arXiv:2611.30058v1 [cond-mat.soft] 23 Nov 2026

多体非互易性激活的固体

Brady Wu[1, 2, *] Daniel S. Seara,[2, 3, *] Qinghao Mao,[1, 2] Vincenzo Vitelli,[1, 2, 4] 和 Heinrich M. Jaeger[1, 2, †]
[1] *Department of Physics, University of Chicago, USA*
[2] *James Franck Institute, University of Chicago, USA*
[3] *Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Illinois Chicago, USA*
[4] *Leinweber Institute for Theoretical Physics, University of Chicago, USA*（日期：2026年11月24日）

粒子之间由场介导的力既可能是非互易的，也可能本质上具有多体特性，从而使由单个被动粒子组成的系统涌现出活性。尽管以往研究广泛探讨了多体非互易性如何激活少体系统、造成燃料间歇性并驱动类液体行为，但其对大规模粒子集合固态的影响仍鲜有研究。在此，我们利用二维密堆积的相同非热声悬浮微球颗粒筏，展示多体非互易性如何向固体中注入活性。在单个粒子和集体动力学两个层面上，晶体颗粒筏都呈现持续循环流动，但没有净手性。颗粒筏还表现出类声子色散关系，对应较大的泊松比，表明其剪切软化。体相中，晶格对称性掩盖了微观非互易性，尽管这种非互易性可体现为重整化的互易弹性系数。在位错和颗粒筏边缘处，由于对称性被破坏，多体非互易相互作用会局部生成活性。基于三粒子模拟标定的多体非互易性粗粒化微观模型，重现了实验观测到的颗粒筏色散关系和局域活性。利用这些发现，我们展示了如何通过排列微观位错来驱动整个颗粒筏发生宏观推进和旋转，从而利用缺陷诱导活性实现可编程运动。

引言

一个广为人知、常归功于 Sir Charles Frank 的观察是：“晶体就像人：正是它们的不完美之处，才让它们有趣。”[1]在这里，我们表明，对于存在破坏互易性的非成对相互作用的固体而言，这一点更是如此。互易性是一种基本对称性，广泛存在于科学之中，通俗地说就是“A 影响 B 如同 B 影响 A”。在许多自然系统和工程系统中，互易性遭到破坏，此时这些相互作用被称为非互易 [2]相互作用。非互易相互作用有多种形式，也会带来种种后果，从磁性 [3] 和群集模型中的振荡 [4, 5], 到化学反应模型中的行波态 [6–9], 催化胶体 [10],以及人群模型中的行波态 [11]。在固体中，非互易相互作用会产生新颖的材料性质，例如奇弹性模量、 [12], 呼吸孤子、[13], 自适应运动 [14], 和可动位错 [15, 16]。

多种因素都可以造成非互易性。也许最常见的实现非互易性的途径，是考虑各向异性力，即不仅取决于粒子之间距离，还取决于其取向的力 [17–22]。另一种途径是考虑非同类粒子之间的相互作用 [23–25]。最后，力可以是非中心的，即该力不必沿两粒子之间的中心线方向 [26–28], ，这通常由自旋粒子诱导 [29–31]。如果缺少这些因素——各向异性、异质性或非中心性——多体力是打破互易性所必需的。这一点在多个系统中都可以看到，包括机器人物质 [14], 光学物质 [32–34], 尘埃等离子体 [35–37], 胶体晶体 [38], 和声悬浮 [39–42]。在固相中，已知多体非互易性会驱动间歇性 [37]和熔化 [40]。然而，稳定固相的实现，以及对多体非互易性对固体性质影响的研究，在机器人编程超材料之外一直较少受到关注；后者具有键弯曲相互作用 [12, 14] ，以及几乎没有材料控制空间的手性生物组织 [43]。在由中心的各向同性相互作用组成的固体中，晶体对称性要求采用不同的途径来打破互易性，即利用多体力来挖掘晶格缺陷产生的空间不对称性。这些缺陷如何进一步触发固体中的局部活动和整体活动，正是本文的研究重点。

在此，我们系统地研究了由具有非互易多体相互作用的声悬浮微球组成的自由漂浮二维（2D）颗粒筏的材料特性。在悬浮

平面中，粒子通过两种声诱导力场相互作用：由流体动力学微流引起的短程排斥，以及由声散射引起的长程吸引。这两种相互作用对于 $N = 2$ 粒子而言是保守的，但一旦 $N > 2$，当构型对称性被破坏时，它们便会促成非互易性 [44]。在这些颗粒筏的固态中，粒子仍保持高度有序，且不会交换邻居；我们发现，三体非互易相互作用尽管如此仍会注入活性，其证据是单个粒子层面和集体模态层面的持续循环流动。为了

* 这些作者贡献相同
† jaeger@uchicago.edu

解释这些观测结果，我们（a）建立了一个三体非互易性的最小微观模型；（b）通过提取相关微观参数，将其与实验进行校准；（c）对其进行粗粒化，得到与宏观观测结果一致的弹性性质。更具体地说，该模型再现了根据晶格振动功率谱密度测得的色散关系。模型还预测，我们晶格的对称性会掩盖微观非互易性，使体相成为互易的、动量守恒的固体。然而，有一个重要的注意事项：微观非互易性可以重整颗粒筏的弹性模量，其作用类似于预应力。在缺陷处以及其他相关空间对称性被破坏的位置（例如边缘），非互易性的影响最为显著。通过计算机模拟，我们展示了如何利用这种缺陷诱导的非互易响应，在具有超越本模型系统的多体力的固体中编程运动。

结果

构建悬浮晶体。直径为 $d = (41.1 \pm 0.5)\,\mu$m 的单分散微球由单轴朗之万型换能器产生的超声波悬浮在空气中。换能器在其弯曲底面与反射玻璃板之间形成驻波，如 [40]（图1a）。在驱动频率为 $f_d = 34.7$kHz 时，声波波长满足$\lambda \gg d$，实验处于远低于瑞利极限的范围内 [44]。悬浮平面内短程排斥与较长程吸引之间的竞争，形成了具有圆形外围和高度有序内部的单层浮筏（图1b）。由五重和七重缺陷构成的位错介导了从三角形核心到圆形外围的转变，这令人联想到二维维格纳晶体 [45, 46]（图1c）。除非另有说明，我们关注颗粒尺寸和驱动频率如上所述的颗粒筏。我们还纳入了其他 d 和 f_d的取值下的数据。

由于两种力都随声能量密度线性变化 E_0，粒子间距不受声强影响，而是由斯托克斯数 Ω 决定 $= \omega_d d^2/(4\nu_{\text{air}})$，其中 $\omega_d = 2\pi f_d$ 且ν_{air} 是粒子周围空气的运动黏度 [40, 44]。因此，单个微球与其邻近粒子之间保持着明确的平均间距，该间距随其在筏中的位置而变化（补充图 4）。我们关注较小的 E_0，此时筏处于有序类固态，不会发生间歇性的结构重排 [40, 42]，，尘埃等离子体晶体中也观察到了这一现象 [37]。没有粒子的移动距离超过其平均位置一个半径的范围（图1d），且均方位移在 $\sim 10^{-2}$ 秒内达到饱和（图 1e）。

筏中的微观和集体非互易性。尽管粒子的位移很小，但筏并不处于平衡态。单个粒子会围绕其平均位置产生具有持续手性的轨道轨迹，这可通过计算每个粒子平均位置周围的累积绕数来测量（图2a）。在整个筏中，这些轨道没有总体上的手性，表明轨道手性发生了自发破缺。这类电流是非互易过阻尼系统的普遍特征 [47–49]。对于欠阻尼系统，共轭变量之间的振荡并非被禁止，例如教科书中欠阻尼简谐振子的位置-速度环流便是如此。为了在我们的欠阻尼系统中寻找活性，我们转而寻找完全位于位置空间中的环流。在热力学平衡中，位置空间中的持续循环流动确实是被禁止的（补充说明 V）。为了量化这些环流，我们测量每个粒子的比角动量，即以质量归一化的角动量：$L_i = \mathbf{u}_i \times \dot{\mathbf{u}}_i$，其中 $\mathbf{u}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i$ 是粒子 i 相对于其时间平均位置的位移。比角动量的时间平均值在筏内的短长度尺度上具有相关性（图 2b）。观测到的角动量大小显著高于通过相位随机化替代时间序列构造的噪声底（图 2c，方法）。综上，这些结果表明，悬浮筏是一个固体，其单个组分以依赖于位置的方式被驱离平衡态。

这种活性也体现在筏的集体运动中。我们通过主成分分析（PCA）分解粒子位移，从而识别集体模态（图 2d，方法）。将粒子位移投影到该空间中，可得到主成分振幅的时间序列，$P_i(t)$。主成分振幅对呈现出持续循环流动，我们再次通过绕（P_m，P_n）$= (0,\ 0)$ 的累积绕数进行测量（图 2e）。我们将两个模式之间的循环频率计算为$\omega_{mn} = \langle P_m \dot{P}_n - \dot{P}_m P_n \rangle / \ 2\sigma_m \sigma_n \qquad \sigma_m^2 = \langle \ P_m - \langle P_m \rangle \ ^2 \rangle$ ( )，其中 ( ) 是时间序列 $P_m(t)$ 的方差。这定义了一个循环频率矩阵 $\boldsymbol{\omega}$，其元素为 ω_{mn}，用于量化方差最高的 48 个模式中各模式对之间的振荡。主成分模态对在不同尺度上均表现出显著的循环流动，远高于根据主成分振幅时间序列的相位随机化重复样本构建的噪声底（图2f，方法）。我们进一步使用基无关度量进行验证，该度量由 $\boldsymbol{\omega}$的特征值给出。这些特征值均为纯虚数，且成复共轭对出现，因为 $\boldsymbol{\omega}$ 是反对称的，$\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega}^T$。唯一特征值的模确定了主成分空间中的循环频率尺度，其值比相位随机化噪声底高一个数量级（图2g）。

多体非互易性的最小模型。为了捕捉上文所讨论的筏的非平衡行为，我们构建了与系统中现有对称性相一致的最一般三体力。我们的粒子是相同的、非手性的和被动的。此外，介质是各向同性的。因此，三体力仅取决于由三个相互作用粒子作为顶点构成的

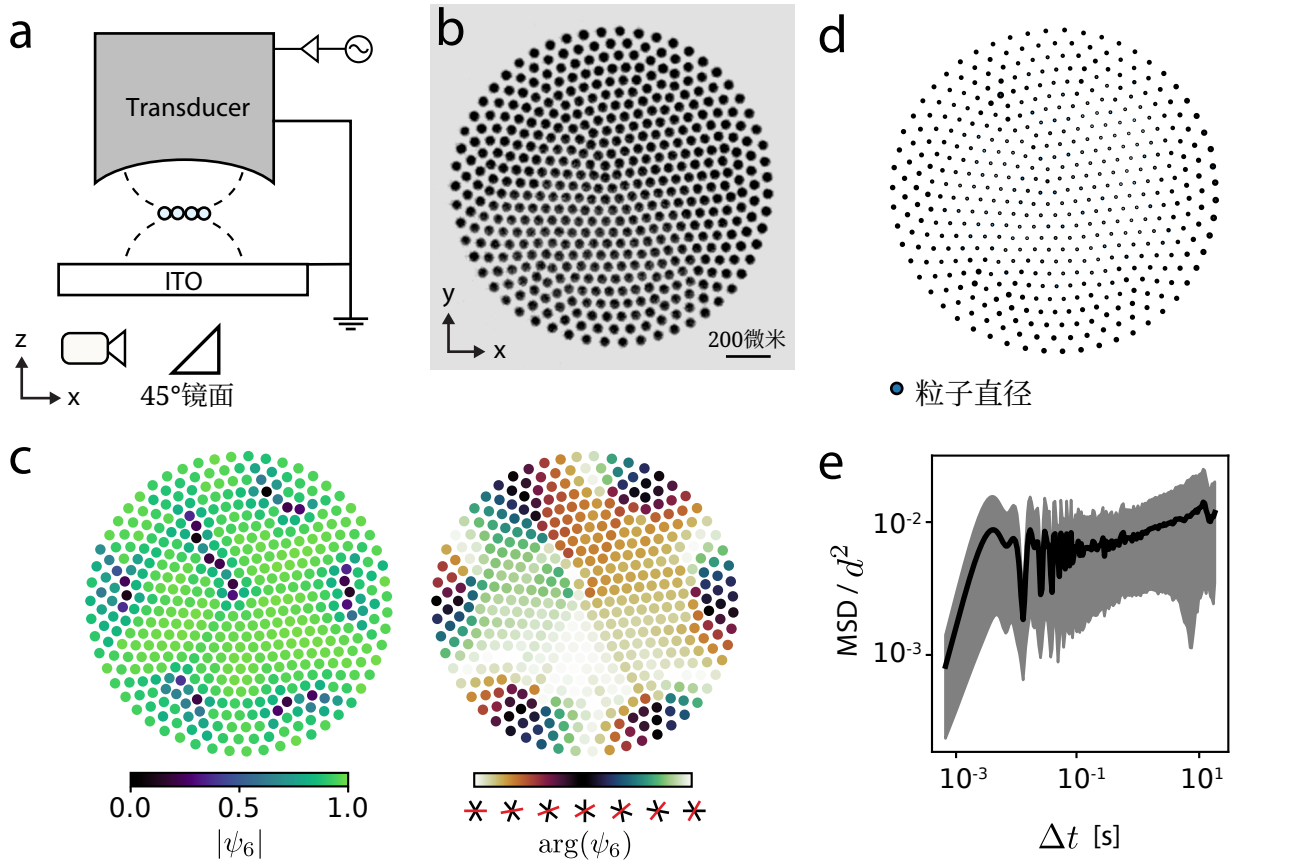


图 1. **声悬浮产生晶体固体。a.** 实验装置示意图。**b.** 声悬浮粒子筏的底视图。**c.** 复六角序参量 ψ_6 的模（左）和辐角（右）。**d.** 每个粒子的均方位移（RMSD）平方根，以圆表示，圆的半径由 RMSD 给出。底部的圆表示（b）中实验的粒子尺寸。（b）中实验的均方位移（MSD），显示在滞后时间 $\sim 10^{-2}$ 秒处出现平台。曲线和阴影区域表示所有粒子 MSD 的平均值 $\pm$ 标准差。

