arXiv:2611.30036v1 [math.OA] 23 Nov 2026

冯·诺伊曼代数的非忠实、非正规迹向其仿射算子的延拓

ComlanEdmond Koudjinan加拿大安大略省多伦多大学Koudjinanedmond@gmail.com

摘要。设 τ 是有限冯·诺伊曼代数M上的一个正迹泛函，不一定是正规迹。对于与M相伴的正自伴算子 A ，我们定义 $\tau_{\mathrm{Y}}(A) = \lim_{h\downarrow 0} \tau(A(\mathrm{I} + hA)^{-1}) \in [0,\infty]$。我们证明， $\tau_{\mathrm{Y}}(A) = \sup_R \tau(\min(A, R\mathrm{I}))$。通过一种对任意正迹均成立的型–预解式比较，我们证明 τ_{Y} 在正仿射算子上具有可加性。因此， τ可正线性延拓至有限扩展迹的正仿射算子所张成的空间 $\mathscr{D}_\tau$ ，且对每个正迹， $\tau_{\mathrm{Y}}(T^*T)$定义了一种预希尔伯特结构。对于任意迹， $\tau_{\mathrm{Y}}(|S+T|)^{2/3} \le \tau_{\mathrm{Y}}(|S|)^{2/3} + \tau_{\mathrm{Y}}(|T|)^{2/3}$；因此，满足 $\tau_{\mathrm{Y}}(|T|) < \infty$ 的算子T构成一个M-双模 $\mathscr{L}^1_Y$，线性延拓在其上有定义且是循环的。事实证明， $\mathscr{L}^1_Y = \mathscr{D}_\tau$； $d(S,T) = \tau_{\mathrm{Y}}(|S-T|)^{2/3}$是 $\mathscr{L}^1_Y$ 上的平移不变伪度量，且当且仅当 τ 忠实时，它是度量。在逼近方面，M中的切尔诺夫族迫使其生成元与M相伴。切尔诺夫族的迹缺陷未必收敛到 $\tau_{\mathrm{Y}}(A)$，即便对于忠实正规迹也是如此，而双边预解式比较则足以保证收敛。对于忠实正规迹， τ_{Y} 是典范延拓，且相关空间 $\mathscr{L}^p_Y$ 与经典的 $L^p(\mathrm{M},\tau)$以及它们的范数($1 \le p < \infty$)相同。

1. 引言

1.1. 研究动机。无界算子的迹。迹 τ 定义在有界算子构成的冯·诺伊曼代数 M 上，而人们希望积分的算子往往是无界的：演化方程的生成元、非交换概率中的密度和矩，以及哈密顿量。对于与 M 相伴的正自伴算子 A ，有几种自然的“$\tau(A)$”候选定义：谱积分 $\int \lambda\, d\tau(E_A(\lambda))$；尖锐截断 $\sup_R \tau(AE_A([0,R]))$；裁剪 $\sup_R \tau(\min(A, R\mathrm{I}))$；Yosida 正则化 $\sup_h \tau(A(\mathrm{I}+hA)^{-1})$；半群商 $\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}\tau(\mathrm{I} - e^{-tA})$；以及对满足 $a \le A$ 的 $a \in \mathrm{M}_+$ 上的 $\tau(a)$ 取上确界。若τ 是正规迹，那么这些定义都相同（引理 3.7、命题 3.6 和 4.6，以及 (5.2)），于是可以应用经典的非交换积分理论 [11, 4]。我们的目标是通过在明确构造的预解式、半群和切尔诺夫乘积上求取原有有界迹的值，来恢复并近似扩展迹，而不是

从一个仅对正规迹有效的谱积分出发。当 τ 不是正规迹时，这个问题才具有实质意义。

量子力学解释。若 τ 是一个迹态，且 $H \ge 0$ 仿射于$\mathcal{M}$，则 $\tau_{\mathrm{Y}}(H)$ 是在该迹态下的平均能量，也就是说，是在无限温度下的平均能量，并由命题4.6

$$\tau_{\mathrm{Y}}(H) = \lim_{\beta\downarrow 0} \frac{Z(0) - Z(\beta)}{\beta} = -Z'(0^+),$$

日期：2026年11月24日。2020年数学主题分类。主要分类 46L51；次要分类 46L10、47A07、47D06。关键词和短语。仿射算子、非正规迹、Yosida近似、形式和、Chernoff乘积公式、非交换积分。

对每个迹（无论是否正规）均成立，其中 $Z(\beta) = \tau(e^{-\beta H})$ 是哈密顿量为 H 的系统的配分函数，而 β 热力学贝塔与温度成反比。因此，平均能量等于配分函数在无限温度下导数的负值。

为什么采用 *Yosida*延拓。 我们将 $\tau_{\mathrm{Y}}(A) = \text{上确界}_h\, \tau(A(\mathrm{I} + hA)^{-1})$ 定义为（定义 3.3）。它与截断延拓（命题 3.6）和半群极限（命题 4.6）一致，并且对于每个迹

$$\tau_{\mathrm{Y}}(A) = \sup\{\tau(a) : a \in \mathcal{M}_+,\ a \le A\}$$

由（5.2）可知。最后一个恒等式使得 τ_{Y} 具有规范性：由于 τ_{Y} 是单调的，它是最小的延拓 τ，并且关于二次型的序保持单调性。极小性是正确的归一化：将 $+\infty$ 赋予每个无界算子同样也是单调且可加的，但毫无用处。预解式表述也是演化方程中可用的表述： $A(\mathrm{I} + hA)^{-1} = h^{-1}(\mathrm{I} - (\mathrm{I} + hA)^{-1})$ 是 A的 Yosida近似，计算它需要执行一次隐式欧拉步，即求解 $(\mathrm{I} + hA)u = f$。
为何可加性是关键。对于这个内扩张，超可加性是显然的：若 $a \le A$和 $b \le B$，则 $a + b \le A \hat{+} B$，所以 $\tau_{\mathrm{Y}}(A) + \tau_{\mathrm{Y}}(B) \le \tau_{\mathrm{Y}}(A \hat{+} B)$。次可加性也可用同样的方法从 Riesz分解推出，即将每个满足 $c \le A \hat{+} B$ 的 $c \in \mathrm{M}_+$ 写成 $c = a + b$，其中 $0 \le a \le A$ 和 $0 \le b \le B$。交换代数中存在这种分解，但对于非交换算子则不存在。在 $M_2(\mathbb{C})$ 中（以 $e_1 = (1,0)$ $e_2 = (0,1)$ 为 $\mathbb{C}^2$ 的标准基，矩阵单位为 $e_{ii} = \mathrm{diag}(\delta_{1,i}, \delta_{2,i})$），投影 c 到 $\mathbb{C}(e_1 + e_2)$ 上满足 $c \le e_{11} + e_{22} = \mathrm{I}$，而任何满足 $0 \le a \le e_{11}$的 a 以及任何满足 $0 \le b \le e_{22}$ 的 b 都是对角的。定理 5.2 的证明用迹性质取代了缺失的分解。它将 $f_h(A \hat{+} B)$ 写成 $= K_A^* K_A + K_B^* K_B$，其中 $K_A K_A^* \le f_h(A)$ 且 $K_B K_B^* \le f_h(B)$，并利用 $\tau(K^*K) = \tau(KK^*)$。

对于有界算子而言，可加性已经是一个困难的步骤。Murray 和 von Neumann 通过维数函数 II_1 在 [9]型因子上定义了迹；唯一性相对容易，但可加性直到 [10]才得以确立。在 [10]中，他们还证明了与此类因子相伴的闭稠定算子可以定义加法和乘法。对于每个有限 von Neumann 代数，这些运算使 $\mathrm{Aff}(\mathcal{M})$ 成为一个 $*$-代数；另见 [8, 5]。定理A 证明了这个无界算子代数的可加性，以及任意可能非正规的迹的可加性。

逼近。在演化方程中，半群 e^{-tA} 很少能写成显式形式，因此人们会计算由较简单的族 $F(t/n)^n$ 构成的切尔诺夫乘积，其中 $F(0) = \mathrm{I}$，且$F'(0) = -A$ [2]。由此产生两个问题。第一，生成元是否必须与 M 相伴？定理 C(i) 表明，伴随关系是必然的：如果对于所有 h都有 $F(h) \in \mathrm{M}$，那么该半群属于 M，且其生成元与 M 相伴。第二，能否由 F计算出 $\tau_{\mathrm{Y}}(A)$？对于预解族以及半群本身，这是可以的；更一般地，双边预解式比较就足够了，并且所得极限与逼近方式无关（定理 4.5）。仅有切尔诺夫切向性并不足够。即使对于忠实正规迹态，一步迹缺陷 $h^{-1}\tau(\mathrm{I} - F(h))$ 也可能无法收敛到 $\tau_{\mathrm{Y}}(A)$（命题 4.4），因为切向性是在一个核上的逐点陈述，而迹是在整个空间上积分。对于正规迹，迭代极限 $\lim_{t \downarrow 0} \lim_{n \to \infty} t^{-1}\tau(\mathrm{I} - F(t/n)^n)$ 确实会恢复 $\tau_{\mathrm{Y}}(A)$（推论 7.5）。

1.2. **设定**。 令 H 为一个复可分希尔伯特空间，且$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 为冯·诺伊曼代数，其中$\mathcal{B}(H)$ 是 H 上有界线性算子的代数。

本研究旨在借助有界正则化，在一类适当的无界算子上定义有限线性延拓。由此产生三个问题：（i）无界算子是否必须仿射于某个代数；（ii）能否使用切尔诺夫逼近有效地计算迹；以及（iii）正则化正泛函是否

具有可加性并能延拓为线性迹。对于正自伴算子 A 仿射于 $\mathcal{M}$ 我们使用 Yosida正则化（定义 3.3）

$$\tau_{\mathrm{Y}}(A)=\lim_{h\downarrow 0}\tau\big(A(\mathrm{I}+hA)^{-1}\big)=\sup_{h>0}\tau\big(A(\mathrm{I}+hA)^{-1}\big)\in[0,\infty]. \tag{1.1}$$

1.3. **主要结果**。对于有限$\mathcal{M}$，$\mathrm{Aff}(\mathcal{M})$ 表示与 $*$相伴的算子的$\mathcal{M}$ （§2.3）代数，而 $A\,\hat{+}\,B$ 表示形式和；对于有限$\mathcal{M}$ ，它是$\mathrm{Aff}(\mathcal{M})$中的和（引理2.9）。

定理 A （正可加性和线性延拓）。设 τ 是有限冯·诺伊曼代数 M 上的迹。设 A、$B\geq 0$ 是与 M 相伴的自伴算子。则

$$\tau_{\mathrm{Y}}(A\,\hat{+}\,B)=\tau_{\mathrm{Y}}(A)+\tau_{\mathrm{Y}}(B)\qquad in\ [0,\infty].$$

此外，τ_{Y} 唯一地延拓为定义在 $\mathbb{C}$-线性张成空间 $\mathscr{D}_\tau$ 上的线性泛函 $\tilde{\tau}$，其中该空间为 $\{A\in\mathrm{Aff}(M)$ 中满足 $A\geq 0$、$\tau_{\mathrm{Y}}(A)<\infty\}$；$\tilde{\tau}$ 是正的，并且在 M 上与 τ 一致。

此外，若迹 τ 是正规的，则集合函数 $\nu_A(B)=\tau(E_A(B))$ 在 $[0,\infty)$ 上定义良好，是一个有限正博雷尔测度，

$$\tau_{\mathrm{Y}}(A)=\int_{[0,\infty)}\lambda\,d\nu_A(\lambda)=\sup_{R>0}\tau(AE_A([0,R]))=\sup_{R>0}\tau(\min(A,R\mathrm{I}))\in[0,\infty].$$

定理 B (二次结构)。设 M 为有限冯·诺伊曼代数，且 τ 是 M 上的一个迹。则$\mathscr{L}^2_Y=\{T\in\mathrm{Aff}(M)\colon \tau_{\mathrm{Y}}(T^*T)<\infty\}$ 是一个向量空间。形式 $\langle T,S\rangle_Y=\tilde{\tau}(T^*S)$ 是其上的半正定厄米型，并且当且仅当 τ 忠实时，该形式才是正定的。若 τ 忠实且正规，则 $\mathscr{L}^2_Y=L^2(M,\tau)$；特别地，$\mathscr{L}^2_Y$ 是完备的。

定理 C (Chernoff族)。(i) 设 L 生成 C_0-半群 T，其作用于 H，且对 $h\geq 0$，$F(h)\in M$。若对每个 $t\geq 0$，$F(t/n)^n\to T(t)$ 均强收敛，则 L 与 M 相伴。

