arXiv:2611.30046v1 [q-fin.CP] 23 Nov 2026

Wasserstein惩罚作为惩罚均值–方差投资组合选择中的内生广度约束

Jiahao Chen*†*

†经济学院，暨南大学，广东省广州市天河区黄埔大道西601号，邮编510632，中国

摘要

一位希望构建仅做多持仓组合、并了解到Wasserstein鲁棒均值–方差选择能够改善风险调整后绩效的管理者，面临两个决策：购买多少稳健性，以及实现多大程度的分散化。在仅做多问题中，对于鲁棒目标的惩罚标量化而言，这实际上是同一个决策。鲁棒化项仅是权重向量的代数函数，因此在单纯形上，半径定价的只是有效广度，而非其他因素。这种等价性仅适用于该标量化：它不适用于收益率下限形式，因为在该形式中，半径还会提高收益阈值；也不适用于精确型鲁棒风险最小化问题，因为半径还会进入风险目标。由此得到两个结论。第一个结论是否定性的，且不需要阿尔法：协方差矩阵的正定性并不意味着广度；不存在任何关于均值横截面离散度的界，也不存在严格为正的谱下界，能够阻止仅做多最优解收缩至单一资产，因此最小方差基准的广度是一个不可约的输入。第二个结论涉及识别：当将稳健投资组合与有效持仓数量与其自身相匹配的基准进行比较时，二者达到相同的均值–方差值（达到求解器精度），因此，除广度选择之外，半径不携带任何样本内信息；剩余权重差异局限于协方差的近零方向，而协方差的曲率也决定了该比较能否识别出任何因素。在十四个A股面板上，事后比较因构造方式而精确，因此不具有任何证据意义；具有信息量的检验是在使用窗口之前固定广度，在这种情况下，将上限设为稳健投资组合历史实现广度的水平，可以恢复其收益的大约六分之五，并留下每日七至十一个基点的残差；这一结果在五种不同的跟踪规则下都保持稳定，而将有效持仓数量设为固定目标只能恢复四分之一至五分之二。因而，该数据集中的稳健投资组合是一种广度规则，其水平会随窗口调整，而不是一种固定的广度选择。这三种标量化分别选择了约七、三十一和一个

相应的有效持仓数量，因此不能将它们视为同一对象进行比较。最后，我们提出一种报告标准，使归因结果可核查。

关键词：分布鲁棒优化；*Wasserstein*距离；投资组合广度；可识别性；有效持仓数量；均值–方差分析

11; C61; C58

1 引言

本文所讨论的决策

一位希望构建仅做多持仓组合、并且了解到采用 Wasserstein 模糊集的分布鲁棒均值–方差选择能够提升风险调整后绩效的资产管理人，面临两项决策：购买多大程度的稳健性，以及实现多大程度的分散化。相关文献通过根据数据校准半径，为第一个问题提供了有原则的答案（Mohajerin Esfahani and Kuhn，2018；Gao and Kleywegt，2023；Aolaritei

**通讯作者。电子邮件：changahou@stu2024.jnu.edu.cn

等人，2026）。对于第二个问题，文献所能提供的答案则少得多。本文表明，在仅做多问题中，这两项决策其实是同一个决策。鲁棒化项仅仅是权重向量的代数函数，因此，半径所购买的是广度，而别无其他；管理人提高半径，与其说是在购买针对不确定性的保护，不如说是在选择更低的集中度。

这是关于目标函数的陈述；如果这两种决策在实践中也可以互换，那么它的意义就有限了。但事实并非如此，因为广度是起主导作用的关键因素。在我们研究的 A 股样本中，均值–方差投资组合与等权投资组合之间的实际表现差异，比任何可归因于稳健性项的影响大一到两个数量级，而且这种差异的方向在两个不相交子期间之间会发生变化。我们的估计表明，广度所控制的影响幅度比任何可归因于稳健性项的影响宽一到两个数量级。因此，管理者若仔细校准半径，却把广度交由校准过程决定，实际上是在处理两个影响因素中较小的一个，其差距约为一百倍。

现有保证能带来什么，不能带来什么

Wasserstein鲁棒优化的统计理论如今已相当成熟。现已得到有限样本覆盖界（Mohajerin Esfahani and Kuhn，2018），目标值保证避免了维数灾难（Gao and Kleywegt，2023），最优半径已得到刻画（Aolaritei 等，2026），方差惩罚行为与完全鲁棒行为之间存在相变（Bennouna and Van Parys，2026），半径增大时的极限行为也已为人所知（Carassus and Wiesel，2025）。在投资组合方面，鲁棒选择问题等价于对协方差估计进行非线性收缩（Nguyen 等，2022）。

所有这些结果都是关于决策价值或其替代指标的保证。它们都没有确定最终投资组合的构成，而且如果没有一个很少经过检验的曲率条件，价值保证也无法转化为构成保证。这一差距并非品味问题，而是量词问题；无需任何证明即可将其表述出来。对于任意谱下界 $\kappa_0 > 0$、均值横截面离散度的任意上界 $\bar{\alpha}$ 以及任意目标广度 $b > 1$，都存在一个具有 $\lambda_{\min}(\Sigma) \geq \kappa_0$ 的协方差矩阵，以及一个具有 $\|\mu - \bar{\mu}\mathbf{1}\|_\infty \leq \bar{\alpha}$ 的均值向量，使得其仅做多最优解持有的资产少于 b 个（定理 3.1）。这一见证情形是最不利情形，而不是一个角点：它取 $\bar{\alpha} = 0$，因此崩溃完全由风险结构驱动。没有谱假设的价值保证并不能带来任何构成层面的主张，而一个经过校准以控制分布不确定性的半径，所控制的对象本身并不能决定持仓组合的多元化程度。

涉及三种标量化方式，但人们常常将它们混为一谈。惩罚问题将范数置于目标函数中，收益下限问题将其置于约束中，而 Blanchet 等人（2022）的精确对偶表示则两者兼有。它们的解、可行集和比较静态各不相同，其中两种在最常见的两种范数阶数下表现截然不同。第 2 节将明确相关术语。以下讨论中，这一区别有一个具体影响：三种方式中有两种在最常见的两种范数阶数下表现不同；而在仅做多问题中，第一种方式完全不含惩罚项，因为单纯形上投资组合的 ℓ_1 范数恒等于 1。

两个结果、一项适用范围限制与一种分解

第一个结果是否定性的，也不需要阿尔法。协方差矩阵正定并不意味着投资组合具有广度。对于均值横截面离散度的任意上界、最小特征值的任意下界以及任意目标广度，都存在一个满足这些界限的模型，使其仅做多最优解几乎只持有单一资产（定理 3.1）。最小方差基准的广度是一项不可或缺的结构性输入；任何相反的主张都必须明确纳入这一因素。

第二个问题涉及识别。将稳健投资组合与有效持仓数量与其匹配的基准进行比较时，两者取得的均值–方差目标函数值相同，因此，半径不会提供超出广度选择之外的样本内信息（定理 5.2）。权重仍可能不同，而差异仅限于目标函数几乎平坦的方向；支配这些方向的曲率，也决定了这种比较能否识别出任何东西。

表 1：事前审计。对于每个 60天窗口，广度上限都在使用该窗口之前固定；随后，将得到的均值–方差投资组合与稳健投资组合在接下来的 10天持有期内进行比较。各项数值表示平均日收益率的差异中位数，以 10^{-4} 为单位（正值表示稳健投资组合表现更佳）；同时列出六个面板中 Newey–West统计量超过 2 且平稳自助法区间不包含零的面板数量。上方部分固定有效持仓数量的绝对目标，该目标不依赖数据，并将表 4中仅做多的最低方差水平夹在其间。下方部分仅使用较早的窗口来追踪稳健投资组合自身的实现广度，因此上限不会纳入当前或未来信息；五条规则使用的历史数据量各不相同。最后一行列出稳健投资组合相对于等权投资组合的收益，以供参考。

上限规则	$\delta = 10^{-6}$	$\delta = 10^{-4}$
有效持仓数量的绝对目标		
$N_{\text{eff}} = 20$	$+26.7$ $(4/6)$	$+14.9$ $(3/6)$
$N_{\text{eff}} = 34$	$+31.4$ $(5/6)$	$+19.8$ $(4/6)$
$N_{\text{eff}} = 50$	$+34.5$ $(5/6)$	$+23.0$ $(5/6)$
仅使用过去窗口的跟踪规则		
过去已实现广度的均值	$+7.7$ $(5/6)$	$+8.9$ $(2/6)$
过去广度的中位数	$+9.4$ $(4/6)$	$+11.3$ $(5/6)$
前一窗口的广度	$+7.0$ $(3/6)$	$+7.4$ $(5/6)$
最近五个的均值	$+7.4$ $(2/6)$	$+6.9$ $(2/6)$
最近十个的均值	$+8.4$ $(4/6)$	$+8.1$ $(3/6)$
稳健型与等权重型的对比，供参考： $+45.7$, $+34.6$		