三角形的形状。设 $\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ 为从粒子 i 指向粒子 j 的单位向量，$\hat{\mathbf{r}}_{ij}^{\perp}$ 为其逆时针旋转后的向量，而 $\delta r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}| - \ell$ 为其偏离参考间距 ℓ 的量，则将力按键偏差展开至一阶后可得

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= \sum_{(j,k)} \left[a_{ijk} \hat{\mathbf{r}}_{ij} + b_{ijk} \hat{\mathbf{r}}_{ij}^{\perp} \right], \\ a_{ijk} &= a_0 + k_a \delta r_{ij} + \\ &\quad a_3(\delta r_{ik} + \delta r_{jk}) + \\ &\quad \alpha_3(\delta r_{ik} - \delta r_{jk}), \end{aligned} \tag{1}$$

系数 b_0、k_b、b_3、β_3 具有相同的形式。

每个系数都有明确的物理含义：a_0表示参考间距处的键力（$a_0 < 0$ 对应压缩载荷），k_a 表示成对的胡克刚度，a_3 表示由势能 $U_3 = a_3$（$\delta r_{12}\delta r_{23} + \delta r_{12}\delta r_{13} + \delta r_{23}\delta r_{13}$）产生的互易三体力，而 α_3 表示非互易的动量生成三体力（图3a）。b_{ijk} 系数则是这些力的手性对应力。例如，k_b 表示一种可产生奇弹性的横向弹簧刚度 [12]。

颗粒三元组上的合力仅取决于（α_3，β_3）以及一个在等边构型下为零的形状参数（补充图 2）。

我们使用从三个悬浮粒子的有限元方法（FEM）模拟中提取的力来测量这些系数。模拟求解完整的三维 Navier–Stokes 方程，以及产生实验中作用力的声散射。我们以平均粒子间距为单位测量距离，$\langle \ell \rangle \approx 54\,\mu$米。扫描两个边长固定为 ℓ 、第三边长变化的等腰三角形，可分别确定 a_3 和α_3 （图3b）。相比之下，对等边三角形进行扫描可得到 a_0 和 k_a （图 3c）。将数值表示为胡克弹簧常数 k_a 的比值（因为有限元模拟中的绝对力尺度与实验不匹配），我们得到

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{\ell k_a} &= -0.277 \pm 0.066, \\ \frac{a_3}{k_a} &= 0.05 \pm 0.17, \\ \frac{\alpha_3}{k_a} &= 0.0036 \pm 0.0008. \end{aligned}$$

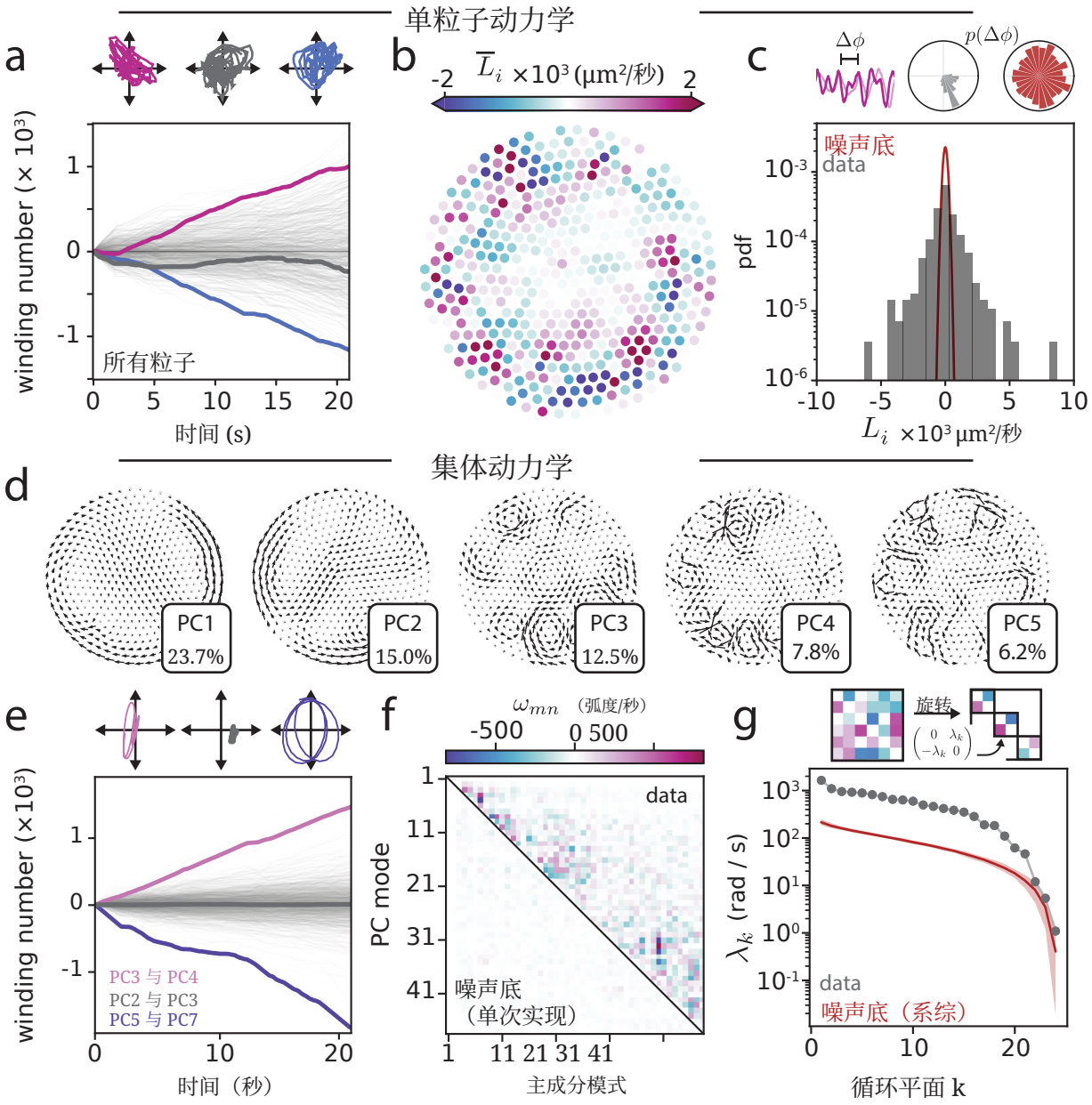


图 2. 颗粒筏中的个体与集体活性。a. 图 1 所示颗粒筏中所有粒子的累积绕数。图中突出显示了呈现大幅逆时针旋转（粉色）、累积旋转接近零（灰色）和大幅顺时针旋转（蓝色）的个别粒子。图上方展示了这些粒子在 20 ms 周期内的轨迹。b. 各粒子比角动量（L_i）的时间平均空间分布图，显示粒子旋转方向存在短程相关。c. 数据的比角动量直方图（灰色）和噪声底（红色）。噪声底通过随机化每个粒子的位置与速度（$\Delta\phi$）之间的相位生成，从而得到一个功率谱相同但相位分布均匀的替代时间序列，如图上方所示。d. 从粒子位置协方差矩阵中提取的方差最高的五个主成分分析模态，并标注了各模态所占总方差的比例。e. 前 48 个主成分分析模态两两之间的累积绕数。图中突出显示了呈现大幅逆时针旋转（粉色）、累积旋转接近零（灰色）和大幅顺时针旋转（蓝色）的个别模态对。f. 前 48 个主成分分析模态任意两两之间的循环频率，定义为 $\omega_{mn} = \langle P_m\dot{P}_n - \dot{P}_m P_n\rangle/(2\sigma_m\sigma_n) = -\omega_{nm}$，其中 $P_i(t)$ 是 PCi 的模态振幅时间序列，而 σ_i 是 $P_i(t)$ 的标准差。下三角部分显示相位随机化噪声底的结果。g. 循环矩阵 $\boldsymbol{\omega}$ 的特征值谱，展示了数据中观测到的大幅旋转的基无关测量结果，并与相位随机化噪声底进行比较。

注意到，由a_3 参数化的互易三体力经测量与零一致。由于长程吸引散射力，晶格中的粒子比孤立三粒子系统排列得更加紧密；这种力引入了类似表面张力的自限域，其强度随粒子数 [50]呈广延增长。在未对这种自限域进行显式建模的情况下，它被吸收到预应力 a_0中。最后，我们发现 b_{ijk} 系数比 $\sim 10^{16}$ 小 k_a一个因子。由于不存在手性力，粒筏环流没有净手性。有关拟合操作流程的详细信息，请参阅方法。

在完美晶格中，多体非互易性消失。有了模型之后，我们现在转而理解粒筏的体行为。鉴于粒筏的晶体结构，当粒子置于三角晶格上时，我们根据力定律（式1）推导出色散关系和弹性模量。对三角晶格中的任何力定律进行线性化，都会得到一个由四个系数参数化的力；用极坐标表示为

$$F_i = -K_{ij}u_j; \quad K = \begin{pmatrix} k_{rr} & k_{r\phi} \\ k_{\phi r} & k_{\phi\phi} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 u_r 和 u_ϕ 分别是沿键轴方向和垂直于键轴方向的相对位移分量，而 F_r、 F_ϕ 则是对应的力分量（图4a）。没有压缩预应力的三角晶格中的胡克弹簧只会产生 $k_{rr} \neq 0$。对径向应变同时产生径向力和横向力的非中心弹簧满足$\{k_{rr}, k_{\phi r}\} \neq 0$，因而可能产生奇弹性 [12]。

我们的最小模型给出 $\{k_{rr}, k_{\phi\phi}\} \neq 0$，用最小模型的系数表示为

$$\begin{aligned} k_{rr} &= 2k_a + \frac{5}{2}a_3 - \frac{1}{2}\alpha_3, \\ k_{\phi\phi} &= \frac{2a_0}{\ell} - \frac{3}{2}a_3 + \frac{3}{2}\alpha_3. \end{aligned} \tag{3}$$

请注意，这意味着 K 是对角的，表明在晶格中看不到非互易性，因为活性需要 K具有非对角元素。不过， α_3 仍会影响力定律，但其作用仅是重整化互易线性系数 k_{rr} 和$k_{\phi\phi}$。将测得的系数代入式（3）可得 $k_{\phi\phi}/k_{rr} = -0.29 \pm 0.09$。负的 $k_{\phi\phi}$ 意味着，使邻居沿垂直于键轴的方向位移，会产生一个横向力；该力会增强而非抵消这一位移。这等价于一种非恢复性力矩。我们强调，这是晶格中的力定律的性质，而非最小模型的性质。

