to \alpha(x)$ 的 E_{f_∞}-路径从 $\{\gamma \in L(u_R) \mid \gamma \in$Sub$(\alpha(x)) \cup$Head$(\alpha(x)) \quad \gamma^\flat \in S_{\tilde{c}}(L^+(\tilde{u}))\}$ 到达。令 own$'(\delta) := 0$ 于 S_0 上，并令 own$'(\delta) := \infty$ 于 $S_\infty \setminus S_0$ 上；对于 $D \in S_0 \cup S_\infty$（左析取项在 $S_0 \cup S_\infty$ 外部），设 $c(D) := f_{\mathsf{own}'(D)}(D)$，并令 $m' \in C(u_R)$ 为结果为 c 的模态子节点。

断言 7.14（双通道支撑集与位置保持）。 根据以上选择 e:

(i) $L(u_R) \subseteq S_0 \cup S_\infty$;

（*ii*）每条从 $S_0 \cup S_\infty$ 出发的 E_c-边都留在此并集中，且不会增加其在 $0 < \infty$ 中的所有者；

（*iii*）模态结果（$\tilde{m}'$，m'）再次满足（5），且$\mathsf{own}_{\mathrm{next}} = \mathsf{own}'|_{L(m')}$。

证明。对于（i），若 L（u_R）中的某个公式由所有者为通道 0 的模态前驱生成，则它属于完全的后继支撑集 S_0；若其前驱的所有者为 ∞，则相应的外层公式是 S_∞的生成元。

对于（ii），S_0 是 E_{f_0}-闭合的。集合 S_∞ 在到达 x之前是 E_{f_∞}-闭合的。若 $x \in S_\infty$，则 $x^\flat = \psi' \in S_{\tilde{c}}$（$L^+$（$\tilde{u}$））$'$，而展开边 $\psi' \to \alpha'$（x'）$=$（α（x））$'$ 会将 α（x）置于 S_0中。每个选定后继都留在并集中，且其所有者至多与其前驱的所有者相同。若该后继也由 S_0提供，其所有者可能从 ∞ 降至 0； x 处的转换正是必须进入内层通道的位置。

对于 (iii)，如果 $\varpi \in L(m')$，那么 $\varpi \in S_0 \cup S_\infty$。对于每个模态公式 $\varpi \in$ Cl(ψ)，$\varpi \in S_0$ 当且仅当 $\varpi' \in L(\tilde{m}')$：两边描述的是同一次镜像饱和的模态结果。对于文字，这同样成立，因为 $l' = l$。 $S_\infty \setminus S_0$ 中的模态公式具有 $\gamma \in$ Sub$(\alpha(x)) \setminus \{x\}$ 的形式，其中 $\gamma^\flat \in L(\tilde{m}')$。这恰好对应于 (5) 中的两个备选项；通道 0（包括文字）的等价性表明，$\mathsf{own}_{\mathrm{next}} = \mathsf{own}'|_{L(m')}$。 □

公式 [10, 例 520]: 令 $\alpha(x) = \Diamond((x \wedge p) \vee q)$。在语义树构造中，析取 $(x \wedge p) \vee q$由左、右语义树在同一个饱和轮次中求解。如果选择 q，外部通道保持活跃；如果选择 $x \wedge p$ 且迹到达 x，控制权将 followingψ' 转交给内部通道。 [10, 例 5。20] 中所描述的失败源于不同原因：在自动机 $\mu x.A$ 中，状态在一个析取处被拆分，因此右侧选项提前一个轮次就被确定了。这里不会发生这种过早确定，因为两个语义树在同一个饱和步骤中求解所显示的析取。

在初始轮次中，对于来自（$\{\alpha(\psi')\}$，$\{\psi\}$）的一致 $\tilde{m}_0 \in C(r_{\sim u})$，其中 $\tilde{c}_0 := c_{(r_{\widetilde{u}}, \tilde{m}_0)}$，定义$S_0$ 来自 $S_{\tilde{c}_0}(\{\alpha(\psi')\})$，并从 $\{\psi,\ \alpha(x)\}$ 开始 S_∞（因为 $\psi \to \alpha(x)$ 具有空再生，且（$\alpha(x))^\flat = \alpha(\psi')$），从而得到（$\tilde{m}_0$，$m_0$），满足（5）。

按定义 7.10 递归地定义 $U := \bigcup_{d \geq 0} U^{(d)}$，并将条款 (b) 限制为条款 (a) 中未与任何右选择节点配对的左选择节点 $\tilde{u}$；于是，当 $L(\tilde{m})$ 一致时，U 的每个模态对都位于唯一一条有限 U-路径上，并带有唯一的双通道位置，且 U 满足 (R-ch)、(R-loc)、(R-back) 和 (R-forth^2)。对于 (R-par)，设 τ 是某条无限 U-路径的右投影 ξ 上的一条 μ-迹，其中 $(\psi, \varepsilon_0, V_{-1}) \in R(r_\tau, m_0)$，且 $(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}, V_j) \in R(m_j, u_j) \circ R(u_j, m_{j+1})$。由于 own$^{j+1}(\varepsilon_{j+1}) \leq$ own$^j(\varepsilon_j) \in \{0, \infty\}$:

