arXiv:2611.30053v1 [cond-mat.stat-mech] 23 Nov 2026

轨迹弧长揭示热力学临界性

Javier Jim´enez-L´opez[1,2,*] and V. J. Garc´ıa-Garrido[2,†]
[1] *Vrije Universiteit Brussel, Brussels, Belgium*
[2] *Departamento de Física y Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Alcalá, 28805 Alcalá de Henares, Madrid, Spain.*(日期: 2026年11月24日)

热力学临界性出现在连续相变中，此时集体相互作用会使热力学极限下的平衡热力学量呈现非解析行为。我们表明，这种临界性也会在微观哈密顿轨迹的弧长中留下可解析预测的特征。对于吸引型哈密顿平均场模型，我们推导了平衡平均弧长的热力学极限，并将其表述为归一化拉格朗日描述子；结果表明，它恰好在相变处形成一个拐点。我们将这种非解析性归因于自发磁化，并推导出主要的临界有限尺寸修正，其标度关系为 $N^{-1/2}$，且具有明确的解析前因子。具有多达 10^5 个自由度的模拟验证了这两项预测，且无需调整参数。轨迹弧长的计算既不需要切空间演化，也不需要预先指定序参量，因此提供了一种简单、定量的方式，将微观哈密顿运动与集体热力学临界性联系起来。

引言——临界现象揭示了微观自由度之间的相互作用如何在热力学极限下产生非解析的宏观行为 [1, 2]。然而，数值模拟必然涉及有限系统和有限观测时间，因此人们开始寻找能够保留可辨识临界性特征的微观观测量。一个根本问题是，能否直接从哈密顿轨迹中提取这类特征，并对其进行解析刻画。

微观哈密顿动力学与热力学相变之间的联系，已通过混沌不稳定性得到广泛研究。Caiani 等人发现，在三维经典 XY 模型 [3], 的相变附近，李雅普诺夫指数和几何观测量呈现出特征性行为；晶格 ϕ^4 模型和长程哈密顿系统 [4–6]中也得到了相关发现。Pettini及其合作者提出的几何方法，将哈密顿不稳定性与底层力学流形的曲率涨落联系起来 [7, 8]。对于哈密顿平均场（HMF）模型，人们已获得最大李雅普诺夫指数的解析估算和非平凡的有限尺寸标度律 [9, 10], ；其他相关研究则将该模型的平衡相变与构型空间拓扑的变化联系起来 [11]。此外，微正则方法阐明了如何通过涉及哈密顿量及其导数的动力学平均来恢复热力学量[12, 13]。这些结果表明，哈密顿动力学与平衡热力学之间存在密切联系，但常规的李雅普诺夫指数计算需要演化切空间动力学。

一个更直接的可能性是考察哈密顿轨迹累积的弧长。拉格朗日描述符（LD）通过沿轨迹对标量观测量进行积分来构造，已被用于揭示相空间中的不变结构 [14, 15]。近来，有研究表明，在适当假设下，归一化时间平均相空间弧长可通过其有限时间收敛性和涨落特性区分规则运动与混沌运动 [16]。对于哈密顿流 $\dot{\mathbf{z}} = X_H(\mathbf{z}) = \mathbb{J}\nabla H(\mathbf{z})$，在固定的无量纲正则坐标中，欧几里得速度满足 $\|X_H\| = \|\nabla H\|$，从而在基于轨迹的观测量与等能面上的平衡平均值之间建立了直接联系。这引出了一个自然的问题：如此简单的观测量是否也能表征集体热力学临界性?

本研究通过在吸引型 HMF 模型[17]中，建立微观哈密顿动力学与平衡临界性之间可解析控制的联系，对这一问题给出了肯定的回答。以往的研究将相变与李雅普诺夫不稳定性及构型空间拓扑的变化联系起来；而我们表明，临界性编码在一个可直接计算的轨迹观测量中：时间平均相空间弧长。通过将瞬时平方速度精确表示为守恒能量和集体观测量的函数，我们推导出其平衡态热力学极限，并证明它恰好在临界能量处出现折点。再

值得注意的是，尽管底层哈密顿流平滑，这种非解析性仍源于自发磁化的出现。我们进一步推导出了领先阶临界有限尺寸修正，其按 $N^{-1/2}$ 标度，并带有明确的解析前因子且无需任何可调参数。这些结果在微观轨迹运动、平衡对称性破缺与临界涨落之间建立了直接的定量联系。由于评估这一观测量既不需要切空间传播，也不需要预先知道某个或-