弹性模量的重整化。随后，我们可以利用这一线性近似推导声速和弹性模量。位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{x}\ t)$ 的弹性动力学方程为

$$\rho\ddot{u}_i = F_i = \partial_j\sigma_{ij}, \tag{4}$$

其中，应力 σ_{ij} 通过刚度张量与应变呈线性关系，$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\partial_m u_n$。由于方程（4）是线性的，因此存在平面波解。在与波平行（$u_r = \mathbf{u}\cdot\hat{}\mathbf{q}$）和垂直（$u_\phi = \mathbf{u}\times\hat{}\mathbf{q}$）的坐标中，将方程表示在傅里叶空间内，可得

$$\rho\begin{pmatrix} \ddot{u}_r \\ \ddot{u}_\phi \end{pmatrix} = -q^2\begin{pmatrix} B+G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_r \\ u_\phi \end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中

$$B = \frac{\sqrt{3}}{2}(k_{rr} - k_{\phi\phi}); \quad G = \frac{\sqrt{3}}{4}(k_{rr} + 3k_{\phi\phi}). \tag{6}$$

这些方位角弹簧取决于三体力和预应力，会重新归一化体相模量和剪切模量，但不会引入新的模量。重要的是，横向力会驱使晶格呈现液体般的行为：随着 $k_{\phi\phi}/k_{rr} < 0$ 的绝对值增大，剪切模量会降低（补充说明 I.F）。

我们将这一预测与测得的筏的振动谱进行比较；该谱由速度流的功率谱构建而成（方法）。该谱在 $\mathbf{q} \to -\mathbf{q}$ （图4b，左）下具有对称性，因此排除了其他类似非厄米趋肤效应的活性固体中驱动波传播的宇称对称性破缺机制 [17, 51, 52]。该谱在纵向和横向通道中均呈现显著峰值，这些峰勾勒出筏的色散关系（图 4b，右）。我们将这些峰拟合到式（2）在三角晶格上给出的色散关系（补充说明 II.A），每个筏使用两个自由参数：比值 $k_{\phi\phi}/k_{rr}$ 和速度标度$c_0 = \ell\sqrt{k_{rr}/m}$，其中 m为粒子质量。对于图 1 中的筏，拟合得到 $k_{\phi\phi}/k_{rr} = -0.302$，与此前基于孤立三聚体、通过式（3）得到的结果吻合良好。

测量光谱的另一个特征是，声子分支上叠加了一组水平线（图4b）。每条线都对应一种单一的集体振动，延伸范围覆盖四分之一到二分之一的粒子（补充图 5）。其模式在不同粒子之间呈不规则变化，因此其权重分散在所有波矢上，而不是集中在单个 q上。主成分分析模态中也能看到同样的粒子尺度不规则性（图 2d）。虽然我们无法预测这些线，但它们很可能由非互易相互作用在内部驱动。有限元模拟中的动力学矩阵为此提供了证据：其增长最快的模式频率与占主导地位的水平线频率相同（补充图 5）。

$|\mathbf{q}| \to 0$ 极限下的色散关系给出了纵向和横向声速。在二维固体中，它们与体相（B）和剪切（G）模量的关系为

$$c_L = \sqrt{\frac{B+G}{\rho}}; \ c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{7}$$

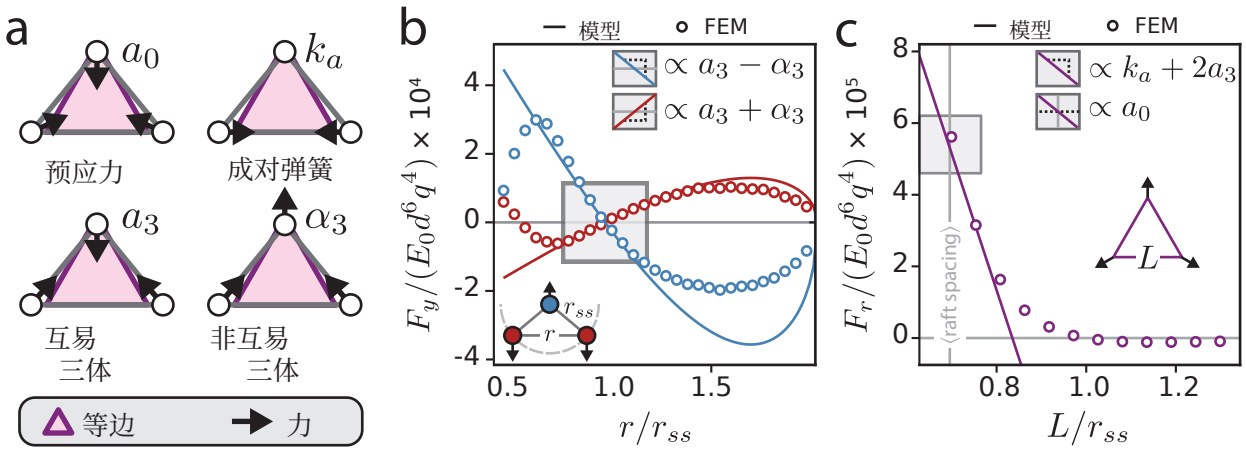


图3。非互易三体力的最小模型。a. 示意图展示了在公式（1）的最小模型中发现的四个非零项。b. a_3 和 α_3 的值通过对处于等腰三角形构型中的三个粒子进行COMSOL模拟测得，其中三角形的张角不断变化，并以 r/r_{ss}为参数； r 为三角形底边的长度， r_{ss} 为无力等边三角形的边长，也是等腰三角形两条等长边的长度。三角形顶点处粒子所受力的竖直分量的斜率（蓝色）为 $\partial_{r/r_{ss}} F_y^{\text{apex}}|_{r/r_{ss}=1} = \sqrt{3} r_{ss} (\alpha_3 - a_3)$ 。三角形底边处两个粒子所受力的竖直分量的斜率（红色）为 $\partial_{r/r_{ss}} F_y^{\text{base}}|_{r/r_{ss}=1} = \sqrt{3} r_{ss} (\alpha_3 + a_3)/2$。c. a_0 和 k_a 的值通过对处于等边三角形构型中的三个粒子进行COMSOL模拟测得，其中边长 L不断变化。预应力由实验中观测到的间距处力的向外径向分量的值给出，即 $F_r(\langle \ell \rangle) = -\sqrt{3} a_0$。该点处力的斜率为 $\partial_{L/r_{ss}} F_r|_{L=\langle \ell \rangle} = -\sqrt{3} r_{ss} (k_a + 2a_3)$ 。

声速的比值与泊松比 ν 之间的关系为 [53]

$$\nu = 1 - 2\left(\frac{c_T}{c_L}\right)^2 = \frac{B-G}{B+G}. \tag{8}$$

我们在五种实验条件下重复这一操作流程，将粒子直径从25变为 60 μm，并将驱动频率从34.7调节至64.5kHz（图4c）。其中三种条件组装成能够支撑声子的颗粒筏。其拟合的 $k_{\phi\phi}/k_{rr}$ 比值介于−0.274和 −0.302之间，对应的声速范围为$c_L = 0.16$–0.34m/s以及 $c_T = 0.035$–0.088m/s，比空气中343 m/s的声速低三至四个数量级（在 20°C下；确切数值见补充表1）。

随后，我们将测得的声速与 $k_{\phi\phi}/k_{rr}$ 进行比较；该弹簧刚度比由对三角晶格中粒子进行有限元模拟独立获得。数据塌缩到由方程（6）预测的单一曲线上（图4c）。重要的是，要使数据相匹配，必须在总力中纳入次近邻，这凸显了我们的最小模型所刻画的多体非互易相互作用具有长程特性。相应的泊松比分别为 $\nu = 0.87$、0.90和0.93，远高于三角晶格固体的典型 $\nu = 1/3$ 值。

在其余两种条件下，粒子不会组装成稳定构型，因此没有可供拟合的色散关系。由于这两种条件下不存在剪切模量，我们将它们分别赋值为 $c_T = 0$ 和 $\nu = 1$。

总而言之，式（2）中的线性二维弹性描述解释了我们观察到的颗粒筏异常高的泊松比。

多体非互易性局域于缺陷和边缘。 由于在完美晶格中，多体非互易性除了重整化弹性模量之外并不显现出来，我们接下来探究筏中的活性源自何处。鉴于粒子的位移很小，我们转而研究控制筏线性响应的动力学矩阵 $D_{ij}^{\alpha\beta}$ （方法）。任何动力学矩阵都可以分解为对称部分和反对称部分，即 $(D^{\pm})_{ij}^{\alpha\beta} = (D_{ij}^{\alpha\beta} \pm D_{ji}^{\beta\alpha})/2$。当且仅当 $D^- = 0$ 时，动力学源自某个势能。因此，我们将每个粒子的比值 $\|D_i^-\|/\|D_i^+\|$作为非互易性的局部度量，其中 $\|D_i^-\|^2 = \sum_{j\alpha\beta}[(D^-)_{ij}^{\alpha\beta}]^2$是与粒子 i 对应的 D^- 各行的弗罗贝尼乌斯范数， $\|D_i^+\|^2$同理。

模拟遵循方程（1）的粒子组成的筏，可以看到，当三角晶格的六重对称性被破坏时，便会产生非互易性。在具有完美晶格对称性的有限尺寸筏中，$\|D_i^-\|/\|D_i^+\| > 0$ 非互易性仅出现在边缘（图 5a，左）。若在其他部分均为完美晶格的结构中插入一个刃型位错，则 $\|D_i^-\|/\|D_i^+\|$ >在整个筏中均为 0（图 5a，右）。该位错在整个筏中产生静态的非零剪切应变，局部非互易性随剪切应变幅值成正比增长。我们通过解析推导表明，其系数仅由 α_3 产生（图 5b，补充说明 III.B）。

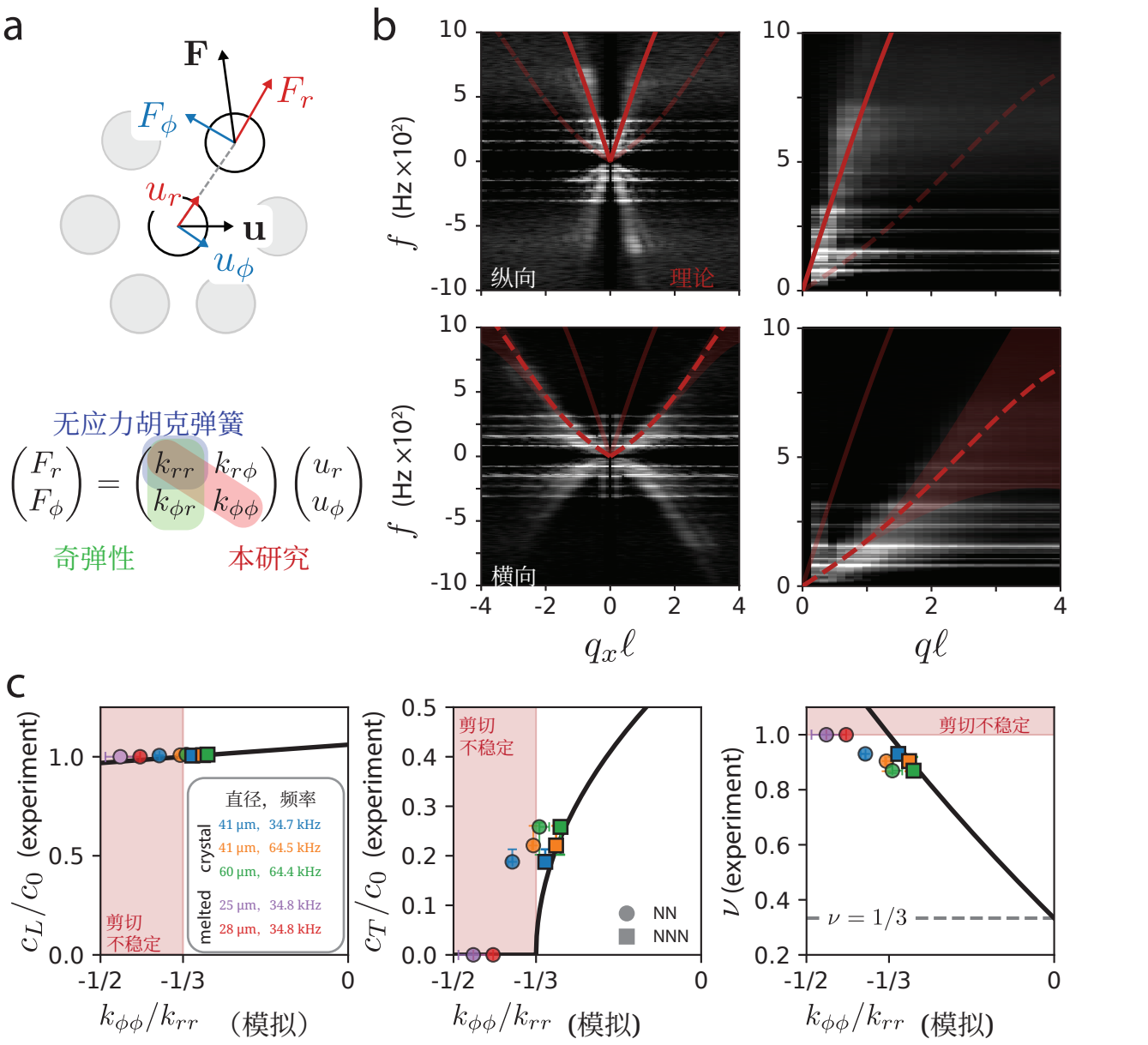


图 4. **悬浮筏具有异常大的泊松比。a.** 小位移 **u** 所诱发的总力 **F** 分解为径向分量 F_r 和方位角分量 F_ϕ。本研究中，我们发现只有 k_{rr} 和 $k_{\phi\phi}$ 不为零。 **b.** 纵向（上排）和横向（下排）方向的功率谱密度。功率谱沿 $q_y = 0$ （左列）以及随波数 $q = |\mathbf{q}|$ （右列）绘出。红线表示在三角晶格上的纵向（实线）和横向（虚线）色散关系，见式（2），该关系用两个自由参数拟合谱脊（方法）。色散关系的红色阴影区域表示约 $\pm 10°$ 的范围 $q_y = 0$。 **c.** 实验中改变粒子直径和声学频率时的纵向声速（左）、横向声速（中）和泊松比（右）。声速以每个颗粒筏自身拟合的速度尺度 $c_0 = \ell\sqrt{k_{rr}/m}$归一化，因此单条理论曲线适用于所有条件。圆圈表示有限元模拟中仅使用最近邻测量 $k_{\phi\phi}/k_{rr}$ 所得的结果，方块表示考虑次近邻时的结果。红色阴影区域表示参数空间中 $c_T^2 < 0$的范围，表明存在剪切失稳。