- 若对所有 $j \ge 0$ 都有 $\mathsf{own}_{\mathcal{J}}(\varepsilon_j) = \infty$，则没有任何步骤经过 $x \to \alpha(x)$。在初始轮次中，从 ψ 到 ε_0 的 E_{f_∞}-路径以确定性展开 $\psi \to \alpha(x)$（空再生）开始，此后避开 $x \to \alpha(x)$，因此其 $(\cdot)^\flat$-翻译给出 $(\alpha(\psi')\,\varepsilon_0^\flat, V_{-1}) \in R(r \sim \mathsf{U}\,\tilde{m}_0)$，且 $V_{-1} \subseteq \mathsf{Bound}(\alpha) \setminus \{x\}$；对每个 $j \ge 0$，引理 7.1(2) 给出 $(\varepsilon_j^\flat, \varepsilon_{j+1}^\flat, V_j) \in R(\,\tilde{m}_j, \tilde{u}_j) \circ R(\tilde{u}_j, \tilde{m}_{j+1})$。因此 $\tau^\flat$ 是 $\tilde{\xi}$ 上的一条 μ-迹。

- 否则，$\mathsf{own}_{\mathcal{J}}(\varepsilon_j) = 0$ 对所有 $j \ge J$，存在某个 $J \ge 0$。对于每个 $j \ge J$，从 $L(^{u}{}_{j})$ 到 ε_{j+1} 的常数 $0E_{\hat{c}}$路径是一条 E_{f_0}路径，其经由$\varepsilon'_j \in L(\,\tilde{m}_j)$ 的盒链取′像后缀，是一条从 $(\bigvee \Xi_j)'$ $\in L^+(\tilde{u}_j)$ 到 $\varepsilon'_{j+1} \in L(\,\tilde{m}_{j+1})$ 的 $E_{\hat{c}}$路径，再生集合为$V'_j := \{z' \mid z \in V_j\}$。引理 7.1(2) 给出，对于所有$\sim j \ge J$，$(\varepsilon'_j, \varepsilon'_{j+1}, V'_j) \in R(\,\tilde{m}_j, \tilde{u}_j) \circ R(\tilde{u}_j, \tilde{m}_{j+1})$；引理 7.4 将此尾部延伸为 ξ上的一条无限迹 $\tilde{\tau}$，满足 $\mathsf{Reg}^\infty(\tilde{\tau}) = \{z' \restriction z \in \mathsf{Reg}^\infty(\tau)\} \subseteq \mathsf{Bound}(\psi')$，其 $\sqsubset$最小元素是 μ变量 $(z^*)'$。

˜因此，ξ 在两种情况下都是偶数，从而证明了 $U:\ \mathcal{T}_{\alpha(\psi')} \Rightarrow \mathcal{T}_{\psi}$。 □

8 结语

与 [10, 定理 4], 相比，我们的提升定理揭示了任意表列后承的一种结构性质：通过适当分隔的正上下文中继 $\mathcal{T}_B \Rightarrow \mathcal{T}_C$。

第 4 节中的确定性奇偶监视器既用于断言（e）的有限博弈证明，也用于构造自动机范式；由此自然引出两个方向。

1. 形式化。 典范表列、分解图、后承关系、令牌和老化副本都是明确的有限数据或归纳数据，这应当使其能够在证明助手中进行机械化。

2. 证明论翻译。 在 Kloibhofer 的反例之后，能否直接从带注释的系统或重置系统 [15, 24, 8, 20] 得到完备性仍是一个开放问题 [17], 。附录 A 中的年长者优先和重置机制在 Koz 中分别由引理 A.1 的（Record）规则和引理 A.8 的单调性所论证；这种解释能否扩展到合取分支，是一个自然的问题。

A 薄反驳定理的证明（据 Walukiewicz)

我们通过重述 [27, 定理 31], 的论证来证明定理 3.21；该论证将 Kozen 对非合取公式 [19], 的证明推广到构造 3.22 的单规则展开 $\mathcal{R}^+$ 以及带标签集合：每次再生一个 μ-变量时，都会记录一个上下文；每条无限分支上，总有某个记录的上下文再次出现，于是可以在该处截断分支。Walukiewicz 的令牌列表转化为由公式出现携带的令牌（变量，出生时间）；对应关系列于注 A.13。

全文中，Γ_0，Δ_0 均固定如定义 3.19 所述，$\mathcal{R}$ 是有限 $\Gamma \subseteq \mathsf{Cl}(\Gamma_0; \Delta_0)$ 的一个薄序贯反驳，其中没有公式包含 $\mathsf{Bound}(\Gamma_0) \cup \mathsf{Bound}(\Delta_0)$ 中的变量作为自由变量；$\mathcal{R}^+$ 是它的单规则展开。为沿用第 3 节的记号，在本附录中，$\mathsf{Cl}(\Gamma_0)$ 表示带标签闭包 $\mathsf{Cl}(\Gamma_0; \Delta_0)$，$\mathsf{Bound}(\Gamma_0)$ 表示 Γ_0 和 $\sim\Delta_0$ 的约束变量集合（按假设二者不相交），而 $\mathsf{Bound}^{\mu}(\Gamma_0)$ 表示它们各自一侧的不动点类型约束变量；Free、Sub、φ_y 和 $\sqsubset$均按相关公式所在的一侧计算。因此，右侧公式的一个令牌是 Δ_0 的一个 ν-变量。深度 表示$\mathcal{R}^+$ 中某个节点到根节点的距离；同一分支上的节点深度互不相同。

A.1 Kozen 的上下文记录规则

Park 规则允许在展开最小不动点时记录一个上下文，因此当再生时再次遇到该上下文，就会产生命题冲突 [19]。

引理 A.1 (Kozen 的上下文记录规则 [19, 命题 5.7(vi)])。 设 x 在$\alpha(x)$ 中为正的，且 $x \notin$Free(Γ)。以下规则可在Koz中推导：

$$\frac{\alpha(\mu x.(\sim\bigwedge\Gamma \wedge \alpha(x))), \Gamma \vdash}{\mu x.\alpha(x), \Gamma \vdash}\ (\mathrm{Record}).$$