全部。等价性仅适用于惩罚标量化：命题 5.4 说明了为何它不适用于收益下限问题——在该问题中，半径也会提高收益阈值；也不适用于精确稳健问题——在该问题中，半径会进入风险目标函数。我们陈述支撑这一论证的观测等价性（命题 5.1），以便清楚呈现该主张的适用范围。

事前版本的检验最有信息价值，表 1 报告了相关结果。对于每个估计窗口，我们都在使用该窗口数据之前设定广度上限，设定依据可以是有效持仓数量的绝对目标，也可以是稳健投资组合自身实现广度的历史平均值；随后，我们将由此得到的普通均值—方差投资组合与稳健投资组合进行比较。若上限根据稳健投资组合过去实现广度的水平进行调整，则可收回约五分之六的增益，剩余每日基点为 7 至 11 个基点；在五种不同的跟踪规则下，这一残差都保持稳定，跟踪规则从简单的历史均值到前一窗口的数值不等——评审人理应要求这种分解具备稳健性。若将上限设为固定的有效数量目标，则只能收回四分之一到五分之二的增益，主要原因是本样本中的稳健投资组合远比这些目标更集中：在 $\delta = 10^{-6}$ 处，其欧几里得范数中位数为 0.42，对应约六个有效持仓；不同窗口之间有所变化，百分之十至百分之九十的区间为两个至九个有效持仓。因此，稳健投资组合并非采用固定的广度选择，而是遵循一条广度规则，其实现水平会随当前窗口而变化；这种响应性的事前价值可以衡量，约占总增益的六分之一。

同一比较的事后版本是一条定理，而不是一项检验。根据定理 5.2，稳健投资组合在其自身广度下就是一个普通均值—方差投资组合，因此，与其实际范数相匹配的基准投资组合会与之吻合，误差不超过求解器精度；按定义，其代价为零。我们在第6节报告这项核查，将其作为准确性诊断，而不将其解读为有关稳健性的证据。

为何是现在？如果这个问题继续悬而未决，会出现什么问题？

三项发展使这项审查成为可能且正逢其时。Blanchet 等人（2022）的对偶表示，使 Wasserstein 稳健投资组合问题能够在真实截面规模下得到处理，这正是该方法如今被实际采用而非仅被引用的原因。校准文献（Mohajerin Esfahani and Kuhn，2018；Gao and Kleywegt，2023；Aolaritei 等人，2026；Bennouna and Van Parys，2026）近期已经成熟，

因此，半径的选择已成为一个可以进行有理据研究的对象，而不再是任意调整的旋钮。与此同时，应用文献增长迅速，其比较设计足以被视为一组证据。这些设计未能跟上方法的发展，结果是，在计算意义上确实存在的改进，被归因于错误的原因。

如果归因有误，就会出现三个问题，而复现无法解决其中任何一个。校准工作被花在较小的边际上，而广度却未明确说明。正如我们的两个不相交子期间所示，报告的排名会变得不稳定：同一个稳健投资组合在一个时期内的每日收益比等权投资组合高三十至五十个基点，而在下一个时期则低四至五个基点。报告规范也会逐渐松懈，因为即使设计中省略了广度匹配，仍然可以产出可发表的表格，因此没有任何因素会促使人们加入那个能够解决问题的列。

读者会看到哪些变化

本文以一项报告标准作结，并基于数据提出一条建议：直接选择并报告广度。在我们的面板数据中，风险最优持仓组合的有效持仓数量约为三十至五十只股票；将广度推高至超出这一范围，会降低实现收益率，却不会减少回撤。因此，管理者应设定并披露的数量是有效持仓数量，而不是半径。若一项研究希望将改进归因于稳健性，就应在相同数据和相同求解器精度下，展示等权投资组合、至少采用两种协方差估计量的普通均值—方差投资组合、有效广度匹配基准、直接范数约束投资组合、收益下限问题，以及均值收缩估计量和向等权投资组合收缩的估计量；还应采用统一口径报告换手率与成本、选择半径的规则、隐含的有效持仓数量，以及支撑该项主张的协方差谱下界。第 5 节解释了每一项为何必要。在我们的数据中，仅仅省略广度匹配基准，就足以使报告效果的符号反转。这项标准并非遥不可及的目标：本文的十四个面板、校验和清单，以及可重新生成所有表格和图表的代码均已公开，因此清单中的每一项都可以核查，而非只能相信（https://huggingface.co/datasets/Changahou/GU2026_1, https://github.com/ChenJiahaoJNU/GU2026-11）。

提纲。第 2 节规定符号，区分三种标量化，并记录最小方差基准的精确形式。第 3 节证明不可能性，并衡量 A股面板上的结构性数量。第 4 节表明，半径是一个广度参数。第 5 节包含识别结果。第6节报告实证研究。最后，我们说明这些结果并未表明什么。

与现有文献的关系。有三条相关研究脉络。第一条是关于 Wasserstein 稳健优化的统计理论：有限样本覆盖保证（Mohajerin Esfahani and Kuhn，2018）、避免维数灾难的目标值保证（Gao and Kleywegt，2023）、半径的校准（Aolaritei 等，2026）、方差惩罚机制与完全鲁棒机制之间的相变（Bennouna and Van Parys，2026），以及半径增大时稳健问题的极限行为（Carassus and Wiesel，2025）。我们的结果与这些研究互为补充：我们并不质疑这些保证，而是识别它们在多头投资组合问题中的实际作用，即设定广度上限。

第二条研究脉络是投资组合选择中的估计误差分析：均值是误差的主要来源（Chopra and Ziemba，1993；Best and Grauer，1991），朴素投资组合很难被超越（DeMiguel等，2009），样本有效前沿具有已知的有限样本分布（Kan and Smith，2008），而施加一个先验上不正确的约束，仍可能通过缩小投资组合来降低风险（Jagannathan and Ma，2003）。其中最后一项与我们的结果最为接近：广度上限正是这样一种约束，而我们证明 Wasserstein 惩罚恰好就是一个广度上限。我们的不可能定理进一步深化了第一项研究，并揭示了一个与稳健性相关的方向：问题不仅在于均值难以估计，还在于优化的目标可能纯粹出于风险层面的原因而高度集中，因此无法仅凭估计误差推导出广度保证。

第三条脉络将稳健化与收缩联系起来。在 Wasserstein 模糊集下，稳健投资组合选择问题等价于对协方差估计进行非线性收缩（Nguyen 等，2022）；而在仅做多单纯形上，稳健问题同样等价于一个带有内生有效持仓数量约束的均值–方差问题（定理 5.2），这种等价性体现在目标函数值层面

表2：三种标量化方式中范数的引入位置不同，因此半径所起的作用也不同。仅做多符号表示 Δ 与 $p=1$ 及 $p=2$。

问题	引入范数	仅做多 $p=1$	仅做多 $p=2$
（P）惩罚型	仅目标函数	惩罚项常数； U 不变	$\sqrt{\text{HHI}}$ 的价格
（K）约束型	收益下限	标量下限 $\sqrt{\delta} \le$ 最大值$_i\, \widehat{\mu}_i - r_0$	带广度折减的下限
(2) 精确型	目标函数与下限	仅下限，平移后	两者，惩罚项占主导

。因此，这种等价关系本身并非新发现。新颖之处在于，收缩就是广度选择：由于二者是同一对象，半径不能根据一个未经广度匹配的基准进行校准，而省略这种匹配的比较，实际上衡量的是收缩，却将其称为稳健性。已知结果提供了作用机制；识别失败则是其后果。

2 设置与三种标量化

2.1 符号

令 $\varphi \in \mathbb{R}^N$ 表示投资组合权重， $\Delta = \{\varphi \ge 0,\ \mathbf{1}'\varphi = 1\}$ 表示仅做多单纯形， $C \subseteq \Delta$ 表示一个凸^可行集，该可行集可能包含头寸上限 $\varphi_i \le c$。令 $\widehat{\mu}$ 和 Σ 分别表示样本均值和协方差估计量，并令

$$U(\varphi) = \varphi'\widehat{\mu} - \lambda\varphi'\widehat{\Sigma}\varphi, \qquad \lambda > 0, \tag{1}$$

表示均值—方差目标函数。记 $G(\varphi) = \sqrt{\varphi'\widehat{\Sigma}\varphi}$ 为投资组合标准差，记 $\text{HHI}(\varphi) = \sum_i \varphi_i^2$ 为赫芬达尔—赫希曼指数，因此 $N_{\text{eff}}(\varphi) = 1/\text{HHI}(\varphi)$ 表示有效持仓数量。