其他参数，我们的研究结果为探测多体哈密顿系统中的平衡临界性提供了一条计算上简便的途径。

哈密顿弧长描述符。—拉格朗日描述符是沿轨迹积分的可观测量，其对初始条件的依赖揭示了相空间中的不变结构 [14, 18]。它们的空间变化也被用于通过比较相邻轨迹来区分规则动力学与混沌动力学[19–21]或通过计算对初始条件的导数[22, 23]。

考虑具有N 个自由度的自治哈密顿量 $H_N(\mathbf{q},\ \mathbf{p})$。在固定的无量纲正则坐标 $\mathbf{x}\ =(\mathbf{q},\ \mathbf{p})$下，哈密顿方程可写为：

$$\dot{\mathbf{x}} = X_{H_N}(\mathbf{x}) = J\,\nabla H_N(\mathbf{x}), \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中，X_{H_N} 为哈密顿向量场，I_N 为 N阶单位矩阵。我们考虑正向弧长 LD 及其归一化时间平均：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f(\mathbf{x}_0,\tau) &= \int_0^\tau \|X_{H_N}(\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_0))\|\ \mathrm{d}t, \\ \Omega_N(\mathbf{x}_0,\tau) &= \frac{\mathcal{L}_f(\mathbf{x}_0,\tau)}{\tau\sqrt{N}}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中，$\|\cdot\|$ 表示所选坐标中的欧几里得范数。当相空间速度的平方是广延量时，因子 $N^{-1/2}$ 可得到强度量可观测量。

先前研究表明，该可观测量的有限时间收敛和涨落性质能够提供有关规则动力学与混沌动力学的信息 [16]。本文考察其另一个方面：平衡期望对能量和系统大小的依赖性。对于不变的微正则测度$\mu_{N,\ e}$ 在每粒子能量为 $e = H_N/N$时，平稳性给出以下精确恒等式：

$$\langle \Omega_N(\cdot,\tau)\rangle_{\mu_{N,e}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\langle |X_{H_N}|\rangle_{\mu_{N,e}}\ , \quad (3)$$

对于任意 $\tau > 0$ 均成立，与遍历性无关。

从计算角度来看，求取 Ω_N 只需积分哈密顿方程并使用一个标量累加器。一旦获得哈密顿向量场，计算其欧几里得范数只会为每个采样状态增加 $O(N)$ 次运算，无需传播切空间动力学。与需要积分变分方程 [24], 的李雅普诺夫指数计算不同，弧长描述符易于应用于具有大量自由度和庞大轨迹集合的系统。不过，其总体计算成本取决于哈密顿量以及统计收敛所需的积分时间。

哈密顿平均场模型——哈密顿平均场模型是研究长程相互作用系统中的集体现象、哈密顿混沌和平衡相变的典型系统 [17, 25, 26]。它由 N 个全局耦合的经典转子组成，其角坐标为 $\theta_i \in [0, 2\pi)$，共轭动量为 p_i，并由以下哈密顿量支配：

$$H_N(\boldsymbol{\theta},\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2} + \frac{J}{2N}\sum_{i,j=1}^{N}\left[1-\cos(\theta_i-\theta_j)\right], \quad (4)$$

其中，J 决定相互作用强度及其符号，而 $1/N$ 归一化确保能量具有广延性。对于吸引相互作用（$J > 0$），该模型会经历从低能磁化相到高能均匀相的连续平衡相变 [17, 27, 28]。在总动量为零的参考系中，临界温度为 $T_c = J/2$，对应的临界能量密度为 $\mathcal{U}_c = 3J/4$。人们已通过李雅普诺夫指数和哈密顿流的几何性质研究这一相变与微观混沌之间的关系 [5, 9, 11]。在无碰撞平均场极限下，动力学由 Vlasov方程支配，该方程也为理解长寿命准稳态提供了理论框架 [29–32]。

在此，我们将注意力限制在吸引情形，并建立平衡临界性与相空间轨迹弧长之间的解析联系。我们的方法将哈密顿流的瞬时平方速度表示为集体可观测量的函数，随后利用平衡浓度确定其热力学极限，并通过大偏差展开推导出主导的临界有限尺寸修正 [33, 34]。

理论推导。—我们首先引入磁化矢量：

$$\mathbf{M} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\cos\theta_i, \sin\theta_i) = M(\cos\phi, \sin\phi)\,, \quad (5)$$