(ii) 存在对应于零生成元的正压缩*Chernoff*族 F，它们定义在交换 *von Neumann* 代数中，并且在一个稠密子空间上满足 $F(h)x-x=o(h)$；还存在忠实正规迹态 τ，使得 $h^{-1}\tau(I-F(h))$ 不收敛到 $\tau_{\mathrm{Y}}(0)=0$。*(iii)* 设 $A\geq 0$ 自伴且与 M 相伴，τ 是一个迹，且$F(h)\in M$。假设 $A_{\alpha(h)}\leq h^{-1}(I-F(h))\leq A_{\beta(h)}$，其中 $A_s=A(I+sA)^{-1}$ 且 $\alpha(h)\,\beta(h)\to 0^+$。则 $h^{-1}\tau(I-F(h))\to\tau_{\mathrm{Y}}(A)$ 在 $[0,\infty]$ 中成立。这适用于$F(h)=(I+hA)^{-1}$，也适用于 $F(h)=e^{-hA}$。

(iv) 设 $A\geq 0$ 是与M相伴的自伴算子，且 τ 是正规迹。假设$F(h)\in M$，并且对于每个固定的 $t>0$，$F(t/n)^n\to e^{-tA}$ 在 $n\to\infty$ 时强收敛。

$$\tau_Y(A)=\lim_{t\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t}\tau(\mathrm{I}-F(t/n)^n)\in[0,\infty].$$

定理 D (任意迹的可积性)。设 M 有限，τ 是 M 上的迹，并令 $\mathscr{L}^1_Y=\{T\in\mathrm{Aff}(M)\colon \tau_{\mathrm{Y}}(|T|)<\infty\}$。对于所有 S、$T\in\mathrm{Aff}(M)$ 以及 $X\in M$,

$$\tau_{\mathrm{Y}}(|S+T|)^{2/3}\leq\tau_{\mathrm{Y}}(|S|)^{2/3}+\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)^{2/3},$$
$$\tau_{\mathrm{Y}}(|XT|)\leq\|X\|\,\tau_{\mathrm{Y}}(|T|),\qquad\tau_{\mathrm{Y}}(|TX|)\leq\|X\|\,\tau_{\mathrm{Y}}(|T|),$$

and

$$\tfrac{1}{2}\big(\tau_{\mathrm{Y}}(|S+T|)+\tau_{\mathrm{Y}}(|S-T|)\big)\leq\tau_{\mathrm{Y}}(|S|)+\tau_{\mathrm{Y}}(|T|). \tag{1.2}$$

因此，$\mathscr{L}^1_Y$与 $\tilde{\tau}$的定义域 $\mathscr{D}_\tau$ 重合，并且是一个 M-双模。对于$T\in\mathscr{L}^1_Y$和 $X\in M$,

$$|\tilde{\tau}(T)|\leq\sqrt{2}\,\tau_{\mathrm{Y}}(|T|),\qquad\tilde{\tau}(XT)=\tilde{\tau}(TX). \tag{1.3}$$

注记 1.1。 于是， $\mathscr{L}_Y^1$有如下刻画：对于任意 $T \in \mathrm{Aff}(\mathcal{M})$，

$$T \in \mathscr{L}_Y^1 \iff \tau_Y((\operatorname{Re} T)_\pm), \tau_Y((\operatorname{Im} T)_\pm) < \infty.$$

1.4. 证明思路。定理 A 的证明没有在 τ 中取极限，而是基于在固定 $h > 0$ 下对有界算子进行的两次比较。第一次是算子不等式 $f_{2h}(A) + f_{2h}(B) \le f_h(A \hat{+} B)$，它由型算子逆的变分公式推出。第二次是因子分解 $f_h(A \hat{+} B) = K_A^* K_A + K_B^* K_B$，其中有 $K_A K_A^* \le f_h(A)$ 和 $K_B K_B^* \le f_h(B)$；迹性将其转化为关于迹的反向不等式。

定理 D 建立在两个观察之上。首先， $\tau_Y(|T|)$ 是对所有满足 $\|cx\| \le \|Tx\|$ 且 $x \in$ 属于定义域 T 的$c \in \mathbf{M}_+$取 $\tau(c)$ 上确界（推论 5.6）；因此，关于 T^*T 的算子不等式可以推出关于 $\tau_Y(|T|)$ 的不等式。其次，对 h 积分定理 5.2(b)，得到平方根不等式 $\tau_Y((X+Y)^{1/2}) \le \tau_Y(X^{1/2}) + \tau_Y(Y^{1/2})$（命题 5.7）。结合初等不等式 $|S+T|^2 \le (1+t)|S|^2 + (1+t^{-1})|T|^2$，可推出对~~每个~~ $t > 0$ 都有 $\tau_Y(|S+T|) \le \sqrt{1+t}\,\tau_Y(|S|) + \sqrt{1+t^{-1}}\,\tau_Y(|T|)$。对$t$进行优化得到指数 $2/3$，特别地，有 $\tau_Y(|S+T|) \le \sqrt{2}\,(\tau_Y(|S|) + \tau_Y(|T|))$。

定理 A 综合了引理 2.9、引理 3.7、定理 5.2 和定理 6.1。定理 B 综合了定理 6.2 和 7.2。定理 C汇集了定理 4.1、命题 4.4、定理 4.5、命题 4.6 和推论 7.5。定理 D 综合了定理 6.5和6.7 以及推论 6.6。

1.5. **组织与记号。** 第2 节介绍仿射算子和形式和的一些预备知识与事实。第 3 节引入 τ_Y 并将其与其他截断进行比较。第 4 节讨论Chernoff族。第 5节证明正可加性。第 6 节构造线性延拓和二次结构，并包含定理 D的可积性结果。第 7 节专门讨论忠实正规迹。

在全文中， $f_h(\lambda) = \lambda/(1+h\lambda)$ 和 $g_R(\lambda) = \min(\lambda, R)$ 对于 $\lambda \ge 0$和 $h, R > 0$。我们将 $A_h = f_h(A)$ 记作自伴算子 A 的谱测度，并将 E_A 记作其谱测度。无界正算子之间的序关系均按二次型的意义理解。

2. 预备知识

2.1. 冯·诺伊曼代数与迹。 在全文中， H 是一个可分复希尔伯特空间，$\mathcal{B}(H)$ 是 H上的有界算子代数。若$\mathcal{B}(H)$ 中的序列 (X_n) 对于每个 $x \in H$ 都有 $X_n x \to Xx$，则该序列强收敛 到 $X \in \mathcal{B}(H)$。

定义 2.1 （冯·诺伊曼代数）。 H 上的一个冯·诺伊曼代数是$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$的一个子代数，使得

(i) $\mathbf{I} \in \mathcal{M}$；(ii) $X \in \mathcal{M}$ 蕴含 $X^* \in \mathcal{M}$；(iii) $\mathcal{M}$ 在序列强拓扑下闭：若 $X_n \in \mathcal{M}$ 且对每个 $x \in H$都有 $X_n x \to Xx$，则 $X \in \mathcal{M}$。

集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 的交换子是 $\mathcal{S}' = \{B \in \mathcal{B}(H) : BX = XB$ 对于所有 $X \in \mathcal{S}\}$。根据冯·诺伊曼双交换子定理，$\mathcal{B}(H)$ 的一个含单位 $*$-子代数 $\mathcal{M}$ 满足 (iii)，当且仅当 $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ [6, 第 5]章。我们用 $\mathcal{M}_+$ 表示$\mathcal{M}$ 的正元素集合，并用 $\mathcal{Z} = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ 表示其中心。

定义 2.2 （正泛函与迹）。 设$\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数。线性泛函 $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ 若满足 $\varphi(X) \ge 0$，对所有 $X \in \mathcal{M}_+$ 均成立，则称其为正的[1] 。定义在$\mathcal{M}$上的迹

[1]于是 $|\varphi(X)| \le \varphi(\mathbf{I})\|X\|$，因此 φ 关于 $\|\varphi\| = \varphi(\mathbf{I})$ 范数连续。

是一个正线性泛函 τ，满足

$$\tau(XY) = \tau(YX) \qquad (X, Y \in \mathcal{M}).$$

满足 $\tau(\mathrm{I}) = 1$ 的迹称为迹态。

定义 2.3（忠实泛函与正规泛函）。设 φ 是冯·诺伊曼代数$\mathcal{M}$上的正线性泛函。

(i) 若 $X \in \mathcal{M}_+$ 且 $\varphi(X) = 0$ 蕴含 $X = 0$，则 φ 是忠实的。等价地，$\varphi(X^*X) = 0$蕴含 $X = 0$。(ii) 若每当(X_n)是$\mathcal{M}_+$ 中以 X为强极限的有界递增序列时，都有 $\varphi(X) = \sup_n \varphi(X_n)$，则 φ 是正规的（或 σ-正规的）。

2.2. **仿射算子**。

定义 2.4（伴随关系）。稠密定义闭算子 L 是仿射于$\mathcal{M}$的，记作 $L\eta\mathcal{M}$，如果对每个酉算子 $U \in \mathcal{M}'$，都有 U定义域$(L) =$ 定义域(L)，且$LUx = ULx$对 $x \in$定义域(L)成立；或者等价地，对每个酉算子 $U \in \mathcal{M}'$有 $U^*LU = L$。

引理 2.5（一个预解式刻画伴随关系）。设 L 稠密定义且闭，且 $\rho(L) \neq \varnothing$。则以下各项等价：

(i) $L\eta\mathcal{M}$；(ii) $(\lambda_0\mathrm{I} - L)^{-1} \in \mathcal{M}$，其中某个 $\lambda_0 \in \rho(L)$；(iii) $(\lambda\mathrm{I} - L)^{-1} \in \mathcal{M}$，对每个 $\lambda \in \rho(L)$ 均成立。

证明。(i) $\Rightarrow$ (iii)。设 $L\eta\mathcal{M}$。那么，对于每个酉算子 $U \in \mathcal{M}'$ 以及 $\lambda \in \rho(L)$，有 $U^*(\lambda\mathrm{I} - L)^{-1}U = (U^*(\lambda\mathrm{I} - L)U)^{-1} = (\lambda\mathrm{I} - L)^{-1}$，即 U 与有界预解式交换。由于酉算子线性张成 $\mathcal{M}'$，因此根据双交换子定理，$(\lambda\mathrm{I} - L)^{-1} \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$。

(iii)$\Rightarrow$(ii)。显然。

(ii)$\Rightarrow$(i)。令 $R = (\lambda_0\mathrm{I} - L)^{-1} \in \mathcal{M}$。对于酉算子 $U \in \mathcal{M}'$，$UR = RU$。由于 $\mathrm{Ran}\, R = \mathrm{Dom}(L)$，$U$和 U^*都保持 $\mathrm{Dom}(L)$。对于 $x = Ry \in \mathrm{Dom}(L)$，

$$(\lambda_0\mathrm{I} - L)Ux = (\lambda_0\mathrm{I} - L)RUy = Uy = U(\lambda_0\mathrm{I} - L)x.$$

因此 $LUx = ULx$；从而 (ii)$\Rightarrow$(i)。 □

备注 2.6（预解式在哪里存在？）。预解式仅定义于 $\lambda \in \rho(L)$，而不是任意的复数值处。对于 $A \geq 0$ 自伴算子，$(\lambda\mathrm{I} + A)^{-1}$ 对每个实数$\lambda > 0$都存在，且范数至多为 $1/\lambda$。

引理 2.7 ([3, 命题 I.5.5 与定理 II.1.10])。如果 L 生成一个 C_0-半群，则存在 $C \geq 1$，$\omega \in \mathbb{R}$ 使得 $\|e^{tL}\| \leq Ce^{\omega t}$ 对于每个 $t \geq 0$；特别地，$\{\mathrm{Re}\,\lambda > \omega\} \subset \rho(L)$ 以及

$$(\lambda\mathrm{I} - L)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{tL}x\, dt \qquad (\mathrm{Re}\,\lambda > \omega),$$

对每个 $x \in H$，都有一个收敛的向量值 *Bochner* 积分。

命题 2.8（谱投影与 Borel 泛函演算）。对于自伴算子 A，以下条件等价：

$$A\eta\mathcal{M} \quad \Longleftrightarrow \quad E_A(B) \in \mathcal{M} \quad \textit{for every Borel } B \subseteq \mathbb{R},$$

其中，E_A 是 A在 $\mathbb{R}$ 上的投影值测度映射。

若这些条件成立，则对于每个有界 *Borel* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$，有 $f(A) \in \mathcal{M}$，并且对于每个 *Borel* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$，有$f(A)\eta\mathcal{M}$。若 f 为实值，则 $f(A)$ 是自伴的；若 $f \geq 0$，则 $f(A) \geq 0$。[2]

证明见附录A.1。

[2]例子包括 $A^{1/2}$、$A \geq 0$ 和 $|A|$。

2.3. 有限冯·诺伊曼代数的从属代数与形式和。回顾一下，若 M 中每个等距算子都是酉算子，则称 M 为有限代数。有限冯·诺伊曼代数的仿射算子构成一个 $*$代数，记作 Aff(M)；其加法和乘法分别理解为相应稠密定义运算的闭包 [8,9, 10]。按照 [8], 的记法，我们将这些闭包写作 $S \hat{+} T$ 和 $S \hat{\cdot} T$。若不会引起混淆，我们将简写为$S+T$和 ST。在一般的冯·诺伊曼代数中，任意多个正仿射算子的和需要采用更谨慎的二次型术语。对于自伴 A、 $B \geq 0$，若 Dom($A^{1/2}$)∩Dom($B^{1/2}$) 稠密，则形式和 $A \hat{+} B$ 是与定义在 Dom($A^{1/2}$) ∩ Dom($B^{1/2}$) 上的闭型 $t[y] = \|A^{1/2}y\|^2 + \|B^{1/2}y\|^2$ 相对应的正自伴算子；相应的半双线性形式记作 $t(y, x)$。