2.2 三个问题，而非一个

Blanchet 等（2022）定理1的精确对偶表示为

$$\min_{\varphi \in C} \left(\sqrt{\varphi'\widehat{\Sigma}\varphi} + \sqrt{\delta}\|\varphi\|_p\right)^2 \quad \text{s.t.} \quad \varphi'\widehat{\mu} - \sqrt{\delta}\|\varphi\|_p \ \ge\ r_0. \tag{2}$$

通常使用两个更简单的问题作为替代问题，但二者并不相同：

$$(P) \quad \max_{\varphi \in C}\ U(\varphi) - \tau\|\varphi\|_p, \qquad \tau = \sqrt{\delta}, \tag{3}$$

$$(K) \quad \max_{\varphi \in C}\ U(\varphi) \quad \text{s.t.} \quad \varphi'\widehat{\mu} - \sqrt{\delta}\|\varphi\|_p \ge r_0. \tag{4}$$

(*P*)在目标函数中惩罚广度，(*K*)提高有效收益下限，而(2)兼具这两种作用。从(*P*)转换到(*K*)需要拉格朗日乘子和特定的参数匹配；这并非恒等式，且(2)中的平方运算不能通过“去掉平方”来还原。表2总结了 δ 发挥作用的渠道，三项正式表述将在第4节中给出。

2.3 最小方差基准

下面给出一个精确表达式，这一表达式将在后文反复使用。

命题 2.1 (仿射最小方差)。设 $\Sigma \succ 0$ ，且令 q 在仿射集 $\{\varphi : \mathbf{1}'\varphi = 1\}$ 上使 $\varphi'\Sigma\varphi$ 最小化。则

$$q \ =\ \frac{\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}, \tag{5}$$

$\widehat{}$当且仅当 $\Sigma\mathbf{1} \propto \mathbf{1}$ 时， $q = \mathbf{1}/N$ 。此外，令 $\mu = \bar{\mu}\mathbf{1} + \beta v$、 $\mathbf{1}'v = 0$、 $\|v\|_2 = 1$，则 $\max_{\varphi\in\Delta} U(\varphi)$ 的内部解为

$$\varphi^*(\beta) \;=\; q + \frac{\beta}{2\lambda}\Big[\widehat{\Sigma}^{-1}v - \frac{\mathbf{1}'\widehat{\Sigma}^{-1}v}{\mathbf{1}'\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\,\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\Big], \tag{6}$$

从而

$$\|\varphi^*(\beta)\|_2 \;\le\; \|q\|_2 + C_\Sigma\,|\beta|, \qquad C_\Sigma = \frac{1}{2\lambda}\Big\|\widehat{\Sigma}^{-1}v - \frac{\mathbf{1}'\widehat{\Sigma}^{-1}v}{\mathbf{1}'\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\Big\|_2. \tag{7}$$

证明。 仿射问题的拉格朗日函数给出 $\widehat{\Sigma}\varphi = \nu\mathbf{1}/2$，因此得到（5）；并且 $q = \mathbf{1}/N$ 当且仅当 $\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} \propto \mathbf{1}$ 当且仅当 $\widehat{}$ $\backsim\Sigma\mathbf{1} \propto \mathbf{1}$。对于（6），将约束问题的一阶条件写为 $\mu - 2\lambda\Sigma\varphi = \nu\mathbf{1}$ 并施加$\mathbf{1}'\varphi = 1$；求解 ν 并代入即可得到（6）。取范数并利用三角不等式可得（7）。 □

备注 1。 式（7）是关于阿尔法和广度的自然正向表述：较弱的截面阿尔法并不 意味着等权投资组合。它意味着最优解接近最小方差 基准 q，而偏离程度由风险结构通过 C_Σ控制。通常假设的形式 $\|\varphi^*\|_2 \le N^{-1/2} + C|\beta|$ 需要满足命题 2.1 的附加条件 $\widehat{\Sigma}\mathbf{1} \propto \mathbf{1}$；没有该条件时，正确的基准是 q。

3 广度并非由正定性所蕴含

3.1 不可能性

定理 3.1 (正定性并不蕴含广度)。 令 $N \ge 2$ 和 $\lambda > 0$。任取 $\bar{\alpha} \ge 0$、$L > 1$ 和 $\kappa_0 > 0$。存在一个均值向量 μ，满足 $\|\mu - \bar{\mu}\mathbf{1}\|_\infty \le \bar{\alpha}$，以及一个协方差矩阵 $\Sigma \succ 0$，满足$\lambda_{\min}(\Sigma) \;\ge \kappa_0$，使得在仅做多单纯形上，$U$ 的唯一 最大化解 $\varphi^\star$ 满足 $N_{\text{eff}}(\varphi^\star) \;\le L$。限制条件 $L > 1$ 并非一种弱化：它是必然的，因为在单纯形上有 $N_{\text{eff}} \ge 1$ 。特别地，当 $\bar{\alpha} = 0$ 时，结论仍然成立，也就是说，截面阿尔法离散度为零时亦然。

证明。 取 $\mu = \bar{\mu}\mathbf{1}$（因此 $\bar{\alpha} = 0$），并令 $\Sigma = \mathrm{diag}(\kappa_0, v, \ldots, v)$，其中 $v > \kappa_0$。于是，对于每个 v，都有 $\lambda_{\min}(\Sigma) \;= \kappa_0$。由于 $\bar{\mu}\mathbf{1}'\varphi$ 在 Δ上为常数， U 的最大化解就是最小方差投资组合，根据 (5) 等于

$$q_1 = \frac{v}{v + (N-1)\kappa_0}, \qquad q_j = \frac{\kappa_0}{v + (N-1)\kappa_0} \quad (j \ge 2).$$

因此， $\|q\|_2^2 \to 1$ 和 N_{eff}（q）在 $v \to \infty$时 $\to 1$，而 $\lambda_{\min}$（Σ）保持等于 κ_0。只要 v 足够大，就有$N_{\text{eff}} \le L$。 □

备注 2（该见证并非零相关造成的假象）。 对于任意 $b \ge 0$，将共同因子 $b\mathbf{1}\mathbf{1}'$加入 Σ，不会改变仅做多问题（除一个加性常数外），因为在单纯形上， φ'（$b\mathbf{1}\mathbf{1}'$）$\varphi = b$（$\mathbf{1}'\varphi$）$^2 = b$。因此，即使存在市场因子，该见证依然成立。但若因子载荷具有异质性，该结论便不再成立，因为异质性可以恢复广度；我们并未作出相反的主张，而且第6节的实证面板包含一个强共同成分。

两点说明有助于定位该结果。第一，这一排除结论是精确的：该定理排除了在不控制风险异质性的模型类上统一成立的广度保证；但它并未断言不存在任何形式的广度保证。第二，其作用机制并非阿尔法较大。在阿尔法为零时，最优投资组合完全由风险结构驱动；随着其余资产的方差增大，单个低方差资产会吸收全部资金。对Wasserstein文献而言，这意味着，仅凭分布歧义校准的半径本身无法确定广度，因为目标本身并未被确定。

表3：定理 3.1 的数值检验： $N = 20$, $\kappa_0 = 10^{-4}$ 保持固定（因此谱下界严格为正），且 μ 为常数，即完全不存在截面阿尔法。只有比率 v/κ_0 发生变化。

v	$\lambda_{\min}(\Sigma)$	条件数	最优解的N_{eff}
10^{-3}	1.00×10^{-4}	10	7.07
10^{-2}	1.00×10^{-4}	10^2	1.41
10^{-1}	1.00×10^{-4}	10^3	1.04
10^{0}	1.00×10^{-4}	10^4	1.00

表4：十四个 A股面板上的结构性数量（$N = 255$，60 天滚动窗口，共 140 个不重叠窗口；Ledoit–Wolf 协方差）。 κ_Δ 表示 Σ在超平面 $\mathbf{1}'\varphi = 0$上的最小 Rayleigh商；这是正确的限制，因为两个单纯形投资组合之差始终$\widehat{}$沿着与$\mathbf{1}$正交的方向。仿射最小方差投资组合 q_{aff} 通过仅满足 $\mathbf{1}'\phi = 1$来求解 $\min \phi'\Sigma\phi$，因此忽略了禁止卖空约束；它是该截面所允许的最多元化的最小方差投资组合，我们将其报告为上限参考。

数量	中位数	第10百分位数	第90百分位数
$\|q_{\text{aff}}\|_2$ (仿射最小方差)	0.172	0.138	0.198
N_{eff} 的 q_{aff}	33.8	25.5	52.7
N_{eff} （ Δ上的最小方差）	28.9	18.8	49.6
最小方差投资组合的支撑集大小	52/255	40	80
的条件数 $\widehat{\Sigma}$	224	115	651
$\lambda_{\min}$（ $\widehat{\Sigma}$)	1.43×10^{-4}	7.8×10^{-5}	2.6×10^{-4}
κ_Δ	1.43×10^{-4}	7.8×10^{-5}	2.6×10^{-4}
$\kappa_\Delta/\lambda_{\min}$（ $\widehat{\Sigma}$)	1.00	1.00	1.00