其中，M 和 ϕ 分别表示其模长和方向。利用恒等式：

$$\sum_{i,j}\cos(\theta_i-\theta_j) = N^2M^2\ , \quad (6)$$

我们可以将哈密顿量改写为：

$$H_N = \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2} + \frac{JN}{2}(1-M^2)\,. \quad (7)$$

能量密度 $\mathcal{U} = H_N/N$ 守恒，而磁化强度通常沿哈密顿轨迹演化。运动方程为：

$$\dot{\theta}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -JM\sin(\theta_i-\phi)\,, \quad (8)$$

归一化弧长描述量变为：

$$\Omega_N(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\dot{\theta}_i^2+\dot{p}_i^2\right)\right]^{1/2}\mathrm{d}t\,. \quad (9)$$

根据哈密顿方程和能量守恒，瞬时相空间速度的平方满足以下精确恒等式：

$$\frac{\|X_{H_N}\|^2}{N} = 2\mathcal{U} - J + \left(J + J^2A_N\right)M^2, \quad (10)$$

其中:

$$A_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin^2(\theta_i-\phi). \tag{11}$$

因此，弧长描述符完全可以用守恒能量密度和集体观测量表示:

$$\Omega_N(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sqrt{2\mathcal{U}-J+\left[J+J^2A_N\right]M^2}\,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

这一精确关系为将磁化强度的平衡行为与热力学极限以及 Ω_N 的临界有限尺寸修正联系起来提供了起点。

在热力学极限下 $N\to\infty$ 平均场描述变得精确 [35, 36] ，平衡态在正则系综和微正则系综中相同，由单粒子分布描述 [17, 25, 26, 33, 37–39]:

$$f_{eq}(\theta,p) = \frac{\sqrt{\beta}}{(2\pi)^{3/2}I_0(\beta JM)} \times \exp\left[-\beta\left(\frac{p^2}{2}-JM\cos(\theta-\phi)\right)\right], \tag{13}$$

其中， $\beta=T^{-1}$ 是逆温度， I_n 是 n 阶修正贝塞尔函数。我们始终假设系统已弛豫至这一状态，即未陷入准稳态 [40]。该分布可分解为动量的高斯分布，其中 $\langle p^2\rangle = 1/\beta$，以及:

$$\rho(\theta) = \frac{\exp(\beta JM\cos(\theta-\phi))}{2\pi I_0(\beta JM)}, \tag{14}$$

对于角度分布，其在 ϕ 处于 $M>0$ 时呈峰状，在 $M=0$ 时则为均匀分布。自洽条件为:

$$M = \langle\cos(\theta-\phi)\rangle = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}, \tag{15}$$

其中 $z=\beta JM$。在有序分支（$M>0$）上，利用I_0（z）$-I_2$（z）$=$（$2/z$）I_1（z）[41]:

$$A_N \to \langle\sin^2(\theta-\phi)\rangle = \frac{1}{2}\left[1-\frac{I_2(z)}{I_0(z)}\right] = \frac{1}{\beta J}. \tag{16}$$

在均匀分支上， $A_N\to 1/2$ 且 $M\to 0$。在两个相中，平衡浓度满足:

$$\Omega_\infty = \sqrt{\langle p^2\rangle + J^2M^2\langle\sin^2(\theta-\phi)\rangle} = \sqrt{T(1+JM^2)}, \tag{17}$$

并通过 $\mathcal{U} = T/2+(J/2)\ (1-M^2)$ 消去温度后，我们得到:

$$\Omega_\infty = \sqrt{(2\mathcal{U}-J+JM^2)(1+JM^2)}. \tag{18}$$

临界点由方程(15)得出。由于$I_1(z)/I_0(z)$ $= z/2-z^3/16+\mathcal{O}(z^5)$，满足 $M>0$ 仅当 $\beta J>2$ 时才存在，且系统在 [17, 26]处发生二阶相变:

$$T_c = \frac{J}{2}, \quad \mathcal{U}_c = \frac{3J}{4}, \tag{19}$$

其中 $M>0$ 当 $\mathcal{U}<\mathcal{U}_c$ 且 $M=0$ 当 $\mathcal{U}\geq\mathcal{U}_c$。因此，$\Omega_\infty$ 由下方的式（18） $\mathcal{U}_c$ 给出:

$$\Omega_\infty(\mathcal{U}) = \sqrt{2\mathcal{U}-J} \quad \text{if} \quad \mathcal{U}\geq\mathcal{U}_c, \tag{20}$$