引理 2.9 （仿射和等于形式和）。 设 M 为有限的，且 A、 $B \geq 0$ 为与 M 相伴的自伴算子。则 $D :=$ 定义域($A^{1/2}$) ∩ 定义域($B^{1/2}$) 是稠密的，形式和 $A \hat{+} B$（其形式域为 D）与 M 相伴，并且它等于 $A + B$ 在 定义域 $A \cap$ 定义域 B上的闭包，即 $*$-代数 仿射(M)中的和。

证明见附录A.2。

引理 2.10 （仿射(M)中的正元素）。 设 M 为有限的，且 $Z \in$仿射(M)满足对所有 $x \in$定义域 Z都有 $\langle Zx, x\rangle \geq 0$。则 Z是自伴的，且 σ（Z） $\subseteq [0, \infty)$。我们将 仿射(M)$_+$ 记作所有此类 Z的集合；对于自伴的 W、 $Z \in$ 仿射(M)，若$Z - W \in$ 仿射(M)$_+$，则记为 $W \leq Z$。[3] 此外：

(i) $T^*T \in$ Aff(M)$_+$对每个 $T \in$ Aff(M)成立，并且 T^*T是 Aff(M) 中的乘积 $T^* \hat{\cdot} T$；(ii) Aff(M)$_+$ 对加法和非负数乘法封闭，并且 $\leq$ 具有传递性；(iii) 若 W、 $Z \in$ Aff(M)$_+$ 且 $W \leq Z$，则 $W \leq Z$ 以二次型的意义成立；若$W \in M_+$，则反之亦然。

证明见附录A.4。

3. The Yosida extension

对 $A \geq 0$、 $A \eta \mathcal{M}$，定义

$$A_h := A(\mathrm{I} + hA)^{-1} = f_h(A), \qquad f_h(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + h\lambda}, \qquad h > 0.$$

引理 3.1 (有界单调 Yosida 逼近元)。 设 $A \geq 0$ 自伴，且$h > 0$、 $A_h \in M$ 以及 $0 \leq A_h \leq h^{-1}$ I。对 $0 < k < h$、 $A_h \leq A_k$。此外，对于每个 $x \in$ 定义域(A)， $A_h x \to Ax$ 属于 H，并且对于每个 $x \in$ 定义域($A^{1/2}$)，$\langle A_h x, x\rangle \uparrow \|A^{1/2}x\|^2$ 。

证明。标量函数 $f_h(\lambda) = \lambda/(1 + h\lambda)$ 在 $[0, \infty)$ 上光滑，并满足$0 \leq f_h(\lambda) \leq 1/h$ 以及 $f_h(\lambda) \leq f_k(\lambda)$，若 $k < h$。于是，命题 2.8 给出 $A_h \in$ M，而谱函数演算给出有界性和序关系结论。若 $x \in$ 定义域(A)，其中 $\mu_x(B) = \|E_A(B)x\|^2$，则

$$\|(A_h - A)x\|^2 = \int_{[0,\infty)} \left(\frac{h\lambda^2}{1 + h\lambda}\right)^2 d\mu_x(\lambda) \to 0,$$

由控制收敛定理可知：被积函数逐点趋于零，且由 λ^2 控制；它可积当且仅当 $x \in$ 定义域(A)。若 $x \in$ 定义域($A^{1/2}$)，则由标量单调收敛定理可得

$$\langle A_h x, x\rangle = \int f_h(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) \uparrow \int \lambda\, d\mu_x(\lambda) = \|A^{1/2}x\|^2.$$

[3]请注意，对于任意冯·诺伊曼代数（不一定是有限的），对于任意 $A \in \mathcal{M}_+$ 我们有 $X = A^{1/2} \in \mathcal{M}_+$ （根据命题 2.8）以及 $A = X^*X$。

□

注 3.2. 引入 $A \geq 0$ 的扩展正二次型:

$$q_A[x] = \begin{cases} \|A^{1/2}x\|^2, & x \in \mathrm{Dom}(A^{1/2}), \\ +\infty, & x \notin \mathrm{Dom}(A^{1/2}), \end{cases}$$

并设 $q_h[x] = q_{A_h}[x]$。则当 $q_h[x] \leq q_k[x]$ 时 $0 < k < h$，且 上确界$_{h>0}\, q_h[x] = q_A[x]$ 对每个 $x \in H$ 成立。因此，引理 3.1 意味着扩展二次型 在 $h \downarrow 0$时单调（递增）收敛，我们将其简写为 $A_h \uparrow A$。

定义 3.3。 对于 $\mathcal{M}$ 上的迹 τ 以及$\mathcal{M}$中的 $A \geq 0$ 自伴仿射算子，我们将迹延拓为：[4]

$$\tau_{\mathrm{Y}}(A) := \sup_{h>0} \tau(A_h) = \lim_{h\downarrow 0} \tau(A_h) \in [0, +\infty]. \tag{3.1}$$

命题 3.4 （基本性质）。 对于每个迹 τ，映射 τ_{Y} 在 $[0, \infty]$中取值且定义良好，在 M+上与 τ 一致，具有正齐次性，关于正二次型序单调，并且在 M 中的酉算子作共轭变换下保持不变。

证明。存在性： 由引理 3.1， $0 \leq A_h \leq A_k$ 若 $h > k > 0$，则正定性给出$0 \leq \tau$（A_h） $\leq \tau$（A_k）。因此 τ_{Y}（A） $=$上确界$_h\, \tau$（A_h） 作为扩展正数存在。

约定： 如果 $A \in \mathcal{M}$+，那么 $A - A_h = hA^2(\mathrm{I} + hA)^{-1}$ 以及 $\|A - A_h\| \leq h\|A\|^2$，因为 $\|(\mathrm{I} + hA)^{-1}\| \leq 1$。 τ的范数连续性给出 $\tau_{\mathrm{Y}}(A) = \tau(A)$。

齐次性：对于 $c > 0$， $(cA)_h = cA_{ch}$，因此 $\tau_{\mathrm{Y}}(cA) = c$上确界$_s{}_{>0}\, \tau(A_s) = c\tau_{\mathrm{Y}}(A)$；情形 $c = 0$ 显然成立（采用标准约定 $0 \cdot \infty = 0$）。

单调性： 如果 $0 \leq A \leq B$ 按闭二次型序排列，则由逆序关系得到 $(\mathrm{I} + hB)^{-1} \leq (\mathrm{I} + hA)^{-1}$。从 I 中减去并除以 h，得到 $A_h \leq B_h$，因此 $\tau_{\mathrm{Y}}(A) \leq \tau_{\mathrm{Y}}(B)$。

酉不变性： 如果 $U \in \mathcal{M}$是酉算子，则 Borel 泛函演算给出 $(UAU^*)_h = UA_hU^*$。有界元素的循环性给出：对于每个 h， $\tau((UAU^*)_h) = \tau(A_h)$，取上确界即可得到结论。□

引理 3.5 （Yosida 正则化与截断正则化的比较）。 对于 R， $h > 0$ 以及$\lambda \geq 0$，

$$f_{1/R}(\lambda) \leq g_R(\lambda), \qquad f_h(\lambda) \leq g_{1/h}(\lambda), \qquad g_R(\lambda) \leq (1 + hR) f_h(\lambda).$$

因此，相应的不等式对于有界算子 f_h（A） 和g_R（A）也成立。

证明。 对于 $\lambda \leq R$, $g_R(\lambda) = \lambda$ 以及 $f_{1/R}(\lambda) = \lambda/(1 + \lambda/R) \leq \lambda$。对于 $\lambda \geq R$, $g_R(\lambda) = R$以及 $f_{1/R}(\lambda) = R\lambda/(R + \lambda) \leq R$。将 R 替换为 $1/h$ 即可证明 $f_h \leq g_{1/h}$。对于最后一个不等式，如果 $0 < \lambda \leq R$，则 $g_R(\lambda)/f_h(\lambda) = 1 + h\lambda \leq 1 + hR$ （ $\lambda = 0$ 的情形是显然的）。如果 $\lambda \geq R$,

$$(1 + hR) f_h(\lambda) - R = \frac{(1 + hR)\lambda - R(1 + h\lambda)}{1 + h\lambda} = \frac{\lambda - R}{1 + h\lambda} \geq 0.$$

所有比较均按逐点进行；有界 Borel 函数演算保持实函数的序关系，从而得到相应的算子版本。□

[4]这是一个规定的 正则化扩张。即使 τ 不是正规算子，它也有意义。

命题 3.6 (截断谱表示)。 对于每个迹 τ 以及每个与M相伴的自伴算子 $A \geq 0$，[5]

$$\tau_{\mathrm{Y}}(A) = \sup_{R>0} \tau(\min(A, R\mathrm{I})). \tag{3.2}$$

证明。 由引理 3.5， $f_h \leq g_{1/h}$；因此 上确界$_h\, \tau(A_h) \leq$上确界$_R\, \tau(g_R(A))$。第三个不等式给出 $\tau(g_R(A)) \leq (1+hR)\tau(A_h)$；令 $h \downarrow 0$即可证明对每个R都成立的反向不等式。 □

引理 3.7 (正规正迹的谱积分)。 设 τ 是M上的正正规迹泛函，且 $A \geq 0$ 是自伴并与M相伴的算子。集合函数 $\nu_A(B) = \tau(E_A(B))$ 是 $[0,\infty)$上的有限正博雷尔测度，并且在 $[0,\infty]$中，

$$\tau_{\mathrm{Y}}(A) = \int_{[0,\infty)} \lambda \, d\nu_A(\lambda) = \sup_{R>0} \tau(AE_A([0,R])) = \sup_{R>0} \tau(\min(A, R\mathrm{I})).$$

证明。 根据命题 *2.8*，谱投影属于M 。如果 B_j 是两两不相交的博雷尔集，则 $P_N = \sum_{j=1}^{N} E_A(B_j) \uparrow E_A(\cup_{j\geq 1} B_j)$ 强收敛。正规性给出

$$\nu_A\Big(\bigcup_{j\geq 1} B_j\Big) = \lim_N \tau(P_N) = \sum_{j\geq 1} \nu_A(B_j),$$

因此 ν_A是可数可加的； $\nu_A([0,\infty)) = \tau(\mathrm{I}) < \infty$。对于有界非负简单博雷尔函数 $f = \sum_j a_j \mathbf{1}_{B_j}$，函数演算和线性给出 $\tau(f(A)) = \sum_j a_j \tau(E_A(B_j)) = \int f \, d\nu_A$。对于有界非负博雷尔 f，用递增的简单函数 $f_n \uparrow f$逼近它。于是 $f_n(A) \uparrow f(A)$ 强收敛，因此，对正的有界递增序列的正规性，加上标量单调收敛，得到

$$\tau(f(A)) = \lim \tau(f_n(A)) = \lim_n \int f_n \, d\nu_A = \int f \, d\nu_A.$$

取 $f = f_h$可得 $\tau(A_h) = \int f_h \, d\nu_A$。由于 $h \overset{n}{\downarrow} 0$， $f_h(\lambda) \uparrow \lambda$，由此 $\tau_{\mathrm{Y}}(A) = \int \lambda \, d\nu_A$，根据标量单调收敛。最后，有界函数 $\lambda \mathbf{1}_{[0,R]}(\lambda)$ 和 $\min(\lambda, R)$ 都逐点递增，并在 $R \to \infty$ 时趋于 λ。然后，应用相同的有界博雷尔迹恒等式和单调收敛性，即可得到两个截断公式。□

注记 3.8。 正规性用于保证 ν_A 具有可数可加性，并使其能够通过递增的谱逼近。对于非正规迹，截断公式（另见命题 3.6）仍然成立，但谱截断未必能给出相同的扩张。

4. Chernoff族与迹缺陷

4.1. $\mathcal{M}$中的切尔诺夫乘积强制伴随关系。

定理 4.1 (自动仿射性)。 设 L 生成一个 C_0-半群 $T(t) = e^{tL}$， 且$\|T(t)\| \leq Ce^{\omega t}$对 $t \geq 0$成立，并假设 $F(h) \in M$对每个 $t \geq 0$， 当 $n \to \infty$时均有切尔诺夫乘积 $F(t/n)^n \to T(t)$强收敛。那么 $L\eta M$。特别地，该断言适用于$L = -A$， 其中 $A \geq 0$ 自伴。