接下来，我们转而推断实验构型中的 $\|D_i^-\|/\|D_i^+\|$。首先，我们利用轨迹和时滞协方差矩阵直接构建实验动力学矩阵（图 5c，左；方法）。随后，我们计算实验中的动力学矩阵

由式（1）并利用三粒子有限元模拟推断的系数得到的mental构型。尽管 $\|D_i^-\|/\|D_i^+\|$ 的幅值在模型与实验之间有所不同，但它们的空间组织高度相关，由此得到皮尔逊相关系数

为 $r = 0.82$ （图5d）。

进一步仔细观察其空间组织$\|D_i^-\|/\|D_i^+\|$，我们看到它从颗粒筏的中心向边缘逐渐升高（图 5e）。实验中的颗粒筏有十五个五重缺陷和九个七重缺陷，它们大多排列在颗粒筏边缘附近。将 $\|D_i^-\|/\|D_i^+\|$绘制为 $1 - |\psi_6|$ 的函数可以看出，正如由递减的 $|\psi_6|$ 所量化的那样，活性确实随无序度的增加而增强（图 5f）。

通过晶格门控活性设计颗粒筏运动。 作为一项设计规则，晶格门控活性为颗粒筏中的可编程运动提供了一条途径。这需要在最初无缺陷的晶格内预定位置引入位错。尽管目前的实验尚无法实现这一点，我们利用无外力作用下晶体晶筏的模拟提供了两个说明性示例。首先植入位错，然后使颗粒筏在中心力作用下弛豫（补充说明 III.D）。位错被置于预设的位置和取向，并通过其伯格斯矢量 **b**进行量化。当粒子遵循含有 $\alpha_3 \neq 0$的方程（**b**）时，由于位错关于其攀移轴的镜像对称性（补充说明 III.C），每个位错都会受到一个垂直于**b**的攀移力。

伯格斯矢量的取向决定了筏的宏观活性。由 n 具有平行伯格斯矢量的位错组成的倾斜墙关于其攀移轴呈镜面对称。这种对称性既禁止力矩，也禁止滑移力，因此只留下沿攀移方向的合力。所播种的位错墙仅近似呈镜面对称，其残余滑移从单个位错时攀移量的 1.4% 增长到四个位错时的 8.1%（补充说明 III.C）。因此，筏的推进速度随 n 增大，运动方向由 α_3 的符号决定（图 6a–c）。相比之下，六个位错组成的环中，若其伯格斯矢量径向向外，则具有 $\sum \mathbf{b} = 0$ 和 C_6 对称性。这种对称性禁止合力，但允许存在净转矩（图 6d）。因此，筏发生旋转（图 6e），其旋转方向同样由 α_3 的符号决定（图 6f）。在这两种设计中，将 $\alpha_3 = 0$ 设为该值都会导致没有运动。虽然上述模拟没有预应力（$a_0 = 0$），但在均匀压缩下，相同的设计（等效于$a_0 \approx -0.08\, k_a \ell$）仍沿相同方向运动，速率变化小于 20%（补充图 6，补充说明 III.F）。

结论

我们以相同的非热微粒组成的声学悬浮颗粒团作为二维模型固体，结合实验、模拟和理论，展示多体非互易相互作用会产生深远影响。在这些欠阻尼固体中，粒子通过声场介导力相互作用，非互易性会诱发自发粒子运动并触发传播波。我们提出一种最小模型，通过纳入非互易三体力来描述小振幅振动动力学。该模型再现了测得的色散关系，并揭示抗剪切能力如何大幅降低，使泊松比趋近液体的数值 ≈ 0.9。

我们发现，在由相同的非手性粒子构成的完美三角晶格中，活性被隐藏了，这与先前研究的活性固体形成对比；后者由可区分的组分构成 [24], 自推进节点 [54], 手性相互作用 [26], 或各向异性相互作用 [16]。相反，多体活性会在拓扑缺陷处涌现；空间对称性的破缺驱动局部粒子环流和传播波。因此，缺陷可充当活性的局部生成元。最后，我们通过模拟证明，这一发现提供了一条设计准则：通过引入充当局域动量源的微观位错，可以将宏观推进或旋转编程进筏中。综合来看，这些结果表明，非成对的非互易力为激活固体并赋予其新颖特性提供了一套工具。

方法

声悬浮与成像。 声波由标准朗之万换能器产生，该换能器由压电元件和放大的铝制喇叭组成。喇叭的底面构成声学腔体的上边界，粒子被限制在腔体内。喇叭底面呈凹形，曲率半径为 $R_c = 25$mm，从而使粒子受到微弱约束并趋向声学阱中心。底面涂成白色，在腔体从侧面照明时用作粒子成像的背光。平坦的反射板构成腔体的下边界，其由涂有透明氧化铟锡的玻璃基底制成，允许从下方成像。为确保实验的可重复性，在喇叭周围缠绕加热带，并通过温度控制器调节，使换能器保持在（35.0 ± 0.1）℃。

压电元件由正弦信号驱动，其峰峰值电压 V_{pp} 范围为 20 至 200 V，频率接近号角的共振频率， $\omega_0/(2\pi) = 34.870$kHz。驱动信号由函数发生器（EDU33212A, Keysight）产生，并经高压放大器（A- 301 HV amplifier，AA Lab Systems）放大。使用基于激光的声学传感器（Xarion Eta100 Ultra 光学麦克风）测量腔体周边的声压。号角与反射器之间的间隙调整至接近 $\lambda_0/2$，其中 $\lambda_0 = 9.8$mm 是对应于 ω_0 的波长。通过使用平移台垂直移动号角来实现这一点。具体而言，将驱动频率固定为 ω_0，并调整间隙高度，直至测得的声学

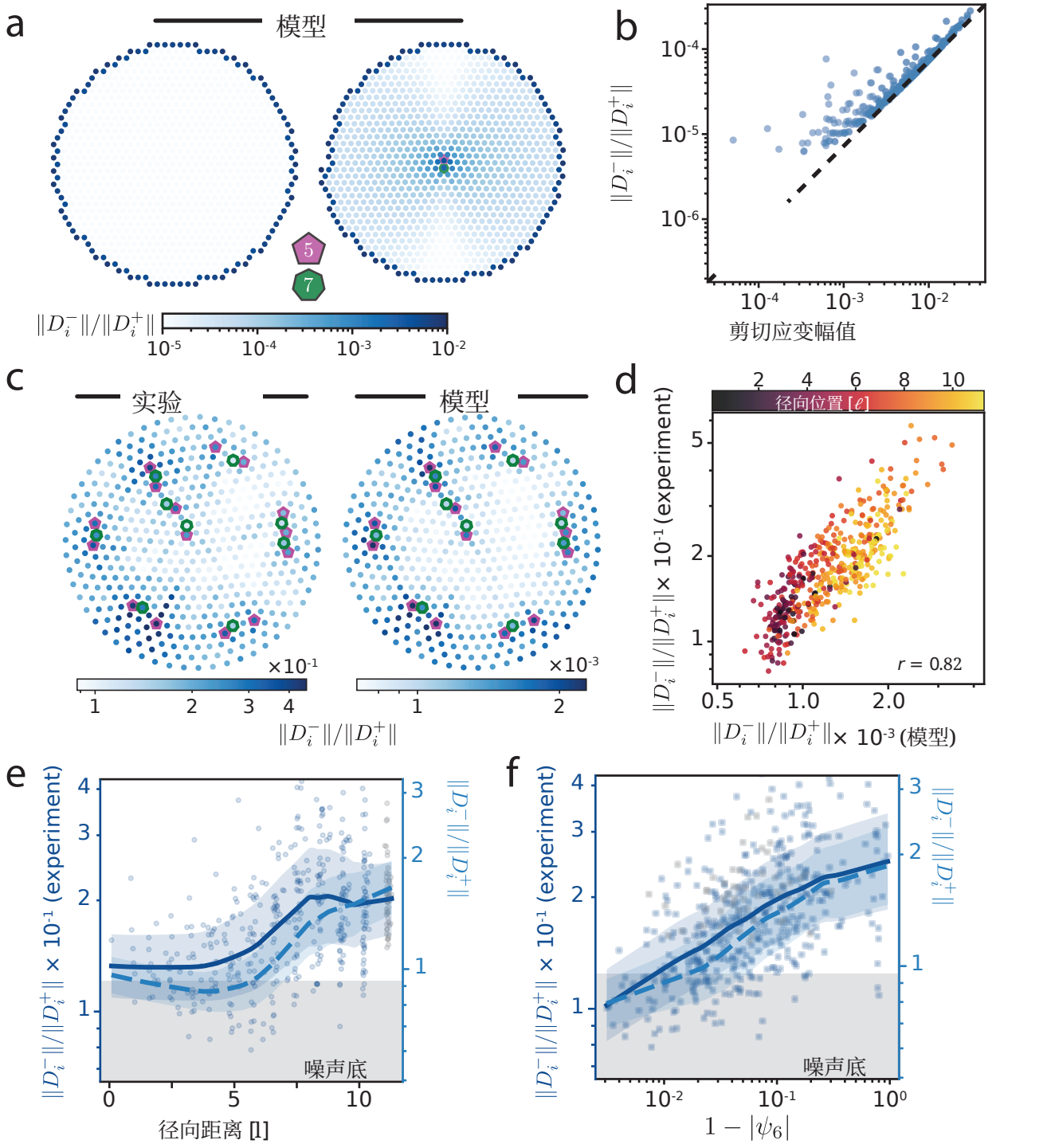


图 5。 **缺陷和边缘处会出现多体非互易性。a**。 中心没有（左）和有（右）单个 5–7 位错对的粒子筏。颜色表示比值 $\|D_i^-\|/\|D_i^+\|$，即非互易性的局部度量，假设粒子遵循式（1），其中 $\alpha_3 \neq 0$。粉红色五边形标记五配位粒子，绿色七边形标记七配位粒子。两个圆盘使用相同的色标。 **b**。 相同比值与含位错粒子筏的局部剪切应变大小之间的关系。虚线为解析预测，而非拟合结果。 **c**。 实验粒子筏的比值分布图，其动力学矩阵由测量轨迹推断得到（左，方法）；以及在相同粒子位置处计算的最小模型结果（右）。缺陷的标记方式与（a）相同。 **d**。 将（c）中的两张图相互对照，每个粒子对应一个点，颜色表示该点到粒子筏质心的距离，以晶格常数为单位 ℓ。 **e**。 比值与到粒子筏质心距离之间的关系：实验结果（实线，左轴）和模型结果（虚线，右轴）。曲线为局部平均值，阴影带表示 $\pm$ 标准差。 **f**。 相同比值与六方序参数之间的关系，绘制为 $1 - |\psi_6|$。 (e、f) 中的灰色区域表示实验测量的噪声底，该噪声底由互易替代数据构造得到（方法）。灰色点表示边缘粒子。