它在相变处连续，此时Ω_∞（$\mathcal{U}_c$）$=\sqrt{J/2}$。然而，其导数不连续。在$\mathcal{U}_c$以上，式（20）给出 $\mathrm{d}\Omega_\infty/\mathrm{d}\mathcal{U} =$ $(2\mathcal{U}-J)^{-1/2}$。在其以下，对式（15）的展开式求逆可得 $z=2M+M^3+\mathcal{O}$（M^5），即 $\beta J = 2+M^2+\mathcal{O}$（$M^4$），因此:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_c - \frac{5J}{8}M^2+\mathcal{O}(M^4), \tag{21}$$

因此，定义 $\delta=\mathcal{U}_c-\mathcal{U}>0$:

$$\Omega_\infty^2 = T(1+JM^2) = \frac{J}{2}+\frac{2}{5}(2J-1)\,\delta+\mathcal{O}(\delta^2). \tag{22}$$

临界能量处的单侧导数为:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Omega_\infty}{\mathrm{d}\mathcal{U}}\right|_{\mathcal{U}_c^-} = \frac{\sqrt{2}\,(1-2J)}{5\sqrt{J}}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\Omega_\infty}{\mathrm{d}\mathcal{U}}\right|_{\mathcal{U}_c^+} = \sqrt{\frac{2}{J}}, \tag{23}$$

它们的差为:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Omega_\infty}{\mathrm{d}\mathcal{U}}\right|_{\mathcal{U}_c^+} - \left.\frac{\mathrm{d}\Omega_\infty}{\mathrm{d}\mathcal{U}}\right|_{\mathcal{U}_c^-} = \sqrt{\frac{2}{J}}\,\frac{4+2J}{5}, \tag{24}$$

对每一个 $J>0$ 都严格为正：Ω_∞ 在 $\mathcal{U}_c$ 处存在折点，因而揭示了相变。

由于热力学极限无法在数值上达到，我们现在推导 Ω_N 如何趋近于 Ω_∞ 在临界能量处。对于 $\tau\to\infty$，式（9）中的时间平均由微正则平均代替:

$$\langle\Omega_N\rangle = \left\langle\sqrt{2\mathcal{U}-J+JM_N^2(1+JA_N)}\right\rangle. \tag{25}$$

在 $\mathcal{U}_c$ 处，磁化强度标度为 $M_N\sim N^{-1/4}$ [10, 42,43], ，这也可由下文式（32）得到。将平方根按 M_N^2的幂次展开，其中 $2\mathcal{U}_c-J=J/2$与 $A_N\to 1/2$，我们得到:

$$\langle\Omega_N(\mathcal{U}_c)\rangle = \sqrt{\frac{J}{2}}+\sqrt{\frac{J}{2}}\left(1+\frac{J}{2}\right)\langle M_N^2(\mathcal{U}_c)\rangle + o(N^{-1/2}), \tag{26}$$

其中被忽略的项分别为 $\langle M_N^4\rangle\sim N^{-1}$和 $\langle M_N^2$（$A_N-1/2)\rangle$阶。为求得 $\langle M_N^2$（$\mathcal{U}_c$）$\rangle$，我们采用固定 $P=\sum_i p_i = 0$时的微正则磁化强度分布，与模拟中的做法相同。在固定 $\mathcal{U}$ 和 M 时，$K=$（$N/2$）（$2\mathcal{U}-J+JM^2$）。动量约束移除了一个独立分量，因此有:

$$\int\delta\left(\sum_i p_i\right)\delta\left(K-\frac{1}{2}\sum_i p_i^2\right)\mathrm{d}^Np \propto K^{(N-3)/2}, \tag{27}$$

由此可得，保留 N 的首阶项时，每个粒子的动能熵为：

$$s_K(\mathcal{U}, M) = \frac{1}{2}\log(2\mathcal{U} - J + JM^2) + \alpha\,, \tag{28}$$

其中，α 与 M 和 $\mathcal{U}$无关。动量约束会改变次领先项，但不会改变下文的领先临界振幅。

具有磁化强度 M 的角度构型数由在固定 M条件下最概然的角度分布决定，其形式为式（14），其中 βJM 由拉格朗日乘子 z 取代，并由$M = I_1(z)/I_0$（z确定。因此，每个粒子的构型熵为：