证明。 对每个 t和 n，乘积 $F(t/n)^n$属于 $\mathcal{M}$。因此 $T(t) \in$对每个$t \geq 0$ 都属于 M（见定义 2.1(iii)）。取 $\lambda_0 > \omega$。由 Hille–Yosida预解式，得$R = (\lambda_0 \mathrm{I} - L)^{-1}$ 且对每个 $x \in H$，

$$Rx = \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t} T(t)x \, dt, \qquad \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t} \|T(t)x\| \, dt \leq \frac{C}{\lambda_0 - \omega} \|x\|.$$

[5]不要求忠实性和正规性。

对于酉算子 $U \in \mathcal{M}'$, $UT(t) = T(t)U$ 对每个 t 均成立。映射 $t \mapsto e^{-\lambda_0 t}T(t)x$ 由前述估计可知是强连续且范数可积的。对于有界算子 U 和 $x \in H$，令 $v(t) = e^{-\lambda_0 t}T(t)x$，可得

$$\Big\langle U\int_0^\infty v(t)dt,\ y\Big\rangle = \Big\langle \int_0^\infty v(t)dt,\ U^*y\Big\rangle = \int_0^\infty \langle v(t), U^*y\rangle\, dt$$
$$= \int_0^\infty \langle Uv(t), y\rangle\, dt = \Big\langle \int_0^\infty Uv(t)dt,\ y\Big\rangle,$$

对于每个 $y \in H$，即

$$URx = \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t}UT(t)x\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t}T(t)Ux\, dt = RUx.$$

因此 $UR = RU$，且 $R \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$。引理2.5现在推出 $L\eta\mathcal{M}$。 □

推论 4.2（M中的半群生成元）。设 L 生成一个 C_0-半群 T_L，满足对所有 $t \geq 0$都有 $T_L(t) \in M$。则 $L\eta M$。每个 $B \in M$ 都生成这样的半群。

证明。应用引理2.7和定理4.1，取 $F(h) := T_L(h)$，其中 $F(t/n)^n = T_L(t)$ 对每个 n均成立。对于 $B \in \mathcal{M}$，级数 $e^{tB} = \sum_{k\geq 0} t^k B^k/k!$ 在$\mathcal{M}$中按范数收敛，映射 $t \mapsto e^{tB}$ 是范数连续的，并且 $\|e^{tB}\| \leq e^{t\|B\|}$。 □

4.2. **切尔诺夫切向性无法控制迹缺陷**。预解族$F_A(h) = (\mathrm{I} + hA)^{-1}$ 与压缩半群 e^{-tA} 切尔诺夫等价：

$$F_A(t/n)^n \xrightarrow[n\to\infty]{strongly} e^{-tA}.$$

对于自伴 $A \geq 0$，这由谱定理和控制收敛推出，因为 $\lim_n (1 + t\lambda/n)^{-n} = e^{-t\lambda}$ 在 $[0,\infty)$ 上有界收敛），这就是欧拉公式，是切尔诺夫乘积公式 [2], [3, Ch. III] 的一个特例。此外，$(\mathrm{I} - F_A(h))/h = A_h$，因此根据定义，其无穷小缺陷恢复了 τ_Y。然而，任意的切尔诺夫切向性对于迹 τ_Y 的恢复来说过于弱了。

定义 4.3。设 $(L, D(L))$ 是一个生成 C_0-半群 T（定义在 H 上）的闭算子。若干映射 $F: [0,\infty) \to \mathcal{B}(H)$ 强连续，且 $F(0) = \mathrm{I}$，$F'(0) = L$ 在 L 的一个核 $\mathcal{D}$ 上，其闭包为 $(L, D(L))$，并且 $\lim_n F(t/n)^n = T(t)$ 在 $t \geq 0$ 中强收敛且局部一致，则称其为 ***Chernoff*** 函数 T，定义于 $\mathcal{M}$。若对所有 $h \geq 0$ 都有 $0 \leq F(h) \leq \mathrm{I}$，则称其为 正压缩。

命题 4.4（具有正规迹的反例）。设 $M = \ell^\infty$ 在 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上带有忠实正规迹态 $\tau(x) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}x_k$。存在一个对应于 M 中零生成元的正压缩切尔诺夫函数 F，对于所有充分小的 h，只要 x 是有限支撑的，就有 $F(h)x = x$，并且对每个$m \geq 1$ 都有 $2^m\tau(\mathrm{I} - F(2^{-m})) \geq \frac{1}{2}$。

证明。取 $\psi \in C_c^\infty((1,4))$、$0 \leq \psi \leq 1$、$\psi(2) = 1$，并令

$$F(h) = \mathrm{diag}(1 - \psi(2^k h))_{k\geq 1}, \qquad F(0) = \mathrm{I}.$$

令 x 为有限支撑，不妨设 $x_k = 0$ 对于 $k > K$。由于 $\mathrm{supp}\ \psi \subset (1,4)$，我们有$\psi(2^k h) = 0$，只要 $2^k h \leq 1$。因此 $F(h)x = x$ 对于 $0 \leq h \leq 2^{-K}$。特别地，F在这个稠密子空间上与零生成元相切，并且一旦$n \geq 2^K t$，就有 $F(t/n)^n x = x$。为了推广到任意的 $x \in \ell^2$，我们利用一致有界性 $\|F(t/n)^n\| \leq 1$；它成立是因为 $0 \leq F(h) \leq \mathrm{I}$。给定 $x \in \ell^2$ 和 $\varepsilon > 0$，取一个有限支撑的 y，使得 $y_k = 0$ 对于 $k > K$，并满足 $\|x - y\| < \varepsilon$。那么，对于 $n \geq 2^K t$，

$$\|F(t/n)^n x - x\| \leq \|F(t/n)^n(x - y)\| + \|F(t/n)^n y - y\| + \|y - x\| < 2\varepsilon.$$

因此 $F(t/n)^n \to$ 强收敛于 I。不能略去稠密性步骤。。对于 $h_m = 2^{-m}$，$k = m+1$ 项给出

$$\frac{1}{h_m}\tau(\mathrm{I} - F(h_m)) \geq \frac{2^{-(m+1)}}{2^{-m}}\psi(2) = \frac{1}{2}.$$

因此，迹缺陷不会收敛到 $\tau_{\mathrm{Y}}(0) = 0$。 □

4.3. **双边预解式比较**。

定理 4.5（迹缺陷夹逼）。设 $A \geq 0$ 为仿射于，设 τ 为迹，并设 $F_A(h) \in M$ 满足 $D_h = (\mathrm{I} - F_A(h))/h \in M_+$。若 $\alpha(h)$ $\beta(h)$ > 0 趋于零，并且

$$A_{\alpha(h)} \leq D_h \leq A_{\beta(h)},$$

则 $\lim_{h\downarrow 0} \tau(D_h) = \tau_{\mathrm{Y}}(A)$ 在 $[0, +\infty]$ 中。

证明。将 τ 的正定性应用于这两个不等式，并取扩展单调极限。□

命题 4.6（指数正则化）。对于任意正仿射算子 A 和任意正迹 τ，

$$\tau_{\mathrm{Y}}(A) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\tau(\mathrm{I} - e^{-hA}).$$

证明。对于 $x \geq 0$,

$$\frac{x}{1+x} \leq 1 - e^{-x} \leq \frac{x}{1+x/2}.$$

由函数演算可得 $A_h \leq (\mathrm{I} - e^{-hA})/h \leq A_{h/2}$。然后应用定理 4.5。 □

问题 4.7（近似无关性）。找出有用的正收缩 *Chernoff*族 $F_A(h) \in M$，使得

$$\lim_{h\downarrow 0} \tau\Big(\frac{\mathrm{I} - F_A(h)}{h}\Big) = \tau_{\mathrm{Y}}(A)$$

对于任意正仿射算子 A 和任意正迹 τ。

5. Positive additivity

5.1. **强对易正关联算子**。

定理 5.1（交换可加性）。如果 A、$B \geq 0$ 是强交换的关联算子，则

$$\tau_{\mathrm{Y}}(A \mathbin{\hat{+}} B) = \tau_{\mathrm{Y}}(A) + \tau_{\mathrm{Y}}(B)$$

等式成立于 $[0, \infty]$。[6]

证明。对于 a，$b \geq 0$，有

$$g_{R/2}(a) + g_{R/2}(b) \leq g_R(a+b) \leq g_R(a) + g_R(b).$$

然后，使用联合谱演算，应用 τ，并令 $R \to \infty$ 利用命题 3.6。 □

[6]无需假设正规性和忠实性。回忆 $A \mathbin{\hat{+}} B$ 表示和的闭包，其定义域为 定义域 $A \cap$ 定义域 B，它是自伴算子 $\int (a+b)\ dE(a,\ b)$，由 $E(A,\ B)$ 的联合谱测度给出；根据 $\mathcal{M}$ 上的引理 A.1，它仿射于

5.2. **通过型–预解式比较实现正可加性。**

定理 5.2 (不具正规性的正可加性)。 设 M 是任意冯·诺伊曼代数，且 τ是 M 上任意一个满足 $\tau(XY)=\tau(YX)$的正线性泛函。设 $A,B\ge 0$是与 M 相伴的自伴算子，且 D $=$定义域$(A^{1/2})\cap$定义域$(B^{1/2})$ 稠密，并设$S:=A\,\hat{+}\,B$。对每个 $h>0$:

(a) $f_{2h}(A)+f_{2h}(B)\le f_h(S)$ 属于 $\mathcal{M}$; (b) τ $(f_h(S))\le\tau(f_h(A))+\tau(f_h(B))$; (c) $\tau_{\mathrm{Y}}(A\,\hat{+}\,B)$ $=\tau_{\mathrm{Y}}(A)+\tau_{\mathrm{Y}}(B)$ 属于 $[0,\infty]$。

证明。 S 仿射于 $\mathcal{M}$ 由引理 2.9可知，该引理的证明不使用有限性。

(a) 令 $T\ge \mathrm{I}$ 为自伴算子。由于 $\sigma(T)\subseteq[1,\infty)$，算子 $T^{-1/2}$ 有界且 $\mathrm{Dom}(T^{-1/2})$ $=H$。对于 $y\in\mathrm{Dom}(T^{1/2})$，有 $\langle x,\ y\rangle=\langle T^{-1/2}x,\ T^{1/2}y\rangle$，因此

$$2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle-\|T^{1/2}y\|^2=\|T^{-1/2}x\|^2-\|T^{1/2}y-T^{-1/2}x\|^2.$$

取 $y=T^{-1}x$，得到变分公式

$$\langle T^{-1}x,x\rangle=\sup_{y\in\mathrm{Dom}(T^{1/2})}\bigl(2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle-\|T^{1/2}y\|^2\bigr). \tag{5.1}$$

令 $P=\mathrm{I}+2hA$、 $Q=\mathrm{I}+2hB$ 和 $T=\mathrm{I}+hS$，应用该公式。对于 $y\in\mathcal{D}$ $=$定义域$(T^{1/2})$,

$$\|T^{1/2}y\|^2=\|y\|^2+h\,t[y]=\tfrac12\|P^{1/2}y\|^2+\tfrac12\|Q^{1/2}y\|^2.$$

因此

$$\begin{aligned}\langle T^{-1}x,x\rangle&=\sup_{y\in\mathcal{D}}\Bigl[\tfrac12\bigl(2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle-\|P^{1/2}y\|^2\bigr)+\tfrac12\bigl(2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle-\|Q^{1/2}y\|^2\bigr)\Bigr]\\&\le\tfrac12\langle P^{-1}x,x\rangle+\tfrac12\langle Q^{-1}x,x\rangle.\end{aligned}$$

由于 $f_h(S)=h^{-1}(\mathrm{I}-T^{-1})$ 且 $f_{2h}(A)=(2h)^{-1}(\mathrm{I}-P^{-1})$，(a) 得证。

(b) 设 $G=(\mathrm{I}+hS)^{-1/2}\in\mathcal{M}$。则 $\mathrm{Ran}\,G=$定义域$(S^{1/2})=\mathcal{D}\subseteq$定义域$(A^{1/2})$，因此$K_A:=A^{1/2}G$ 处处有定义。它是有界的:

$$\|K_Ax\|^2\le\langle S(\mathrm{I}+hS)^{-1}x,x\rangle\le h^{-1}\|x\|^2.$$

此外 $K_A\in\mathcal{M}$ 由引理 A.1(ii)。对于 $K_B:=B^{1/2}G$ 同样成立。对于每个 $x\in\mathcal{D}$,

$$\|K_Ax\|^2+\|K_Bx\|^2=\|S^{1/2}Gx\|^2=\langle f_h(S)x,x\rangle,$$

he性 $K_A^*K_A+K_B^*K_B=f_h(S)$。[7]由于 $A\le S$，因此 $(\mathrm{I}+hS)^{-1}\le(\mathrm{I}+hA)^{-1}$。所以

$$\|K_A^*x\|^2=\langle(\mathrm{I}+hS)^{-1}A^{1/2}x,A^{1/2}x\rangle\le\langle(\mathrm{I}+hA)^{-1}A^{1/2}x,A^{1/2}x\rangle=\langle f_h(A)x,x\rangle.$$

