arXiv:2611.30056v1 [math.GT] 23 Nov 2026

$H(n)$-纽结弧的戈尔迪安图及其商：格罗莫夫双曲性

M. M. Alikbarov，A. YU. VESNIN

Abstract. 本文研究纽结弧图上的 $H(n)$-变换及相应的$H(n)$-戈尔迪安图。我们证明，纽结弧的 $H(n)$-戈尔迪安图不是 Gromov 双曲的。我们还考察纽结弧的 $H(n)$-戈尔迪安图在以下纽结弧不变量下的商图：结环高度、仿射指标多项式跨度、不变量 $H_K(t,\ y,\ z)$ 的y-跨度和 z-跨度，以及琼斯多项式的跨度。我们证明，在所有这些情形下，商图都是 Gromov 双曲的。

1. Introduction

纽结理论中最初将戈尔迪安图定义为这样一种图：其顶点对应三维球面中的结（结的同痕类）；若对应的结存在只相差一次交叉变换的图，则这两个顶点相邻。“戈尔迪安”一词源于交叉变换是一种解纽操作，也就是说，任何结的图都可以通过有限次此类变换转化为平凡纽结的图。结 K 和 K' 之间的戈尔迪安距离 $d_G(K,K')$ 定义为将 K 的图变换为 K'的图所需交叉变换次数的最小值，其中最小值是在 K 和 K'的所有图中取。记 $\mathcal{K}$ 为三维球面 S^3中所有结组成的集合；于是 $(\mathcal{K},d_G)$ 是一个度量空间 [Mu]。文献 [GG, Th. C]，证明了图 $(\mathcal{K},d_G)$ 不是 Gromov 双曲的 [Gr]。文献 [HU], 引入了纽结戈迪安复形的概念。具体而言，纽结戈迪安复形是一个单纯复形，其顶点对应纽结；若对于所有不同的顶点对 $i,j\in\{0,1,\dots,n\}$，均有 $d_G(K_i,K_j)=1$，则由 $n+1$ 个顶点 $\{K_0,K_1,\dots,K_n\}$ 构成一个 n-单形。随后，纽结理论中还研究了纽结图上的其他解纽操作，从而将戈尔迪安图的概念扩展到这些变换。文献 [GPV, GKPV, HKOS, HNT, KPV, ZYL]研究了虚纽结和焊接纽结上的解纽操作所对应的戈尔迪安图及戈迪安复形的性质。

本文研究 H（n）变换对纽结弧图的作用，以及相应的 H（n）-戈尔迪安图。在大型图和复杂网络的研究中，例如参见 [BRSV、KPKVB]，人们非常关注一个图是否为Gromov双曲。纽结理论的背景下，文献 [JLM] 证明了 H（n）-纽结戈尔迪安图不是Gromov双曲的。

我们证明，类似的性质也适用于纽结弧的 $H(n)$-戈尔迪安图。然而，从戈尔迪安图转向由各种结环不变量得到的商图时，情况可能会有所变化。具体而言，我们考察纽结弧的 $H(n)$-戈尔迪安图的商图

Date：2026年11月24日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 57K12。*Key words and phrases.* 纽结弧、戈尔迪安图、格罗莫夫双曲性， H（n）变换。该工作在俄罗斯科学院西伯利亚分院索 Sobolev数学研究所的国家任务框架下完成（项目编号：FWNF-2026-0031）。

这些商图由以下结环不变量确定：结环高度、仿射指标多项式跨度、不变量 $H_K(t,\ y,\ z)$的 y-跨度和 z-跨度，以及琼斯多项式的跨度；我们证明，在所有这些情形下，商图都是 Gromov双曲的。

本文组织如下。第 2 节回顾度量空间的 Gromov 双曲性定义以及结的 $H(n)$-戈尔迪安图的概念，并综述关于该图结构的已知结果。第 3 节回顾 Turaev 于 2012 年引入的纽结弧概念，定义纽结弧的 $H(n)$-戈尔迪安图，并证明这些图不是 Gromov 双曲的，见定理 3.1。第 4 节回顾几种已知纽结弧不变量的定义与性质：纽结弧的结环高度 [Tu], 仿射指标多项式跨度 [GuKa],以及不变量 $H_K(t,y,z)$ [FLV] 的 y- 跨度和 z- 跨度。第 5 节引入一个无限族的螺旋结状曲线 S_m，其图中有 $2m$ 个交叉点，并计算它们的第 4 节所述不变量的值。第 6 节和第 7 节分别证明，按第 4 节的不变量取商后得到的纽结弧 $H(n)$-戈尔迪安图的商图具有 Gromov 双曲性（见定理 6.1），以及按纽结弧琼斯多项式的跨度取商后得到的图具有 Gromov 双曲性（见定理 7.1）。

2. Gromov hyperbolicity and Gordian graphs of knots

我们将采用 Gromov 给出的四点条件来定义双曲性 [Gr]。

定义 2.1. [BH，第 III.H.1 章，第410] 度量空间 (X,d) 称为 δ-双曲的，如果任意四个点 $x,y,z,w\in X$ 均满足以下不等式：

$$d(x,y)+d(z,w)\le \max\{d(x,z)+d(y,w),d(x,w)+d(y,z)\}+\delta. \tag{1}$$

度量空间称为*Gromov*双曲，如果存在 $\delta\ge 0$ 使得该空间是 δ-双曲的.

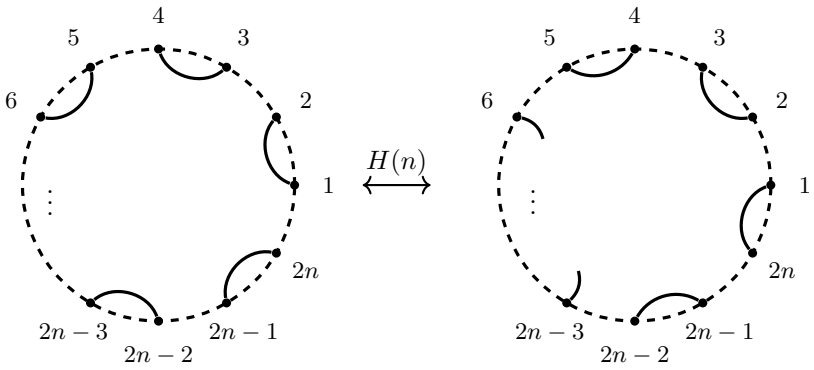
In t在格罗莫夫双曲性的研究中，拟等距这一概念发挥着至关重要的作用.

定义 2.2. 设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 是度量空间。映射 $f\colon X\to Y$（不一定连续）称为拟等距，如果存在常数 $A\ge 1$、$B\ge 0$ 和 $C\ge 0$，使得以下性质成立：

1. 对任意两个点 $x,x'\in X$，
$$\frac{1}{A}\cdot d_X(x,x')-B\le d_Y(f(x),f(x'))\le A\cdot d_X(x,x')+B.$$
2. 对每个点 $y\in Y$，都存在一个点 $x\in X$，使得 $d_Y(f(x),\ y)\le C$。

命题 2.1. [JLM，Pr. 1] 设 $f\colon (X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是测地度量空间之间的拟等距映射。若 (X,d_X) 是*Gromov*双曲的，则 (Y,d_Y) 也是*Gromov*双曲的。

在 [HNT], 中，定义了结图上的 $n\ge 2$、H（n）-移动，见图 1，并证明了它们是解纽操作，即任意纽结的图都可以通过有限次 H（n）-移动、Reidemeister 变换和平面同痕变为平凡纽结的图。在此，我们只考虑那些将纽结图变为纽结图的 H（n）-移动。由于这些移动是解纽操作，对于任意两个纽结，它们的图都可以通过有限次 H（n）-移动、Reidemeister 变换和平面同痕相互变换。我们定义纽结 K 与 K' 之间的 H（n）-距离 $d_{H(n)}$（K，K'）为将 K 的图变为 K' 的图所需的 H（n）- 移动的最少次数，其中最小值取遍这两个纽结的所有图。在 [HNT 中，引理 1], 指出，对于任意 $n\ge 2$，一次 H（n）-移动都可以通过一次 H（$n+1$）-移动实现。



图示中的 FIGURE 1. (H)-移动。

定义 2.3。 设 $n \geq 2$。 H（n）-戈尔迪安图，记为 Γ（H（n））， 是一个简单图，其顶点是 S^3 中的纽结；如果 K 的某个图可以通过一次 H（n）-移动，并在必要时结合 Reidemeister 变换和平面同痕，变为 K' 的某个图，则纽结 K 和 K' 由一条边连接。

由于 $H(n)$-移动是一种解纽操作，图 $\Gamma(H(n))$ 是连通的。赋予其度量 $d_{H(n)}(K,\ K')$ 后，它便成为一个测地度量空间。在该度量下，两个顶点之间的距离等于图中连接它们的最短路径长度。对于结的 $H(n)$-戈尔迪安图，以下性质成立。