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{conf}}(M) &= -\int_0^{2\pi} \rho(\theta)\log\rho(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \log\left[2\pi I_0(z)\right] - zM\,. \end{aligned} \tag{29}$$

利用 $z = 2M + M^3 + \mathcal{O}(M^5)$ 可得：

$$s_{\mathrm{conf}}(M) = \log(2\pi) - M^2 - \frac{1}{4}M^4 + \mathcal{O}(M^6)\,. \tag{30}$$

每个粒子的总熵为 $s = s_K + s_{\mathrm{conf}}$。在临界能量 $s_K = \frac{1}{2}$处，$\log(J/2) + M^2 - M^4 + \alpha + \mathcal{O}(M^6)$，因此 M^2中的各项恰好抵消，并且：

$$s(\mathcal{U}_c, M) = s(\mathcal{U}_c, 0) - \frac{5}{4}M^4 + \mathcal{O}(M^6)\,, \tag{31}$$

与 J无关。由于在指数领先阶上，$P_N(\mathbf{M}) \propto \exp\left[Ns(\mathcal{U}, M)\right]$ [34],在 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_c$处：

$$P_N(\mathbf{M}) \propto \exp\left(-\frac{5N}{4}M^4\right)\,, \tag{32}$$

在临界窗口 $M = O(N^{-1/4})$ 内的领先阶上；更高阶的熵项和平滑前因子会产生次领先修正。由于 $\mathrm{d}^2\mathbf{M} = M\,\mathrm{d}M\mathrm{d}\phi$,

$$\langle M_N^2(\mathcal{U}_c)\rangle \sim \frac{\int_0^\infty \mathrm{d}M\, M^3\, e^{-5NM^4/4}}{\int_0^\infty \mathrm{d}M\, M\, e^{-5NM^4/4}} = \frac{2}{\sqrt{5\pi N}}\,, \tag{33}$$

将其代入式（26），即可得到最终结果：

$$\langle \Omega_N(\mathcal{U}_c)\rangle = \sqrt{\frac{J}{2}} + \frac{(2+J)\sqrt{J}}{\sqrt{10\pi N}} + o(N^{-1/2})\,. \tag{34}$$

结果——所有结果均在无量纲相空间坐标下计算，转子转动惯量取单位值，且$J = 1$。LD 使用这些坐标下的欧几里得范数定义。初始条件由固定$H = N\mathcal{U}$且总动量为零 $P = \sum_i p_i = 0$的独立微正则蒙特卡罗链生成。随后，每条轨迹均采用辛算法 [44]，以步长 $h = 0.05$ 积分 $\tau = 2\cdot 10^4$ 时间单位。图中的括号表示独立副本上 $\Omega_N(\tau)$ 的平均值，误差棒表示 95% 置信区间。

图1 展示了能量依赖关系 $\langle\Omega_N\rangle$ 以及不同系统大小下的热力学预测。模拟再现了相变两侧的不同表现：$\langle\Omega_N\rangle$ 在整个有序相中递减，在均匀相中递增，并逐渐趋近于方程（18）和（20）给出的两条解析分支。两者在 $\mathcal{U}_c$处相交，从而使热力学极限曲线出现折点。在有限 N下，这种非解析性必然会被临界涨落抹平，转而在 $\mathcal{U}_c$附近形成平滑的极小值。数值平均值高于热力学预测的部分，如下方面板中，该值在此临界区域达到最大，并随着 N 增大而系统性地减小。因此，有限系统大小的数据展现出预期的交叉行为：从平滑的有限-N 可观测量过渡到不可微的热力学极限。重要的是，有限-N 的最小值本身并非相变判据；相反，随着系统大小增大，其逐步变尖锐，并趋近于在 $\mathcal{U}_c$ 处解析预测的非解析性。