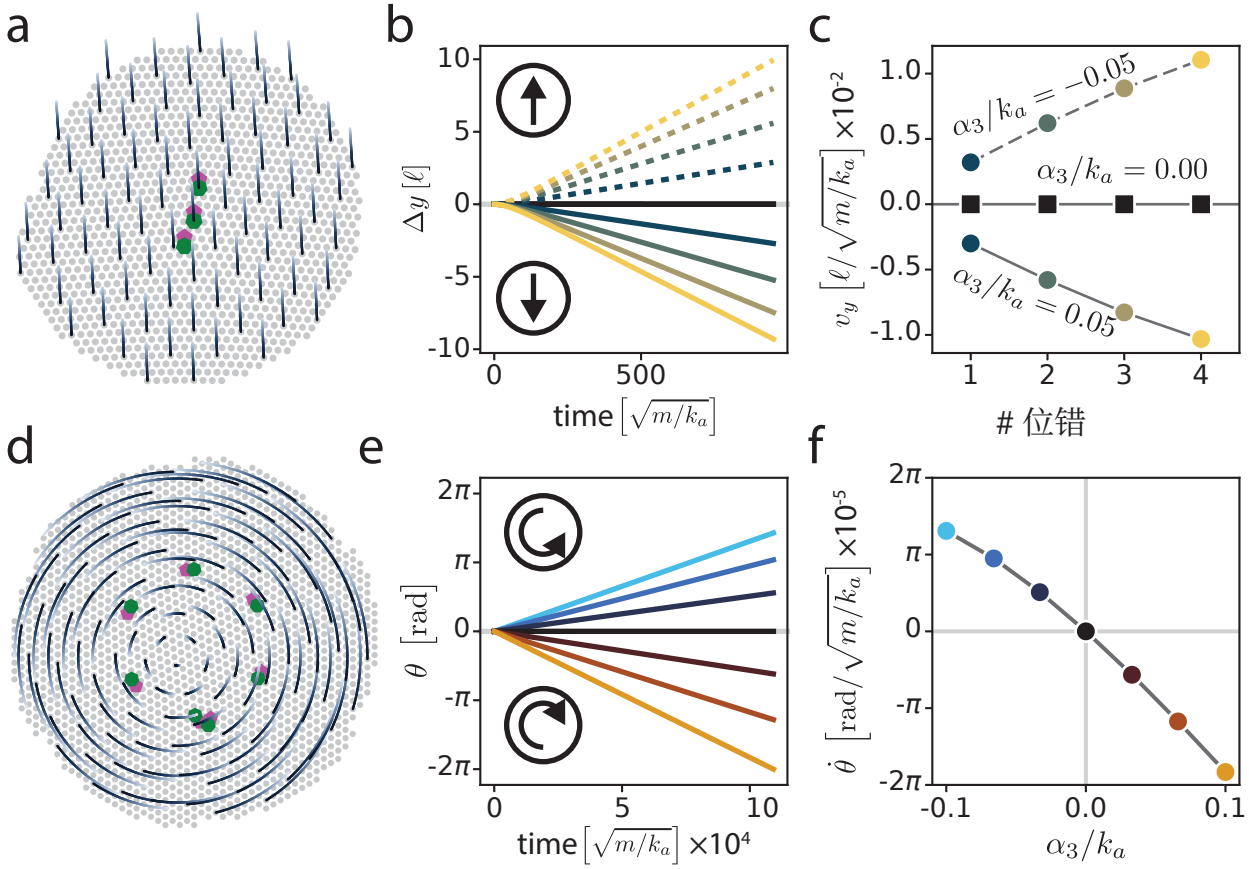


图6。通过位错布置设计活性。全文均采用晶格单位： $\ell = 1$、 $k_a = 1$ 以及粒子质量 $m = 1$。每个筏均遵循欠阻尼动力学， $m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i - \gamma\dot{\mathbf{r}}_i$，阻尼比为 $\zeta = \gamma/(2\sqrt{mk_a}) = 0.01$。时间以$\sqrt{m/k_a}$为单位，位移以 ℓ为单位。每个筏均无外力作用，从其松弛的 $\alpha_3 = 0$状态静止开始，并在 $t = 0$时开启 α_3。方程1中的所有其他系数均为零。a. 半径为 18ℓ 的筏，包含3个位错，其伯格斯矢量彼此平行，并沿攀移方向堆叠。五重和七重缺陷分别以洋红色五边形和绿色七边形表示。线条表示筏以 $\alpha_3/k_a = 0.05$ 移动 4ℓ 时部分粒子的轨迹（经过时间 $t \approx 530$）。时间由浅色向深色推进。b. 在 $\alpha_3/k_a = -0.05$ （虚线）和 $+0.05$ （实线）条件下，含一个至四个位错的位错墙的攀移位移 Δy 随时间的变化（颜色由深蓝色至黄色）。黑线表示 $\alpha_3 = 0$。c. 对于 $\alpha_3/k_a = -0.05$、0和0.05，所得攀移速度 v_y 随位错墙中位错数量的变化。d. 半径为22ℓ 的筏，在半径 $r_0 = 9\ell$处包含一个六个位错环，其伯格斯矢量以六重对称性沿径向向外指向。线条表示部分粒子在 $\alpha_3/k_a = 0.1$ 下旋转 $30°$ 期间的轨迹（经过时间 $t \approx 9.2\times10^3$），颜色由浅至深推进。e. 图(d)中筏的取向 θ 随时间的变化；对于 -0.1 至0.1（橙色）的 α_3/k_a 各取一个值对应一条曲线，颜色由浅蓝色逐渐变为橙色。f. 角速度 $\dot{\theta}$ 随 α_3/k_a的变化。颜色与面板(e)中的颜色相对应。

压力达到最大值，表明满足共振条件。在所有实验过程中，间隙高度始终保持不变。

粒子由聚苯乙烯球（mi- croparticles GmbH）组成，材料密度为 ρ =1.05 g/cm^3，，平均直径为 $d = 41.11\,\mu$m，直径标准差为 $0.5\,\mu$m。使用尖端直径约为 $100\,\mu$m 的手术探针将粒子引入腔体。为尽量减少摩擦起电，号角和反射器均接地。在每次实验开始时，使用 Hamamatsu L12645 光电离器短暂施加软X射线，在原位中和悬浮粒子上的任何残余电荷。

为改变粒子尺寸和驱动频率（图 4c），

我们还使用了来自同一供应商、直径为 $d = 59.7\,\mu$m 和 $32.0\,\mu$m 的聚苯乙烯球，以及第二个谐振频率为 64.5 kHz 的号角，并按照相同的操作流程将间隙调至$\lambda_0/2$。所有测量光谱对应条件下的粒子直径和驱动频率均列于补充表1。其他所有操作流程均与上述描述相同。

所有实验均在温湿度受控的实验室环境中进行，相对湿度为 45–50%，环境温度为 22–24℃。每次实验前后，均使用去离子水清洁底部反射器，并用压缩空气吹干。使用以每秒 6,000 帧运行的高速摄像机（Vision Research Phantom T1340）记录粒子运动。为尽量减少环

境气流造成的干扰，整个实验装置均置于一个尺寸为 $61 \times 30 \times 46\mathrm{cm}^3$,、远大于悬浮区域的丙烯酸盒内。

粒子追踪。使用基于`OpenCV`、`scikit-image`和`trackpy` [55]构建的自定义 Python 处理流程，在高速录像的每一帧中定位粒子。采用具有12×12 像素方形核的形态学黑帽滤波器，去除缓慢变化的背景并增强暗色粒子图像。随后，使用双三次插值将帧放大三倍，并将其强度重新缩放至固定范围，再阈值化为二值图像。形态学闭运算（5×5结构元素）填补了粒子图像中的小间隙。由于筏中的邻近粒子之间仅相隔 ~ 0.3个粒子直径，采用欧氏距离变换的分水岭分割将相互接触的粒子图像分开，并以其局部极大值作为种子（种子间最小间距为 8 个上采样像素）。每个分割区域均被赋予其质心位置和等效半径$\sqrt{A_{\mathrm{reg}}/\pi}$，其中区域面积 A_{reg} 在晶态下是明确的。

我们根据位移功率谱高频部分的平坦底噪量化定位精度，该底噪对应振幅为$0.18\,\mu$m的白色位置噪声，小于晶格间距的 0.5%。偶尔，图像分割会将单个粒子识别为两个检测结果。结构分析前，将间距小于最近邻距离中位数一半的检测结果合并。分析晶格振动时，我们将每段记录限制在筏未发生重排的时间窗口内；若时间平均位置的德劳内邻居网络保持不变，则判定该时段内筏未发生重排。在这些时间窗口内，我们去除了筏的刚体运动：每一帧中，减去所有粒子的质心，并通过对所有追踪粒子相对于质心的极角逐帧平均变化进行积分，去除整体旋转。随后，在共转参考系中，以每个粒子的时间平均位置为基准测量位移$\mathbf{u}_i(t)$。

振动谱与色散拟合。我们按照文献 [56] 中概述的操作流程，直接从实验中提取色散谱。首先计算纵向和横向电流，$j_x(q,t) = \sum v_{x,i} e^{-iqx_i}(t)$ 和 $j_y(q,t) = \sum v_y$, $_i e^{-iqx_i}(t)$，其中 $x_i(t)$、$y_i(t)$ 和$v_{x,i}(t)$、$v_{y,i}(t)$ 分别是粒子 i 在时间 t 的位置和速度。对从 t 到 ω 的电流进行傅里叶变换，得到纵向 $j_x(q,\omega)$ 和横向$j_y(q,\omega)$功率谱。沿 Γ–K 和 Γ–M 方向，在两个通道中确定谱脊，每个筏由此得到四个分支。我们用两个自由参数——比值 $k_{\phi\phi}/k_{rr}$和速度尺度$c_0 = \ell\sqrt{k_{rr}/m}$——同时拟合式（2）的最近邻晶格色散关系与全部四个分支，使得 $c_L/c_0 = \sqrt{(}$ $9 + 3k_{\phi\phi}/k_{rr})/8$ 和 $c_T/c_0 = \sqrt{(3 + 9k_{\phi\phi}/k_{rr})/8}$。比值的不确定性通过对脊点进行自助法获得。

有限元模拟与系数拟合。我们使用 COMSOL Multiphysics 对悬浮在声学腔体中的粒子进行了有限元方法（有限元法）模拟®。三维模拟考虑了周围空气中的声散射和微流效应。为获得时间平均流体属性，即速度和压力，我们首先使用热黏性声学，频域模块求解线性化的纳维–斯托克斯方程。该模块考虑了黏性效应，并解析声学边界层。频域公式确保所得解不受瞬态效应影响。随后，将根据一阶解推导出的适当源项纳入层流接口 [57]中，计算二阶时间平均流体属性。

每个粒子所受的总力通过对黏性贡献和压力贡献求和来计算，我们分别将其称为微流和散射分量。由于重力沿垂直于悬浮平面的方向作用，因此不会影响粒子在平面内的运动，故忽略重力。粒子及其周围流体在高度为 $10d$ 、宽度为 $40d$的矩形区域内进行模拟。顶部和底部位错墙以振幅为10^{-5} m/s、频率为 34.7 kHz 的速度同频同相作正弦运动。侧壁采用滑移边界条件，以尽量减小有限尺寸效应。每个粒子附近的最小和最大网格尺寸分别为 $0.6\,\mu$m 和 $9.5\,\mu$m，从而足以解析黏性效应和微流效应。最后，通过 MATLAB 接口控制 COMSOL 模拟，对不同粒子构型进行参数扫描。

系数由两类三粒子构型获得。固定等腰三角形的等长边，扫描分离 a_3 从 α_3到 F_y ，通过三角形顶点和底边处粒子上径向力的斜率确定（图 3）。相比之下，扫描等边三角形通过所有粒子上径向力的交点和斜率得到 a_0 和 k_a 。每一类构型均在固定腿长下进行拟合，因为将不同腿长的数据合并会受到力随分离距离陡峭衰减的主导影响。作为独立分析，我们在有限元模型中使完美晶格中的单个粒子发生位移，并记录其余每个粒子所受的力。将该响应的第一近邻壳层投影到键坐标系上，得到键层面的比值 $k_{\phi\phi}/k_{rr}$；而对完整多壳层响应求逆最近邻晶格公式，则得到最近邻等效比值（图 4c）。

动力学矩阵。 我们采用了两条相互独立的路径，一条用于模型，另一条用于实验。对于

模型中，我们评估了该定义

$$D_{ij}^{\alpha\beta} = -\frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x_j^\beta}, \tag{9}$$