命题 2.2。 [JLM，推论 2] 对于任意 $n \geq 2$，结的 $H(n)$-戈尔迪安图 $\Gamma(H(n))$ 与 $\Gamma(H(2))$准等距。

在 [ZYL], 中已证明，对于 p 中的任意一个 0-单形 $H(n)$-戈迪安复形 $\mathcal{G}_{H(n)}$，存在一个单形 σ，其维数可以任意大，且 p 是 σ 对所有 $n \geq 2$都是子复形。在 [JLM],中，研究了结的 $H(n)$-戈尔迪安图是否为 Gromov双曲；具体而言，得到了以下结果。

定理 2.1。 [JLM，定理 1] 对于 $n \geq 2$， $H(n)$-戈尔迪安图 $\Gamma(H(n))$ 并非 *Gromov* 双曲。

除了纽结的戈尔迪安图之外，通过某些纽结不变量取商得到的图也值得关注。

定义 2.4。 设 $\Gamma(H(n))$ 为纽结的 $H(n)$-戈尔迪安图，且 Inv 为一个纽结不变量。 $\Gamma(H(n))$ 关于不变量 Inv 的商图 记作 $\Gamma(H(n),$ Inv)，它是一个简单图，其顶点为纽结 $[K]$ 的等价类；若两个纽结 K_1 和 K_2 满足 Inv(K_1) =Inv(K_2)，则它们等价。若存在这两个等价类的代表元，可通过一次 $H(n)$-变换相互变换，则这两个等价类 $[K_1]$ 和 $[K_2]$ 之间有一条边。

在下一个命题中，Alexander 多项式 $\Delta(t)$（定义见 [Li]）被用作纽结不变量 Inv。

命题 2.3。 对于 $n \geq 2$，记 $\Gamma(H(n)\ \Delta)$ 为按 *Alexander* 多项式 $\Delta(t)$对纽结的 $H(n)$-戈尔迪安图$\Gamma(H($ $n))$ 取商所得的商图。那么图 $\Gamma(H(n)\ \Delta)$ 是

(1) 对 而言是 6-双曲的，

(2) 对 和 而言是 2-双曲的，(3) 对 而
言是 0-双曲的。

证明。将 $[K]_\Delta$ 记为 Alexander 多项式与结 K的 Alexander 多项式相同的纽结等价类，并将 $d_{H(n)}([K],[K'])$ 记为 $\Gamma(H(n)\ \Delta)$ 中的距离。如 [HNT，定理 2], 所示，一次交叉变换可由两次 H(2)-移动实现。在 [Ko], 中已证明，对于任意结 K，存在一个结 $K' \in [K]_\Delta$，它与平凡纽结 U相距一次交叉变换，这意味着 $d_{H(2)}([K]_\Delta,[U]_\Delta) \le 2$。因此，对于任意纽结 K和 L，有 $d_{H(2)}([K]_\Delta,[L]_\Delta) \le d_{H(2)}([K]_\Delta,[U]_\Delta) + d_{H(2)}([U]_\Delta,[L]_\Delta) \le 4$。

在 [JLM，定理 5], 证明了 m通过 $H(n)$-变换可以由单个$H((n-1)m+1)$-变换实现。因此，对于任意纽结 K和 L，有以下估计：

$$d_{H(3)}([K]_\Delta,[L]_\Delta) \le 2, \qquad d_{H(4)}([K]_\Delta,[L]_\Delta) \le 2 \qquad \text{and} \qquad d_{H(n)}([K]_\Delta,[L]_\Delta) \le 1 \tag{2}$$

对于 $n \ge 5$。

考虑 $\Gamma(H(n)\ \Delta)$ 中的四个顶点 x、y、z、w，并令

$$M = \max\{d(x,z)+d(y,w), d(x,w)+d(y,z)\}.$$

若 $M=0$，则 $x=z$，$y=w$，$w=x$，且 $z=y$。在此情形下，不等式（1）左端为零，因此对任意 $\delta \ge 0$，不等式（1）均成立。

若 $M=1$，则不失一般性，可设 $d(x,\ z)=1$ 且 $d(y,\ w)=0$。由于$d(x,\ w)+d(y,\ z) \le 1$，因此可能出现以下情形：

(1) $d(x,w)=0$ 且 $d(y,z)=0$；于是 $x=w$ 且 $y=z$，结合 $y=w$ 可得 $x=z$，这与 $d(x,z)=1$ 矛盾；因此此情形不可能。(2) $d(x,w)=1$ 且 $d(y,z)=0$；于是 $y=z$，结合 $y=w$ 可得 $y=z=w$；因此不等式（1）的左端等于 1，对任意 $\delta \ge 0$，不等式（1）均成立；(3) $d(x,w)=0$ 且 $d(y,z)=1$；于是 $x=w$，结合 $y=w$ 可得 $x=y=w$；因此不等式（1）的左端等于 1，对任意 $\delta \ge 0$，不等式（1）均成立。

现在令 $M \ge 2$。令 D 为图 $\Gamma(H(n)\ \Delta)$ 的直径。那么，不等式 (1) 的左边不超过 $2D$，而右边至少为 $2+\delta$，因此对任意 $\delta \ge 2D-2$，不等式 (1) 均成立。由 (2) 可知，直径 D 有限。具体而言，对于 $\Gamma(H(2)\ \Delta)$，有 $D \le 4$，因此为满足 $\delta \ge 2D-2$，可令 $\delta=6$；对于 $\Gamma(H(3)\ \Delta)$ 和 $\Gamma(H(4)\ \Delta)$，有 $D \le 2$，因此可令 $\delta=2$；对于满足 $n \ge 5$ 的 $\Gamma(H(n)\ \Delta)$，有 $D \le 1$，因此可令 $\delta=0$。证明完毕。□

在 [FMS], 的性质 H按与琼斯多项式相关的各种不变量取商所得的 (2)-纽结戈尔迪安图 $V(t)$ 得到了研究。记 **跨 度**(V) 为琼斯多项式的跨度。

定理 2.2. [*FMS*，定理 *4.7*] 将 $\Gamma(H(n), span(V))$ 记为纽结的 $H(n)$-戈尔迪安图按琼斯多项式 $V(t)$ 的跨度 *span(V)* 所得的商图。那么，对于某个 $\delta \ge 0$，图 $\Gamma(H(n), span(V))$ 是 δ-双曲的。

3. Gordian graphs of knotoids

回顾一下，纽结弧由 V. G. Turaev 于 2012 年在 [Tu] 中引入。具体而言，在定向曲面 S 上的纽结弧被定义为定向区间的浸入图的等价类 $[0,1]$ 到 S，并在双重点处赋予上/下交叉信息。图示的等价性取模于 Reidemeister 变换。纽结弧可视为纽结的自然推广。纽结上的许多运算，尤其是 $H(n)$-移动，都自然地延拓

到 2-球面上的纽结弧类，这类纽结弧也称为球面结拟体。下文所讨论的所有纽结弧均假定为球面纽结。

纽结弧图的 $H(n)$-移动的定义与纽结图的定义类似。这里，我们只考虑那些将纽结弧图变为纽结弧图的 $H(n)$-移动。 $H(n)$-移动也是纽结弧的一种解结操作。 [HNT] 中关于纽结的证明可以原封不动地沿用。回想一下，该证明蕴含不等式 $d_{H(n)}(K,K') \geq d_{H(n+1)}(K,K')$。仿照图 $\Gamma(H(n))$，我们定义纽结弧的 $H(n)$-戈尔迪安图 $G(H(n))$。为区分 $\Gamma(H(n))$和 $G(H(n))$中的距离，我们分别用 $d^{\Gamma}_{H(n)}$ 和$d^{G}_{H(n)}$ 表示前者和后者中的距离。

设 $D \subset S^2$ 是球面纽结 K的一幅图。 D 的一条捷径是 S^2 中的一条路径 α，它连接尾端与头端，横截地穿过 D，且不与交叉点相交。（端点不视为交点。）按照 [Tu], ，我们将 D 的一幅图 K 对应到两个纽结 K_+ 和 K_-；它们的图是通过用捷径 α连接 D 的端点得到的，其中第一种情形下， α 在与 D的每个交点处都位于 D 上方，第二种情形下， α 位于 D下方。如 [Tu], 所示，纽结 K_+ 和 K_- 与 K 的图 D 的选取以及捷径 α的选取无关。设 ϕ 是一个映射，它将纽结 K 对应到纽结弧 $\phi(K)$；后者是通过从纽结图上一个非交叉点处删去一个小邻域得到的。 [Tu], 中证明了 ϕ 是单射。我们称 $\phi(K)$为纽结型类纽结。显然， $\phi(K)_+ = \phi(K)_- = K$，因为可以将映射$\phi$下被删去的弧选作 α；根据定义，该弧不与 $\phi(K)$的图相交。

引理 3.1. 设 K 和 K' 是球面 S^2上的两个纽结弧。那么对于任意 $n \geq 2$，以下不等式成立:

$$d^{G}_{H(n)}(K,K') \geq \max\{d^{\Gamma}_{H(n)}(K_-,K'_-), d^{\Gamma}_{H(n)}(K_+,K'_+)\}.$$

证明. 假设纽结弧 K 和 K' 的图 D 和 D' 由一系列 $H(n)$-移动相联系。构造纽结 K_- 和 K'_-的图。在与处理 D相同的区域，对 K_-的图应用 $H(n)$-移动。如果连接 D 端点的弧 α 进入某次移动的区域，我们就使用第二和第三类 Reidemeister 变换将它推到区域之外。由于 α 经过 D下方，这总是可行的。因此，将 K_- 的图变为 K'_-的图所需的 $H(n)$-移动次数，不会超过将 D 变为 D' 所需的次数。因此，纽结 K_- 和 K'_- 在 $\Gamma(H(n))$中的距离，不大于纽结弧 K 和 K' 在$G(H(n))$中的距离。纽结 K_+ 和 K'_+ 的情形可类似处理。□

引理 3.2. 设 K 和 K' 是 S^3中的两个纽结，且令 ϕ 为将纽结映射到纽结型类纽结的映射。那么 $d^{\Gamma}_{H(n)}(K,K') = d^{G}_{H(n)}(\phi(K)\ \phi(K'))$.