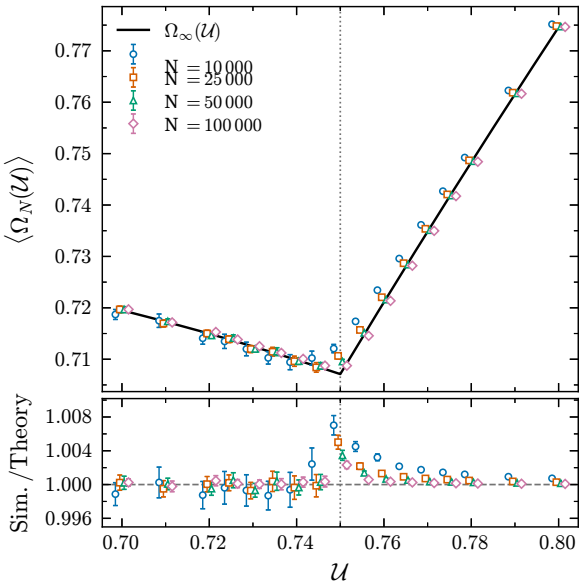


图1. 能量依赖关系：$\langle\Omega_N(\mathcal{U})\rangle$，对应 $J = 1$ 以及不同的系统大小 N，临近临界能量 $\mathcal{U}_c = 0.75$；临界能量以竖直虚线标出。下方面板显示模拟结果与由方程（18）和（20）给出的理论预测之比。每个数据点取自 64 个独立副本的平均值，每个副本积分 $\tau = 2\cdot 10^4$时间单位。误差棒表示 95% 置信区间。为便于观察，各符号在水平方向上略微错开。

在临界能量处，可以定量检验这种圆整效应。图2 比较了 $\langle\Omega_N(\mathcal{U}_c)\rangle$ 与式（34）的渐近预测。平均值从下方趋近热力学值 $1/\sqrt{2}$，其主导修正与 $N^{-1/2}$成正比。对于 $N \geq 10^3$，数值结果在其置信区间内与解析表达式一致；而对于 $N = 100$，观察到的微小偏差与次主导有限尺寸贡献相符。重要的是，指数和振幅都不是通过模拟拟合得到的：

二者均由上文推导的微正则临界涨落决定。因此，这种一致性直接检验了将临界磁化涨落与哈密顿轨迹几何性质联系起来的机制，而不只是检验一种经验性的有限尺寸标度律。

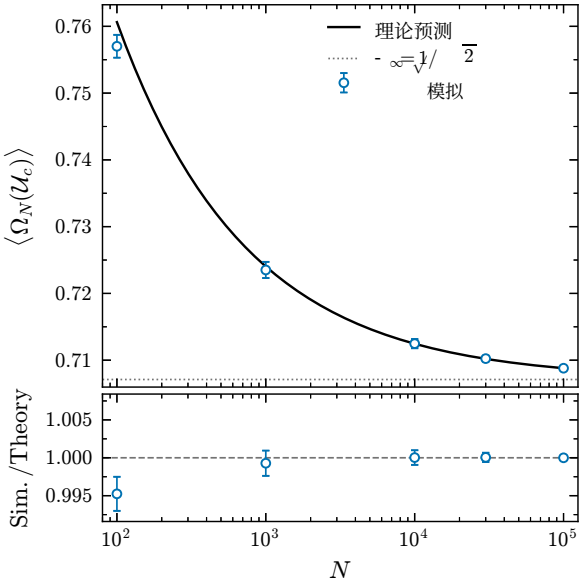


图 2. $\langle \Omega_N(\mathcal{U}_c) \rangle$ 在 $J = 1$ 临界能量 $\mathcal{U}_c = 0.75$处的系统尺寸依赖性。实线表示由式（34）给出的领先阶渐近预测，而水平虚线标示热力学极限 $1/\sqrt{2}$。下方面板显示模拟结果与渐近预测的比值。每个数据点取 100 个独立副本的平均值，每个副本积分 $\tau = 2 \cdot 10^4$ 个时间单位。误差棒表示 95% 置信区间。

结论。—我们通过时间平均的相空间轨迹弧长，建立了微观哈密顿运动与热力学临界性之间的解析联系。对于吸引型哈密顿平均场模型，我们证明，这一观测量在热力学极限下恰好在平衡相变处出现折点。关键的是，这种非解析性源于自发磁化强度的出现，而非底层哈密顿运动方程中的任何奇异性。相空间速度与集体观测量之间的精确关系揭示了这一机制，并将临界磁化涨落与领先阶有限尺寸修正联系起来；我们解析地推导出该修正遵循 $N^{-1/2}$ 定律，并给出明确的前因子。涉及多达 10^5 个粒子的数值模拟无需可调参数，证实了这两项预测。

更广泛地说，我们的结果展示了平衡有序化和临界涨落如何编码在一种简单的单轨迹观测量中。与基于李雅普诺夫指数的方法不同，计算弧长描述符既不需要进行切空间传播，也无需预先确定序参量。尽管临界奇异性的表现必须针对每个系统加以确立，但其背后的分析框架为研究更一般的多体哈密顿系统中的相变提供了一条途径。结合其在动力学表征方面已得到证实的应用，这些发现表明，轨迹弧长有望成为连接微观动力学与涌现集体行为的纽带。