3.2 必须控制什么，以及其数量是多少

定理 3.1表明，任何非平凡的广度陈述都必须至少控制以下因素之一：最小方差基准的广度 $\|q\|_2$ 、风险离散度、条件数、 Σ的受限曲率，或阿尔法的稀疏性。其中，第一项最为自然，而表4报告了其在十四个A股面板上的经验量级。

表4中的两个事实值得强调。首先，基准广度水平较低：在典型窗口中，多头最小方差投资组合在255只股票中仅持有约52只，有效数量约为29；而可进行卖空的仿射解 q_{aff}也仅达到33。8。无论如何， N_{eff} 都比 N低一个数量级。因此，风险异质性在经济意义上相当显著，讨论广度并非学术上的好奇。其次，将曲率常数限制在$\widehat{}$可行方向集内并无影响：在全部140个窗口中，比率 $\kappa_\Delta/\lambda_{\min}(\Sigma)$均等于1。我们在定理中使用这一结果之前，先用真实数据进行了验证，并将其作为一项负面结果报告：将范围限制在单纯形的切空间内以收紧曲率界，并不能带来改进；任何声称有所改进的论文都应给出该比率。

4 半径是一个广度参数

命题 4.1 (内生广度上限)。设 C 非空， $g \geq 0$、 $\tau \geq 0$，并设 $\varphi^\star$ 是 $U(\varphi) - \tau g(\varphi)$在 C上的全局最大化解，假设该解存在。令 $h^\star = g(\varphi^\star)$。则 $\varphi^\star$是一个$\max\{U(\varphi) : \varphi \in C,\ g(\varphi) \leq h^\star\}$的最优解。

证明。 对于任意满足 $g(\varphi) \leq h^\star$ 的 $\varphi \in C$，由 $\varphi^\star$ 的最优性可得 $U(\varphi) - \tau g(\varphi) \leq U(\varphi^\star) - \tau h^\star$，因此 $U(\varphi) \leq U(\varphi^\star) + \tau(g(\varphi) - h^\star) \leq U(\varphi^\star)$。 □

注 3。 该陈述体现的是支撑超平面性质，而不是优化问题之间的等价关系：

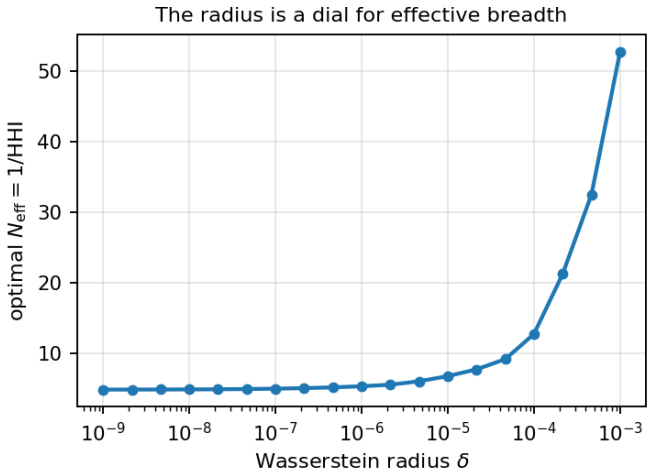

图1：半径是调节广度的旋钮，这是一种经验性描述，而非一一映射关系的陈述。在模拟数据上，给定 $N = 255$、 $T = 60$、 $\lambda = 10$时，惩罚型稳健投资组合的最优有效持仓数量 $N_{\text{eff}} = 1/\text{HHI}$ 随半径 δ变化。根据命题4.2，该映射单调；在经验上相关的范围内，其取值从六变到一百四十。

约束问题可能存在其他优化器，而这些优化器并非惩罚问题的优化器。该陈述的含义是，惩罚问题的解始终可以在不涉及分布不确定性的情况下加以描述。

On 在仅做多单纯形上，给定 $p = 2$ 时，我们有$\|\varphi\|_2^2 =$HHI(φ)，因此惩罚问题可写为

$$\max_{\varphi \in \Delta} \; U(\varphi) - \tau \sqrt{\text{HHI}(\varphi)}, \tag{8}$$

效用与有效广度之间的边际替代率为 $\tau = \sqrt{\delta}$：价格针对的是$\sqrt{\text{HHI}}$，而非 HHI。因此，我们将 τ 称为广度价格。当 $p = 1$ 时，惩罚项在整个范围内恒定于 Δ，因为 $\|\varphi\|_1 = \mathbf{1}'\varphi = 1$；($P$)于是与普通均值—方差问题一致，而($K$)的约束则简化为标量条件 $\sqrt{\delta} \le \max_i \widehat{\mu}_i - r_0$；对于 $r_0 = \mathbf{1}'\widehat{\mu}/N$，该条件变为 $a := \sqrt{\delta}/s(\widehat{\mu}) \le 1$，其中 $s(\widehat{\mu}) = \max_i \widehat{\mu}_i - \mathbf{1}'\widehat{\mu}/N > 0$；仅当 $s(\widehat{\mu}) > 0$时，比率才有定义；若 $s(\widehat{\mu}) = 0$，则条件为$\sqrt{\delta} \le 0$。因此，在仅做多问题中， p 的两个取值不可互换：一个使惩罚项保持恒定，另一个则代表广度价格。

最后，复杂度路径是单调的。

命题4.2（复杂度路径单调）。设 $g \ge 0$, $\tau_2 > \tau_1 \ge 0$，并令 φ_1, φ_2 为在同一个 C 上，分别针对 $U - \tau_1 g$ 和 $U - \tau_2 g$ 的任意全局最大化解。那么 $g(\varphi_2) \le g(\varphi_1)$。

证明。将两个最优性不等式 $U(\varphi_1) - \tau_1 g(\varphi_1) \ge U(\varphi_2) - \tau_1 g(\varphi_2)$ 和 $U(\varphi_2) - \tau_2 g(\varphi_2) \ge U(\varphi_1) - \tau_2 g(\varphi_1)$ 相加。 □

结论仅为单调性。它并未给出唯一性、连续性，也未给出从τ 到广度的一一映射，尤其无法根据观测权重确定 τ； U 的平坦区域或局部恒定的惩罚项会破坏严格单调性。由于 $\|\varphi\|_2$在 $\varphi = \mathbf{1}/N$处唯一取得其最小值 $N^{-1/2}$，当 $\tau \to \infty$时，(P) 的极限行为为等权投资组合，条件是 C为完整单纯形；对于较小的 C，极限为 C的最小范数点，我们不作其他主张。

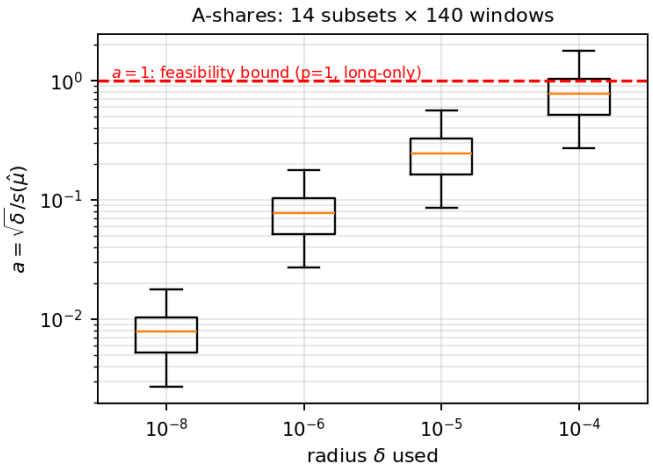

图2：十四个A股面板和140个窗口的半径校准。箱线图展示了四个 δ取值下无量纲比率$a = \sqrt{\delta}/s(\hat{\mu})$的分布；虚线为 $a = 1$，即在 $p = 1$和 $r_0 = \mathbf{1}'\hat{\mu}/N$条件下收益下限问题的可行性边界。

5 识别

5.1 观测等价性

命题 5.1 (观测等价性)。 令 X 表示训练数据， Z 表示测试数据， Y 表示测试期收益率。两种方法生成权重过程 $W_t^A = G_A(X, Z_{1:t-1})$ 和 $W_t^B = G_B(X, Z_{1:t-1})$。如果对于每个 t， $W_t^A = W_t^B$几乎必然成立，并且两种方法采用相同的交易规则、再平衡日期、交易成本、价格和收益率数据，那么由这些可观测量构造的任何统计量 $S = H(X, Z, Y, W)$ 都满足 $S^A = S^B$ 几乎必然成立。