通过对公式（1）中的力定律进行中心差分，每次使一个粒子发生 $h = 10^{-5}\ell$ 位移，并读取由此产生的作用于每个粒子的力。我们对所报告的每个构型都采用了相同的构造：无缺陷晶格、含有位错的筏，以及测得的粒子位置。由于这种方法直接对所实现的力定律进行微分，因此可独立检验产生公式（3）的分析（补充说明 I.F）。此外，与通过位移协方差矩阵 [58, 59], 估计动力学矩阵的方法不同，这种方法不假设相互作用源自某个势能，因此能够表示非互易力定律。

在实验中，我们采用最软正则模的基，并拟合相空间传播子 $\langle \mathbf{z}(t+\delta t)\mathbf{z}^{\mathsf{T}}\rangle / \langle \mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathsf{T}}\rangle = e^{-\mathcal{J}\delta t}$，其中 $\mathbf{z} = [\mathbf{u}\ \dot{\mathbf{u}}]$ 和 $\mathcal{J} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -I \\ D & \gamma \end{smallmatrix}\right)$，它在不假设互易性的情况下返回模基中的 D。我们验证了推断出的反对称部分并非由跟踪噪声造成（补充说明 IV）。最软的两三个模式位于声学色散之下，且主要受陷阱和有限晶格尺寸的影响。因此，分析中排除了这些模式。

噪声底。 我们采用了两种替代数据构造方法，二者都保留数据的频谱内容，同时破坏被测量的量。对于图 2 中的单粒子环流和集体环流，我们随机化每个粒子的位置与速度之间的相位；这不会改变功率谱，但会使相位分布变得均匀。随后，我们基于替代系综重新计算了角动量和循环频率。对于图 5 中的非互易性图，我们构造了互易替代数据，它们保留了各模态的谱形状，但不含反对称部分。替代数据中每个模式的功率均匀占比为 2.4%，这一偏移不会进入推断的 D（补充说明 IV）。由此得到的带仅是被测量量的噪声底，并不适用于模型。

工程化活性模拟。 图中颗粒筏6 为三角晶格圆盘，且不受外力。通过刃型位错的连续介质位移场引入位错，随后在原长为 ℓ的中心力弹簧作用下使颗粒筏弛豫。弛豫后的晶格泊松比为 $1/3$。随后固定三角剖分，粒子在零温下按照式（1）的完整力定律遵循过阻尼动力学，$\gamma\,\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$。长度以晶格常数为单位，刚度以 k_a 为单位，时间以 γ/k_a为单位。根据弛豫后颗粒筏的合力和力矩预测其稳态漂移和旋转速率，误差在 5% 以内。在位错墙中，伯格斯矢量位于位错核的一侧，略微破坏了镜像对称性。该效应与额外位错的影响叠加，使四位错墙的滑移-攀移比达到 8.1%。在环带中，六个位错之一弛豫为一个位错和一对额外的 5–7 对，破坏了六重对称性，并留下相当于 $|\tau|/r_0$12% 的合力残差，其中 τ 为净转矩，$r_0 = 9\ell$ 为环半径。此外，我们还重复了计算，并允许 α_3 随每个母三角形的平均边长变化；由于三粒子模拟表明它取决于间距，我们确认，即使系数非均匀，三角形之间仍能近似抵消（补充说明 III.E）。

致谢

我们感谢 Nina Brown、Michel Fruchart、Ella King、Billie Meadowcroft、Mia Morrell 和 Bryan VanSaders 富有洞见的讨论。本研究获得了美国陆军研究办公室通过 MURI资助 W911NF-22-2-0109 提供的支持。W.M. Keck基金会也提供了额外资助。本研究使用了芝加哥大学材料研究科学与工程中心的共享实验设施；该中心由美国国家科学基金会根据奖项编号 DMR-2011854 提供资助。本研究还受益于芝加哥大学研究计算中心提供支持的计算资源和服务。本工作部分由 D.S.S. 在阿斯彭物理中心完成；该中心由美国国家科学基金会 PHY-2210452 号资助支持。

人工智能使用声明

在准备本工作期间，作者使用了 Anthropic的 Claude（Opus 5.5）来创建模拟脚本、检查数学计算并制作图表脚本。在使用该工具/服务后，作者根据需要审阅并编辑了相关内容，并对已发表文章的内容承担全部责任。

[1] M. Berry，John Frederick Nye。1923年2月26日—2019年1月8日，《英国皇家学会院士传记回忆录》**69**，425（2020）。

[2]M. Fruchart 和 V. Vitelli，非互易多体物理，arXiv 10.48550/ARXIV.2602.11111 （2026），2602.11111。

[3] Y. Avni、M. Fruchart、D. Martin、D. S. Seara 和 V. Vitelli，非互易伊辛模型，《物理评论快报》134，117103（2025）。[4] M. Fruchart、R. Hanai、P. B. Littlewood 和 V. Vitelli，非互易相变，《Nature》592，363（2021）。[5] K. L. Kreienkamp 和 S. H. L. Klapp，具有非互易耦合的排斥性手性活性粒子的聚簇与群集，《New Journal of Physics》24，123009（2022）。[6] S. Saha、J. Agudo-Canalejo 和 R. Golestanian，标量活性混合物：非互易Cahn–Hilliard模型，Physical Review X 10，041009（2020）。[7] Z. You、A. Baskaran 和 M. C. Marchetti，非互易性作为产生行波态的普适途径，《Proceedings of the National Academy of Sciences》117，19767（2020）。[8] T. Frohoff-H¨ ulsmann 和 U. Thiele，非互易Cahn–Hilliard模型作为普适振幅方程出现，《物理评论快报》131，107201（2023）。[9] F. Brauns 和 M. C. Marchetti，守恒场的非互易图案形成，Physical Review X 14，021014（2024）。[10] V. Ouazan-Reboul、J. Agudo-Canalejo 和 R. Golesta-nian，由于非互易相互作用而产生的原始代谢循环自组织，Nature Communications 14，10.1038/s41467-023-40241-w（2023）。[11] D. S. Seara、J. Colen、M. Fruchart、Y. Avni、D. G. Mar-tin 和 V. Vitelli，社会流体动力学：社会行为的数据驱动建模，《Proceedings of the National Academy of Sciences》122，10.1073/pnas.2508692122（2025）。[12] C. Scheibner、A. Souslov、D. Banerjee、P. Sur´owka、W. T. M. Irvine 和 V. Vitelli，奇弹性，《Nature Physics》16，475（2020）。[13] J. Veenstra、O. Gamayun、M. Brandenbourger、F. van Gorp、H. Terwisscha-Dekker、J.-S. Caux 和 C. Coulais，非互易呼吸孤子，Physical Review X 15，10 1103 2 9 8 2025 。 /nrv - h z （）。[14] J. Veenstra、C. Scheibner、M. Brandenbourger、J. Binysh、A. Souslov、V. Vitelli 和 C. Coulais，活性固体的自适应运动，《Nature》639，935（2025）。[15] L. Braverman、C. Scheibner、B. VanSaders 和 V. Vitelli，具有奇弹性的固体中的拓扑缺陷，《物理评论快报》127，268001（2021）。[16] S. Guillet、A. Poncet、M. Le Blay、W. T. M. Irvine、V. Vitelli 和 D. Bartolo，非互易固体熔化：位错如何在流动晶体中推进并裂变，《Proceedings of the National Academy of Sci-ences》122，10.1073/pnas.2412993122（2025）。[17] T. Beatus、T. Tlusty 和 R. Bar-Ziv，一维微流控晶体中的声子，《Nature Physics》2，743（2006）。[18] A. Ivlev、J. Bartnick、M. Heinen、C.-R. Du、V. Nosenko 和 H. L¨ owen，牛顿第三定律被打破时的统计力学，Physical Review X 5，011035（2015）。[19] Y. Yifat、D. Coursault、C. W. Peterson、J. Parker、Y. Bao、S. K. Gray、S. A. Rice 和 N. F. Scherer，反应性光学物质：电动力学不对称纳米级散射体中的光诱导运动性，《Light: Science & Applications》7，10.1038/s41377-018-0105-y（2018）。[20] S. A. M. Loos、S. H. L. Klapp 和 T. Martynec，具有视觉锥相互作用的非互易XY模型中的长程有序与定向缺陷传播，《物理评论快报》**130**, 198301 2022 2206 10519 ( )，。[ ] 凝聚态物理统计力学。[21] J. Colen、A. Poncet、D. Bartolo 和 V. Vitelli，《解读神经算子：非线性波如何在非互易固体中传播》，《物理评论快报》133，107301（2024）。[22] Z.-F. Huang、M. t. Vrugt、J. M. Martins、R. Wit- tkowski 和 H. L¨owen，《源于单组分非互易性的主动图案形成》，arXiv 10.48550/ARXIV.2404.10093（2024），2404.10093 [凝聚态物理 软物质]。[23]D. Martin、D. Seara、Y. Avni、M. Fruchart 和 V. Vitelli，《非互易活性物质中的集体运动转变：将基于主体的模型粗粒化为涨落流体力学》，Physical Review X 15，041015 2025（）。[24] E. M. King、M. C. Morrell、J. B. Sustiel、M. Gronert、H. Pastor 和 D. G. Grier，《散射波助推涌现活性》，Physical Research Research 7，013055（2025）。[25] M. C. Morrell、L. Elliott 和 D. G. Grier，《非互易波介导相互作用驱动经典时间晶体》，《物理评论快报》136，10.1103/zjzk-t81n（ 2026）。[26] E. S. Bililign、F. Balboa Usabiaga、Y. A. Ganan、A. Pon- cet、V. Soni、S. Magkiriadou、M. J. Shelley、D. Bartolo 和 W. T. M. Irvine，《可动位错将奇异晶体揉捏成涡旋》，《Nature Physics》18，212（2021）。[27] T. H. Tan、A. Mietke、J. Li、Y. Chen、H. Higinbotham、P. J. Foster、S. Gokhale、J. Dunkel 和 N. Fakhri，《活性手性晶体的奇异动力学》，《Nature》607，287（2022）。[28] Y.-C. Chao、S. Gokhale、L. Lin、A. Hastewell、A. Ba- canu、Y. Chen、J. Li、J. Liu、H. Lee、J. Dunkel 和 N. Fakhri，《非互易活性固体中做功循环的选择性激发》，《Nature Physics》22，474（2026）。[29] V. Soni、E. S. Bililign、S. Magkiriadou、S. Sacanna、D. Bartolo、M. J. Shelley 和 W. T. M. Irvine，《胶体手性流体的奇异自由表面流动》，《Nature Physics》15，1188（2019）。[30] C. Reichhardt 和 C. J. O. Reichhardt，《二元活性手性系统中的相位时间晶体与配对》，arXiv 10.48550/ARXIV.2606.28653（2026），2606.28653。[31] C. Reichhardt 和 C. J. O. Reichhardt，《活性手性介质中受驱粒子的输运、霍尔效应与集体动力学》，arXiv 10.48550/ARXIV.2610.03977（2026），2610.03977。[32] D. J. Davenport 和 D. Kleckner，《通过光学束缚形成胶体链与受驱团簇》，Soft Mat- ter 18，4464（2022）。[33] J. Parker、S. Nagasamudram、C. Peterson、Y. Li、S. Soleimanikahnoj、S. A. Rice 和 N. F. Scherer，《光学物质系统中由对称性破缺诱导的n体电动力学力》，Nature Communications 16，10 1038 41467 025 61616 1 2025 。 /s - - -（）。[34] J. Linderman、S. Chen、Y. Li、A. Hoehn、S. A. Rice 和 N. F. Scherer，《光学物质系统中的拟旋转与n体力》，ACS Photonics 13，3854（2026）。[35] H. Thomas、G. E. Morfill、V. Demmel、J. Goree、B. Feuer- bacher 和 D. M¨ ohlmann，《等离子体晶体：尘埃等离子体中的库仑结晶》，《物理评论快报》73，652（1994）。[36] W. Yu、E. Abdelaleem、I. Nemenman 和 J. C. Burton，《针对物理学定制的机器学习揭示了意外的