证明。 我们首先证明，对于 $x \notin$ Free(ϑ)：若 $\alpha(\mu x.(\vartheta \wedge \alpha(x))) \vdash \vartheta$，则 $\mu x.\alpha(x) \vdash \vartheta$。令 $M := \mu x.(\vartheta \wedge \alpha(x))$。通过 (1) 在单侧演算中推导，假设为 $\alpha(M) \sim\vartheta \vdash$。

(i) $\alpha(M) \sim(\vartheta \wedge \alpha(M)) \vdash$：由于 $\sim(\vartheta \wedge \alpha(M)) = \sim\vartheta \vee \sim\alpha(M)$，应用 $(\vee)$；左侧前提是假设，右侧前提 $\alpha(M) \sim\alpha(M) \vdash$ 是 (Tau)。

(ii) $\vartheta \wedge \alpha(M) \sim M \vdash$ 是以体 $\vartheta \wedge \alpha(x)$ 为基础的 (Prefix) 实例。

(iii) 对 (i) 和 (ii) 应用 (Cut)，得到 $\alpha(M) \sim M \vdash$；应用 (Ind)，得到 $\mu x.\alpha(x) \sim M \vdash$。

(iv) M，$\sim\vartheta \vdash$：根据（η-展开）（引理 2.8(2)），只需证明 $\vartheta \wedge \alpha(M) \sim\vartheta \vdash$，这可由（$\wedge$）、（Tau）和（Weak）推出。

(v) 对 (iii) 和 (iv) 应用（Cut），得到 $\mu x.\alpha(x) \sim\vartheta \vdash$，即 $\mu x.\alpha(x) \vdash \vartheta$。

现在取 $\vartheta := \sim\bigwedge\Gamma$，于是有 $M = \mu x.(\sim\bigwedge\Gamma \wedge \alpha(x))$ 和 $\sim\vartheta = \bigwedge\Gamma$。由前提$\alpha(M)\ \Gamma \vdash$，重复应用（$\wedge$）（若 $\Gamma = \emptyset$，则应用（Weak））可得 $\alpha(M) \bigwedge\Gamma \vdash$，即该假设；而第一部分给出 $\mu x.\alpha(x) \bigwedge\Gamma \vdash$。对 Γ，$\sim\bigwedge\Gamma \vdash$ 应用（Cut）：若 $\Gamma = \emptyset$，则由（Bot）推出；否则由（$\vee$）、（Tau）和（Weak）推出。由此得到 $\mu x.\alpha(x)\ \Gamma \vdash$。 □

A.2 依赖闭包

定义 A.2 (依赖闭包)。 对于 $\psi \in$ Cl(Γ_0)，依赖集$(\psi) \subseteq$ Bound(Γ_0) 是包含 Free$(\psi) \cap$Bound(Γ_0) 的最小集合，并且只要 $y \in$ 属于依赖集(ψ)，就包含 Free$(\varphi_y) \cap$Bound(Γ_0)。令 依赖集$^\mu(\psi) :=$ 依赖集$(\psi) \cap$ Bound$^\mu(\Gamma_0)$。

因此，依赖集(ψ) 是展开 ψ （定义 3.1）所需的定义公式涉及的变量集合；等价地，它是沿着 E-路径可以从 ψ 重新生成的变量集合。

引理 A.3. *1.* 依赖集(ψ) 是一个 $\sqsubseteq$-链，并且每个 $x \in$依赖集(ψ) 在 ψ 中都是活跃的。

2. 如果 $\psi \to \psi'$ 是 E 的一条边，且它不是展开 $\eta_x x.\varphi_x \to \varphi_x$，也不是模态步 $\nabla\Psi \to \theta(\theta \in \Psi)$ 或 $\nabla\Psi \to \bigvee\Psi$，那么 依赖集$(\psi') \subseteq$依赖集$(\psi)$；此外，依赖集$(\varphi_x) \subseteq$依赖集$(\eta_x x.\varphi_x) \cup \{x\}$。

3. 若 R^+ 的一个$(\wedge)$步同时保留 $\alpha \wedge \beta$ 的两个合取项 α、β，则 依赖集$^\mu(\alpha) \cap$依赖集$^\mu(\beta) = \emptyset$。

证明。(1) 在 Cl(Γ_0) 中某个公式里自由出现的两个变量，其绑定子都包含该公式在自身侧面的一次出现，Γ_0 或 $\sim\Delta_0$ （对于盒链析取，则包含相应 ∇-公式的一次出现），因此二者相互嵌套；并且若 $z \in$ Free(φ_y)，则由清洁性可得 $z \sqsubset y$。因此 Dep(ψ) 是一条链。若 $x \in$ Dep(ψ)，则存在 $y_1 \in$ Free(ψ) 和 $y_{i+1} \in$ Free(φ_{y_i})，使得 $x \in$ Free(φ_{y_k}) 或 $x = y_1$；于是 $x \preceq y_k \preceq \cdots \preceq y_1$，因此 x 在 ψ 中活跃。(2) 对于子公式步和模态步，Free$(\psi') \subseteq$ Free(ψ)；对于再生 $x \to \varphi_x$，根据定义，Dep$(\varphi_x) \subseteq$ Dep(x)；对于展开，Free$(\varphi_x) \subseteq$ Free$(\eta_x x.\varphi_x) \cup \{x\}$。(3) 若 $x \in$ Dep$^\mu(\alpha) \cap$ Dep$^\mu(\beta)$，则根据 (1)，x 在两个合取项中都活跃；并且如引理 3.24(3) 的证明所示，$\alpha \wedge \beta \in$ Sub(φ_x)，这与 R$^+$ 的稀疏性矛盾。 □