证明。 假设纽结 K 和 K' 对应于图 $\Gamma(H(n))$和$d^{\Gamma}_{H(n)}(K,K') = s > 0$中的不同顶点。我们证明，在 $\Gamma(H(n))$中连接这些顶点的最短路径 $K = K_0, \ldots, K_s = K'$，映射为在 $G(H(n))$中连接分别对应于纽结弧 $\phi(K)$和 $\phi(K')$的顶点的最短路径 $\phi(K) = \phi(K_0) \ldots, \phi(K_s) = \phi(K')$。

首先，让我们验证路径 $\phi(K_0) \ldots, \phi(K_s)$ 位于 $G(H(n))$ 中。实际上，由于映射 ϕ 不依赖于被移除邻域的点的选择，在每个 K_i 中，我们都可以选择这样一个点，使其某个邻域位于应用 $H(n)$-移动的区域之外。

现在让我们验证这条路径是最短的。反设在 $G(H(n))$ 中存在一条路径 $N_0, \ldots, N_t$，连接纽结弧 $N_0 = \phi(K)$ 和 $N_t = \phi(K')$，且满足 $t < s$。于是

$d^G_{H(n)}(\phi(K)\ \phi(K'))< s = d^\Gamma_{H(n)}(K,K')$. 根据映射 ϕ 的定义，可知 $\phi(K)_-$ 和 $\phi(K')_-$ 分别是纽结 K 和 K'。因此，根据引理 3.1，我们有

$$t \geq d^G_{H(n)}(\phi(K),\phi(K')) \geq d^\Gamma_{H(n)}(K,K') = s.$$

这与假设 $t < s$ 矛盾。因此， $t = s$，且路径 $\phi(K_0)\dots,\phi(K_s)$ 是 $G(H(n))$ 中连接拟纽结 $\phi(K)$ 和 $\phi(K')$ 的所有路径里长度最短的路径。□

定理 3.1. 设 $G(H(n))$ 为拟纽结的 $H(n)$-戈尔迪安图，其中 $n \geq 2$。那么，图$G(H(n))$ 不是 *Gromov*双曲的。

证明。我们证明，对于任意 $\delta \geq 0$，在 $G(H(n))$ 中存在一组顶点四元组 x, y, z, w，使得不等式 (1) 不成立。我们在对应于结类型纽结弧的顶点中寻找这样的四元组。由于根据定理 2.1，图 $\Gamma(H(n))$ 不是 Gromov双曲的，对于任意 $\delta \geq 0$，存在一组顶点四元组 a, b, c, d，属于 $\Gamma(H(n))$，分别对应于某些纽结 K_1, K_2, K_3, K_4，使得不等式

$$d(a,b) + d(c,d) \leq \max\{d(a,c) + d(b,d), d(a,d) + d(b,c)\} + \delta \tag{3}$$

不成立。将纽结型类纽结 $\phi(K_1)$、$\phi(K_2)$、$\phi(K_3)$、$\phi(K_4)$与这些结对应起来。取x、y、z、$w \in G(H(n))$为与这些纽结弧对应的顶点。由引理 3.2， $d^G_{H(n)}(\phi(K)\ \phi(K')) = d^\Gamma_{H(n)}(K,K')$，故所需性质成立。□

4. Some invariants of knotoids

4.1. 纽结弧的高度。 设 α 是纽结弧图 $D \subset S^2$的一条捷径。当然，每个纽结弧图都有许多捷径。对于每个图 D 和捷径 α，高度 $h(D,\ \alpha)$是与 α的交点数。

定义 4.1。 对于球面纽结 K，其高度 $h(K)$是对其所有图 D 和捷径 α取高度 $h(D,\ \alpha)$的最小值。

根据定义，球面纽结的高度是一个不变量。纽结弧的高度被称为**复杂度**，见 [Tu]。

根据 [Tu]，我们回顾球面结拟体连通和的定义。

定义 4.2。 设 D 和 D' 是球面结拟体 K 和 K' 的图（各自位于一个球面上）。在图 D的头端附近，切除一个小圆盘邻域，使其边界与 D 交于一点。类似地，在图 D'的尾端附近切除一个小圆盘邻域。沿边界粘合所得的穿孔球面，并识别位于边界上的D 和 D' 的点。由此得到一个新图 $D\#D'$，其等价类称为纽结弧 K 和 K'的连通和 $K\#K'$。

显然，连通和 $K\#K'$ 定义良好，且不依赖于图示的选择D 和 D'。此外，球面纽结 K 与平凡纽结 U作连通和后保持不变： $K\#U = K$和 $U\#K = K$。在 [Tu], 中，证明了以下性质。

定理 4.1. [Tu, 定理 4.3] 对于任意球面结拟体 K 和 K'，等式 $h(K\#K') = h(K) + h(K')$ 成立，其中 $K\#K'$ 表示 K 与 K'的连通和。

4.2. 仿射指标多项式。 仿射指标多项式 $P_K(t)$ 是纽结弧的不变量，其定义见 [GuKa]。

令 c 为纽结弧 D 的图 K中的一个交叉点。函数 $\mathrm{sgn}(c)$ 根据交叉点类型，将数值 $+1$ 或 -1 赋给该交叉点，如图2所示。

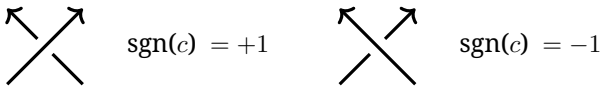


FIGURE 2. 交叉点符号。

多项式 $P_D(t)$ 的构造方法是：按照图3 所示的规则，为图中每条弧赋予整数标记，该规则适用于每个交叉点邻域。标记规则与交叉点类型无关。这种标记通常称为*Cheng*着色。

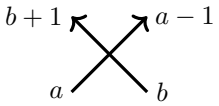


FIGURE 3. 交叉点邻域中的 Cheng着色。

定义 4.3. 设纽结弧 K 的图 D 上给定了一个 Cheng着色。交叉点的权重 t $w_D(c)$ 定义为交叉 $c \in D$

$$w_D(c) = \mathrm{sgn}(c) \cdot (a - (b+1)).$$

定义 4.4. 设 D 为球面纽结弧 K 的一个图。该图 D 的仿射指标多项式 定义为多项式

$$P_D(t) = \sum_{c \in D} \mathrm{sgn}(c) \cdot (t^{w_D(c)} - 1),$$

其中求和遍历所有交叉点。

在 [GuKa，定理 4。8], 中，已证明仿射指标多项式 $P_D(t)$ 是球面纽结弧 K的不变量。因此，以下将其记为 $P_K(t$。该文还证明了以下性质。

定理 4.2。 [GuKa，定理 4。12] 设 K 是一个球面纽结弧， $h(K)$ 是其高度，且 $\mathrm{maxdeg}(P_K(t))$是多项式 $P_K(t)$的最高次数。那么 $h(K) \geq \mathrm{maxdeg}(P_K(t))$。

定义 4.5。 非平凡仿射指标多项式 $P_K(t)$ 的跨度 $\mathbf{span}(P_K(t))$ 定义为 t 在 $P_K(t)$ 中的最高次数与最低次数之差。对于平凡多项式，我们设其跨度为 0。