证明。 权重路径一致，因此每笔交易和每个实现收益在路径上都一致；由此构建的所有统计量也都相等。 □

该引理同样重要的一点是，它不 意味着内部优化问题一致，也不意味着样本外预测一致，更不意味着稳健性在理论上毫无意义。它说明，给定所报告的可观测量，一项研究无法将改进归因于稳健性，而不是归因于等价的收缩或约束。

5.2 广度匹配基准

定理 5.2 (内生广度上限)。 设 C 是单纯形 Δ 的非空闭凸子集，设$\lambda > 0$，设 Σ 为半正定矩阵，并设 $\tau > 0$。若 $\varphi_\delta^\star$ 在 $p = 2$ 条件下求解 （3），且 $h^\star = \|\varphi_\delta^\star\|_2$，则 $\varphi_\delta^\star$ 是以下问题的唯一解

$$\max\{\, U(\varphi) \;:\; \varphi \in C,\ \|\varphi\|_2 \le h^\star \,\}. \tag{9}$$

特别地， U（$\varphi_\delta^\star$） $=$最大化$\{\cdots\}$，并且 （9） 中的广度约束在最优解处是有效的。

证明。 令 φ为 (9) 的可行解。(3) 中 $\varphi_\delta^\star$的最优性意味着 $U(\varphi) - \tau\|\varphi\|_2 \le U(\varphi_\delta^\star) - \tau h^\star$，因此 $U(\varphi) \le U(\varphi_\delta^\star) + \tau(\|\varphi\|_2 - h^\star) \le U(\varphi_\delta^\star)$，故 $\varphi_\delta^\star$为最优解，且最优值相同。现在令 φ为 (9) 的任意最优解。则 $U(\varphi) = U(\varphi_\delta^\star)$，代入同一不等式可得 $\tau\|\varphi\|_2 \ge \tau h^\star$，因此$\|\varphi\|_2 = h^\star$，因为 φ 是可行解。假设 $\varphi \ne \varphi_\delta^\star$，并令 $\bar{\varphi} = (\varphi + \varphi_\delta^\star)/2$，由凸性可知其属于 C。单纯形中的两个不同点不可能互为正标量倍数，因此由

欧几里得范数的严格凸性可得 $\|\bar{\varphi}\|_2 < (\|\varphi\|_2 + \|\varphi^\star_\delta\|_2)/2 = h^\star$。 U的凹性意味着 $U(\bar{\varphi}) \geq (U(\varphi) + U(\varphi^\star_\delta))/2 = U(\varphi^\star_\delta)$，因此

$$U(\bar{\varphi}) - \tau\|\bar{\varphi}\|_2 \;>\; U(\varphi^\star_\delta) - \tau h^\star,$$

这与 $\varphi^\star_\delta$ 在（3）中的最优性相矛盾。因此 $\varphi = \varphi^\star_\delta$。 □

备注 4（该定理需要和不需要什么）。 存在性由 C 紧致性推出，而 $\Sigma \succ 0$ 并不 需要：范数项通过以下观察为论证提供了所需的严格凹性，即不同的单纯形点不可能位于同一射线上。头寸上限和活跃非负性约束都被吸收到 C 的法锥中，不会影响该论证；该论证是全局性的，不需要可微性。结论在 $\tau = 0$处失效，此时（3）是普通均值—方差选择，并且可能存在多个最优解。

推论 5.3（乘子对应关系）。 设 $h^\star = \|\varphi^\star_\delta\|_2$。如果将（9）写成带平方约束$\|\varphi\|_2^2 \leq (h^\star)^2$, 的形式，则其径向乘子为 $\nu = \tau/(2h^\star)$；如果将其写成带 $\|\varphi\|_2 \leq h^\star$的形式，则其乘子为 τ。即使存在活跃非负性约束、活跃上限约束和单纯形等式，该对应关系仍然成立，因为法锥项在两个驻点系统中是相同的，只有径向项不同。对于径向值本身，无需对 C 施加约束资格条件：（3）的一阶条件已经在 $\varphi^\star$处提供了一个来自 C 的法向量，而这里的陈述是，相应的驻点条件与$\nu = \tau/(2h^\star)$一起成立。非负性约束和上限约束各自的乘子可能需要诸如线性无关约束资格条件（*LICQ*）之类的资格条件，而上述比较并不需要该条件。

该推论使这一恒等式具有了实际操作意义：广度匹配投资组合可通过求解一个均值–方差问题得到，其中协方差惩罚项为 $\varphi'(\lambda\Sigma + \nu I)\varphi$，且 $\nu = \tau/(2h^\star)\varphi$，因此无需搜索约束。这是针对权重的岭惩罚，只有当 Σ 是恒等矩阵的倍数时，它才等同于提高风险厌恶参数；因此，我们不将其称为风险厌恶程度的变化。第6节以这种形式运用该推论，并报告残差 $\|\varphi^{\mathrm{cap}}(h^\star) - \varphi^\star_\delta\|_2$，作为对求解器的检验。

命题 5.4 (等价关系的适用范围)。 定理 *5.2* 中的等价关系是惩罚标量化(3)的性质。该论证中的任何内容都不能推广到收益下限问题(4) 或精确稳健问题(2)；以下两个论证依次表明，相应的结论是错误的，或无法得出。

对于 (4)，这一说法不成立。取 $N = 2,\quad C = \Delta,\quad \lambda = 1,$

$$\mu = (0, 2)', \qquad r_0 = \mathbf{1}'\mu/N = 1, \qquad \tau = \tfrac{1}{2}, \qquad \Sigma = \mathrm{diag}(1, 3).$$

令 $\varphi(x) = (1-x,\ x)$。那么 $U(\varphi(x)) = 2x - \big((1-x)^2 + 3x^2\big) = -1 + 4x - 4x^2$，其唯一最大值在 $x = \frac{1}{2}$ 处取得。(4) 的可行性条件为

$$2x - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-x)^2 + x^2} \;\geq\; 1.$$

在 $x = \frac{1}{2}$ 处，左侧等于 $1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$；在 $x = 1$ 处，它等于 $\frac{3}{2}$，因此对于某个 $x_0 > \frac{1}{2}$，可行集为 $[x_0, 1]$。由于 U 在 $(\frac{1}{2}, 1]$, 上严格递减，(4) 的唯一优化器为 $\varphi(x_0)$。但是，$\|\varphi(1/2)\|_2 < \|\varphi(x_0)\|_2$，而 $U(\varphi(1/2)) > U(\varphi(x_0))$，因此 $\varphi(x_0)$ 并非 $\max\{U(\varphi) : \varphi \in \Delta,\ \|\varphi\|_2 \leq \|\varphi(x_0)\|_2\}$ 的解。(4) 中的半径同时通过收益项和范数项影响可行性，最终得到的可行集并非欧氏球。

□

该论证不适用于(2)。 命题 4.1 针对的是形如 $U(\varphi) - \tau g(\varphi)$ 的目标函数。(2) 的目标函数是标准差与范数的倍数之和的平方，因此不能采用支撑超平面论证，且 (2) 的解通常不能用单一的径向一阶项来刻画。因此，我们仅声称这种等价关系并不能由此推出；并未声称不存在任何其他形式的等价关系。(2) 的可行集确实会按照其自身定义随 δ 单调收缩，但可行集的单调性并不等同于广度上限表示。

□

表5：在相同六十日窗口上的三种标量化方法。广度以投资组合的欧几里得范数中位数及其隐含的有效持仓数量进行概括；松弛量是相应收益约束左侧减去右侧的值，在解处评估；最后两列分别给出与惩罚型投资组合的欧几里得距离，以及在 $\delta = 10^{-6}$ 下相对于等权投资组合的样本外收益，单位为每天 10^{-4} 。六个面板，六十日估计窗口，10天持有期。

	中位数 $\|\varphi\|_2$	隐含的 N_{eff}	松弛量	相对于等权投资组合的收益
惩罚型（P）	0.375	7.1	–	+45.7
精确型（D）	0.179	31.2	1.7×10^{-3}	+10.8
收益下限型（K）	0.882	1.3	1.2×10^{-2}	+57.5
$\|\varphi^{(P)} - \varphi^{(D)}\| = 0.34$； $\|\varphi^{(P)} - \varphi^{(K)}\| = 0.53$；稳健与广度匹配残差 1.3×10^{-5} （中位数）				

因此，我们将适用范围表述为不能推出，而非不可能：内生广度上限结果适用于惩罚标量化，但不能推广到另外两种方法。第6节并列报告了这三种投资组合，这正是这一限制的经验对应项。