尘埃等离子体中的物理学》，《Proceedings of the National Academy of Sciences》122，10.1073/pnas.2505725122（2025）。[37] Z. Shu、W.-C. Li、W. Yu 和 J. C. Burton，《非互易相互作用驱动库仑团簇的间歇性熔化》，Newton，100633（2026）。[38] A. V. Zampetaki、B. Liebchen、A. V. Ivlev 和 H. L¨owen，《通信活性粒子的集体自优化》，《Proceedings of the National Academy of Sciences》118，10.1073/pnas.2111142118（2021）。[39] N. St. Clair、D. Davenport、A. D. Kim 和 D. Kleck- ner，《声学束缚粒子的动力学》，Physical Review Research 5，013051（2023）。[40] B. Wu、B. VanSaders、M. X. Lim 和 H. M. Jaeger，《流体动力学耦合使声悬浮晶体颗粒筏熔化》，《Proceedings of the National Academy of Sciences》120，10.1073/pnas.2301625120（2023）。[41] B. Wu、Q. Mao、B. VanSaders 和 H. M. Jaeger，《声悬浮粒子系统中的非互易性与多体相互作用：三体问题》，《物理评论E》112，10.1103/tpzc-qms7（2025）。[42] N. M. Bro wn 和 H. M. Jaeger，《非互易多体相互作用激活声悬浮粒子系综的液态》，arXiv 10.48550/ARXIV.2607.09960（2026），arXiv:2607.09960。[43] S. Chen、D. E. G¨okmen、M. Fruchart、M. Krumbein、P. Silberzan、V. Yashunsky 和 V. Vitelli，《组织动力学中的跨尺度手性》，arXiv（2025），arXiv:2506.12276。[44] M. X. Lim、B. VanSaders 和 H. M. Jaeger，《多体结构与动力学的声学操控》，Reports on Progress in Physics 87，064601（2024）。[45] E. Wigner，《金属中的电子相互作用》，《物理评论》46，1002（1934）。[46] A. Radzvilavi˘cius 和 E. Anisimovas，《二维库仑团簇中的拓扑缺陷构型》，Journal of Physics: Condensed Matter 23，385301（2011）。[47] C. Battle、C. P. Broedersz、N. Fakhri、V. F. Geyer、J. Howard、C. F. Schmidt 和 F. C. MacKintosh，《活性生物系统在介观尺度上的细致平衡破缺》，《科学》352，604（2016）。[48] D. S. Seara、V. Yadav、I. Linsmeier、A. P. Tabatabai、P. W. Oakes、S. M. A. Tabei、S. Banerjee 和 M. P. Murrell，《非收缩性肌动球蛋白中的熵产生率达到最大》，Nature Communications 9，10 1038 41467 018 07413 5 2018 。 /s - - -（）。[49] J. B. Weiss、B. Fox-Kemper、D. Mandal、A. D. Nelson 和 R. K. P. Zia，《非平衡振荡、概率角动量与气候系统》，Journal of Statistical Physics 179，1010（2019）。[50] M. X. Lim、B. VanSaders、A. Souslov 和 H. M. Jaeger，《声悬浮颗粒筏的力学性质》，Physical Review X 12，021017（2022）。[51] M. Brandenbourger、X. Locsin、E. Lerner 和 C. Coulais，《非互易机器人超材料》，Nature Communications 10，10.1038/s41467-019-12599-3（2019）。[52] S. Shankar、A. Souslov、M. J. Bowick、M. C. Marchetti 和 V. Vitelli，《拓扑活性物质》，Nature Reviews Physics 4，380（2022）。[53] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz，《》，第3版，第7卷（爱思唯尔，阿姆斯特丹，2009）。[54] P. Baconnier、D. Shohat、C. H. L´opez、C. Coulais、V. D´emery、G. D¨uring 和 O. Dauchot，《选择性与活性固体中的集体致动，《Nature Physics》18, 1234 2022( )。[55] J. C. Crocker和D. G. Grier，胶体研究的数字视频显微术方法，《胶体与界面科学杂志》179, 298 (1996)。[56] B. Liu、J. Goree和Y. Feng，单层尘埃等离子体晶体中声子的模耦合，《物理评论快报》105, 085004 (2010)。[57] P. B. Muller和H. Bruus，微通道中超声诱导声流的热黏性效应数值研究，《物理评论E》90, 043016 (2014)。[58] D. Kaya、N. L. Green、C. E. Maloney和M. F. Islam，无序胶体固体的正则模与态密度，《科学》329, 656 (2010)。[59] K. Chen、T. Still、S. Schoenholz、K. B. Aptowicz、M. Schindler、A. C. Maggs、A. J. Liu和A. G. Yodh，二维软胶体晶体中的声子，《物理评论E》88, 022315 (2013)。[60] D. Kendall、D. Barden、T. Carne和H. Le，形状与形状理论，威利概率与统计丛书，奇切斯特：威利。MR 189, 12 (1999)。[61] C. G. Small，*The statistical theory of shape*（施普林格科学与商业媒体，2012）。[62] C. P. Klingenberg，在Kendall形状空间中行走：理解形状空间及其坐标系，《进化生物学》47, 334 (2020)。[63] M. Born和K. Huang，*Dynamical Theory of Crystal Lattices (International Series of Monographs on Physics)*（牛津大学出版社，1954）。[64] M. Fruchart、C. Scheibner和V. Vitelli，奇黏度与奇弹性，《凝聚态物理年度评论》14, 471 (2023)。

补充材料：多体非互易性激活的固体

Brady Wu[1,2],Daniel S.Seara[2,3],Qinghao Mao[1,2], Vincenzo Vitelli[1,2,4], Heinrich M. Jaeger[1,2]

[1] *Department of Physics, University of Chicago, USA* [2] *James Franck Institute, University of Chicago, USA* [3] *Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Illinois Chicago, USA*

[4] *Leinweber Institute for Theoretical Physics, University of Chicago, USA*

目录

A. 三体力的最小模型 1. 守恒定律 2. 泰勒展开 3. 推进 4. 谐波理论 5. 动力学矩阵和弹性模量 a. 设置与约定 b. 对线性化力进行傅里叶变换 c. 动力学矩阵 d. 三体力的弹性模量 6. 一般线性化力的弹性模量 16 16 18 18 19 20 20 20 21 21 22

B. 弹性动力学 24
1. 拟合测量光谱的色散关系 2. 谱中的水平线 25 27

C. 六重对称性破缺时可观测到非互易性 29
1. 非互易性仅与 α_3 成正比 2. 根据应变幅值预测非互易性 3. 位错所受的力沿攀移方向 4. 位错的播种与弛豫 5. 对尺寸依赖的 α_3具有稳健性 6. 对压缩预应力具有稳健性 29 29 32 33 33 33

D. 从测量轨迹推断动力学矩阵 35

E. 欠阻尼系统处于平衡态时，禁止出现位置空间环流 36

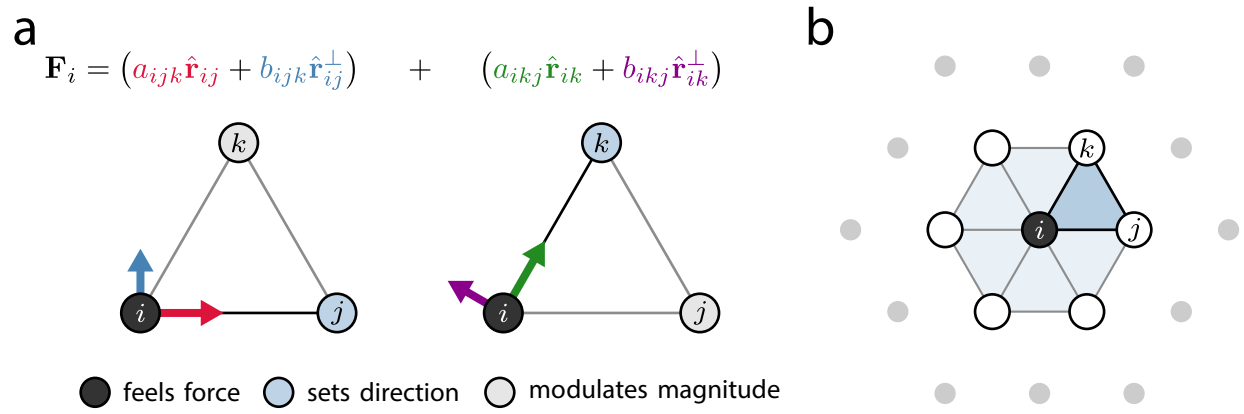


图 7. 三体力的求和规则。a. 单个三角形对粒子 i 上的力所贡献的两项 $\{i, j, k\}$，见公式 (A1)。在有序对 (j, k) 中，粒子 j 决定力的方向（沿 $\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ 及其逆时针旋转方向 $\hat{\mathbf{r}}_{ij}^{\perp}$），而 k 通过系数 a_{ijk} 和 b_{ijk} 调节其大小；这些系数取决于三个边长偏差 δr_{ij}、δr_{ik} 和 δr_{jk}。有序对 (k, j) 交换这两种作用。箭头方向仅为示意，并不表示系数的符号。b. 在三角晶格上，位置 i 属于六个最近邻三角形（阴影部分），每个三角形贡献两个有序对，因此 $\mathbf{F}_i$ 中共有十二项。颜色更深的三角形即 a 中绘出的三角形。

附录 A：三体力的最小模型

本节推导正文中介绍的最小模型及其相关的键刚度矩阵和弹性模量。全文中，f 和 g 表示决定力的纵向和横向分量的标量函数；系数 a_0，k_a，a_3，α_3 和 b_0，k_b，b_3，β_3 与正文中的系数相同。

每个粒子的位置为 $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^2$。我们将分离矢量写为 $\mathbf{r}^{ij} = \mathbf{r}^j - \mathbf{r}_i$，将其相对于参考长度 ℓ 的偏差写为 $\delta r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}| - \ell = \delta r_{ji}$。为表示三角形中与粒子 i 相对的边的偏差，方便起见，我们引入单下标简写 δr_i：$\delta r_1 \equiv \delta r_{23}$、$\delta r_2 \equiv \delta r_{31}$ 和 $\delta r_3 \equiv \delta r_{12}$。按照这一标记，$(\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3)$ 构成一个 S_3 置换表示，即重新标记粒子时，δr_i 也会以相同方式进行置换。

我们假设力在平移和置换下保持不变，并在空间旋转下协变。在这些假设下，作用于粒子 i的最一般三体力可写为

$$\mathbf{F}_i = \sum_{(j,k)} a_{ijk}\hat{\mathbf{r}}_{ij} + b_{ijk}\hat{\mathbf{r}}_{ij}^{\perp}, \quad a_{ijk} = f(\delta r_{ij}; \delta r_{ik}, \delta r_{jk}),\ b_{ijk} = g(\delta r_{ij}; \delta r_{ik}, \delta r_{jk}), \tag{A1}$$

其中，求和遍历有序对 (j, k)，而 $(\hat{\mathbf{r}}_{ij}^{\perp})_\alpha = R^{\pi/2}_{\alpha\beta}\,(\hat{\mathbf{r}}_{ij})_\beta$ 是逆时针旋转 $\pi/2$ 后的单位键矢量。标量函数 $f(x; y, z)$ 和 $g(x; y, z)$ 依赖于三个不可互换的参数；因此，a_{ijk} 和 b_{ijk} 在交换任意两个指标时都不具有对称性。在这种参数化中，i 标记感受到力的粒子，j 决定力的方向，而 k 调节力的大小（图 7a）。

1. 守恒定律

接下来我们要问：方程（A1）具有什么一般特征，才能使动力学守恒能量、线性动量和角动量？

能量。 如果$\mathbf{F}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i} U$ 对于某个势能 U成立，则该力定律是保守的。任何这样的 U 都必须继承力定律的对称性；对于相同粒子，这已经迫使 $U = U(\delta r_{12},\ \delta r_{13},\ \delta r_{23})$。要看清这一点，请注意，平面上三个点的最一般平移不变且旋转不变的函数是 $U = U_+(\delta r) + \sigma U_-(\delta r)$，其中$\sigma$ =sign($\mathcal{A}$)表示三角形的取向；其大小由三条边的长度通过海伦公式确定，因此没有增加新的信息。置换不变性随后要求 U_- 关于 $(\delta r_1,\ \delta r_2,\ \delta r_3)$ 完全反对称，因为 σ 在奇置换下变号。最后，σ 在共线构型之外局部恒定，因此$\nabla_{\mathbf{r}_i}(\sigma U_-) = \sigma \nabla_{\mathbf{r}_i} U_-$，其方向沿着键方向，如同其他每一项一样。因此，在这一框架下的每个保守力都是中心力，特别是

$$a_{ijk} = \frac{\partial U}{\partial \delta r_{ij}}; \quad b_{ijk} = 0. \tag{A2}$$

注意，右侧不依赖于 k，并且在交换 $i \leftrightarrow j$时具有对称性。令 $a^{\pm}_{ijk} = (a_{ijk} \pm a_{jik})/2$ 表示 a_{ijk}的（ij）对称部分和反对称部分，这相当于交换最后两个参数 f（对于 g也同样如此）所产生的对称性。公式（A2）中的第一个表达式于是要求$a^{-}_{ijk} = 0$。