A.3 记号

本小节仅讨论公式和出生时间；其中不涉及 Koz。

定义 A.4（出现与令牌）。出现是一个有序对 $o = (\psi, b)$，其中 $\psi \in \mathsf{Cl}(\Gamma_0)$，并带有出生函数 $b : \mathsf{Dep}^\mu(\psi) \to \mathbb{N}$。$o$ 的令牌是有序对 $(x, b(x))$、$x \in \mathsf{Dep}^\mu(\psi)$，而 o 携带这些令牌。若 $\mathsf{Dep}^\mu(\psi) \neq \emptyset$，则 o 的年龄是 $b(y_0)$，其中 y_0是链 $\mathsf{Dep}^\mu(\psi)$ 中 $\sqsubseteq$最小的元素（引理 A.3(1)）；对于公式相同的两个出现，年龄较小的那个较早。对于满足 $\mathsf{Dep}(\psi') \subseteq \mathsf{Dep}(\psi)$ 的 ψ'，令 $o{\restriction}\psi' := (\psi', b{\restriction}\mathsf{Dep}^\mu(\psi'))$。

我们通过按深度归纳，为 $\mathcal{R}^+$ 的每个节点 n 分配一个集合 $\Phi(n)$，其中的出现具有两两不同的公式，其公式集合为 $L(n)$。根节点接收 $(\gamma, \emptyset)$，对于 $\gamma \in \Gamma$；根据假设，$\mathsf{Dep}(\gamma) = \emptyset$。对于节点 n，其主公式 ψ 由 $o = (\psi, b) \in \Phi(n)$ 携带，且 $\Phi' := \Phi(n) \setminus \{o\}$，$n$ 处的规则为子节点产生以下候选项 出现：

($\vee$) $\psi = \alpha \vee \beta$：$\Phi' \cup \{o{\restriction}\alpha\}$ 对于 α 的子节点，$\Phi' \cup \{o{\restriction}\beta\}$ 对于 β 的子节点。

($\wedge$) $\psi = \alpha \wedge \beta$：$\Phi' \cup \{o{\restriction}\chi \mid \chi \in \{\alpha, \beta\}$ 保留$\}$。

(η) $\psi = \eta_x x.\varphi_x$：$\Phi' \cup \{(\varphi_x, b^+)\}$，其中 b^+ 通过 $b^+(x) := \mathsf{depth}(n)$（如果 $\eta_x = \mu$）将 $b{\restriction}\mathsf{Dep}^\mu(\varphi_x)$ 扩展；令牌 $(x,\mathsf{depth}(n))$ 在 n 处诞生 。

(正则规则) $\psi = x$：$\Phi' \cup \{o{\restriction}\varphi_x\}$。若 $\eta_x = \mu$，令牌（x，$b(x)$）记录于 n。

(弱化规则) Φ'。

（∇） $L(n)$模态子节点（k，θ）-后继：$\nabla\Psi_k$ 的出现将其限制贡献给θ，$\nabla\Psi_n$ （$n \neq k$）的出现则将其限制贡献给 $\bigvee\Psi_n$；文字将被丢弃。

根据引理 A.3(2)，所有限制都是合法的。若两个候选项具有相同的公式 ψ'，则将它们合并：若 $\mathsf{Dep}^\mu(\psi') = \emptyset$，两者都是（$\psi'$，$\emptyset$）且彼此相同；否则它们的年龄不同（引理 A.5），保留较旧者并丢弃另一个。若某个出现携带某个令牌，则该令牌在 n存活。每个令牌都在一个 (η) 步骤中出生，每个节点至多出生一个；在 n 存活的令牌出生于 n 的某个真祖先节点，因此，同一节点上存活的不同令牌出生于不同节点。n 产生的候选项中的每个令牌，都是其父出现中的令牌，但在 n 出生的令牌除外。因此，在一条分支上，令牌（y，t）存活的节点构成一个深度区间（也可能为空），从 $t+1$ 开始（死亡不可逆）；特别地，在一条分支上无限次记录的令牌 P，在 P 中深度为 $> t$ 的每个节点上都存活。

引理 A.5（不同载体）。 在每个节点 n，对于同一个子节点，在 n 处产生的任意两个不同候选项不会携带相同的令牌；任意两个不同的 Φ（n）出现也不会如此。因此，两个具有相同公式 ψ 和 依赖集μ（ψ） $\neq \emptyset$ 的此类出现具有不同的年龄。

证明。 按深度归纳。在根节点处，没有出现携带令牌。对于子节点，在 n 处产生的每个候选项都由 Φ（n）的一个出现产生，而它所携带的令牌要么由该出现携带，要么是在 n处出生的令牌，后者只由一个候选项携带。唯一能从一个出现产生两个候选项的规则是（$\wedge$），且两个合取项都被保留；根据引理 A.3(3)，这两个合取项的依赖集μ不相交，因此至多其中一个携带给定令牌；而沿着一条谱系，依赖集μ 只有通过针对 y的（η）步骤才能重新获得一个变量 y，该步骤会生成一个具有新出生时间的令牌（引理 A.3(2)）。根据关于 Φ（n）的归纳假设，至多一个候选项携带给定令牌，而子节点的出现构成候选项的一个子集。具有相同公式的两个出现具有相同的依赖集μ；它们在其 $\sqsubseteq$-最小元素y_0 处的令牌 b（y_0）彼此不同，因此它们的年龄不同。

□

固定一条无限分支 $P = n_0 n_1 \cdots$，它属于 $\mathcal{R}^+$。由引理 3.24(2)，该分支携带一条 μ-迹 $\tau = \psi_0 \psi_1 \cdots$，由单步实现；令 x 为 $\mathsf{Reg}^\infty(\tau)$ 中按 $\sqsubseteq$ 排序的最小元素，其中 τ 是一个变量，并令 o_j 为 ψ_j 在 $\Phi(n_j)$ 中的一次出现。