在 [GuKa], 中证明了以下性质。

定理 4.3。 [GuKa，定理 4。10] 若 K 是一个球面纽结弧，则 $P_K(t) = P_K(t^{-1})$。

因此，若多项式 $P_K(t)$ 的最高次数为 n，则 $(-n)$ 是其最低次数。

推论 4.1。 球面纽结弧K 的仿射指标多项式 $P_K(t)$ 的跨度 $\mathbf{span}(P_K(t))$ 是一个偶整数。

4.3. 不变量 $H_K(t,y,z)$。 在 [FLV], 中引入了一个超越函数 $H_K(t,y,z)$，它是由纽结弧的高斯图构造而成的 K。

定义 4.6。 [FLV] 一个 高斯图 $G(D)$ 是纽结弧图 D 的高斯图，由圆上的一条定向弧以及连接图 K 各交叉点原像的弦组成 D，并遵循以下规则：

- 每条弦对应纽结弧图中的一个交叉；
- 每条弦均从上穿分支指向下穿分支；
- 交叉符号 sgn(c)标注在对应弦的尾端附近，见图 4。

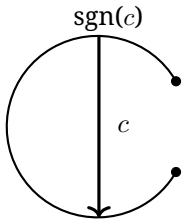


FIGURE 4. 高斯图中对应于一个交叉的弦 c。

为构造 $H_D(t,y,z)$，我们需要以下概念和记号：
(1) 用 $C(G(D))$ 表示高斯图 $G(D)$ 中弦的集合；(2) 用 $r^+(c)$（分别地，$r^-(c)$）表示 $G(D)\setminus\{c\}$ 中的弦的集合，这些弦相对于 c 的定向从左向右与弦 c 相交，且符号为 $+$（分别地，$-$）；(3) 用 $\ell^+(c)$（分别地，$\ell^-(c)$）表示 $G(D)\setminus\{c\}$ 中的弦的集合，这些弦相对于 c 的定向从右向左与弦 c 相交，且符号为 $+$（分别地，$-$）；(4) 弦 c 的度 $d(c)$定义为整数

$$d(c) = |r^+(c)| - |r^-(c)| - |\ell^+(c)| + |\ell^-(c)|;$$

(5) 对于 $n\in\mathbb{N}$，令

$$C_n(c) = \{e \in C(G(D))|\ e\cap c \neq \emptyset,\ \gcd(d(c),d(e)) = n\},$$

根据定义，令 $\gcd(m,0) = |m|$，且 $\gcd(0,0) = 0$；
(6) 令 $r(c) = r^+(c)\cup r^-(c)$，且 $\ell(c) = \ell^+(c)\cup\ell^-(c)$；(7) 令 $r^n(c) = r(c)\cap C_n(c)$，且 $\ell^n(c) = \ell(c)\cap C_n(c)$；(8) 对于 $k\in\mathbb{Z}$，定义 $\Phi_c(k) = k$ 模 $|d(c)|$；根据定义，当 $d(c) = 0$ 时，令 $\Phi_c(k) = k$。

定义 4.7. 令 $c\in C(G(D))$且 $n\in\mathbb{N}$。以下函数称为 n-指标函数：

$$\mathrm{Ind}_c^n(z) := \sum_{e\in r^n(c)} \mathrm{sgn}(e)\cdot z^{\Phi_c(d(e))} - \sum_{e\in\ell^n(c)} \mathrm{sgn}(e)\cdot z^{\Phi_c(-d(e))}. \tag{4}$$

注意，$\mathrm{Ind}_c^n(z)$的取值属于 $\mathbb{Z}[z^{\pm1}]/(z^{|d(c)|}-1)$。
现在我们定义 [FLV] 中引入的三变量函数。

定义 4.8。 [FLV] 设 D 是一个纽结弧图。令

$$H_D(t,y,z) := \sum_{c\in C(G(D)),\ n\in\mathbb{N}} \mathrm{sgn}(c)\cdot(t^{\mathrm{Ind}_c^n(z)}-1)\cdot y^n. \tag{5}$$

注意，在两个拟纽结的连通和中，高斯图会先遍历第一个拟纽结的所有交叉点，再遍历第二个拟纽结的所有交叉点。因此，第一个拟纽结的弦不会与第二个拟纽结的弦相交。于是，$H_{K\#K'}(t, y, z) = H_K(t, y, z) + H_{K'}(t, y, z)$。

定义 4.9. y-跨度 **跨度**$_y(H_K(t, y, z))$定义为 y 在 $H_K(t, y, z)$中的最高次数与最低次数之差。若 $H_K(t, y, z)$是恒等于零函数，则令**跨度**$_y(H_K(t, y, z)) = 0$。

定义4.10. z-跨度 **跨度**$_z(H_K(t, y, z))$定义为 z 在 $H_K(t, y, z)$中的最高次数与最低次数之差。若 $H_K(t, y, z)$是恒等于零函数，则令**跨度**$_z(H_K(t, y, z)) = 0$。

注意，**跨度**$_y(H_K(t, y, z))$和**跨度**$_z(H_K(t, y, z))$是球面纽结 K的不变量，因为 $H_K(t, y, z)$是 K的不变量。

在 [FLV], 中，证明了以下性质。

定理4.4。 [FLV，定理1。4] 设 K 和 K' 是两个平面纽结弧，满足 K 可以通过有限次交叉变换变为 K'。那么

$$H_K(t, y, z) - H_{K'}(t, y, z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n_m} \left(t^{z_n^m} + t^{-(z^{-1})_n^m} - 2 \right) \right) y^n,$$

其中 $a_{n_m} \in \mathbb{Z}$ 和 z_n^m 是变量 z 的某个多项式。

我们指出该不变量对球面结拟体的一项性质。

推论4.2。如果 K 是一个球面纽结，那么 $H_K(t, y, z) = H_K(t^{-1}, y, z^{-1})$。

证明。在 [GuKa，命题3。6], 中，已证明任意球面纽结都可以通过有限次交叉变换变为平凡纽结 U。由于 $H_U(t, y, z) = 0$，根据定理4.4可得

$$H_K(t, y, z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n_m} \left(t^{z_n^m} + t^{-(z^{-1})_n^m} - 2 \right) \right) y^n,$$

由此

$$H_K(t^{-1}, y, z^{-1}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n_m} \left(t^{-(z^{-1})_n^m} + t^{z_n^m} - 2 \right) \right) y^n,$$

因此 $H_K(t, y, z) = H_K(t^{-1}, y, z^{-1})$. □

推论 4.3. 对于任意球面纽结 K，数值 **跨度**$_z(H_K(t, y, z))$ 为偶数，且等于变量 z 的最高次数的两倍。

5. The family of spiral knotoids S_m

记 S_m， $m \geq 1$ 为图 5(a) 所示 2-球面中的螺旋结状曲线，其交叉点数等于 5(a)，其中交叉点的数量等于 $2m$.

引理5.1. 对于任意 $n \geq 2$ 和任意 $m \geq 1$，螺旋结状曲线 S_m 可以通过一次 $H(n)$-移动变为平凡纽结 U。

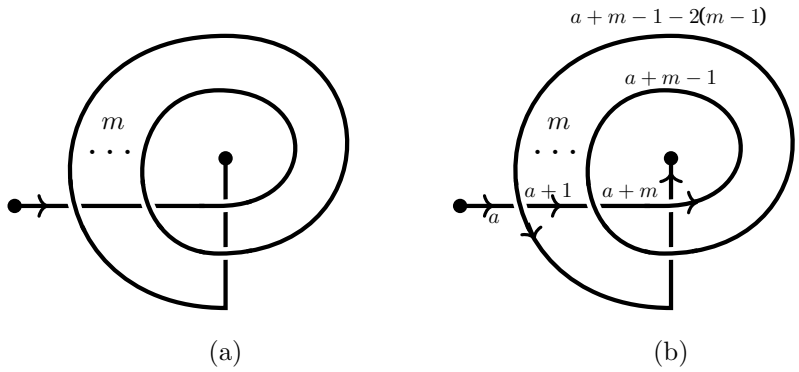


FIGURE 5. 螺旋纽结 S_m 及其弧上的标记。

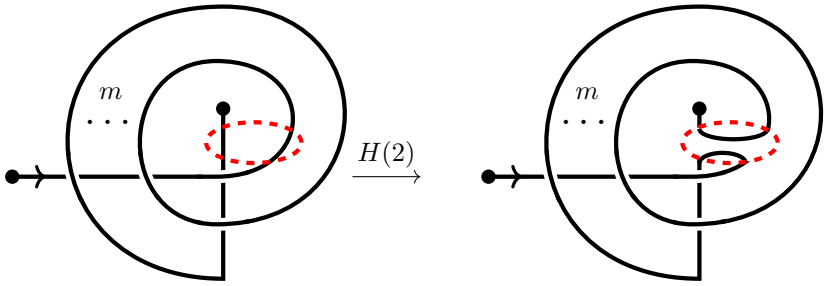


FIGURE 6. 一个 $H(2)$-变换将纽结弧 S_m解结。

证明。 容易看出， H图 6 所示的（2）-移动使平凡纽结 S_m。在 [JLM，定理 5], 不等式

$$d_{H(n)}(K,K') \geq d_{H(n+1)}(K,K')$$

这一结论已对纽结得到了证明。由于证明仅使用局部 $H(n)$-变换，因此可原样推广到纽结弧。因此，该不等式对纽结弧也成立。由此，对于任意 $n \geq 2$， S_m 都可以通过一次 $H(n)$-变换转化为平凡纽结弧 U。□