由稠密性和连续性， $K_AK_A^*\le f_h(A)$，类似地 $K_BK_B^*\le f_h(B)$。迹性和正定性给出

$$\tau(f_h(S))=\tau(K_AK_A^*)+\tau(K_BK_B^*)\le\tau(f_h(A))+\tau(f_h(B)).$$

(c) </style}由 (a)、(b) 以及正定性,

$$\tau(f_{2h}(A))+\tau(f_{2h}(B))\le\tau(f_h(S))\le\tau(f_h(A))+\tau(f_h(B)).$$

由于 $h\downarrow 0$ 每个 $\tau(f_h(\cdot))$ 递增至 $\tau_{\mathrm{Y}}(\cdot)$ 根据定义 3.3 和引理 3.1，所以两个界都趋于 τ_{Y} $(A)+\tau_{\mathrm{Y}}(B)$。 □

注记 5.3。 定理 5.2 既不要求 τ的正规性或忠实性，且不在 τ内取极限。

[7]对于 $x\in$ 定义域$(A^{1/2})$，容易验证 $K_A^*x=GA^{1/2}x$。

注记 5.4（超可加性的另一种证明）。 对于每个迹 τ 以及每个与$\mathcal{M}$仿射于的正自伴 A,

$$\tau_{\mathrm{Y}}(A)=\sup\{\tau(a):a\in\mathcal{M}_+,\ a\le A\},\tag{5.2}$$

其中， $a\le A$ 是在二次型意义下理解的。事实上，若 $a\le A$，则 $(\mathrm{I}+ha)^{-1}\ge(\mathrm{I}+hA)^{-1}$，从而 $f_h(a)\le f_h(A)$。由于 $\|a-f_h(a)\|\le h\|a\|^2$，我们得到$\tau(a)=\lim_{h\downarrow0}\tau(f_h(a))$。因此，$\sup\{\tau(a):a\in\mathrm{M}_+,\ a\le A\}=\sup_{h>0}\tau(A_h)=\tau_{\mathrm{Y}}(A)$。若 $a\le A$ 且 $b\le B$，则 $a+b\le A\hat{+}B$，所以 (5.2) 给出 $\tau_{\mathrm{Y}}(A)+\tau_{\mathrm{Y}}(B)\le\tau_{\mathrm{Y}}(A\hat{+}B)$。

注记 5.5（与 Bourin–Hiai 的关系）。 设 $\mathcal{M}$ 为有限的。由于 H 是可分的，$\mathcal{M}$ 带有一个忠实正规迹态 τ_0 [7, Ch。 8], 且每个仿射于$\mathcal{M}$ 的正自伴算子都是 τ_0-可测的 [4]。对于这样的 A， B 以及任意 $\varepsilon>0$，Bourin 和 Hiai 的定理 3.2 [1], 应用于凹函数 f_h, 给出酉算子 U， $V\in\mathcal{M}$，使得

$$f_h(A\,\hat{+}\,B)\le Uf_h(A)U^*+Vf_h(B)V^*+\varepsilon\mathrm{I}.$$

应用任意迹 τ，无论是否正规，并令 $\varepsilon\to0$ 即可得到定理 5.2（b），其中$\mathcal{M}$为有限冯·诺伊曼代数。我们的证明是直接的，并且适用于每个冯·诺伊曼代数。

推论 5.6 （关于 $\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$ 的变分公式）。 令 τ 为M上的迹，并令 T为一个与M相伴的闭稠定算子。则

$$\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)=\sup\{\tau(c):\ c\in\mathcal{M}_+,\ \|cx\|\le\|Tx\|\ \textit{for all}\ x\in\operatorname{Dom}T\}.$$

注意到 $|T|=(T^*T)^{1/2}$是正的、自伴的并且与$\mathcal{M}$相伴（命题 2.8），且定义域 $|T|=$定义域 T以及 $\||T|x\|=\|Tx\|$。因此，关于 c的条件$c^2\le T^*T$即为

$$\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)=\sup\{\tau(c):\ c\in\mathcal{M}_+,\ c^2\le T^*T\}.$$

证明。如果 $c\in\mathrm{M}_+$且 $c^2\le|T|^2$，那么根据引理 B.2， $c\le|T|$，因此由（5.2） $\tau(c)\le\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$。反之， $c=f_h(|T|)$ 满足 $c^2\le|T|^2$，因为 $0\le f_h(\lambda)\le\lambda$，并且$\tau(f_h(|T|))\uparrow\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$，因为 $h\downarrow0$。□

5.3. **一个平方根不等式**。对于 $\lambda\ge0$,

$$\pi\lambda^{1/2}=\int_0^\infty s^{-1/2}\,\frac{\lambda}{\lambda+s}\,ds=\int_0^\infty s^{-3/2}f_{1/s}(\lambda)\,ds,$$

因此平方根是函数 f_h的叠加。对5.2（b）关于 h进行积分，便得到一个 Rotfel'd 型不等式。

命题 5.7 （平方根次可加性）。 设 τ 是冯·诺伊曼代数 M 上的一个迹，且 X、$Y\ge0$ 是与 M 相伴的自伴算子，并满足定义域$(X^{1/2})\cap$定义域$(Y^{1/2})$ 是稠密的。则

$$\tau_{\mathrm{Y}}\big((X\,\hat{+}\,Y)^{1/2}\big)\le\tau_{\mathrm{Y}}(X^{1/2})+\tau_{\mathrm{Y}}(Y^{1/2}).$$

证明思路。对于 $0<\varepsilon<M$，令 $g_{\varepsilon,M}(\lambda)=\pi^{-1}\int_\varepsilon^M s^{-3/2}f_{1/s}(\lambda)\,ds$。对于每个与 M 相伴的正自伴算子 Z，算子 $g_{\varepsilon,M}(Z)$ 是算子 $s^{-3/2}f_{1/s}(Z)\in$M 的范数收敛黎曼积分，因此可以在积分号下应用 τ。由定理 5.2(b) 和 $h=1/s$，可得 $\tau(g_{\varepsilon,M}(X\hat{+}Y))\le\tau(g_{\varepsilon,M}(X))+\tau(g_{\varepsilon,M}(Y))$。由于 $g_{\varepsilon,M}(\lambda)\le\lambda^{1/2}$，根据 (5.2)，右侧至多为 $\tau_{\mathrm{Y}}(X^{1/2})+\tau_{\mathrm{Y}}(Y^{1/2})$。仅用标量估计即可去除截断，即 $\min(\lambda^{1/2},R)\le g_{\varepsilon,M}(\lambda)+\pi^{-1}\big(2\varepsilon^{1/2}+2R^2M^{-1/2}\big)$，随后应用命题 3.6。详见附录 B。□

注记 5.8。同样的论证基于 $\lambda^p = \frac{p\pi}{\text{正弦}_\pi} \int_0^\infty s^{p-1} \frac{\lambda}{\lambda+s}\, ds$，可得 $\tau_{\mathrm{Y}}((X \hat{+} Y)^p) \le \tau_{\mathrm{Y}}(X^p) + \tau_{\mathrm{Y}}(Y^p)$ 对 $0 < p < 1$成立。对于 $p = 1$ 这是定理 5.2(c)。注意，这些不等式对迹均成立，包括非正规迹：与定理 5.2中一样，不在 τ内取极限。

6. 线性延拓与二次结构

在本节中，$\mathcal{M}$ 是有限的，且 τ 是$\mathcal{M}$上的迹。定义锥

$$\mathscr{P}_\tau = \{A \in \mathrm{Aff}(\mathcal{M}) : A \ge 0,\ \tau_{\mathrm{Y}}(A) < \infty\}.$$

由引理 2.9 和定理 5.2，$\mathscr{P}_\tau$ 在正和及非负标量乘法下封闭。令

$$\mathscr{E}_\tau := \mathscr{P}_\tau - \mathscr{P}_\tau, \qquad \mathscr{D}_\tau := \mathscr{E}_\tau + i\mathscr{E}_\tau.$$

定理 6.1（有限线性延拓）。公式

$$\tilde{\tau}(A - B) = \tau_{\mathrm{Y}}(A) - \tau_{\mathrm{Y}}(B), \qquad A, B \in \mathscr{P}_\tau,$$

在 $\mathscr{E}_\tau$ 上定义良好且为实线性，并通过复线性唯一延拓至 $\mathscr{D}_\tau$。它在正锥上为正，且在 M 上与 τ 一致。

证明。若 $A - B = C - D$，则 $A + D = B + C$ 属于 $\mathrm{Aff}(\mathcal{M})$。正可加性（引理2.9 和定理5.2）推出

$$\tau_{\mathrm{Y}}(A) + \tau_{\mathrm{Y}}(D) = \tau_{\mathrm{Y}}(B) + \tau_{\mathrm{Y}}(C),$$

其中所有项均为有限值，因此该公式与表示方式无关。它具有可加性和齐次性。若 $T = A - B \ge 0$且 $A,\ B \in \mathscr{P}_\tau$，则 $T + B = A$属于从属代数；正可加性表明 $\tau_{\mathrm{Y}}(T) = \tau_{\mathrm{Y}}(A) - \tau_{\mathrm{Y}}(B) \ge 0$，从而证明它在此锥上具有正定性。自伴实部与虚部的分解具有唯一性，因此可进行复化。每个有界自伴 X 都是 $X_+ - X_-$，且两项均属于 $\mathscr{P}_\tau$；根据命题 3.4，该构造与 τ □

定理 6.2（任意迹的二次结构）。令 $\mathscr{L}^2_Y = \{T \in \mathrm{Aff}(M)$ 中满足：$\tau_{\mathrm{Y}}(T^*T) < \infty\}$。则 $\mathscr{L}^2_Y$是一个复向量空间。对于 S、$T \in \mathscr{L}^2_Y$，有 $T^*S \in \mathscr{D}_\tau$，并且

$$\langle T, S\rangle_Y := \tilde{\tau}(T^*S)$$

是一个半正定厄米半双线性型，满足 $\langle T, T\rangle_Y = \tau_{\mathrm{Y}}(T^*T)$。当且仅当 τ 忠实时，它是正定的。

证明。所有运算均在 $*$-代数 $\mathrm{Aff}(\mathcal{M})$中进行。对于闭的 X，算子 X^*X是正的自伴算子，因此它与$\mathrm{Aff}(\mathcal{M})$ 中的乘积一致（引理2.10(i)）。

向量空间。在$\mathrm{Aff}(M)$中，

$$(S+T)^*(S+T) + (S-T)^*(S-T) = 2S^*S + 2T^*T.$$

引理 2.9、定理 5.2和 $\tau_{\mathrm{Y}} \ge 0$给出 $\tau_{\mathrm{Y}}((S+T)^*(S+T)) \le 2\tau_{\mathrm{Y}}(S^*S) + 2\tau_{\mathrm{Y}}(T^*T)$。此外，根据命题 $\tau_{\mathrm{Y}}((cT)^*(cT)) = |c|^2\tau_{\mathrm{Y}}(T^*T)$，由命题 3.4。

配对。极化恒等式

$$T^*S = \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\,(S + i^kT)^*(S + i^kT)$$

在 $\mathrm{Aff}(\mathcal{M})$中成立。每一项 $(S + i^kT)^*(S + i^kT)$ 都属于 $\mathscr{P}_\tau$，因为 $\mathscr{L}^2_Y$是一个向量空间。因此 $T^*S \in \mathscr{D}_\tau$，且 $\tilde{\tau}(T^*S)$ 由定理 6.1定义。

性质。由 $\tilde{\tau}$ 在 $\mathscr{D}_\tau$ 上的线性以及 $\mathrm{Aff}(\mathcal{M})$ 中的分配律可得半线性。由 $(T^*S)^* = S^*T$ 和 $\tilde{\tau}(X^*) = \overline{\tilde{\tau}(X)}$ 可得厄米对称性；后者成立是因为 $\tilde{\tau}$ 在 $\mathscr{E}_\tau$ 上取实值。由于 $\langle T, T\rangle_Y = \tilde{\tau}(T^*T) = \tau_{\mathrm{Y}}(T^*T) \ge 0$，故正定性成立。

定性。设 τ 忠实，且对某个 $X \geq 0$ 有 $\tau_{\mathrm{Y}}(X) = 0$ 。由命题 3.6，$\tau(\min(X, R\mathrm{I})) = 0$ 对所有 R 均成立，因此对所有 R，$\min(X, R\mathrm{I}) = 0$，且 $X = 0$。若 τ 不忠实，则存在 $X \geq 0, X \neq 0$，使得 $\tau(X) = 0$。谱投影 $p = \mathbf{1}_{[\varepsilon,\infty)}(X) \neq 0$ 满足 $\varepsilon p \leq X$，因此 $\tau(p) = 0$，因为 $0 \leq \varepsilon\tau(p) \leq \tau(X) = 0$，且 $p, p_Y = 0$。□

6.1. **绝对值可积域**。自然地，我们引入

$$\mathscr{L}^1_Y(\mathcal{M}, \tau) := \{T \in \mathrm{Aff}(\mathcal{M}) : \tau_{\mathrm{Y}}(|T|) < \infty\}.$$