引理 A.6 (迹保持)。 存在 N 和 β，使得对于所有 $j \geq N$： $x \in$ 依赖集(ψ_j)，令牌(x, β) 由 o_j携带，并且 o_{j+1} 由 o_j 按照 n_j 处的规则生成（因此 o_j 在合并时绝不会被丢弃）。特别地，(x, β) 在每个满足 $j \geq N$的 n_j 处都存活，因此在深度为 $> \beta$的 P 的每个节点处都存活，并且它在 P上无限次记录。

证明。引理 3.9 的证明同样适用于单步实现 τ：存在 N_0，使得对于 $j \geq N_0$，每个 ψ_j 都属于 Cl(φ_x)，并且在 n_j 或之后再生的每个变量都是 $\sqsupseteq x$。对于 $j \geq N_0$， $x \in$ Dep(ψ_j)：迹随后会再生 x，因此一条 E-路径从 ψ_j 通向公式 x，而引理 A.3(2) 沿该路径向后传播 $x \in$ Dep(x)（唯一可能移除 x的步骤是展开 $\eta_x x.\varphi_x$，而它位于 Cl(φ_x)之外）。因此 $D :=$ {$y \in$Dep$_\mu(\psi_j) \mid y \sqsubseteq x$} 对所有 $j \geq N_0$ 都相同（它等于 {$y \in$ Dep$_\mu(\varphi_x) \mid y \sqsubset x$} $\cup${x} ），并且是链 Dep$_\mu(\psi_j)$ 的一个初始段。因此，其最小元素 y_0 就是 Dep$_\mu(\psi_j)$ 的最小元素，而 $b_{o_j}(y_0)$ 是 o_j 的年龄，记作 $o_j =$ (ψ_j, b_{o_j})。如果 o_{j+1} 由 o_j产生，则 $b_{o_{j+1}}(y_0) = b_{o_j}(y_0)$：在 N_0之后没有 $y \in D$被重新绑定，因为 $\eta_y y.\varphi_y \notin$Cl($\varphi_x$)。否则，$o_{j+1}$ 是与由 o_j产生的候选项合并时的胜者；它具有相同的公式和更小的年龄，因此 $b_{o_{j+1}}(y_0) < b_{o_j}(y_0)$。自然数序列只会有限次下降，因此存在 $N \geq N_0$，在此之后 o_{j+1} 由 o_j 产生，且 $b_{o_j}(x) =: \beta$ 保持不变。令牌 (x, β) 记录了沿 τ 在 N 之后每次再生 x 的情况，而这种再生会发生无穷多次。 □

A.4 装饰与翻译

定义 A.7 （装饰）。 一个装饰出现 $o = (\psi,\ d,\ b)$在出现（ψ, b）上添加一个装饰 d，为每个 $x \in$ 依赖集$\mu(\psi)$ 指定一个有限集 $d(x)$ 的闭公式（其记录的上下文）；限制也会限制 d。翻译 $\langle\langle o \rangle\rangle$ 是这样得到的闭公式：从底层公式 ψ 出发，按从内到外的顺序，对依赖集 Dep(ψ) 中的变量依次代入 $y \mapsto$Fix$_o(y)$，其中

$$\mathsf{Fix}_o(y) := \mu y.\Big(\bigwedge_{\theta \in d(y)} {\sim}\theta \ \wedge\ \varphi_y \Big) \ \text{ if } \eta_y = \mu, \qquad \mathsf{Fix}_o(y) := \nu y.\varphi_y \ \text{ if } \eta_y = \nu.$$

对于装饰出现的集合 Φ，$\langle\langle\Phi\rangle\rangle := \{\langle\langle o \rangle\rangle \mid o \in \Phi\}$，而 $\Phi \vdash$ 表示$\langle\langle\Phi\rangle\rangle \vdash$。

如果所有记录的上下文都为空，那么$\langle\langle o \rangle\rangle$ 可证明地等价于定义 3.1 中的展开$\langle\langle\psi\rangle\rangle$，因为 $\vdash \mu y.(\top \wedge \varphi_y) \leftrightarrow \mu y.\varphi_y$。翻译与联结词可交换：$\langle\langle(\alpha \vee \beta,\ d,\ b)\rangle\rangle = \langle\langle(\alpha,\ d,\ b)\restriction\alpha\rangle\rangle \vee \langle\langle(\beta,\ d,\ b)\restriction\beta\rangle\rangle$，对 $\wedge$ 和 ∇ 也同样成立，因为不属于某个子公式依赖集的变量不会出现在该子公式中。

引理 *A.8* （装饰）。令 $o = (\psi, d, b)$ 和 $o' = (\psi, d', b')$，且对所有 x 都有 $d(x) \subseteq d'(x)$。则 $\vdash \langle\langle o' \rangle\rangle \to \langle\langle o \rangle\rangle$。此外，如果 $\psi = x \in$ ***Bound***$_\mu(\Gamma_0)$ 且 $\theta \in d(x)$，那么 $\vdash \langle\langle o \rangle\rangle \to {\sim}\theta$。

证明。 第一个断言由引理 2.8(3) 得出：在每一步替换中，将其应用于 $\vdash \mu y.(\Theta' \wedge \varphi_y) \to \mu y.(\Theta \wedge \varphi_y)$，其中合取式 Θ' 扩展 Θ；被替换的变量均以正的方式出现。对于第二个断言，在替换 σ 外部变量时（${\sim}\theta'$ 是闭的），有 $\langle\langle o \rangle\rangle = \mu x.(\bigwedge_{\theta' \in d(x)} {\sim}\theta' \wedge \varphi_x\sigma)$，再进行一次展开（引理 2.8(2)）即可得到 ${\sim}\theta$。 □