引理 5.2. 对于任意 $p, q \geq 1$，螺旋纽结的连通和 $S_p \# S_q$ 可以通过一次 $H(n)$-变换转化为纽结弧 S_p 。

证明。 由引理 5.1，连通和 S_q 中的加项 $S_p \# S_q$ 可以通过单次 U （ H）n-变换化为平凡纽结 S_p，且不影响加项 □

现在我们计算螺旋纽结的弧 S_m 的不变量。

引理 5.3。 对于球面螺旋纽结弧 S_m, $m \geq 1$，有 $h(S_m) = m$。

证明。 沿纽结弧图的定向为弧标记整数，从 a 开始，标在与纽结弧尾端相连的弧上，见图 5(b)。从图中可以看出，每个交叉点的符号都是 $+1$。沿纽结弧的定向，我们先经过第一个

m 个交叉点，从右向左（因此每一步标记都增加 1）。然后我们从左向右经过第 $(m+1)$ 个交叉点。接下来，每经过螺旋的 $m-1$ 个转弯，标记就改变 -2。我们得到图 5(b) 所示的标记。令 c_1 为 S_m的图中的第一个交叉点。则 $w(c_1) = \mathrm{sgn}(c_1)\cdot[(a+m-1-2(m-1)) - (a+1)] = (+1)\cdot[(a+1-m) - (a+1)] = -m$。根据定理 4.3，存在一个交叉点 c，使得 $w(c) = m$。由于该纽结弧的所有交叉点符号均为正，计算 $P_{S_m}(t)$ 时，单项式 t^m 不会抵消。根据定理 4.2，我们得到 $h(S_m) \geq m$；而根据图 5(a) 所示的图，$h(S_m) \leq m$。因此，$h(S_m) = m$。 □

推论 5.1. *(1)* 对于球面螺旋纽结弧 S_m, $m \geq 1$，有 **跨度**$(P_{S_m}(t)) = 2m$. *(2)* 对于球面螺旋纽结弧的连通和，有 **跨度**$(P_{S_p \# S_q}) =$最大值$\{2p, 2q\}$.

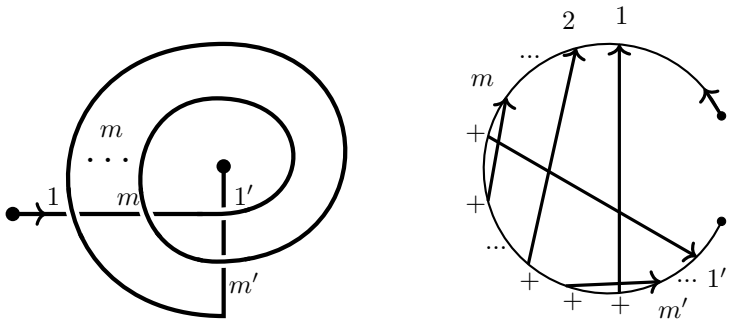
证明。 (1) 如引理 5.3 的证明所示，$P_{S_m}(t)$ 的最高次数为 m。由定理 4.3，可得 **跨度**$(P_{S_m}(t)) = 2m$。

(2) 这由等式 $P_{S_p \# S_q} = P_{S_p} + P_{S_q}$ 得出。 □

现在我们计算 S_m 的函数 $H_K(t, y, z)$。

引理 5.4. 对于球面螺旋纽结弧 S_m, $m \geq 2$，有 **跨度**$_y(H_{S_m}(t, y, z)) = m -$ 1.

证明。 按图 S_m 中的方式标记 7(a) 所示的交叉点。具体而言，从



(a) (b)

FIGURE 7. 纽结弧 S_m 的交叉点标记及其高斯图。

从纽结弧的尾端到头端移动时，我们按以下顺序依次两次经过每个交叉点：

$$\{1, 2, \ldots, (m-1), m, 1', m, 2', (m-1), \ldots, m', 1, m', (m-1)', \ldots, 1'\}.$$

注意，交叉点 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 首先作为下交叉经过，随后作为上交叉经过。相反，交叉点 $\{1', 2', \ldots, m'\}$ 首先作为上交叉经过，随后作为下交叉经过。考虑纽结弧的定向后，我们得到 $\mathrm{sgn}(k) = +1$ 以及 $\mathrm{sgn}(k') = +1$，其中 $k = 1, 2, \ldots\ldots, m$。

从 S_m 的高斯图（见图7（b））可知，集合 $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ 中的弦两两不相交。同样，集合 $M' = \{1', 2', \ldots, m'\}$ 中的弦也两两不相交。若 $k' \in M'$ 与 $s \in M$ 相交，则 k' 相对于 s 的方向是从左向右。

同样，若 $k \in M$ 与 $s' \in M'$相交，则 k 相对于 s'的方向是从右向左。因此，我们得到以下集合

$$
\begin{aligned}
r^+(1) = \{1', \dots, m'\}, \quad r^+(2) = \{1', \dots, (m-1)'\}, \quad \dots, \quad r^+(m) = \{1'\}; \\
\ell^+(1') = \{1, \dots, m\}, \quad l^+(2') = \{1, \dots, (m-1)\}, \quad \dots, \quad l^+(m') = \{1\}
\end{aligned} \tag{6}
$$

以及弦度的取值：

$$
d(1) = m, \quad \dots, \quad d(m) = 1, \quad d(1') = -m, \quad \dots, \quad d(m') = -1. \tag{7}
$$

根据定义，变量 m 的度 y 只有在存在一条弦 e_2，使得 $\gcd(d(e_1)\ d(e_2)) = m$ 时，才会出现在弦 e_1 中。对于纽结弧 S_m，只有弦 $1 \in M$ 和 $1' \in M'$ 具有这一性质。因此，变量 y 在 $H_{S_m}(t,\ y,\ z)$ 中的最高次数等于 m。

由于弦 $m \in M$ 的度为 $d(m) = 1$，它与任何其他弦的度的最大公因数都是 1。因此，变量 y 在 $H_{S_m}(t, y, z)$ 中的最低次数等于 1。由于所有弦的符号均为正，在计算 $H_{S_m}(t, y, z)$ 时对 (5) 中的同类项进行合并，不会影响变量 y 的最高次数与最低次数之差。因此，$\operatorname{span}_y(H_{S_m}(t, y, z)) = m - 1$。□

引理 5.5。对于球面螺旋纽结弧 S_m，$m \geq 2$，有 **跨度**$_z$（H_{S_m}（t、y、z））$= 2(m-1)$。

证明。与引理 5.4中一样，根据图 7，我们得到集合（6）以及弦度的值（7）。根据公式（4）计算函数 $\operatorname{Ind}_c^m(z)$ 时，我们看到变量 z 的最大可能度为 $m-1$，因为 $d(c)$ 的最大值是 m，因此除法后的最大余数（函数 Φ的值）是 $m-1$。下面说明这样的度确实会出现在某一项中。

考虑弦 $1 \in M$。集合 $r^+(1)$ 包含弦 $2' \in M'$，其中 $d(1) = m$和$d(2') = -(m-1)$。于是，$2' \in r^1(1)$ 和 $\Phi_1(d(2')) = m - 1$。由于所有弦的符号均为正，在计算 $H_{S_m}(t,\ y,\ z)$ 时合并同类项不会影响变量 z 的最大度与最小度之差。因此，**跨度**$_z(H_{S_m}(t,\ y,\ z)) = 2(m-1)$。□

6. Quotients of the Gordian graph of knotoids by invariants

定理 *6.1*. *设 $G(H(n)\ h)$、$G(H(n),\ span(P(t)))$、$G(H(n),\ span_y(H_K(t, y, z)))$ 和 $G(H(n),\ span_z(H_K(t, y, z)))$ 分别是纽结弧的 $H(n)$-戈尔迪安图 $G(H(n))$ 关于高度 h、仿射指标多项式的跨度 $span(P(t))$、不变量 y-span $span_y(H_K(t, y, z))$ 以及不变量 z-span $span_z(H_K(t, y, z))$ 的商图。那么，这些商图中的每一个都同构于一个具有可数无穷多个顶点的完全图，并且在 Gromov 意义下是 0-双曲的。*

证明。我们依次考察这四个商图。

1. 图 $G(H(n)\ h)$。由定理 4.1 和引理 5.3，对于螺旋纽结，我们得到$h(S_p \# S_q) = h(S_p) + h(S_q) = p + q$；而由引理 5.2，$d_{H(n)}(S_p, S_p \# S_q) = 1$，因为加项$S_q$ 可以通过一次 $H(n)$-变换转化为平凡纽结 U。因此，对于商图 $G(H(n))$ 关于高度 h 的任意两个等价类 $[K]$ 和 $[K']$，都存在由一次 $H(n)$-变换连接的代表元。因此，图 $G(H(n)\ h)$ 是完全图。任意四个顶点之间距离所满足的不等式 (1) 在 $\delta = 0$ 下成立，这意味着该图是 0-双曲的。

2. 图 $G(H(n), \operatorname{span}(P(t)))$. 根据推论 5.1，$\operatorname{span}(P_{S_p \# S_q}) = \max\{2p, 2q\}$。根据引理 5.2，$d_{H(n)}(S_p, S_p \# S_q) = 1$。因此，对于商去 span($P$) 后的任意两个等价类 $[K]$ 和 $[K']$，都存在由单个 $H(n)$-移动连接的代表元。因此，该图