在阿贝尔代数中，由逐点三角不等式和定理 5.1可知，这是一个向量空间。若 τ 是忠实且正规$L^1(\mathcal{M}\ \tau)$，则它是传统的非交换 $\|T\|_1 = \tilde{\tau}(|T|)$ [11]，关于 $\mathscr{L}^1_Y$完备。现在我们证明，对于任意迹， $\mathscr{D}_\tau$仍然是一个向量空间，且等于 $\mathscr{L}^1_Y\mathcal{M}$-双模，且 $\tilde{\tau}$在其上是循环的。三角不等式在一个常数因子内成立；该常数是否最优尚未解决。

引理 6.3 (平方的不等式)。 设 M 有限，且 $S, T \in \mathrm{Aff}(M)$。对每个 $t > 0$,

$$(S+T)^*(S+T) \leq (1+t)\, S^*S + (1+t^{-1})\, T^*T \qquad in\ \mathrm{Aff}(\mathcal{M}). \tag{6.1}$$

特别地，若 $a, b \in M_+$满足 $a^2 \leq S^*S$和 $b^2 \leq T^*T$，则 $(a+b)^2 \leq (1+t)\, S^*S + (1+t^{-1})\, T^*T$。对于 $\lambda, \mu > 0$，不等式 $(S+T)^*(S+T) \leq \lambda S^*S + \mu T^*T$对所有 S 和 T 成立，当且仅当 $\lambda^{-1} + \mu^{-1} \leq 1$。

证明。在Aff(M)中，

$$(1+t)\, S^*S + (1+t^{-1})\, T^*T - (S+T)^*(S+T) = \left(t^{1/2}S - t^{-1/2}T\right)^*\left(t^{1/2}S - t^{-1/2}T\right),$$

它根据引理 2.10(i) 属于 Aff(M)$_+$。将此应用于 a 和 b，可得 $(a+b)^2 \leq (1+t)a^2 + (1+t^{-1})b^2$；关于 a 和 b 的结论则由引理 2.10(ii) 得出。若$\lambda^{-1} + \mu^{-1} \leq 1$，则 $\lambda > 1$；结合 $t = \lambda - 1$，我们有 $\mu \geq 1 + t^{-1}$，因此由 (6.1) 可得该不等式。反过来，取 $S = u\mathrm{I}$ 和 $T = v\mathrm{I}$，其中 $u, v > 0$。由柯西–施瓦茨不等式，$(\lambda u^2 + \mu v^2)/(u+v)^2$ 在 $u, v > 0$ 上的最小值为 $(\lambda^{-1} + \mu^{-1})^{-1}$。□

注 6.4。在引理 6.3 中，$(a+b)^2$ 的界不能替换为 $(S+T)^*(S+T)$。若 $T = -S$，则 $(S+T)^*(S+T) = 0$，尽管 $a = b = |S|$ 满足假设。即使对于 $S, T \geq 0$，假设 $a^2 \leq S^2$ 和 $b^2 \leq T^2$ 也不能推出 $(a+b)^2 \leq (S+T)^2$，，尽管根据引理 B.2，它们确实能推出 $a + b \leq S + T$。在 $M_2(\mathbb{C})$ 中，取

$$S = a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = 0;$$

因此，$(S+T)^2 - a^2 = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$的行列式为 -1。原因在于， $\lambda \mapsto \lambda^2$ 不是算子单调的，而 $\lambda \mapsto \lambda^{1/2}$ 是。这就是下面的论证使用平方并损失一个常数的原因。

定理 6.5 (拟三角不等式)。 设 M 是有限的，且 τ 是 M 上的迹。对于$S, T \in \mathrm{Aff}(M)$，令 $\alpha = \tau_{\mathrm{Y}}(|S|)$ 以及 $\beta = \tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$。则

$$\tau_{\mathrm{Y}}(|S+T|) \leq \inf_{t>0}\left(\sqrt{1+t}\,\alpha + \sqrt{1+t^{-1}}\,\beta\right) = \left(\alpha^{2/3} + \beta^{2/3}\right)^{3/2} \leq \sqrt{2}\,(\alpha + \beta).$$

证明。我们可以假设 $\alpha, \beta < \infty$。固定 $t > 0$，并令 $Z_t = (1+t)|S|^2 + (1+t^{-1})|T|^2 \in$Aff(M)$_+$。令 $c \in$ M$_+$，其中 $c^2 \leq |S+T|^2$。根据引理 6.3 和引理 2.10(ii),(iii)，$c^2 \leq Z_t$。将推论 5.6 应用于 $Z_t^{1/2}$，得到 $\tau(c) \leq \tau_{\mathrm{Y}}(Z_t^{1/2})$。对 c 取上确界，并将推论 5.6 应用于 $S+T$，得到 $\tau_{\mathrm{Y}}(|S+T|) \leq \tau_{\mathrm{Y}}(Z_t^{1/2})$。由

引理 2.9， Z_t 是$(1+t)|S|^2$ 与$(1+t^{-1})|T|^2$的形式和。命题 5.7 以及齐次性（命题 3.4）因此给出

$$\tau_{\mathrm{Y}}(Z_t^{1/2}) \le \tau_{\mathrm{Y}}\big(\sqrt{1+t}\,|S|\big) + \tau_{\mathrm{Y}}\big(\sqrt{1+t^{-1}}\,|T|\big) = \sqrt{1+t}\,\alpha + \sqrt{1+t^{-1}}\,\beta.$$

若 $\alpha\beta > 0$，则关于 t 的下确界在 $t = (\beta/\alpha)^{2/3}$处取得。此时 $\sqrt{1+t} = (\alpha^{2/3}+\beta^{2/3})^{1/2}\alpha^{-1/3}$ 且 $\sqrt{1+t^{-1}} = (\alpha^{2/3}+\beta^{2/3})^{1/2}\beta^{-1/3}$，其值为 $(\alpha^{2/3}+\beta^{2/3})^{3/2}$。若 $\beta = 0$（分别地， $\alpha = 0$），令 $t \to 0$（分别地， $t \to \infty$）。最后一个不等式是幂平均不等式 $\alpha^{2/3}+\beta^{2/3} \le 2^{1/3}(\alpha+\beta)^{2/3}$。□

推论 6.6 (平均三角不等式)。 设 M 为有限的，且 τ 为 M 上的迹。对于 $S, T \in \mathrm{Aff}(M)$，

$$\tfrac{1}{2}\big(\tau_{\mathrm{Y}}(|S+T|) + \tau_{\mathrm{Y}}(|S-T|)\big) \le \tau_{\mathrm{Y}}\big((S^*S+T^*T)^{1/2}\big) \le \tau_{\mathrm{Y}}(|S|) + \tau_{\mathrm{Y}}(|T|).$$

证明。令 $A = \frac{1}{2}(S+T)$ 和 $B = \frac{1}{2}(S-T)$，从而 $2A^*A + 2B^*B = S^*S + T^*T$。若 $a, b \in \mathrm{M}_+$ 满足 $a^2 \le A^*A$ 和 $b^2 \le B^*B$，则由取 $t = 1$ 的引理 6.3 得 $(a+b)^2 \le S^*S + T^*T$。由推论 5.6， $\tau(a) + \tau(b) = \tau(a+b) \le \tau_{\mathrm{Y}}((S^*S+T^*T)^{1/2})$。对 a 和 b取上确界，结合推论 5.6和齐次性得到第一个不等式，因为 $\tau_{\mathrm{Y}}(|A|) = \frac{1}{2}\tau_{\mathrm{Y}}(|S+T|)$且 $\tau_{\mathrm{Y}}(|B|) = \frac{1}{2}\tau_{\mathrm{Y}}(|S-T|)$。第二个不等式是取 $X = S^*S$和 $Y = T^*T$的命题 5.7,结合引理 2.9。□

定理 6.7 (可积算子)。 设 M 是有限的，且 τ 是 M 上的一个迹。

(a) $\mathscr{L}_Y^1$ 是一个复向量空间， $\mathscr{L}_Y^1 = \mathscr{D}_\tau$，且 $d(S,T) = \tau_{\mathrm{Y}}(|S-T|)^{2/3}$ 是 $\mathscr{L}_Y^1$ 上的平移不变伪度量。当且仅当 τ 忠实时，它才是度量。*(b)* 对于 $T \in Aff(M)$ 和 $X \in M$，有 $|T^*| = U|T|U^*$，其中 $U \in M$ 为酉算子，$\tau_{\mathrm{Y}}(|T^*|) = \tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$、$\tau_{\mathrm{Y}}(|XT|) \le \|X\|\,\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$ 且 $\tau_{\mathrm{Y}}(|TX|) \le \|X\|\,\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$。特别地， $\mathscr{L}_Y^1$ 是一个 M-双模。*(c)* 对于 $T \in \mathscr{L}_Y^1$， $|\tilde{\tau}(T)| \le \sqrt{2}\,\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$。*(d)* 对于 $X \in M$ 和 $T \in \mathscr{L}_Y^1$， $\tilde{\tau}(XT) = \tilde{\tau}(TX)$。

证明。 由于 $\mathcal{M}$ 是有限的，每个 $T \in \mathrm{Aff}(\mathcal{M})$ 都有极分解 $T = U|T|$，其中$U \in \mathcal{M}$ 酉算子 [8, 定理 2。12]。于是 $TT^* = U|T|^2U^*$，因此 $|T^*| = U|T|U^*$ 且$\tau_{\mathrm{Y}}(|T^*|) = \tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$ 由命题 3.4得证。

(a) 由定理 6.5， $|cT| = |c|\,|T|$, $\mathscr{L}_Y^1$是一个向量空间。函数 $N(T) = \tau_{\mathrm{Y}}(|T|)^{2/3}$满足 $N(S+T) \le N(S) + N(T$以及 $N(-T) = N(T)$，因此 d是一个平移不变伪度量。若 $T \in \mathscr{L}_Y^1$，则由前一段可知 $T^* \in \mathscr{L}_Y^1$，所以 $\mathrm{Re}\,T$、$\mathrm{Im}\,T \in \mathscr{L}_Y^1$。它们的正部与负部均被其绝对值控制，因此属于 $\mathscr{P}_\tau$。故 $T \in \mathscr{D}_\tau$。反过来， $\mathscr{D}_\tau$由 $\mathscr{P}_\tau \subseteq \mathscr{L}_Y^1$张成。

若 τ忠实且 $\tau_{\mathrm{Y}}(|R|) = 0$，则由命题 3.6， $\tau(\min(|R|, \mathrm{I})) = 0$，因此 $\min(|R|, \mathrm{I}) = 0$且 $R = 0$；反之，若 d是度量且 $X \in \mathrm{M}_+$满足 $\tau(X) = 0$，则 $d(X, 0) = \tau(X)^{2/3} = 0$，因此 $X = 0$；故 τ忠实。

(b) 第一个断言已在上文证明。设 $D = (\|X\|^2\mathrm{I} - X^*X)^{1/2} \in \mathcal{M}_+$。在 $\mathrm{Aff}(\mathcal{M})$ 中，

$$\|X\|^2\,T^*T - (XT)^*(XT) = T^*D^2T = (DT)^*(DT),$$

因此由引理 2.10(i) 得 $|XT|^2 \le \big(\|X\|\,|T|\big)^2$。若 $c \in \mathrm{M}_+$ 且 $c^2 \le |XT|^2$，则由引理 2.10(ii)、(iii) 得 $c^2 \le \big(\|X\|\,|T|\big)^2$，而推论 5.6 给出 $\tau(c) \le \tau_{\mathrm{Y}}(\|X\|\,|T|) = \|X\|\,\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$。对 c 取上确界，推论 5.6 得 $\tau_{\mathrm{Y}}(|XT|) \le \|X\|\,\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$。最后， $\tau_{\mathrm{Y}}(|TX|) = \tau_{\mathrm{Y}}(|X^*T^*|) \le \|X\|\,\tau_{\mathrm{Y}}(|T^*|) = \|X\|\,\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$。

（c）回顾定理 6.2的证明可知 $\tilde{\tau}(R^*) = \overline{\tilde{\tau}(R)}$对 $R \in \mathscr{D}_\tau$成立。令 $T \in \mathscr{L}_Y^1$，取 $\theta \in \mathbb{R}$使得 $e^{i\theta}\tilde{\tau}(T) = |\tilde{\tau}(T)|$，并令 $H = \mathrm{Re}(e^{i\theta}T) \in \mathscr{L}_Y^1$。于是 $H = H_+ - H_-$ 且 $H_\pm \in \mathscr{P}_\tau$，并且 $H_+ \le |H|$，故

$$|\tilde{\tau}(T)| = \mathrm{Re}\,\tilde{\tau}(e^{i\theta}T) = \tilde{\tau}(H) = \tau_{\mathrm{Y}}(H_+) - \tau_{\mathrm{Y}}(H_-) \le \tau_{\mathrm{Y}}(|H|).$$