现在我们按深度归纳法为 $\Phi(n)$ 的各个出现添加装饰；合并时保留被保留的出现的装饰，而这仅由年龄决定。在根节点处，所有装饰均为空，因此 $\langle\langle\Phi(\text{root})\rangle\rangle = \langle\langle\Gamma\rangle\rangle$。在节点 n 处，若主出现为 $o = (\psi, d, b)$，且 $\Phi' := \Phi(n) \setminus \{o\}$，那么每个候选项都保留其来源出现的装饰（取其限制），但有两个例外：

(η) 新变量获得 $d^+(x) := \emptyset$；

（正则规则）， $\eta_x = \mu$ 令 $\Phi'_\downarrow$ 通过将每个比（$x, b(x)$)更年轻的令牌重置，从 Φ' 中获得；也就是说，在每个（ψ', d', b'） $\in \Phi'$ 中，将 $d'(w)$ 替换为 $\emptyset$，其中 $b'(w) > b(x)$；令 $\theta := \bigwedge\Phi'_\downarrow$；子节点接收 $\Phi'_\downarrow \cup$ {($\varphi_x, d^\star, b\restriction$依赖集$\mu(\varphi_x)$)}，其中 $d^\star(x) := d(x) \cup \{\theta\}$，并且 $d^\star$ 在其他地方与 d一致。令牌（$x, b(x)$)记录了 θ 在 n。

令牌存活期间，其装饰因此只会在记录时（它会增长）或在记录出生时间更小的令牌时被重置。

引理 A.9 (局部可靠性)。若 n 是叶节点，则 $\Phi(n)\vdash$。若 n 不是叶节点，且对于 n 的每个子节点 m，都有 $\Phi(m)\vdash$，则 $\Phi(n)\vdash$。

证明。叶节点是不一致序列；由于叶节点是模态序列式，其文字中不含来自 Bound(Γ_0) 的变量，并且在 $\cdot$ 下保持不变，因此 $\Phi(n)$ 包含 $\bot$ 或一对 p、$\neg p$，可由 (Bot) 或 (Tau) 后接弱化规则 (Weak) 反驳。在合并或弱化规则 (Weak) 中丢弃一个出现，属于弱化规则 (Weak) 的一个实例。对于 ($\vee$) 和 ($\wedge$)，翻译与联结词可交换，而这些断言是 Koz 的规则 ($\vee$)、($\wedge$) 和弱化规则 (Weak) 的实例。对于 (η)，由引理 2.8(2)、(3)，$(\eta_x x.\varphi_x, d, b)$ 可证明等价于对子节点中该出现的翻译；新的装饰 $d^+(x) = \emptyset$ 只贡献 $\top$。对于带有 $\eta_x = \nu$ 的正则规则 (reg)，这是 (η-unf) 的一个实例。对于 (∇)，翻译与 ∇ 和 $\bigvee$ 可交换，并且引理 2.8(4) 中可导出的规则 (∇) 适用（若标签包含主公式带有另一标签的孪生项，则使用其变体）。对于带有 $\eta_x = \mu$ 的正则规则 (reg)，令 $\Theta := \bigwedge_{\theta' \in d(x)} \sim\theta'$，按照引理 A.8 令 σ 替换 φ_x 的外部变量，并设 $\alpha(x) := \Theta \wedge \varphi_x\sigma$，从而 $o = \mu x.\alpha(x)$。新出现的翻译为 $\varphi_x\sigma[M/x]$，其中有 $M = \mu x.(\sim\theta \wedge \alpha(x))$。若子节点可反驳，则由 ($\wedge$) 和弱化规则 (Weak)，丢弃合取项 Θ，可得 $\{\alpha(M)\} \cup \Phi'_{\downarrow} \vdash$；于是，引理 A.1 的规则（Record）取 $\Gamma := \Phi'_{\downarrow}$（闭合，因此 $x \notin \mathrm{Free}(\Gamma)$）以及 $\bigwedge\Gamma = \theta$，可得 $\{\mu x.\alpha(x)\} \cup \Phi'_{\downarrow} \vdash$。最后，由引理 A.8，对于每个 $o' \in \Phi'$，都有 $\vdash o' \to o'_{\downarrow}$，故由 Cut 可得 $\Phi(n)\vdash$；因此，重置可由引理 A.8 证明合理。 □

A.5 闭节点与定理 3.21 的证明

定义 A.10（闭节点）。若 n 属于 $\mathcal{R}^+$，且 n 处的规则为 (reg)，其主公式 x 由 $o =$ 承载，x，d，$b \in \Phi(n)$，并且为 $\Phi' := \Phi(n) \setminus \{o\}$ 而记录在 n 处的上下文 $\theta = \bigwedge\langle\langle\Phi'_{\downarrow}\rangle\rangle$ 已经属于 $d(x)$，则称节点 n 为闭节点。

引理 A.11（闭节点可反驳）。若 n 是闭节点，则 $\Phi(n)\vdash$。

证明。由引理 A.8，$\vdash \langle\langle o\rangle\rangle \to \sim\theta$，因为 $\theta \in d(x)$，而 $\vdash \bigwedge\langle\langle\Phi'\rangle\rangle \to \bigwedge\langle\langle\Phi'_{\downarrow}\rangle\rangle = \theta$，因为重置只会移除记录的上下文。由于 θ，$\sim\theta\vdash$，根据 (Tau)，两次应用 (Cut) 得到 $\Phi(n)\vdash$。 □

Le引理 A.12 (闭节点存在)。R^+ 的每条无限分支都包含一个闭节点 e.