5.3 三种标量化在实践中不可互换

命题 5.4 不仅仅是一个逻辑上的观点。我们在相同的窗口上求解了这三个问题，而它们选择出的持仓组合却截然不同。表5报告了比较结果。惩罚型问题持有的持仓组合，其欧几里得范数中位数为 0.38，约对应七个有效持仓；精确稳健问题持有的持仓组合范数为 0.18，约对应三十一个持仓；而收益下限问题则被推向一个角点，范数为 0.88，约对应一个有效持仓。在样本外，相对于等权投资组合的排序与集中度一致：收益率下限形式为每日 $+57.5$ 基点，惩罚型形式为 $+45.7$ ，而在 $\delta = 10^{-6}$ 时，精确稳健形式为$+10.8$ 。因此，将这三种形式视为可互换，会混淆方向和幅度都截然不同的效应。

表格最后一行记录了该恒等式的准确性：在惩罚型投资组合自身的范数下求解广度匹配问题，其结果与该投资组合的欧几里得距离中位数为 1.3×10^{-5}；而单独实现的范数上限求解器达到其目标范数的误差为 8×10^{-9}。因此，定理 5.2 的恒等式在我们所报告的精度下得到了求解器的满足；这正是我们将其视为检验而非证据的含义。

5.4 权重并未被识别

定理 5.2 确定的是数值，而不是权重。如果约束最大化解不唯一，或者两个解以有限精度计算得到，那么投资组合可能存在差异，而这种差异仅限于目标函数近乎平坦的 $\widehat{\Sigma}$ 个特征方向 $\widehat{\Sigma}$ 。因此， Σ的曲率在本文中发挥着第二重作用，这一作用不同于任何广度界：它决定了半径对权重的影响是否根本可被识别。在下文报告的数值实验中，剩余权重差异介于 10^{-8} 和 5×10^{-3} 之间，而目标函数差异始终处于求解器容差水平；基于实现收益构建的统计量继承的是权重差异，而非目标函数差异。

这对推断有直接影响。当两个投资组合几乎重合时，其收益序列之差的方差几乎为零，因此任何微小的系统性求解器偏差都会产生很大的 t-统计量。因此，仅凭显著性来评估与广度匹配基准的比较并不可靠；恰当的标准是同时考量经济量级和数值上可达到的分辨率，我们会在第6节中明确报告这两项。

5.5 实证研究必须报告的内容

表 1 的审计是这项练习的最简版本，并且只多占一列。综上，若一项研究希望将改进归因于稳健性，至少应报告：(i) 等权重

投资组合；(ii) 基于至少两种协方差估计量的普通均值—方差投资组合；(iii) 定理 5.2 的广度匹配基准，按 N_{eff} 而非半径进行匹配；(iv) 直接的范数约束型投资组合，即在网格上取 h 而非 δ 的式 (3)；(v) 收益下限问题 (4)；(vi) 收缩估计量，包括均值收缩以及向等权投资组合收缩；(vii) 以统一口径衡量换手率、成本和 $\widehat{\ }$ 敞口；(viii) 预先设定的 δ 规则；(ix) $\lambda_{\min}(\Sigma)$ 和 $\|q\|_2$，因为定理 3.1 和第 5 节表明，广度和可识别性受它们支配；以及 (x) 权重映射的逐点相似性，而不只是最终表现。

6 证据

6.1 数据、设计与结构性数量

数据为十四个 A股面板的 $N = 255$ 日收益率，每个面板涵盖2018年3月至2024年1月期间的648个交易日，取自公开的 Stockformer 数据集。投资组合基于60日滚动窗口进行估计，并持有五天，因此样本外收益区块在同一面板内彼此不重叠。除非另有说明，协方差矩阵采用 Ledoit–Wolf（Ledoit 和 Wolf，2004）方法，预期收益采用样本均值，且 $\lambda = 10$ 除非另有说明。

这些面板连同每个文件的 SHA-256校验和清单，以及生成本节所有表格和图表的代码，均公开发布于 https://huggingface.co/datasets/Changahou/ GU2026_1 和 https://github.com/ChenJiahaoJNU/GU2026-11；论文末尾的可用性声明中也再次引用了这两个链接。重新分发的内容仅为日收益率矩阵：不包含价格、标识符、成交量或因子值。

将四个基准与稳健投资组合 $\varphi_\delta^{\mathrm{DRO}}$进行比较：定理5.2中的广度匹配投资组合，采用 $\nu = \sqrt{\delta}/(2h^\star)$；通过求解（4）得到的$\bar{}$收益匹配投资组合，采用 $r_0 = \mathbf{1}'\widehat{\mu}/N$；使用相同 λ的普通均值—方差投资组合；以及等权投资组合。我们将由此得到的样本外平均日收益差称为Rent(·)。

推断有两个特点需要首先说明。第一，对比数量很多：每个面板在两个半径下各包含五条跟踪规则，因此相对于稳健投资组合共有十个对比。为此，我们在每个面板内采用Romano–Wolf逐步下降程序（Romano 和 Wolf，2005）进行调整；零分布中的最大学生化统计量通过平稳区块自助法获得，并且我们报告调整后的p值，而非原始p值。每条跟踪规则的残差都经受住了校正：在这十个对比中，调整后p值的中位数介于0.009和0.025之间，并且对于每个对比，六个面板中有五至六个在百分之五的显著性水平上仍然显著。结论对区块长度具有稳健性，无论区块长度为二十天还是四十天都成立。不过，这些数字还需附带一项 caveat：在若干单元格中，经自助法调整的p值小于解析法得到的p值，这意味着两个方差估计量存在分歧。因此，我们将多重性结论解读为仍然显著的面板数量，而不是精确的p值。第二，各面板在时间上存在重叠。

推断采用 Newey–West异方差和自相关一致标准误（Newey和West，1987），滞后阶数为 max(4HOLD，10)，并使用平稳自助法（Politis和Romano，1994）进行$B = 2000$ 次重抽样，预期区块长度为20；这些方法应用于连续日序列，而非十四个重叠面板。由于十四个面板是同一市场的滚动切片，我们不将其合并用于显著性检验；我们报告一致性计数，并另外将两个不重叠的面板（2018年3月至2020年10月，以及2021年6月至2024年1月）作为独立样本进行报告。

表4已经总结了结构性数量。附录A中的界限还需要通过另外两个诊断指标来进行有益的解读。沿可行方向的平均曲率，$\mathrm{tr}(\Sigma_{1^\perp})/(N-1)$，$\widehat{\ }$超过 $\lambda_{\min}(\Sigma)$，其中位数倍数为4。3；而沿估计误差方向的 Rayleigh商$\varphi^{EW} - \varphi^\star$超过它，其中位数倍数为15。5。因此，任何基于 $\lambda_{\min}$ 构造的界限之所以宽松，归因于最差方向与实际方向之间的差异，而不是可行集，因为 $\kappa_\Delta/\lambda_{\min} = 1$。

表6：相对于四个基准的分布鲁棒性代价，以 10^{-4} 平均日收益率为单位（正值表示稳健投资组合表现更优），涵盖十四个A股面板。“显著性”统计满足以下条件的面板数量：Newey–West t统计量的绝对值超过二，且平稳自助法区间不包含零。最后一列报告稳健投资组合与广度匹配基准之间均值—方差目标函数的样本内差异绝对值的中位数。

	广度匹配		收益匹配		普通均值—方差		等权重	
δ	rent	sig	rent	sig	rent	sig	rent	sig
10^{-6}	$+0.01$	$0/14$	-2.05	$0/14$	-0.60	$1/14$	$+29.82$	$7/14$
10^{-5}	$+0.00$	$0/14$	-2.62	$1/14$	-1.15	$1/14$	$+29.25$	$7/14$
10^{-4}	$+0.00$	$0/14$	-4.75	$1/14$	-5.27	$4/14$	$+24.63$	$7/14$
中位数 $\lvert U(\varphi^B) - U(\varphi_\delta^\star)\rvert$：三个半径下分别为 1.8×10^{-8}、1.2×10^{-9}、8.6×10^{-15}								

6.2 四个基准下的代价

表6报告了十四个面板中的四项事后比较。广度匹配列是上文讨论的准确性检验：根据定理 5.2，它为零；随着半径增大，样本内目标函数差异降至10^{-15}，这正是我们希望由求解器而非数据实现的结果。其他三列更具信息量。与收益匹配基准相比，代价为负；与普通均值—方差方法相比，代价为负，并且在十四个面板中的四个面板上达到 $\delta = 10^{-4}$显著；与等权投资组合相比，代价较大且为正，并在十四个面板中的七个面板上达到显著。

其含义在于，所报告效果的方向和显著性取决于基准，因此，仅报告其中一种比较的研究，实际上报告的是一个其解释依赖于某项未披露选择的数字。相对于等权投资组合的较大正值衡量的是风险优化和广度的价值；负值衡量的是惩罚项带来的收益成本。二者都不是对稳健性的测量，而表 1 的事前检验才真正回答了稳健性问题。

6.3 结果的稳健性

本节采用两种样本设计，二者不应混淆。表6的四基准比较以及随后进行的多设定检验，使用全部十四个面板和五天持有期。表 1 的事前审计和表5的三形式比较，使用前六个面板和10天持有期，因为这些分析要求在每个窗口内进行多次约束求解。因此，两种设计之间的水平不可比较；但各自设计内部的比较是可比的。