致谢。—作者谨此感谢阿尔卡拉大学的 S´aez Landete 教授提供计算资源，使得开展数值模拟成为可能，为本文所呈现的结果提供了支持。

* javier.jimenez.lopez@cern.ch †
vjose.garcia@uah.es（通讯作者）

[1] K. Huang, *Statistical Mechanics*，第2版（John Wiley & Sons，纽约，1987）。[2] K. G. Wilson，重整化群与临界现象。I. 重整化群与 Kadanoff 标度图像，《物理评论B》4，3174（1971）。[3] L. Caiani、L. Casetti、C. Clementi 和 M. Pettini，动力学几何、李雅普诺夫指数与相变，《物理评论快报》79，4361（1997），arXiv:chao-dyn/9702011。[4] L. Caiani、L. Casetti、C. Clementi、G. Pettini、M. Pettini 和 R. Gatto，经典晶格 ϕ^4 理论中的动力学几何与相变，《物理评论E》57，3886（1998）。[5] V. Latora、A. Rapisarda 和 S. Ruffo，具有长程力的系统中的李雅普诺夫不稳定性与有限尺寸效应，《物理评论快报》80，692（1998）。[6] V. Latora、A. Rapisarda 和 S. Ruffo，哈密顿平均场模型中的混沌与统计力学，《物理学D：非线性现象》131，38（1999）。[7] L. Casetti、M. Pettini 和 E. G. D. Cohen，哈密顿动力学与统计力学的几何方法，《物理学报告》337，237（2000）。[8] G. Pettini、M. Gori 和 M. Pettini，从哈密顿动力学几何到相变拓扑：综述，《熵》26，840（2024）。[9] M.-C. Firpo，发生相变的平均场模型中李雅普诺夫指数的解析估算，《物理评论E》57，6599（1998），arXiv:chao-dyn/9803024。[10] F. Ginelli、K. A. Takeuchi、H. Chat´e、A. Politi 和 A. Torcini，哈密顿平均场模型中的混沌，《物理评论E》84，066211（2011）。[11] L. Casetti、E. G. D. Cohen 和 M. Pettini，平均场模型中相变的拓扑起源，《物理评论快报》82，4160（1999）。[12] H. H. Rugh，温度的动力学方法，《物理评论快报》78，772（1997）。[13] R. Franzosi，具有第一积分的系统的几何微正则热力学，《物理评论E》85，050101（2012）。[14] A. M. Mancho、S. Wiggins、J. Curbelo 和 C. Mendoza，拉格朗日描述符：揭示一般时变动力系统相空间结构的方法，《非线性科学与数值模拟通讯》18，3530（2013）。