$G(H(n),$ **跨度**$(P))$ 是完备的。任意四个顶点之间的距离均满足不等式（1），其中 $\delta = 0$，这意味着该图是 0-双曲的。

3. 图 $G(H(n), \text{span}_y(H_K(t,y,z)))$。由引理 5.4 可知，$\text{span}_y(H_K(t,y,z))$ 的取值集合与集合 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 相同。根据可加性 $H_{K\#K'}(t,y,z) = H_K(t,y,z) + H_{K'}(t,y,z)$、螺旋纽结 S_m 的交叉点符号为正，以及引理 5.4，可得 $\text{span}_y(H_{S_{p+1}\#S_{q+1}}(t,y,z)) = \max\{p,q\}$。由引理 5.2，$d_{H(n)}(S_{p+1}, S_{p+1}\#S_{q+1}) = 1$。因此，对于由 $\text{span}_y(H_K(t,y,z))$ 取商所得的任意两个等价类 $[K]$ 和 $[K']$，都存在由一次 $H(n)$-变换连接的代表元。因此，图 $G(H(n), \text{span}_y(H_K(t,y,z)))$ 是完全图。顶点间距离的不等式 (1) 在 $\delta = 0$ 下成立，这意味着该图是 0-双曲的。

4. 图 $G(H(n), \text{span}_z(H_K(t,y,z)))$。根据引理 5.5，$\text{span}_z(H_K(t,y,z))$ 的取值集合恰好是所有正偶整数与零。由可加性 $H_{K\#K'}(t,y,z) = H_K(t,y,z) + H_{K'}(t,y,z)$、螺旋纽结 S_m 的交叉点符号均为正，以及引理 5.5，可得 $\text{span}_z(H_{S_{p+1}\#S_{q+1}}(t,y,z)) = \max\{2p, 2q\} = 2p$ for $p > q$。根据引理 5.2，$d_{H(n)}(S_{p+1}, S_{p+1}\#S_{q+1}) = 1$。因此，对于商空间中由 $\text{span}_z(H_K(t,y,z))$ 确定的任意两个等价类 $[K]$ 和 $[K']$，都存在可通过单次 $H(n)$-移动相连的代表元。由此，图 $G(H(n), \text{span}_z(H_K(t,y,z)))$ 是完全图。关于顶点间距离的不等式 (1) 在 $\delta = 0$ 下成立，这意味着该图是 0-双曲的。定理得证。□

7. Quotient of the Gordian graph of knotoids by the span of the Jones polynomial

定义 7.1. S^2 中的定向多纽结图 是定向区间 $[0,1]$ 和有限个定向圆到 S^2 中的浸入，使得所有双重点都带有上/下交叉信息，并且区间端点的像彼此不同，且均不同于双重点。

定义 7.2. 定向球面多纽结 是 S^2 中定向多纽结图在端点不相交的区域内进行 Reidemeister 变换后所得的等价类。

在 [Tu], 中，类比链环的括号多项式，定义了球面多纽结的括号多项式，进而定义了归一化括号多项式。

定义 7.3. [Tu] 对于球面中一个多纽结的图 D，其括号多项式定义为

$$\langle D \rangle = \sum_{s \in S} A^{\sigma_s} \left(-A^2 - A^{-2}\right)^{|s|-1},$$

其中 S 是该多纽结图的所有状态的集合，$\sigma_s = n_+ - n_-$，其中 n_+ 是用于得到状态 s 中 A-平滑的数量，而 n_- 是 A^{-1}-平滑的数量（见（9）），且 $|s|$ 是状态 s 的连通分支数。

定义 7.4。 [设] 为 D 球面上多结点的一个图，其归一化括号多项式定义为

$$\langle D \rangle_。 = (-A^3)^{-wr(D)} \langle D \rangle,$$

其中 $wr(D) = \sum_{c \in C} \text{sgn}(c)$ 为缠绕数，C 是图 D 的所有交叉点集合。

在 [Tu，第 7 节。1], 文中证明了 $\langle D \rangle_。 = (-A^3)^{-wr(D)} \langle D \rangle$ 在 Reidemeister 变换下保持不变。也就是说，归一化括号多项式是球面多重结端的不变量。

此外（[Tu，第 8 节。4]），归一化括号多项式满足 skein 关系

$$-A^4\langle K_+\rangle_\circ + A^{-4}\langle K_-\rangle_\circ = (A^2 - A^{-2})\langle K_0\rangle_\circ, \tag{8}$$

其中 (K_+, K_-, K_0) 是一个 Conway 三元组，见图 8。

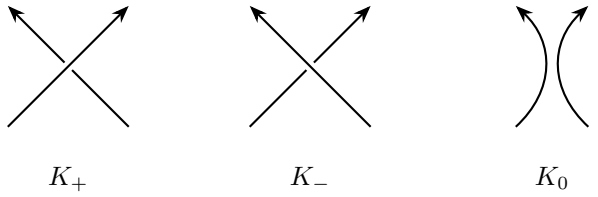


FIGURE 8. 一个 Conway 三元组。

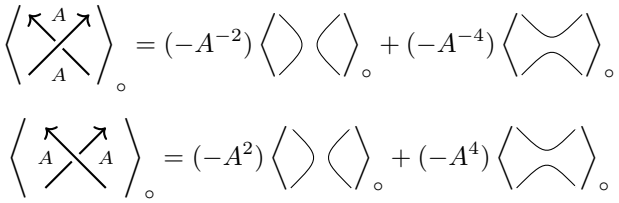
回顾一下，初始图的括号多项式，以及在其某个交叉点处进行 A-平滑和 A^{-1}-平滑所得到的图的括号多项式，满足如下关系：

(9)



由 (9)，可得归一化括号多项式之间的关系：

(10)



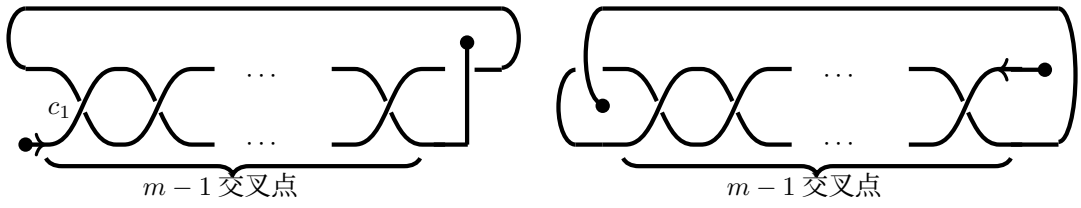
定义 7.5。设 K 是一个球面多重结端。 K 的琼斯多项式定义为 $V_K(t) := \langle K\rangle_\circ|_{A=t^{-1/4}}$。琼斯多项式的跨度**跨度**$(V_K(t))$ 定义为 $V_K(t)$ 中 t 的最高次数与最低次数之差，其中 $V_K(t)$。

众所周知 [Li，第 3]章，对于纽结而言，琼斯多项式的跨度只取整数值。然而，这对纽结弧并不成立。例如，纽结弧 ϕ 来自 [Tu，第 7 节，4] 其琼斯多项式的跨度等于$_3$ $_2$。我们证明，对于纽结弧，琼斯多项式的跨度只能取整数值和半整数值。

命题 7.1。设 K 为一个球面纽结。则**跨度**$(V_K(t)) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。

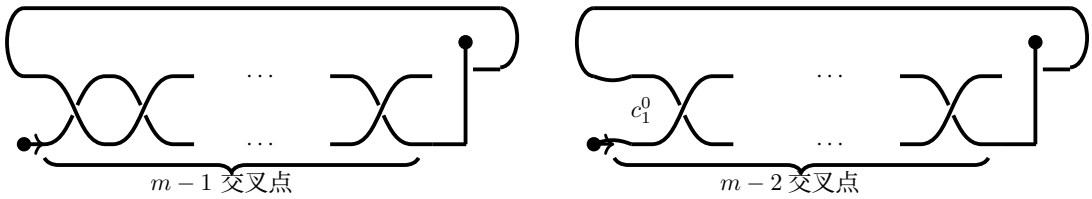
证明。根据定义可得，**跨度**$(V_K(t)) = \frac{1}{4}$ **跨度**$(\langle D\rangle_\circ(A))$。下面证明**跨度**$(\langle D\rangle_\circ(A))$可被 2 整除。设 s 为纽结弧 K的一个图的状态， s' 为与 s 仅在一个交叉处的平滑类型不同的状态。那么，根据平滑类型， $\sigma_{s'} - \sigma_s = \pm 2$。如果平滑后连通分支的数量不变，那么 A的次数奇偶性不变。如果连通分支的数量发生变化，那么由于因子 $\left(-A^2 - A^{-2}\right)$， A 的次数变化一个偶整数。因此，转到纽结弧图的新状态时， A的次数奇偶性保持不变。因此， A 的最高次数和最低次数具有相同的奇偶性，所以括号多项式的跨度为偶数，而琼斯多项式的跨度属于 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$。□

考虑两个球面多结形图的无穷族： $\mathcal{N}(m)$， $m \geq 1$，见图 9(a)，以及 $\mathcal{L}(m)$， $m \geq 1$，见图 9(b)。



(a) (b)

FIGURE 9. 多结形 $\mathcal{N}(m)$ 和 $\mathcal{L}(m)$。



(a) (b)

FIGU来自 $K_- = \mathcal{N}(m)$ 的 Conway 三元组的 RE 10. $K_+ = \mathcal{N}(m-2)$ 和 $K_0 = \mathcal{N}(m-1)$.