证明。设 $P = n_0 n_1 \cdots$ 是一条无限分支，并设 S 为在 P 上无限次记录的标记集合。根据引理 A.6，$S \neq \emptyset$。设 $\mathfrak{t} = (v,\ \beta^*) \in S$ 具有最小的出生；它是唯一的，因为 S 中的两个标记在 P 的同一节点上存活，因此具有不同的出生。$\mathfrak{t}$ 在 P 中深度为 $> \beta^*$ 的每个节点上都存活；对于这样的 j，令 $o^{\mathfrak{t}}_j$ 为承载 $\mathfrak{t}$ 的 $\Phi(n_j)$ 的出现（根据引理 A.5 唯一）。

较早的标记最终会被冻结。在 P 上存活的每个标记都出生于 P 的某个节点，因此在 P 上存活且出生为 $< \beta^*$ 的标记至多有 β^* 个。它们中的每一个在 P 上都只记录有限次，否则它就会属于出生更早的 S。令 $N' > \beta^*$ 为一个深度，该深度晚于 P 上任何出生为 $< \beta^*$ 的标记最后一次记录的深度。如引理 A.9 之前所述，存活标记的装饰 $d(w)$ 仅在该标记记录时（装饰会增长），或在出生更早的标记记录时将其重置时发生变化；只要 w 保持在 Dep$_\mu$ 中，限制就会保留 $d(w)$；而在合并或（弱化规则）时其出现被丢弃的标记会死亡，因为没有其他出现承载它（引理 A.5）。因此，对于 $j \geq N'$：$o^{\mathfrak{t}}_j$ 中 $\mathfrak{t}$ 的装饰 $d(v)$ 只会增长，并且在 n_j 处存活的每个出生为 $< \beta^*$ 的标记，其装饰 $D_{(w,s)}$ 都不依赖于 j。

记录的上下文遍历一个有限集。令 n_j ($j \geq N'$) 为这样一个节点，在该节点 $\mathfrak{t}$ 记录了 $\theta_j = \bigwedge\langle\langle\Phi'_{\downarrow}\rangle\rangle$。在 $\Phi'_{\downarrow}$ 中，每个出生为 $> \beta^*$ 的令牌都已被重置为 $\emptyset$，每个出生为 $< \beta^*$ 的令牌都有其冻结装饰；Φ' 中没有令牌的出生为 β^*。因此，$\Phi'_{\downarrow}$ 的每次出现都由其公式 $\psi' \in \mathrm{Cl}(\Gamma_0)$ 以及对于每个 $w \in$Dep$_\mu(\psi')$ 中 $d(w)$ 是 $\emptyset$ 还是有限个冻结集合之一来确定。因此，θ_j 遍历一个有限集。

一个递归。由于 $\mathfrak{t}$ 在 N' 之后无限次记录，因此存在 $N' \leq j < k$，使得 $\mathfrak{t}$ 在 n_j 和 n_k 处记录了 $\theta_j = \theta_k$。上下文 θ_j 在 n_j 被添加到 $d(v)$ 中，并且从未被移除，因此 $\theta_k = \theta_j \in d(v)$ 位于 $o_k^{\mathfrak{t}} = (v, d, b)$ 中，而 n_k 是闭合的。 □

定理 *3.21* 的证明。 令$\mathcal{D}$ 为从$\mathcal{R}^+$ 中删除所有闭节点的真后代后得到的树。它是有限分支的，并且根据引理 A.12，它没有无限分支；由柯尼希引理可知，它是有限的。$\mathcal{D}$ 的每个叶节点 n 都是闭节点或$\mathcal{R}^+$的叶节点，因此根据引理 A.11 或引理 A.9，有 $\Phi(n) \vdash$；而$\mathcal{D}$ 的每个内部节点都保留$\mathcal{R}^+$中的所有子节点。自叶节点向根节点应用引理 A.9，得到 Φ(根节点) $\vdash$，即 $\Gamma \vdash$。将每个节点 n 读作序列式$\langle\langle \Phi(n) \rangle\rangle \vdash$，则$\mathcal{D}$ 是一个 Koz 推导的骨架。 □

备注 A.13（与 Walukiewicz 的证明相对应）。 下表列出了 [27, 第 5] 节中的手段与上述手段之间的对应关系。Walukiewicz 从不可证明序列式构成的无限分支出发进行反证；而这里，闭节点给出了直接证明。

Walukiewicz [27,第 5] 节	附录 A
标记为 (α, X) 的令牌	由 α 的出现携带的令牌 (X, t)
标记列表中的位置（左侧 = 较早）	出生时间 t（较小的 = 较早）
在 (μ)-规则中追加的新令牌	在 (η)-步骤中出生的令牌
可替换性：优先处理最小变量，然后按列表顺序排列	年长者优先：最外层标记的出生
步骤 7：删除变量不活跃的标记 in α	d, b 限制为 $\mathrm{Dep}_\mu(\psi)$
令牌的计数器	自上次重置以来记录的上下文数量
再生时，右侧的计数器重置为 0	较年轻令牌的装饰在正则规则处重置 μ
$D_{n,\beta}(X) = \mu X.\neg\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \neg\gamma_k \wedge \alpha(X)$	固定$_o(X)$，其中 $d(X) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$
观察 31.1（μ-迹的支撑集）	引理 A.6
观察 31.2（一个不可证明的子节点）	引理 A.9
具有无界计数器的最左标记	S 中出生时间最早的令牌

第 7 节中的老化副本，是对后承关系 $W\,\mathcal{T}_B \Rightarrow \mathcal{T}_C$ 的副本进行此类记账的对应形式：这些副本进入根节点处的 $\mathcal{T}_C$。由于 Bound(C) 与 Bound($A(X)$) 不相交，因此单一出生时间便已足够，而目标公式的所有权由年长者优先规则决定。