由于 $\tau_{\mathrm{Y}}(|e^{i\theta}T|) = \tau_{\mathrm{Y}}(|e^{-i\theta}T^*|) = \tau_{\mathrm{Y}}(|T|)$ 根据（b），定理 6.5 给出

$$\tau_{\mathrm{Y}}(|H|) = \tfrac{1}{2}\,\tau_{\mathrm{Y}}\big(|e^{i\theta}T + e^{-i\theta}T^*|\big) \le \tfrac{1}{2}\big(2\,\tau_{\mathrm{Y}}(|T|)^{2/3}\big)^{3/2} = \sqrt{2}\,\tau_{\mathrm{Y}}(|T|).$$

(d) 设 $A \in \mathscr{P}_\tau$ 和 $A_R = \min(A, R\mathrm{I}) \in \mathcal{M}$。由定理 5.1 和命题 3.6，$\tau_{\mathrm{Y}}(A - A_R) = \tau_{\mathrm{Y}}(A) - \tau(A_R) \to 0$。由 (b) 和 (c)，

$$|\widetilde{\tau}(XA) - \tau(XA_R)| = |\widetilde{\tau}(X(A - A_R))| \le \sqrt{2}\,\|X\|\,\tau_{\mathrm{Y}}(A - A_R) \to 0,$$

AX也同理。由于 $\tau(XA_R) = \tau(A_RX)$，我们得到 $\widetilde{\tau}(XA) = \widetilde{\tau}(AX)$。由线性性可得该结论，因为 $\mathscr{L}^1_Y = \mathscr{D}_\tau$由 $\mathscr{P}_\tau$张成。□

7. 忠实正规迹

本节的基本假设是：$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 是任意冯·诺伊曼代数，且 $\tau : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ 是忠实正规迹态，$\tau(\mathrm{I}) = 1$。我们不 假设$\mathcal{M}$有限；这可由忠实性推出。

命题 7.1 (忠实迹状态蕴含有限性)。 设 M 是任意冯·诺伊曼代数，且存在正的忠实迹泛函 τ，满足 $0 < \tau(\mathrm{I}) < \infty$。那么，$M$ 在 *Murray–von Neumann* 意义下是有限的：M 中每个等距算子都是酉算子。得出此结论无需 τ 具备正规性。

证明。 如果 $v \in \mathcal{M}$ 满足 $v^*v = \mathrm{I}$，那么 $p = \mathrm{I} - vv^*$ 是一个投影。由迹性可得

$$\tau(p) = \tau(\mathrm{I}) - \tau(vv^*) = \tau(\mathrm{I}) - \tau(v^*v) = 0.$$

忠实性意味着 $p = 0$，因此 $vv^* = \mathrm{I}$。于是 v 是酉算子。 □

对于正的仿射于 A，我们有（引理 3.7）

$$\widetilde{\tau}(A) = \int_{[0,\infty)} \lambda \, d\tau(E_A(\lambda)) = \lim_{h \downarrow 0} \tau\big(A(\mathrm{I} + hA)^{-1}\big).$$

我们有 $\mathscr{D}_\tau = \mathscr{L}^1_Y = L^1(\mathcal{M}, \tau)$。更一般地，设 $1 \le p < \infty$，令 $\mathscr{L}^p_Y$为满足$\|T\|_{p,\tau} := \tau_Y(|T|^p)^{1/p} < \infty$的$T \in \mathrm{Aff}(\mathcal{M})$的集合。

定理 7.2 （[4]）。 设 τ为 M 上的忠实正规迹状态。那么 $\mathscr{L}^p_Y = L^p(M, \tau)$具有相等范数；这些空间是完备的。

对于 $A \in L^1$ 和 $D_h \in \mathcal{M}$,

$$|\tau(D_h) - \widetilde{\tau}(A)| \le \|D_h - A\|_{1,\tau};$$

这个估计使我们能够通过切尔诺夫逼近恢复可积无界算子的迹，而无需使用算子范数极限。

引理 7.3 （归一化正规迹的 L^1–L^2 不等式）。 对于 $T \in L^2(\mathcal{M}, \tau)$，若 $\tau(\mathrm{I}) = 1$，则有 $\|T\|_{1,\tau} \le \|T\|_{2,\tau}$。

证明。 对 I 和 $|T|$应用正规迹的柯西–施瓦茨不等式，首先将 $|T|$ 替换为其有界截断 $\min(|T|, R\mathrm{I})$：

$$\tau(\min(|T|, R\mathrm{I})) \le \tau(\mathrm{I})^{1/2}\tau(\min(|T|, R\mathrm{I})^2)^{1/2} \le \widetilde{\tau}(|T|^2)^{1/2}.$$

由正规单调收敛取 $R \to \infty$。 □

引理 7.4 (有限迹中的有界强收敛 L^p)。 设 $X_n, X \in M$,$X_n \to X$ 强收敛，且$\sup_n \|X_n\| < \infty$。则 $\|X_n - X\|_{p,\tau} \to 0$ 对每个 $1 \le p < \infty$ 都成立。

证明。令 $Y_n = X_n - X$。由于 $Y_n \to 0$ 强收敛，且 $\sup_n \|Y_n\| \le C$，因此 $Y_n^* Y_n \to 0$也强收敛：$\|Y_n^* Y_n \xi\| \le C\|Y_n \xi\|$。因此 $Y_n^* Y_n \to 0$ 弱收敛，且 $\|Y_n^* Y_n\| \le C^2$。正规正泛函是 σ-弱连续的，并且 σ-弱拓扑与弱算子拓扑在有界集上一致；[8] 因此 $\tau(Y_n^* Y_n) \to 0$。对于 $p \le 2$，有限迹 Hölder 不等式给出$\|Y_n\|_p \le \|Y_n\|_2$。对于 $p > 2$，$|Y_n|^p \le C^{p-2}|Y_n|^2$，从而证明了结论。□

推论 7.5 (迭代 Chernoff 恢复扩展迹)。设 $A \ge 0$ 为与 M 相伴的自伴算子。假设 $F(h) \in M$，并且对每个固定的 $t > 0$，$F(t/n)^n \to e^{-tA}$强收敛至 $n \to \infty$。那么对于 $1 \le p < \infty$，

$$\|F(t/n)^n - e^{-tA}\|_{p,\tau} \to 0,$$

and

$$\widetilde{\tau}(A) = \lim_{t \downarrow 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{t} \tau\big(\mathrm{I} - F(t/n)^n\big) \in [0, \infty]. \tag{7.1}$$

证明。固定 t，由强收敛和一致有界原理可知 $F(t/n)^n$在范数下有一致上界。应用引理 7.4。标量表达式的内层极限为 $t^{-1}\tau(\mathrm{I} - e^{-tA})$。当 $t \downarrow 0$时，其极限为 $\widetilde{\tau}(A)$，这是由命题 4.6得出的；也可由谱单调收敛得出，因为 $(1 - e^{-t\lambda})/t \uparrow \lambda$。□

注 7.6（极限次序）。等式（7.1）是一个迭代极限恒等式。它没有给出关于 $t \downarrow 0$ 的一致收敛速率，也不能据此任意选取对角序列 $n = n(t)$。还要注意，迭代恒等式并不要求各个 $F(h)$ 具有正定性或自伴性。此外，推论7.5中未用到忠实性。

附录 A. 仿射算子：证明

A.1. 命题 2.8 的证明。$\Longrightarrow$）。取一个酉算子 $U \in \mathrm{M}'$ 和一个博雷尔 $B \subseteq \mathbb{R}$。则，$UAU^* = A$。映射 $B \mapsto UE_A(B)U^*$是 $\mathbb{R}$上的投影值测度，并且$UAU^* = \int_\sigma(A)\, \lambda\, d($ $UE_AU^*)(\lambda)$。由谱定理的唯一性 [12, 第 VIII 章],$E_A(B) = E_{UAU^*}(B) = UE_A(B)U^*$。冯·诺伊曼代数 M'中的酉算子线性张成 M'；因此 $E_A(B)$与 M'中的每个元素都交换。双交换子定理推出 $E_A(B) \in \mathrm{M}'' = \mathrm{M}$。

有界博雷尔演算。对于有界简单函数 $f = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{1}_{B_j}$，我们有$f(A) = \sum_j c_j E_A$ $(B_j) \in \mathcal{M}$。每个有界 Borel 函数都是有界简单函数的一致极限，并且博雷尔演算是压缩的：$\|f_n(A) - f(A)\| \le \|f_n - f\|_\infty$。因此，$\mathcal{M}$ 的序列闭性给出 $f(A) \in \mathcal{M}$。

$\Longleftarrow$）。假设对每个 Borel B，$E_A(B) \in \mathcal{M}$。每个酉算子 $U \in \mathcal{M}'$ 都与这些投影对易 wi。对于 $R > 0$，令[9]

$$A_R = \int_{[-R,R]} \lambda\, dE_A(\lambda) = AE_A([-R, R]) \in \mathcal{M},$$

In 特别地，$UA_R = A_R U$。谱定理给出了如下刻画：

$$\mathrm{Dom}(A) = \Big\{x \in H : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2\, d\|E_A(\lambda)x\|^2 < \infty\Big\} = \Big\{x : \sup_{R>0} \|A_R x\| < \infty\Big\}.$$

对于 $x \in$定义域(A)，可得 $A_R x \to Ax$。因此，$A_R Ux = UA_R x \to UAx$，因为 $R \to \infty$ 且 sup $_R \|A_R Ux\| \le \|Ax\|$。上述定义域刻画表明 $Ux \in$定义域(A) 且 $AUx = UAx$。对 U^* 重复此过程可得 U定义域(A) $=$ 定义域 (A)。因此 $A\eta\mathcal{M}$。

无界博雷尔演算。设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 为博雷尔函数。则 $f(A) = \int f\, dE_A$ 是闭的、稠密定义的正规算子 [12, 第八章]。对于酉算子 $U \in \mathcal{M}'$，第一段给出对每个博雷尔函数 B，均有 $UE_A(B)U^* = E_A(B)$，因此 $Uf(A)U^* = \int f\, d(UE_AU^*) = f(A)$，

[8] 更多细节请参见 [7, 第 7], 章，尤其是 [7, 定理 7.1。12] [9] $A_R \in$ 由前一段应用于 $f(\lambda) = \lambda \mathbf{1}_{[-R,R]}(\lambda)$ 得出。

包括定义域。因此 $f(A)\eta\mathcal{M}$。若 f为实值函数，则 $f(A)$ 是自伴的；若$f \geq 0$，则 $\langle f(A)x, x\rangle = \int f\, d\langle E_A x, x\rangle \geq 0$，其中 $x \in$属于 $f(A)$ 的定义域。□

A.2. 引理 2.9 的证明。根据有限冯·诺伊曼代数 [8, 的仿射 $*$代数上的 Murray–von Neumann 定理，命题 3.7(i) 和 3.10], 定义域 $A\cap$定义域 B 稠密，$A+B$ 在其中可闭，且 $(A\hat{}+B)^* = A^*\hat{}+B^* = A\hat{}+B$。因此，D 稠密。D 上的型 $t[y] = \|A^{1/2}y\|^2 + \|B^{1/2}y\|^2$ 是闭的，因为它是闭非负型之和，并定义了一个自伴算子 $S \geq 0$。我们有 $S = A\hat{}+B \geq 0$，其中 $\mathrm{Dom}(S^{1/2}) = \mathsf{D}$，且 $\|S^{1/2}y\|^2 = t[y]$。事实上，若 $x \in$定义域 $A\cap$定义域 B 且 $y \in \mathsf{D}$，则 $t(y,x) = y, (A+B)x$。根据第一表示定理，$x \in$定义域 S且$Sx = (A+B)x$。因此 $A\hat{}+B \subseteq S$，故 $S = S^* \subseteq (A\hat{}+B)^* = A\hat{}+B$，等式成立。

伴随关系：对于酉算子 $u \in \mathcal{M}'$，有 $uA^{1/2} \subseteq A^{1/2}u$ 和 $uB^{1/2} \subseteq B^{1/2}u$。因此，$u\mathcal{D} = \mathcal{D}$，且 $t[uy] = t[y]$。与闭型相关联的算子由该型确定，所以 $uSu^* = S$。□

A.3. **两个仿射判据**。

引理 A.1（两个仿射判据）。设 M 是任意冯·诺伊曼代数。

（i）设 T 是闭且稠密定义的，核为 D_0。假设对于每个酉算子 $U \in M'$ 以及每个 $x \in D_0,$，都有 $Ux \in$定义域(T) 且 $TUx = UTx$。那么 $T\eta M$。（ii）设 T 是闭的且与 M 相伴，并设 $X \in M$，且 值域 $X \subseteq$定义域(T)。那么 TX 处处有定义，且 $TX \in M$。

证明。(i) 设 $y \in \mathrm{Dom}(T)$。取 $y_n \in \mathcal{D}_0$，满足 $y_n \to y$和 $Ty_n \to Ty$。于是$Uy_n \to Uy$且 $TUy_n = UTy_n \to UTy$。由于 T是闭的，$Uy \in \mathrm{Dom}(T)$ 且$TUy = UTy$。因此 $U\mathrm{Dom}(T) \subseteq \mathrm{Dom}(T)$，将此应用于 U^*即可得到等式。