这一发现经过八种设置的检验：$\lambda \in \{30, 100\}$，采用OAS和（秩亏的）样本协方差，再平衡期限为一天和二十天；头寸上限为 0.10 和 0.05。在所有设置下，广度匹配代价的中位数绝对值至多为每日 0.01×10^{-4}，且不超过相应收益匹配或等权重效应的 0.1%。有三点值得记录。第一，采用秩亏的样本协方差并未改变结论，这与定理 5.2 仅取决于这一对变量（U, C）相符：优化器不唯一会增大权重差异，但不影响价值恒等式。第二，收紧头寸上限会压缩所有效应：等权重代价从无上限时的每日约 $+29\times10^{-4}$，降至上限为 0.10 时的 $+8.7$，以及上限为 0.05 时的 $+5.7$。第三，在 $\lambda = 30$ 时，尽管广度匹配代价的中位数仅为每日 -0.009×10^{-4}，仍有十二个面板达到显著性；同一批次中的数值目标函数差异最大（5.9×10^{-8}，基线为 10^{-14}），这表明这种显著性是由第 5 节所述的近零方差机制导致的求解器伪影。接下来考察交易成本和两个不相交子期间。

由于十四个面板在时间上存在重叠，我们在两个不重叠的连续面板上重复该分析，并将三十个基点的换手成本计入其中：该成本在每次再平衡时按 ℓ_1 换手率收取一次，并在五天持有期内摊销。表7报告了结果。

由此得出两个结论。首先，在两个

表7：两个不相交子期间，$\lambda = 10$，以 10^{-4} 平均日收益率为单位（括号内为Newey–West t统计量）。广度匹配代价在两个时期均保持为零，而相对于收益匹配基准以及等权投资组合的代价在两个时期之间改变了符号。最后一列加入了三十个基点的成本。

	面板A：2018-03至2020-10			面板B：2021年6月至2024年1月
δ	广度匹配	收益匹配	等权重	广度匹配，扣除成本
10^{-6}	-0.013 (-0.79)	-21.08 (-1.73)	$+50.33$ $(+2.60)$	-0.010 (-0.64)
10^{-5}	-0.017 (-1.33)	-24.54 (-1.88)	$+46.86$ $(+2.61)$	-0.016 (-1.25)
10^{-4}	-0.001 (-1.59)	-36.05 (-2.16)	$+35.36$ $(+2.57)$	$+0.002$ $(+1.19)$
10^{-3}	-0.000 (-0.18)	-59.25 (-2.52)	$+12.16$ $(+2.20)$	$+0.000$ $(+1.85)$
	面板B：2021年6月至2024年1月			面板B，扣除成本
10^{-6}	$+0.010$ $(+1.62)$	$+0.69$ $(+0.05)$	-4.61 (-0.67)	$+0.011$ $(+1.69)$
10^{-5}	$+0.003$ $(+1.38)$	$+0.57$ $(+0.04)$	-4.73 (-0.74)	$+0.004$ $(+1.81)$
10^{-4}	$+0.000$ $(+0.94)$	$+1.27$ $(+0.08)$	-4.03 (-0.78)	$+0.001$ $(+1.90)$
10^{-3}	-0.000 (-0.01)	$+1.80$ $(+0.10)$	-3.50 (-1.24)	$+0.000$ $(+1.30)$
中位数 $\lvert U(\varphi^B) - U(\varphi^\star_\delta)\rvert$：	9.6×10^{-9} (A)，5.6×10^{-9} (B)			

子期间，宽度匹配租金再次处于求解器精度范围内，并且对于任何半径，在 $\lambda = 10$ 处均不显著，而数值目标差距为 10^{-8} 或更小；正如预期，由于两个投资组合的换手率几乎相同，三十个基点的换手成本不会改变这一点。其次，更重要的是，这关系到如何解读相关文献：相对于两个朴素基准的租金在不同子期间之间正负号发生变化：相对于等权投资组合，稳健投资组合在面板A中每日获利 $+50\times10^{-4}$，在面板B中每日亏损 -4.6×10^{-4}。因此，若比较中未报告广度匹配基准，那么它不仅无法说明稳健性，甚至连哪种策略更优都无法得出稳定的结论。

6.4 已知真值模拟

为验证该机制并非经验设计的产物，我们基于一个已知因子模型进行模拟，$r_t = \mu + Bf_t + \varepsilon_t$ 其中包含五个因子，并在$c\,\sigma_i/\sqrt{T}$的资产上设置幅度为$c\,\sigma_i/\sqrt{T}$的稀疏阿尔法；随后，我们评估均值—方差遗憾 U（$\varphi^\star$）$-U$（$\widehat{\varphi}$）相对于真实最优解的表现。在 $N = 255$、$T = 60$、 $\lambda = 10$ 以及300次复现下，遗憾中位数占可实现效用的百分比排序如下：广度匹配最小方差和精确求解的稳健投资组合为83%；等权投资组合为91%；稳健方法加等权投资组合为197%；均值收缩为270%；使用宽半径的惩罚式稳健方法为296%；使用验证集选择半径的惩罚式稳健方法为471%；样本协方差均值—方差方法为548%。相对于广度匹配基准，鲁棒性项的增量为每天 -1.9×10^{-6}，而相对于等权投资组合，宽度倾斜和均值—方差惩罚分别为 -6.1×10^{-4} 和 $+1.3 \times 10^{-3}$：相差三百倍。采用从 t_3 分布中抽取的重尾创新（重新缩放至单位方差）时，在设计网格的全部十六种配置中，排序均未改变：在十六种配置中的每一种配置下，广度匹配最小方差基准和精确求解的稳健投资组合都优于等权投资组合；在标题设定下，它们平均达到可实现效用的83%–86%，而样本均值—方差方法的遗憾则根据 N、 T 和 λ的不同，达到167%–1574%。相对于收益匹配基准，鲁棒性项所付出的代价在每种配置下都维持在每天10^{-6} 的水平，比区分各竞争策略的影响低三个数量级。通过 $\mu \propto \sigma$ 施加风险—收益权衡同样不会改变排序，同时还会降低遗憾水平。需要注意的是，合成实验比较的是收益匹配基准，而非广度匹配基准；广度匹配恒等式则直接在A股面板中得到验证，见表6，其中目标函数间隙至多为 10^{-8}，通常为 10^{-13}。

7 结论

研究发现

只做多均值—方差问题中的Wasserstein 半径是一个广度参数。由于鲁棒化项仅通过投资组合的范数取决于投资组合，惩罚式鲁棒解等价于一个受内生广度上限约束的普通均值—方差解；在单纯形上，该上限的乘子为有效持仓数量定价。定理 5.2将其表述为最优解的等式，并且无需唯一性和正定性假设；推论 5.3则将其转化为单一乘子，因此只需一次求解即可施加该上限，而无需进行搜索。

由此可以得出两个结论。第一，协方差矩阵的谱性质并不能保证广度：当最小特征值严格为正且截面阿尔法为零时，仅做多最优解可能趋近于单一资产，因此，最小方差基准的广度必须作为任何此类保证的明确输入。第二，对于惩罚标量化而言，除广度选择外，半径不携带额外的样本内信息。这种等价性仅限于惩罚标量化：收益下限型问题与精确稳健问题是不同的问题；在我们的数据中，它们分别选择约有七个、三十一个和一个有效持仓的持仓组合。

由于事后比较在构造上是精确的，因此具有信息价值的实证问题在于，事前上限能够恢复多少。表 1 给出了答案：一个跟踪稳健投资组合过去实现广度水平的上限，可以恢复其收益的约五分之四；而每日七至十一个基点的残差在五种跟踪规则下都保持稳定，并且在六个面板中的五个或六个面板中经 Romano–Wolf 校正后仍然成立；相比之下，固定为绝对目标的上限只能恢复四分之一至五分之二。因此，稳健投资组合最好被描述为一种广度规则，其实现水平会随当前窗口而变化，而不是一种稳健性溢价，也不是单一固定的广度。

启示

在实践中，这意味着，仔细校准半径、同时将广度留给校准过程，相当于在两个参数中调节较小的那个。值得选择并报告的量是有效持仓数量，或管理者愿意为此付出的代价；无需引入歧义集，通过范数约束即可直接作出选择。对于相关文献，启示关乎归因，而非方法。稳健投资组合优于基于样本的投资组合这一说法，即便半径完全不起作用，也仍然成立，因为这两种投资组合的广度不同。第 5 节的报告标准旨在让这种差异清晰可见，而且落实起来成本很低：在现有表格中增加两列，即广度匹配基准和隐含的有效持仓数量。对于理论，启示在于，保证鲁棒决策价值的结果本身并不能说明投资组合的构成。要弥合这一差距，要么对可行方向施加曲率条件，如附录A所示；要么采用不同的表述方式，使范数不再作为广度度量，例如包含卖空的多资产设定。