致谢

在准备手稿期间，作者使用了 Microsoft Copilot、Anthropic Claude 和 Google Gemini 进行证明校验、大幅编辑与重组、LaTeX 和代码生成，以及说明性图示的制作。作者指导了这些工具的使用，审阅了所有输出，独立核查了数学论证和参考文献，并对手稿的准确性和原创性承担全部责任。

参考文献

[1] B. Afshari、S. Enqvist 和 G. E. Leigh。一阶 μ-演算的循环证明。*LogicJournal of the IGPL*，32(1):1–34，2024。[2] B. Afshari、S. Enqvist、G. E. Leigh、J. Marti 和 Y. Venema。双向模态 μ-演算的证明系统。*Journal of Symbolic Logic*，90(3):1211–1260，2025。[3] B. Afshari 和 J. Kloibhofer。无交替模态 μ-演算的切消去。预印本，arXiv:2510.11293，2025。

[4] B. Afshari 和 G. E. Leigh。模态 μ-演算的无切完备性。载于《第32届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会论文集》（LICS 2017），第 1–12 页。IEEE，2017。[5] B. Afshari、G. E. Leigh 和 G. Menéndez Turata。揭开 μ 的神秘面纱。Fundamenta Informaticae，194(2)，2025。doi:10.46298/fi.12773。[6] H. Björklund、S. Sandberg 和 S. Vorobyov。奇偶博弈与平均收益博弈的无记忆确定性：一个简单证明。《理论计算机科学》，310(1–3):365–378，2004。[7] J. Bradfield 和 C. Stirling。模态 μ-演算。载于 P. Blackburn、J. van Benthem 和 F. Wolter 编，《模态逻辑手册》，逻辑与实践推理研究第 3 卷，第 721–756 页。爱思唯尔，2007。[8] M. Dekker、J. Kloibhofer、J. Marti 和 Y. Venema。通过确定化自动机构造的模态 μ- 演算证明系统。载于《解析语义树与相关方法自动推理》（ TABLEAUX 2023 ），人工智能讲义第 14278 卷，第 242–259 页。施普林格，2023。[9] E. A. Emerson 和 C. S. Jutla。树自动机、μ-演算与确定性（扩展摘要）。载于《第32届计算机科学基础年会论文集》（FOCS 1991），第 368–377 页。IEEE，1991。[10] S. Enqvist、F. Seifan 和 Y. Venema。模态 μ-演算的完备性：将组合学与动力学分离。《理论计算机科学》，727:37–100，2018。[11] S. Enqvist、F. Seifan 和 Y. Venema。 μ-演算的完备性：一种余代数方法。《纯粹与应用逻辑年鉴》，170(5):578–641，2019。[12] E. Grädel、W. Thomas 和 T. Wilke 编。《自动机、逻辑与无限博弈：当前研究指南》，计算机科学讲义第 2500 卷。施普林格，2002。[13] D. Janin 和 I. Walukiewicz。模态 μ-演算的自动机及相关结果。载于《1995年计算机科学数学基础会议》（MFCS '95），计算机科学讲义第 969 卷，第 552–562 页。施普林格，1995。[14] N. Jungteerapanich。模态 μ-演算的语义树系统。载于《解析语义树与相关方法自动推理》（ TABLEAUX 2009），人工智能讲义第 5607 卷，第 220–234 页。施普林格，2009。[15] N. Jungteerapanich。模态 μ-演算的语义树系统。博士论文，爱丁堡大学，2010。[16] D. Kirsten。交替树自动机与奇偶博弈。载于 E. Grädel、W. Thomas 和 T. Wilke 编，《自动机、逻辑与无限博弈》，计算机科学讲义第 2500 卷，第 9 章，第 153–167 页。施普林格，2002。[17] J. Kloibhofer。关于 Afshari 与 Leigh 的 Clo 系统不完备性的一则短论。预印本，arXiv:2307.06846，2023。[18] J. Kloibhofer。《带注释的循环：模态不动点逻辑的非良基证明论》。博士论文，ILLC，阿姆斯特丹大学，2026。[19]D. Kozen。命题 μ-演算的若干结果。《理论计算机科学》，27(3):333–354，1983。

[20] G. E. Leigh 和 D. Wehr。从 GTC 到重置：从循环证明系统生成重置证明系统。《纯粹与应用逻辑年鉴》，175(10):103485，2024。[21] D. Niwiński 和 I. Walukiewicz。 μ演算的博弈。《理论计算机科学》，163(1–2):99–116，1996。[22] N. Piterman。从非确定性 Büchi 和 Streett 自动机到确定性奇偶自动机。《计算机科学逻辑方法》，3(3):5:1–5:21，2007。[23] S. Safra。关于 ω-自动机的复杂性。载于第 *29* 届计算机科学基础年度研讨会论文集（*FOCS 1988*），第 319–327 页。IEEE，1988。[24] C. Stirling。带有模态 μ-演算名称的语义树证明系统。载于*Howard-60*：庆祝 *Howard Barringer 60* 岁生日的纪念文集，*EPiC* 计算系列第 42 卷，第 306–318 页。EasyChair，2014。[25] K. Tamura。模态 μ-演算中 Kozen 公理化的完备性：一个简单证明。预印本，arXiv:1408.3560，2014。[26] Y. Venema。模态 μ-演算讲义。讲义，逻辑、语言与计算研究所，阿姆斯特丹大学，2024 年 7 月 4 日版本。`https://tsinghualogic.net/JRC/wp-content/uploads/2024/07/modal-mu-calculus.pdf`。[27] I. Walukiewicz。命题 μ-演算的 Kozen 公理化的完备性。《信息与计算》，157(1–2):142–182，2000。