merical Simulation 18, 3530（2013）。[15] S. Wiggins 和 V. J. Garc´ıa-Garrido，利用拉格朗日描述符这一计算工具描绘动力系统的相图，《美国数学学会通报》69，936（2022）。[16] J. Jim´enez-L´opez 和 V. J. Garc´ıa-Garrido，轨迹弧长揭示混沌（ 2026 2602 07660 ），[ ] arXiv: . nlin.CD . [17] M. Antoni 和 S. Ruffo，哈密顿长程动力学中的聚类与弛豫，《物理评论E》52，2361（1995）。[18] C. Lopesino、F. Balibrea-Iniesta、V. J. Garc´ıa-Garrido、S. Wiggins 和 A. M. Mancho，拉格朗日描述符的理论框架，《分岔与混沌国际期刊》27，1730001（2017），arXiv:1705.10213。[19] M. Hillebrand、S. Zimper、A. Ngapasare、M. Katsanikas、S. R. Wiggins 和 C. Skokos，利用拉格朗日描述符量化混沌，《混沌》32，123122（2022），arXiv:2208.09853。[20] S. Zimper、A. Ngapasare、M. Hillebrand、M. Katsanikas、S. R. Wiggins 和 C. Skokos，基于拉格朗日描述符的混沌诊断方法的性能：在四维标准映射中的应用，《物理学D：非线性现象》453，133833（2023），arXiv:2305.00978。[21] J. Jim´enez-L´opez 和 V. J. Garc´ıa-Garrido，一种基于相邻轨道拉格朗日描述符差值的简易混沌指标，《分岔与混沌国际期刊》36，2630018（2026），arXiv:2506.16660。[22] J. Daquin、R. P´edenon-Orlanducci、M. Agaoglou、G. Garc´ıa-S´anchez 和 A. M. Mancho，利用拉格朗日描述符实现全局动力学可视化：在离散系统与连续系统中的应用，《物理学D：非线性现象》442，133520（2022），arXiv:2206.04467。[23] A. C˘aliman、J. Daquin 和 A.-S. Libert，利用微分代数改进拉格朗日描述符对混沌的检测，《物理学D：非线性现象》472，134506（2025）。[24] C. Skokos，李雅普诺夫特征指数及其计算，载于 *Dynamics of Small Solar System Bodies and Exoplanets*，J. J. Souchay 和 R. Dvorak 编（《物理学讲义》，第790卷，施普林格，柏林、海德堡，2010年），第63–135页。[25] P. H. Chavanis、J. Vatteville 和 F. Bouchet，与自引力系统相似的简单模型的动力学与热力学：HMF模型，《欧洲物理学杂志B：凝聚态与复杂系统》46，61（2005）。[26] A. Campa、T. Dauxois 和 S. Ruffo，具有长程相互作用的可解模型的统计力学与动力学，《物理学报告》480，57（2009）。[27] T. Dauxois、V. Latora、A. Rapisarda、S. Ruffo 和 A. Torcini，*Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions*（施普林格，柏林、海德堡，2002年），第458–487页。[28] T. Dauxois、P. Holdsworth 和 S. Ruffo，反铁磁平均场中的系综等价性破缺xy模型，《欧洲物理学杂志B：凝聚态与复杂系统》16，659 (2000)。[29] A. Antoniazzi、F. Califano、D. Fanelli 和 S. Ruffo，《探索哈密顿模型的热力学极限：向Vlasov方程的收敛》，《物理评论快报》98, 150602 (2007)。[30] J. Barr´e、F. Bouchet、T. Dauxois、S. Ruffo 和 Y. Y. Yamaguchi，《Vlasov方程与哈密顿平均场模型》，《物理学A：统计力学及其应用》365, 177 (2006)，arXiv:cond-mat/0511070。[31] W. Braun 和 K. Hepp，《相互作用经典粒子 $1/n$ 极限下的Vlasov动力学及其涨落》，《数学物理通讯》56, 101 (1977)。[32] H. Spohn，*Large Scale Dynamics of Interacting Particles*，《物理学教材与专著》（施普林格·柏林·海德堡，柏林，海德堡，1991）。[33] J. Barr´e、F. Bouchet、T. Dauxois 和 S. Ruffo，《应用于长程相互作用系统的大偏差技术》，《统计物理学杂志》119, 677 (2005)。[34] H. Touchette，《统计力学的大偏差方法》，《物理报告》478, 1 (2009)。[35] J. Messer 和 H. Spohn，《等温Lane-Emden方程的统计力学》，《统计物理学杂志》29, 561 (1982)。[36] W. Braun 和 K. Hepp，《相互作用经典粒子 $1/n$ 极限下的Vlasov动力学及其涨落》，《数学物理通讯》56, 101 (1977)。[37] S. Inagaki，《修正Konishi-Kaneko系统的热力学稳定性》，《理论物理进展》90, 577 (1993)。[38] P.-H. Chavanis，《HMF模型中等温分布的动力学与热力学稳定性》(2010)，arXiv:1007.4916 [cond-mat.stat-mech]。[39] T. Manos 和 S. Ruffo，《哈密顿平均场模型的李雅普诺夫指数随系统大小的标度关系》，《输运理论与统计物理》40, 360 (2011)，https://doi.org/10.1080/00411450.2011.651035。[40] Y. Y. Yamaguchi、J. Barr´e、F. Bouchet、T. Dauxois 和 S. Ruffo，《Vlasov方程的稳定性判据与HMF模型的准稳态》，《物理学A》337, 36 (2004)。[41]美国国家标准与技术研究院，NIST数学函数数字图书馆，https://dlmf.nist.gov/（2026年15日，2026年1月2日8日，10月29日），版本. . 9月，第. .：递推关系与导数。[42] R. Botet、R. Jullien 和 P. Pfeuty，《无限配位系统的尺寸标度》，《物理评论快报》49, 478 (1982)。[43] R. Botet 和 R. Jullien，《无限配位系统的大尺寸临界行为》，《物理评论B》28, 3955 (1983)。[44] H. Yoshida，《高阶辛积分器的构造》，《物理学快报A》150, 262 (1990)。