注意，多结点 $\mathcal{N}(2p)$，$p > 1$ 是一个纽结弧。

L引理 7.1. 对于球面纽结 $\mathcal{N}(2p)$， $p > 1$，我们有 **跨度**$(V_{\mathcal{N}(2p)}(t)) = p$。

证明。 如图 9(a) 所示，所有交叉点的符号均为 -1。我们使用 skein 关系 (8)。考虑 c_1，从纽结弧的头端移动时遇到的第一个交叉点。按照 Conway 三元组的记号，令$K_- = \mathcal{N}(m)$，得到 $K_+ = \mathcal{N}(m-2)$（应用 II 型 Reidemeister 移动后）以及 $K_0 = \mathcal{N}(m-1)$，如图 10所示。对于图 c_1^0 中的交叉K_0，我们写下关系 (10)。于是

$$\langle K_0 \rangle_\circ = \langle \mathcal{N}(m-1) \rangle_\circ = -A^4 \langle U \rangle_\circ + (-A^2) \langle \mathcal{N}(m-2) \rangle_\circ, \tag{11}$$

其中 U表示平凡纽结。记 $x_m = \langle \mathcal{N}(m) \rangle_\circ$，其中 $x_0 = \langle U \rangle_\circ = 1$。然后，将关系式 (8) 应用于纽结弧 $\mathcal{N}(m)$ 的交叉 c_1 ，得到

$$-A^4 \cdot x_{m-2} + A^{-4} \cdot x_m = (A^2 - A^{-2}) \cdot x_{m-1}. \tag{12}$$

将由 (11) 得到的 $x_{m-1} = -A^4 - A^2 x_{m-2}$ 代入 (12) 并化简。于是

$$x_m = A^4 \cdot x_{m-2} - A^{10} + A^6. \tag{13}$$

注意， $x_2 = A^4 - A^{10} + A^6$。此外，对于所有满足 $m > 2$ 的 x_m ， A 的最低度为 6，而当 $m > 1$ 时，从 x_m 到 x_{m+2} ， A 的最高度增加 4。由于

从 x_2 到 x_m 的步数为 $\frac{m-2}{2}$，因此当 x_m 时，A 的最高度为 $2(m-2)+10=2m+6$。由于 $m=2p$，我们得到 **跨度**$(V_{\mathcal{N}(2p)}(t))=\frac{4p+6-6}{4}=p$。□

注意，多结点 $\mathcal{L}(m)$、$m\geq 2$ 是一个纽结弧。

引理 7.2。对于球面纽结 $\mathcal{L}(m)$、$m\geq 2$，有 **跨度**$(V_{\mathcal{L}(m)}(t))=m-\frac{1}{2}$。

证明。考虑奇数情形 $m=2p+1$，$p\geq 1$。我们使用 skein 关系。选择图 11(a) 中由虚线圆包围的交叉点，并考虑 $K_+=\mathcal{L}(2p+1)$ 的 Conway 三元组。于是 $K_-=\mathcal{L}(2p-1)$，而 K_0 如图 11(b) 所示。容易看出，$\langle K_0\rangle=-A^4-A^2$。

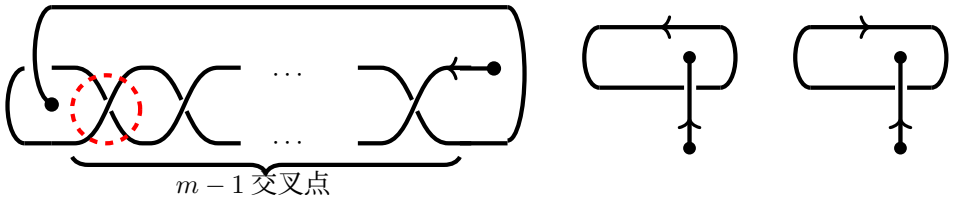


FIGURE 11. 偶数和奇数情形下的纽结弧 $\mathcal{L}(m)$ 及多结点 K_0。

记 $y_{2p+1}=\langle\mathcal{L}(2p+1)\rangle$，其中 $y_1=\langle U\rangle=1$。于是，利用 skein 关系（8）以及 $\langle K_0\rangle$的值，我们得到递推关系：

$$y_{2p+1}=A^{-8}y_{2p-1}+A^2+1-A^{-2}-A^{-4}. \tag{14}$$

由于在关系式（A 中出现的 y_{2p-1} 次数转到 y_{2p+1} 时降低了 8，因此（14）中的最高次数仍为 2。也容易看出，A 的最低次数为 $-8p$。因此，

$$\mathbf{span}(V_{\mathcal{L}(2p+1)}(t))=\frac{2+8p}{4}=2p+\frac{1}{2}=m-1+\frac{1}{2}=m-\frac{1}{2}.$$

考虑偶数情形 $m=2p+2$，$p\geq 0$。同样，选取图11(a)中虚线圆所围住的交叉，并考虑 $K_+=\mathcal{L}(2p+2)$的 Conway 三元组。于是 $K_-=\mathcal{L}(2p)$，而 K_0如图11(c)所示。容易看出 $\langle K_0\rangle=-A^{-4}-A^{-2}$。

记 $y_{2p+2}=\langle\mathcal{L}(2p+2)\rangle$，其中 $y_0=\langle U\rangle=1$。然后，利用 skein 关系（8）以及 $\langle K_0\rangle$的值，可得递推关系：

$$y_{2p+2}=A^{-8}y_{2p}+A^{-4}+A^{-6}-A^{-8}-A^{-10}. \tag{15}$$

注意到 $y_2=-A^{-10}+A^{-6}+A^{-4}$。此外，对于所有满足 $p>0$ 的 y_{2p}，A 的最高次数为 -4，而从 y_{2p} 变到 y_{2p+2} 时，A 的最低次数会减少 8，其中 $p>0$。由于从 y_2 到 y_{2p+2} 需要经过 p 步，因此 y_{2p+2} 时 A 的最低次数为 $-8p-10$。因此，

$$\mathbf{span}(V_{\mathcal{L}(2p+2)}(t))=\frac{6+8p}{4}=2p+1+\frac{1}{2}.$$

回想一下，在这种情况下 $m=2p+2$。因此，对于任意整数 $m\geq 2$，都有 **跨度**$(V_{\mathcal{L}(m)}(t))=m-\frac{1}{2}$。□

引理 *7.3.* 设 $\mathcal{L}(m)$、 $m \geq 2$ 为图 *9(b)* 所示的球面纽结。若 m 为奇数，则$\mathcal{L}(m)$ 可通过一次 H *(2)*-移动变换为纽结弧 $\mathcal{N}(m-1)$；若 m 为偶数，则可变换为纽结弧 $\phi(T(m-1, 2))$。这里， $T(m-1, 2)$ 是图 *14* 中的环面纽结，而 ϕ 是 *Turaev* 从纽结集合到球面纽结类集合的映射。

证明。 在奇数情形下 $m = 2p + 1$，我们应用 H(2)-变换，如图 12所示。

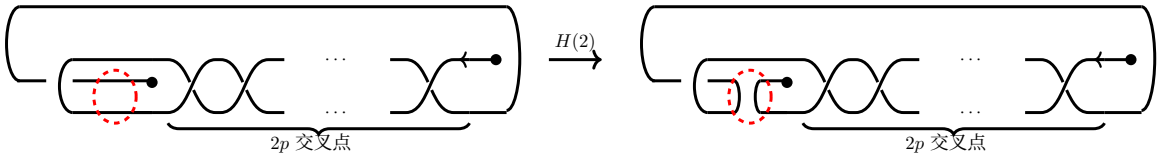


FIGURE 12. 将 $\mathcal{L}(2p + 1)$ 变换为 $\mathcal{N}(2p)$ 的 H(2)-变换。

在偶数情形下 $m = 2p+2$，我们应用 H(2)-变换，如图 13所示。引理的断言

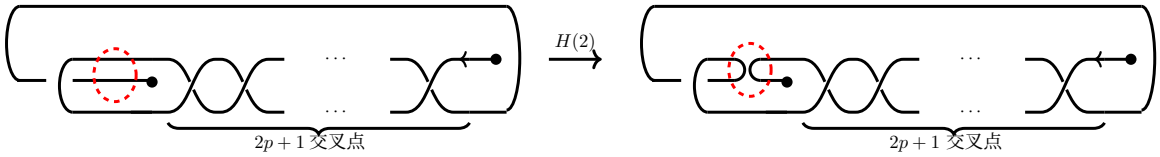


FIGURE 13. 将 H(2)-移动应用于 $\mathcal{L}(2p + 2)$，将其变为 $\phi(T(2p + 1, 2)$。

由这些移动可知。 □

在 [FMS],中证明了以下引理。

引理 7.4. [FMS，推论 3。4] 设 $T(2p + 1, 2)$ 是图 *14*所示的环面纽结。则**跨度**$(V_{T(2p+1,2)}(t))$ $= 2p + 1$。