局限性与展望

不可能定理使用对角协方差见证，并证明不存在统一保证；但这并不意味着在经济上合理的结构下无法实现广度保证，而要刻画哪些结构能够实现广度保证，仍是一个开放问题。识别定理是静态的：若存在交易成本或多个时期，可行集就会发生变化，因此必须重新推导论证，不过，该定理所依据的支撑超平面性质对任何凸可行集都成立。实证研究涵盖单一市场和由255只资产构成的单一资产全集；由于十四个面板在时间上有所重叠，推断依据的是各面板内的连续序列以及两个不相交子期间，而非跨面板独立性。最后，我们无法给出分布无关的广度界，附录A对此作了解释：使用样本协方差时，相关曲率为零，任何此类界都毫无实质意义，因此只有结合谱下界可量化的协方差正则化项，才能提供保证

。理论上尚待完成的工作，在于这种结合，而非半径本身。

A 条件宽度界

为完整起见，我们记录在附加结构下可以得出的结论，并先指出使该陈述变得微妙的一点：曲率常数中的协方差矩阵，必须是用于定义所测量间隙对应目标函数的协方差矩阵。有两种可用的陈述，但二者并非同一陈述。

总体陈述。设 $U_\Sigma(\varphi) = \varphi'\mu - \lambda\varphi'\Sigma\varphi$ 满足 $\lambda > 0$ 和 $\Sigma \succ 0$，且令 $\varphi^\star$ 在凸集 C上最大化 U_Σ。如果 $\widehat{\varphi} \in C$ 满足 $U_\Sigma(\varphi^\star) - U_\Sigma(\widehat{\varphi}) \le \epsilon$，那么在 $\varphi^\star$ 处的一阶条件以及模数为 $2\lambda\lambda_{\min}(\Sigma)$ 的强凹性给出

$$U_\Sigma(\varphi^\star) - U_\Sigma(\widehat{\varphi}) \;\ge\; \lambda\,\lambda_{\min}(\Sigma)\,\|\widehat{\varphi} - \varphi^\star\|_2^2, \tag{10}$$

对每个凸 C均成立，包括具有活跃约束和角点的集合；该不等式正是我们要用的陈述，边界最优解无需另行处理。因此

$$N_{\text{eff}}(\widehat{\varphi}) \;\ge\; \Big(\|\varphi^\star\|_2 + \sqrt{\epsilon/(\lambda\lambda_{\min}(\Sigma))}\Big)^{-2}. \tag{11}$$

此处 $\widehat{\lambda}_{\min}(\Sigma)$ is 通常未知，且不能在没有统计论证的情况下用估计量替代 $\widehat{}$。估计陈述。如果相反，ϵ表示样本目标函数 $U(\varphi) = \varphi'\widehat{\mu} - \lambda\varphi'\Sigma\varphi$中的间隙，则同样的$\widehat{}$论证可得出式（11），其中 Σ 和 $\varphi^\star$ 由样本优化器替代。这是可以报告数值的版本。对于 $N = 255$、$T = 60$ 和 $\lambda = 10$，Ledoit–Wolf估计量具有 $\lambda_{\min}(\widehat{\Sigma}) = 2.81 \times 10^{-4}$，因此 $\lambda\lambda_{\min} = 2.81 \times 10^{-3}$；样本优化器具有 $\|\varphi^\star\|_2 = 0.1796$；并且对于 $\epsilon = 10^{-3}$、10^{-4}、10^{-5}、10^{-6}，界分别等于 1。66、7。37、17。5 和 25。4。

这一差异带来三个注意事项。第一，刚才引用的数值是关于估计问题的陈述，而不是总体保证；总体广度保证要求已知 $\lambda_{\min}(\Sigma)$，或拥有其有效的下置信界，而我们两者都没有。第二，ϵ 必须是进入曲率常数的目标函数的间隙，而不是代理问题的价值保证。第三，对于样本协方差，当 $T - 1 < N$时，最小特征值会消失，此时常数为零，界也就失去了意义；因此，只有结合协方差正则化项，并且其谱下界可以量化时，才能得到这种形式的广度保证。这种结合，而不是半径，才是剩余理论工作的所在。

B 我们考察并搁置的路径

$\widehat{}$为保持透明度，我们记录四条未能产生可用结果的路径。(i) 将 $\lambda_{\min}(\Sigma)$ 替换为限制在可行方向上的曲率常数并无帮助，因为该比率在全部 140 个窗口上均为 1（表4）。(ii) 命题 2.1 的内部展开是精确型的，但其定义域在我们的数据上为空：仿射最小方差投资组合具有负权重，因此仅做多约束在 $\beta = 0$ 处处于激活状态，并且不存在使闭式解可行的 β。(iii) 使用平均曲率 $\text{tr}(\Sigma_{1^\perp})/(N-1)$ 代替最坏情况曲率，可将界改善约四倍，但它不是任意方向上的曲率下界，并且需要对误差方向作出分布假设，而我们无法确立这些假设。(iv) 头寸上限并不会使范数惩罚项恒定；界 $\|\varphi\|_2 \le \sqrt{c}$ 成立，但 (0.6,0.4, 0) 和 $(0.6, 0.2, 0.2)$ 均满足 0.6 的上限，其平方范数分别为 0.52 和 0.44。

数据和代码可用性

本文中的所有数字均可通过两项公开资源复现。第6节的14个A股收益面板已发布，并附有逐文件SHA-256校验和清单，网址为 https://huggingface.co/

datasets/Changahou/GU2026_1。生成结构性数量、审计结果、租金和图表的代码，以及用于生成表格的归档输出和构建过程中发现的实现错误日志，均可在 https://github.com/ChenJiahaoJNU/GU2026-11 获取。重新分发的内容仅有日收益率矩阵：不含价格、标识符、成交量或因子值；生成这些面板的上游基准则引自数据集卡片。

参考文献

Aolaritei, L., Shafiee, S. 和 Dörfler, F., 分布鲁棒优化的最优半径。*Mathematical Programming*，2026 年，即将出版。Bennouna, A. 和 Van Parys, B.P.G., 随机规划的数据驱动表述：相变。*Mathematical Programming*，2026 年，**219**，705–797。Best, M.J. 和 Grauer, R.R., 均值—方差有效投资组合对资产均值变化的敏感性：一些分析与计算结果。*Review of Financial Studies*，1991 年，**4**，315–342。Blanchet, J., Chen, L. 和 Zhou, X.Y., 基于 Wasserstein距离的分布鲁棒均值—方差投资组合选择。*Management Science*，2022 年，**68**，6382–6410。Carassus, L. 和 Wiesel, J., 最优投资组合的稳健性。*Finance and Stochastics*，2025 年，**29**，519–551。Chopra, V.K. 和 Ziemba, W.T., 均值、方差和协方差误差对最优投资组合选择的影响。*Journal of Portfolio Management*，1993 年，**19**，6–11。DeMiguel, V., Garlappi, L. 和 Uppal, R., 最优分散化与朴素分散化：1/N投资组合策略的效率有多低？*Review of Financial Studies*，2009 年，**22**，1915–1953。Gao, R. 和 Kleywegt, A.J., 基于 Wasserstein距离的分布鲁棒随机优化。*Mathematics of Operations Research*，2023 年，**48**，603–655。Jagannathan, R. 和 Ma, T., 大型投资组合中的风险降低：为何施加错误的约束反而有帮助。*Journal of Finance*，2003 年，**58**，1651–1683。Kan, R. 和 Smith, D.R., 样本最小方差前沿的分布。*Management Science*，2008 年，**54**，1364–1380。Ledoit, O. 和 Wolf, M., 一种适用于大维协方差矩阵的条件良好估计量。*Journal o*

f

多元分析，2004，**88**，365–411。Mohajerin Esfahani, P. 和 Kuhn, D.，利用 Wasserstein 度量进行数据驱动的分布鲁棒优化：性能保证与可处理的重新表述。*Mathematical Programming*，2018，**171**，115–166。Newey, W.K. 和 West, K.D.，一种简单的半正定异方差与自相关稳健协方差矩阵。*Econometrica*，1987，**55**，703–708。Nguyen, V.A.、Kuhn, D. 和 Mohajerin Esfahani, P.，分布鲁棒逆协方差估计：Wasserstein分布鲁棒投资组合问题。*Operations Research*，2022，**70**，490–515。Politis, D.N. 和 Romano, J.P.，平稳自助法。*Journal of the American Statistical Association*，1994，**89**，1303–1313。Romano, J.P. 和 Wolf, M.，将逐步多重检验作为正式化的数据窥探。*Econometrica*，2005，**73**，1237–1282。