(ii) TX处处有定义，因为 Ran $X \subseteq \mathrm{Dom}(T)$。它是闭的：若 $x_n \to x$且 $TXx_n \to y$，则 $Xx_n \to Xx$，由 T的闭性可得 $Xx \in \mathrm{Dom}(T)$ 且$TXx = y$ [8,引理 4.10]。根据闭图定理，TX是有界的。设 $U \in \mathcal{M}'$为酉算子，且 $x \in H$。则 $UXx = XUx$，并且由于 $T\eta\mathcal{M}$和 $Xx \in \mathrm{Dom}(T)$，也有$TUXx = UTXx$。因此 $(TX)Ux = T(XUx) = T(UXx) = U(TX)x$。$\mathcal{M}'$ 中的酉算子张成 $\mathcal{M}'$，所以 $TX \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$。□

A.4. 引理 2.10 的证明。自伴性。对于 $x, y \in$定义域 Z，半双线性型 Zx, y 和 x, Zy 具有相同的二次型，因为 Zx, x 是实数。由极化恒等式可知它们相等，因此 $Z \subseteq Z^*$。与有限 von Neumann 代数仿射于的对称算子是自伴的 [8, 命题 3.5]。若 $\lambda < 0$，则$\|(Z-\lambda)x\|\,\|x\| \geq (Z-\lambda)x, x \geq |\lambda|\,\|x\|^2$对于 $x \in$定义域 Z。因此 $Z-\lambda$是单射且具有闭值域，并且其值域是稠密的，因为 $\ker(Z^*-\lambda) = \ker(Z-\lambda) = \{0\}$。所以$\lambda \notin \sigma(Z)$。

(i) 根据冯·诺伊曼定理 [8, 定理 2.4(v)]，T^*T 是自伴的，并且 $\langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$。它仿射于 $\mathcal{M}$，因为 $U^*T^*TU = (U^*TU)^*(U^*TU) = T^*T$对每个酉算子 $U \in \mathcal{M}'$都成立。由于 T^*T是闭的，它等于其闭包 $T^*\hat{}\cdot T$。

(ii) 设 $Z_1, Z_2 \in \mathrm{Aff}(\mathcal{M})_+$。在 Dom $Z_1\cap$Dom Z_2 上（它是 $Z_1\hat{}+Z_2$ 的核），我们有$\langle (Z_1+Z_2)x, x\rangle \geq 0$，该不等式也适用于闭包。对非负倍数的封闭性显然。若 $W \leq V \leq Z$，则根据 $\mathrm{Aff}(\mathcal{M})$ [8,定理 3.11] 中 $\mathrm{Aff}(\mathcal{M})_+$ 的代数运算规则，有 $Z-W = (Z-V)+(V-W) \in$。

(iii) 若 $W, Z \in \mathrm{Aff(M)}_+$ 且 $D := Z-W \in \mathrm{Aff(M)}_+$，则 $Z = W\hat{}+D$，并且根据引理 2.9，Z 是 W 与 D 的形式和。因此 $\mathrm{Dom}(Z^{1/2}) \subseteq \mathrm{Dom}(W^{1/2})$，且对于 $x \in \mathrm{Dom}(Z^{1/2})$，$\|Z^{1/2}x\|^2 = \|W^{1/2}x\|^2 + \|D^{1/2}x\|^2 \geq \|W^{1/2}x\|^2$。反过来，设$W \in \mathrm{M}_+$，其中 $W \leq Z$ 作为二次型。算子 $Z-W$ 的定义域为 Dom Z,

它是闭算子且仿射于 $\mathcal{M}$，因此是 Aff($\mathcal{M}$) 中的差；并且对于 $x \in \operatorname{Dom} Z$，$\langle (Z-W)x, x\rangle \geq 0$。□

附录 B. 平方根不等式的证明

在本附录中 $0 < \varepsilon < M < \infty$，并且

$$g_{\varepsilon,M}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{M} s^{-1/2}\frac{\lambda}{\lambda+s}\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{M} s^{-3/2} f_{1/s}(\lambda)\,ds \qquad (\lambda \geq 0).$$

引理 B.1（截断平方根）。（a）$g_{\varepsilon,M}$ 是连续且递增的，并且$0 \leq g_{\varepsilon,M}(\lambda) \leq$最小$(\lambda^{1/2},\ 2M^{1/2}/\pi)$。

（b）对于 $\lambda \geq 0$，$\lambda^{1/2} - g_{\varepsilon,M}(\lambda) \leq \pi^{-1}(2\varepsilon^{1/2} + 2\lambda M^{-1/2})$。对于 $R > 0$，

$$\min(\lambda^{1/2}, R) \leq g_{\varepsilon,M}(\lambda) + \delta, \qquad \delta = \pi^{-1}\big(2\varepsilon^{1/2} + 2R^2 M^{-1/2}\big).$$

（c）设 $Z \geq 0$ 为自伴且与 M 相伴。则 $s \mapsto s^{-3/2} f_{1/s}(Z)$ 是从 $[\varepsilon, M]$ 到 M 的范数连续映射，其黎曼和在范数下收敛，并且

$$g_{\varepsilon,M}(Z) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{M} s^{-3/2} f_{1/s}(Z)\,ds,$$
$$\tau\big(g_{\varepsilon,M}(Z)\big) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{M} s^{-3/2}\,\tau\big(f_{1/s}(Z)\big)\,ds$$

对 M 上的每个正线性泛函 τ。

证明。(a) 被积函数随 λ 增大，且介于 0 与 $s^{-1/2}$ 之间，由此得到单调性、连续性以及界 $2M^{1/2}/\pi$。变量代换 $s = \lambda u$ 和 $\int_0^\infty u^{-1/2}(1+u)^{-1}\,du = \pi$ 给出 $\pi\lambda^{1/2} = \int_0^\infty s^{-1/2}\frac{\lambda}{\lambda+s}\,ds$，因此 $g_{\varepsilon,M}(\lambda) \leq \lambda^{1/2}$。 ——

(b) 由 (a)，

$$\begin{aligned}\lambda^{1/2} - g_{\varepsilon,M}(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\varepsilon} + \int_M^{\infty}\Big) s^{-1/2}\frac{\lambda}{\lambda+s}\,ds \\ &\leq \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\varepsilon} s^{-1/2}\,ds + \lambda\int_M^{\infty} s^{-3/2}\,ds\Big),\end{aligned}$$

这就是第一个结论。若 $\lambda \leq R^2$，则有 $\min(\lambda^{1/2},\ R) = \lambda^{1/2} \leq g_{\varepsilon,M}(\lambda) + \delta$。若$\lambda > R^2$，则由单调性得到 $g_{\varepsilon,M}(\lambda) \geq g_{\varepsilon,M}(R^2) \geq R - \delta$。

(c) 由于 $f_{1/s}(\lambda) = s\lambda/(s+\lambda)$，对于 $s,\ s' > 0$ 和 $\lambda \geq 0$，我们有

$$\big|f_{1/s}(\lambda) - f_{1/s'}(\lambda)\big| = \frac{\lambda^2\,|s-s'|}{(s+\lambda)(s'+\lambda)} \leq |s-s'|.$$

此外 $0 \leq f_{1/s} \leq s \leq M$，因此函数 $\varphi_s = s^{-3/2} f_{1/s}$、$s \in [\varepsilon, M]$ 满足 $\sup_{\lambda\geq 0}|\varphi_s(\lambda) - \varphi_{s'}(\lambda)| \leq \omega(|s-s'|)$，其中某个 ω 满足 $\omega(r) \to 0$ as $r \to 0$。根据命题 2.8，$\varphi_s(Z) \in \mathrm{M}$，且 $\|\psi(Z)\| \leq \sup_{\lambda\geq 0}|\psi(\lambda)|$ 对有界 Borel ψ 成立；因此 $s \mapsto \varphi_s(Z)$ 范数连续，从而是黎曼可积的。正泛函是范数连续的（定义 2.2），所以 τ 与积分可交换。□

命题 *5.7* 的证明。令 $Z = X \hat{+} Y$。根据引理 B.1（c）和定理 5.2（b），取$h = 1/s$，

$$\begin{aligned}\tau\big(g_{\varepsilon,M}(Z)\big) &= \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{M} s^{-3/2}\,\tau\big(f_{1/s}(Z)\big)\,ds \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{M} s^{-3/2}\big[\tau\big(f_{1/s}(X)\big) + \tau\big(f_{1/s}(Y)\big)\big]\,ds \\ &= \tau\big(g_{\varepsilon,M}(X)\big) + \tau\big(g_{\varepsilon,M}(Y)\big).\end{aligned}$$

由引理 B.1（a），$g_{\varepsilon,\,M}(X)\in\mathcal{M}_+$ 以及 $g_{\varepsilon,\,M}(X)\le X^{1/2}$，因此根据（5.2），$\tau(g_{\varepsilon,\,M}(X))\le\tau_{\mathrm{Y}}(X^{1/2})$；$Y$ 同理。由引理 B.1（b）及函数演算，$\min(Z^{1/2},\,R\mathrm{I})\le g_{\varepsilon,\,M}(Z)+\delta\mathrm{I}$。因此

$$\tau\big(\min(Z^{1/2},R\mathrm{I})\big)\le\tau_{\mathrm{Y}}(X^{1/2})+\tau_{\mathrm{Y}}(Y^{1/2})+\delta\,\tau(\mathrm{I}).$$

令 $\varepsilon\to0$ 且 $M\to\infty$，于是 $\delta\to0$。对 R 取上确界，并利用命题 3.6 即可完成证明。[10] □

引理 B.2 (有界下估算子的海因茨不等式)。设 $c\in B(H)$ 满足 $c\ge0$，并设 $Z\ge0$ 为自伴算子且满足 $c^2\le Z$。则 $c\le Z^{1/2}$。

证明。对于 $s>0$，$c^2+s\mathrm{I}\le Z+s\mathrm{I}$ 有 $(Z+s\mathrm{I})^{-1}\le(c^2+s\mathrm{I})^{-1}$，即 $c^2(c^2+s\mathrm{I})^{-1}\le Z(Z+s\mathrm{I})^{-1}$。乘以 $\pi^{-1}s^{-1/2}$ 并对 $[\varepsilon,M]$ 积分；由引理 B.1(c)，取 $\mathrm{M}=\mathrm{B}(H)$，得到 $g_{\varepsilon,M}(c^2)\le g_{\varepsilon,M}(Z)\le Z^{1/2}$，此处等式在二次型意义下成立。由引理 B.1(b)，当 $\varepsilon\to0$ 且 $M\to\infty$ 时，$\|c-g_{\varepsilon,M}(c^2)\|\le\pi^{-1}(2\varepsilon^{1/2}+2\|c\|^2M^{-1/2})\to0$。因此，对每个 $x\in\mathrm{Dom}(Z^{1/4})$，均有 $cx,x\le\|Z^{1/4}x\|^2$。□

致谢

作者感谢 Wilfrid Gangbo 教授富有成果的初次讨论，这次讨论为本项目奠定了方向。

AI Disclosure.

Claude 用于数学讨论和编辑协助。作者对本文内容承担全部责任。

参考文献

[1] J.-C. Bourin 和 F. Hiai。有限冯·诺伊曼代数上的反范数。*Publ. Res. Inst. Math. Sci.*，51(2)：207–235，2015。[2] P. R. Chernoff。关于算子半群乘积公式的注记。*J. Funct. Anal.*，2 242，1968 238：–。[3] K.-J. Engel 和 R. Nagel。线性演化方程的一参数半群，*Grad. Texts in Math.* 第 194 卷。Springer，纽约，2000。[4] T. Fack 和 H. Kosaki。τ-可测算子的广义 s-数。*Pacific J. Math.*，123：269–300，1986。[5] R. V. Kadison 和 Z. Liu。关于穆雷–冯·诺伊曼代数上的导子的注记。*Proc. Natl. Acad. Sci. USA*，111(6)：2087–2093，2014。[6] R. V. Kadison 和 J. R. Ringrose。算子代数理论基础，第一卷：初等理论。Academic Press，纽约，1983。[7] R. V. Kadison 和 J. R. Ringrose。算子代数理论基础，第二卷：高等理论。Academic Press，奥兰多，1986。[8] Z. Liu。关于海森堡关系的若干数学方面。*Sci. China Math.*，54(11)：2427–2452，2011。[9] F. J. Murray 和 J. von Neumann。关于算子环。*Ann. of Math. (2)*，37：116–229，1936。[10] F. J. Murray 和 J. von Neumann。关于算子环。II。*Trans. Amer. Math. Soc.*，41 248，1937 208：–。[11] E. Nelson。关于非交换积分的注记。*J. Funct. Anal.*，15：103–116，1974。[12] M. Reed 和 B. Simon。现代数学物理方法。*I*：泛函分析。Academic Press，纽约，修订增补版，1980。

[10] 注意，在 τ 内仅取了范数极限。