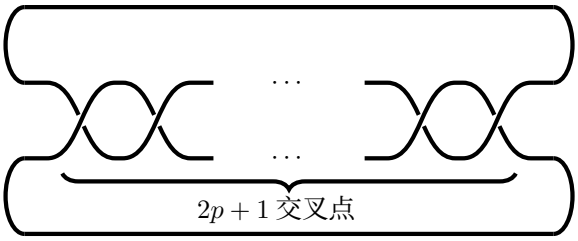


FIGURE 14. 环面纽结 $T(2p + 1, 2)$。

定理 7.1。 记 $G(H(n)$,**跨度**$(V))$ 为纽结弧 $H(n)$-戈尔迪安图关于琼斯多项式 $V(t)$的跨度 **跨度**$(V(t))$ 所得的商图。那么， 图 $G(H(n)$,**跨度**$(V))$是 *Gromov* 双曲的。

证明。容易看出，纽结弧 $\phi(T(2p+1,\ 2))$ 和 $\mathcal{N}(2p)$ 可通过一次 $H(2)$-移动变换为平凡纽结（见图 15 和图 16，分别）。对于 $p \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，我们引入一类琼斯多项式跨度等于 p：

$$[K]_p = \{K : \mathbf{span}(V_K(t)) = p\}.$$

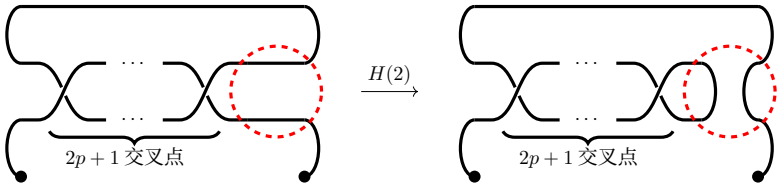


FIGURE 15. 将 $\phi(T(2p+1,\ 2))$ 转换为 U 的 $H(2)$-移动。

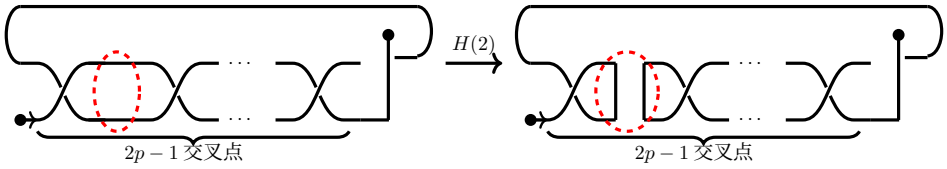


FIGURE 16. 一个 $H(2)$-变换将 $\mathcal{N}(2p)$ 转化为 U。

根据引理 7.1，对于整数 $p > 1$，有 $\mathcal{N}(2p) \in [K]_p$；从引理 7.1 的证明中容易看出，$\mathcal{N}(2) \in [K]_{3/2}$。因此，若 $p > 1$ 是整数或 $p = 3/2$，则结结类 $[K]_p$可通过一次 $H(2)$-变换约化为类 $[U]$。由引理 7.3 和 7.4 可知，纽结弧 $\mathcal{L}(m)$ 至多经过两次 $H(2)$-变换即可转化为 U。根据引理 7.2，对于整数 $p > 1$，有 $\mathcal{L}(p) \in [K]_{p-\frac{1}{2}}$。因此，若 $p \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 且 $p \geq \frac{3}{2}$，则结结类 $[K]_p$至多经过两次 $H(2)$-变换即可转化为 $[U]$。

令 δ_1 为将 $[K]_1$ 转换为 $[U]$所需的 $H(2)$-移动的最小次数，并令 $\delta_{\frac{1}{2}}$ 为将 $[K]_{\frac{1}{2}}$ 转换为 $[U]$ 所需的 $H(2)$-移动的最小次数。设 $\delta = \max\{2, \delta_1, \delta_{\frac{1}{2}}\}$。那么，图 $G(H(2),$ **跨度**$(V))$ 的直径不超过 2δ。由于对所有 $n \geq 3$ 均有 $d_{H(2)} \geq d_{H(n)}$，图 $G(H(n),$ **跨度**$(V))$ 的直径也有限，且该图是 Gromov双曲的。定理得证。□

注7.1。从定理 *7.1* 的证明可知，若等价类 $[K]_1$ 和 $[K]_{\frac{1}{2}}$ 为空，则可以断言图 $G(H(n),$ **跨度**$(V))$ 的直径不超过 4。然而，据我们所知，是否存在琼斯多项式跨度等于 1 或 $\frac{1}{2}$ 的拟纽结，这个问题仍未解决。

工具使用。作者使用人工智能进行校对。文章中呈现的数学思想和结果均由作者独立构思并撰写，未借助人工智能。作者对所有内容承担全部责任。

References

[BRSV] S. Bermudo、J. M. Rodríguez、J. M. Sigarreta、J.-M. Vilaire, *Gromov hyperbolic graphs*, 《离散数学》 **313 15** 2013 1575 1585 1：（），—。BH M. R. Bridson、A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*。载于：《数学科学基础丛书》第 **319**, 1999 2卷。施普林格，柏林、海德堡（）。FLV W. Feng、F. Li、A. Vesnin, *A three-variable transcendental invariant of planar knotoids via Gauss diagrams*, 《地中海数学杂志》 **22 4** 2025 99 2, 7, 8, 9：（），论文。FMS C. Flippen、A. H. Moore、E. Seddiq, *Quotients of the Gordian and H(2)-Gordian graphs*, 《纽结理论及其影响杂志》 **30 5** 2021 2150037 4, 17：（），论文。GG J.-M. Gambaudo、E. Ghys, , 《法国数学会通报》 *Braids and singularities* **133 4** 2005 541 579 1：（），—。GPV A. Gill、M. Prabhakar、A. Vesnin, *changes and arc shift moves* *Gordian complexes of knots and virtual knots given by region crossing* **29** 2020 2042008 , 《纽结理论及其影响杂志》（），论文。[1] *An unknotting invariant for welded knots* GKPV A. Gill、K. Kaur、M. Prabhakar、A. Vesnin, , 《印度科学院院刊（数学科学）》 **131** 2021 47 1（），论文。Gr M. Gromov, 。载于：《群论论文集》，数学科学研究所出版物第8卷，第75–263页。施普林格，纽约（ *Hyperbolic groups* 1987 1, 2）。GuKa N. Gugumcu、L. H. Kauffman, *New invariants of knotoids*, 《欧洲组合数学杂志》65（2017），186–229。2、6、7、9[HU] M. Hirasawa、Y. Uchida, *The Gordian complex of knots*, 《纽结理论及其影响杂志》11:3（2002），363–368。1[HKOS] S. Horiuchi、K. Komura、Y. Ohyama、M. Shimozawa, *The Gordian complex of virtual knots*, 《纽结理论及其影响杂志》 **21 13** 2012 1250122 1：（），论文。HNT J. Hoste、Y. Nakanishi、K. Taniyama, *Unknotting operations involving trivial tangles*, 《大阪数学杂志》27（ 1990 555 566 1, 2, 4, 5），—。JLM S. Jabuka、B. Liu、A. H. Moore, *Knot graphs and Gromov hyperbolicity*, 《数学杂志》301（2022），811–834。1、2、3、4、10[KPV] K. Kaur、M. Prabhakar、A. Vesnin, *An unknotting index for virtual links*, 《拓扑学及其应用》 **264** 2019 352 368 1（），-。Ko H. Kondo, *Knots of unknotting number 1 and their Alexander polynomials*, 《大阪数学杂志》16:2（1979），551–559。4[KPKVB] *Hyperbolic geometry of complex net-works* **82 3** 2010 036106 , 《物理评论E》：（）。[1] D. Krioukov、F. Papadopoulos、M. Kitsak、A. Vahdat、M. Boguna, , 《物理评论E》：（）。Li W. B. R. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, 《数学研究生教材》第175卷，施普林格出版社，纽约（ 1997 201 3, 14），第。Mu H. Murakami, *Some metrics on classical knots* **270** 1985 35 45 1，《数学年刊》（），—。Tu V. Turaev, , 《大阪数学杂志》：（），—。[2, 4, 5, 6, 13, 14] *Knotoids* **49 1** 2012 195 223 *The H n -Gordian complex of knots* ZYL K. Zhang、Z. Yang、F. Lei, （），《纽结理论及其影响杂志》26:13（2017），论文1750088。1、3

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*Email address*: vesnin@math.nsc.ru

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*Email address*: alikbarov70@gmail.com