然而，$a_{ijk} = a^{+}_{ijk}$ 和 $b_{ijk} = 0$ 是必要条件，但并不充分。它们是基于假设 U 存在这一前提所得到的结论；到目前为止，没有任何内容能保证它确实存在。剩下的是一个可积性条件，而在形状空间中最容易看清这一点。对于互易的中心力，无穷小变形所做的功为

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -\sum_{a=1}^{3} T_a \, d(\delta r_a), \qquad T_a \equiv f(\delta r_a; \delta r_b, \delta r_c), \tag{A3}$$

其中，$\{b, c\}$ 是除 a之外的两个粒子，而 f 在其最后两个槽位上是对称的。当且仅当三维形状空间上的余向量场 $T = (T_1, T_2, T_3)$是保守的，即其旋度为零时，势能才存在，$\varepsilon_{ijk}\partial_j T_k = 0$，其中 ε_{ij} 为Levi-Civita张量，且 $\partial_i \equiv \partial/\partial\delta r_i$。将 f_2 记作 f 关于其第二个槽位的导数，并利用槽位(2，3)的对称性将其写为 $T_2 = f(\delta r_2;\ \delta r_1,\ \delta r_3)$，则可得

$$\frac{\partial f(x; y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(y; x, z)}{\partial x}, \tag{A4}$$

也就是说，f 对 旁观键的导数，在作用键与该旁观键互换时必须保持不变。旋度的另外两个分量通过重新标记可得相同的条件。

关于方程（A4），有两点需要说明。首先，为什么成对力不会产生相同的条件？对于保守的成对相互作用，$f(x, y) = f(x - y) \equiv f(r)$ 只依赖一个标量变量，因此原函数存在。相比之下，三体相互作用并无此保证。

其次，方程（A4）等价于要求总力对应一个对称的动力学矩阵。在笛卡尔坐标中，它可以写成 $\partial F^{\alpha}_i/\partial r^{\beta}_j = D^{\alpha\beta}_{ij} = D^{\beta\alpha}_{ji} = \partial F^{\beta}_j/\partial r^{\alpha}_i$。

我们强调，方程（A4）约束的是 f 的导数，而不是 f 本身。特别是，它并不要求在 $j \leftrightarrow k$ 下保持对称。下文引入的三体项 $a_{ijk} = a_3(\delta r_{ik} + \delta r_{jk})$ 就是一个例子：尽管 $a_{ijk} \neq a_{ikj}$，它具有常数 $\partial_y f(x, y, z) = a_3$，因此方程（A4）成立，且该力是保守力，其势能为 $U_3 = a_3(\delta r_1\delta r_2 + \delta r_1\delta r_3 + \delta r_2\delta r_3)$。正如我们在第 A 2 节所示，所有关于 δr 的一阶项都具有常数 $\partial_y f(x, y, z)$，因此最小模型自动可积。违背条件的情况最早出现在二阶，例如 $f \propto \delta r_{ij}(\delta r_{ik} + \delta r_{jk})$ 时。这样的力是互易的，对三聚体不产生合力或力矩，但能够从形状空间中的循环变形中提取功。

线性动量。如果对于任意粒子构型，$\sum_i \mathbf{F}_i = 0$，则线性动量守恒。考虑仅包含 3 个粒子的系统，对总力进行显式计算可得

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{F}_i = 2 \sum_{\{\text{cyc}\}} \left(a^{-}_{ijk}\hat{\mathbf{r}}_{ij} + b^{-}_{ijk}\hat{\mathbf{r}}^{\perp}_{ij} \right), \tag{A5}$$

其中求和是对由三个元素构成的循环集合 $\{\text{cyc}\} = \{123, 231, 312\}$ 进行的。

角动量。与线性动量类似，如果对于任意构型，力矩为零，$\sum_i \mathbf{z}_i \times \mathbf{F}_i = 0$，则力定律使角动量守恒；其中，$\mathbf{z}_i$ 是从参考位置 $\mathbf{x}$ 到粒子 i 的位置的位移向量，$\mathbf{z}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{x}$。如果 $\mathbf{F}_{\text{net}} \neq 0$，结果将取决于 $\mathbf{x}$ 的选择。为避免这种歧义，我们将质心作为参考点，$\langle \mathbf{r} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i/N$，并将每个粒子相对于质心的位移写作 $\mathbf{z}_i = \mathbf{r}_i - \langle \mathbf{r} \rangle$。对相对于质心的净转矩进行显式计算可得

$$\tau_{\text{net}} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{z}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{\{\text{cyc}\}} \left[\frac{4\mathcal{A}}{3} \frac{a^{-}_{ijk}}{r_{ij}} - b^{+}_{ijk} r_{ij} + b^{-}_{ijk} \frac{z_j^2 - z_i^2}{r_{ij}} \right], \tag{A6}$$

其中，$\mathcal{A} = (\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{r}_{13})/2$ 是所讨论三角形的有向面积。为了得到式（A6），我们使用了 $\mathbf{z}_i \times \hat{\mathbf{r}}^{ij} = (\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_j)/r_{ij}$，其中分母中的 r_{ij} 来自 $\hat{\mathbf{r}}^{ij}$ 的归一化，而 $\mathbf{z}_i \times \hat{\mathbf{r}}^{\perp}_{ij} = (\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z}_j - |\mathbf{z}_i|^2)/r_{ij}$。

r_{ij} 的幂次不匹配只是力臂写法造成的表象，并非距离依赖性存在真正差异。每个单粒子贡献都始于对键方向进行归一化所产生的一个 $1/r_{ij}$；只有在将（ijk）与（jik）配对时，不对称性才会出现。纵向力臂 $\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_j$ 在这种交换下是反对称的，因此 a^{+} 相互抵消，而 $1/r_{ij}$则原封不动地保留下来。横向力臂既非对称也非反对称，其对称部分为$-\frac{1}{2}|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j|^2 = -\frac{1}{2}r^2_{ij}$，这会抵消 $1/r_{ij}$并留下 $-b^{+}_{ijk}r_{ij}$。从力学上说，产生力矩只有两种方式：在某处施加合力，其力臂是垂直的

从质心到键线的距离；以及力偶——即在键的两端施加大小相等、方向相反的两个横向力，其力矩为（力）$\times$（间距）$= b^{+}_{ijk} r_{ij}$，并且与参考点无关。沿着键方向作用的大小相等、方向相反的力，与其自身的作用线共线，因此不会产生力偶——这正是 a^{+} 完全没有出现在公式（A6）中的原因，也解释了为什么线性依赖于r_{ij} 的项完全存在于手性扇区中。

2. 泰勒展开

为了得到最小模型，我们对 $\delta r = 0$ 进行一阶泰勒展开，得到

$$f(\delta r_{ij}; \delta r_{ik}, \delta r_{jk}) = a_0 + k_a\, \delta r_{ij} + a_3(\delta r_{ik} + \delta r_{jk}) + \alpha_3(\delta r_{ik} - \delta r_{jk}) + O(\delta r^2), \tag{A7a}$$

$$g(\delta r_{ij}; \delta r_{ik}, \delta r_{jk}) = b_0 + k_b\, \delta r_{ij} + b_3(\delta r_{ik} + \delta r_{jk}) + \beta_3(\delta r_{ik} - \delta r_{jk}) + O(\delta r^2). \tag{A7b}$$

我们的最小模型为式（A1），其系数由式（A7）给出。每个系数都有直接的物理含义。令 $\partial_{ij} f \equiv \partial f / \partial \delta r_{ij}$，则有：

- $a_0 = f(0,\ 0,\ 0)$ 是键 ij 上的均匀预应力，它使无力键长偏离参考间距 ℓ。同样，$b_0 = g(0,\ 0,\ 0)$ 是键 ij 上的预扭矩；与 a_0 不同，它无法通过重新定义 ℓ 来吸收，因为没有任何键长能够抵消横向力。

- $k_a = (\partial_{ij} f)|_0$ 是谐振（成对）弹簧常数，产生$\mathbf{F}_i = k_a(r_{ij} - \ell)\hat{}\mathbf{r}^{ij}$。类似地，$k_b = (\partial_{ij} g)|_0$ 是横向弹簧常数，产生$\mathbf{F}_i = k_b(r_{ij} - \ell)\hat{}\mathbf{r}^{\perp}_{ij}$，这可以产生奇弹性。

- $a_3 = (\partial_{ik} f + \partial_{jk} f)/2$是一个具有势能 $U = a_3(\delta r_1 \delta r_2 + \delta r_1 \delta r_3 + \delta r_2 \delta r_3)$ 的互易保守三体项；b_3同理。

- $\alpha_3 = (\partial_{ik} f - \partial_{jk} f)/2$ 违反线动量守恒。它衡量了 ik 与jk 键偏差之间的不平衡，并且在 $i \leftrightarrow j$ 下为奇函数。同样，β_3 是α_3的手性类似物。

方程（A7）中的每个系数都具有恒定的 f_2（同样，g_2），因此方程（A4）恒等成立。因此，只要 $\alpha_3 = \beta_3 = 0$ 且 $b_0 = k_b = b_3 = 0$，最小模型就守恒能量。

3. 推进

我们有 $a^{-}_{ijk} = \alpha_3(\delta r_{ik} - \delta r_{jk}) = \alpha_3(\delta r_j - \delta r_i)$，其中使用了本节开头介绍的单指标表示法。$b^{-}_{ijk}$也有类似结果。于是，粒子三元组上的合力为

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = 2\alpha_3 \left((\delta r_2 - \delta r_1)\hat{\mathbf{r}}_{12} + (\delta r_3 - \delta r_2)\hat{\mathbf{r}}_{23} + (\delta r_1 - \delta r_3)\hat{\mathbf{r}}_{31} \right) + \text{chiral terms} \tag{A8}$$

对于所有情况，该表达式都是精确的 δr_i（假设式（A7）成立）。考虑等边三角形的微小偏差时，如果用复数记号表示向量，就能得到一个简单的表达式（x，y）$\to x + iy$。将粒子按逆时针方向标记，使 $\hat{}\mathbf{r}_{12} = \hat{}x$对齐，并定义 $\zeta = e^{2\pi i/3}$，我们定义三角形形状参数

$$Q = \delta r_1 + \zeta\, \delta r_2 + \zeta^2 \delta r_3. \tag{A9}$$

对于参考间距下的等边三角形，$\delta r_i = 0$，因此 $Q_{\text{eq}} = 0$。形状参数 Q 量化三角形的剪切：$|Q|$ 决定剪切幅度，而 $\arg(Q)$ 表示其取向。此参数化等价于在 Kendall 球面的北极处取一个切平面 [60, 61]。参见 [62]，其中对形态测量学中的统计形状理论作了现代综述。

我们将用等边三角形对应的键矢量替换键矢量 $\hat{}\mathbf{r}^{ij}$，这会引入 δr^2 阶的误差（在定义函数 f, g 时我们已经忽略了该误差）。按照上述标记，三个键方向分别位于 0、$2\pi/3$ 和 $4\pi/3$，因此

$$(\hat{\mathbf{r}}_{12}, \hat{\mathbf{r}}_{23}, \hat{\mathbf{r}}_{31}) \to (1, \zeta, \zeta^2). \tag{A10}$$

进行这一替换后，合力为（仅关注与 α_3 成正比的项）

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^a_{\rm net} &= 2\alpha_3\left[\delta r_1(\hat{\mathbf{r}}_{31}-\hat{\mathbf{r}}_{12})+\delta r_2(\hat{\mathbf{r}}_{12}-\hat{\mathbf{r}}_{23})+\delta r_3(\hat{\mathbf{r}}_{23}-\hat{\mathbf{r}}_{31})\right]\\ &= 2\alpha_3\left[\delta r_1(\zeta^2-1)+\delta r_2(1-\zeta)+\delta r_3(\zeta-\zeta^2)\right]\\ &= 2\alpha_3(\zeta^2-1)\left[\delta r_1+\delta r_2\frac{1-\zeta}{\zeta^2-1}+\delta r_3\frac{\zeta(1-\zeta)}{\zeta^2-1}\right]\\ &= 2\alpha_3(\zeta^2-1)\left[\delta r_1+\delta r_2\zeta^{-2}+\delta r_3\zeta^{-1}\right]\\ &= 2\alpha_3(\zeta^2-1)\left[\delta r_1+\delta r_2\zeta+\delta r_3\zeta^2\right]\\ &= 2\alpha_3(\zeta^2-1)Q,\end{aligned}$$

其中我们使用 $1+\zeta+\zeta^2=0$ 来表示 $\zeta^2-1=(\zeta+1)(\zeta-1)=\zeta^2(1-\zeta)$ 和 $\zeta^n=\zeta^{n+3}$。将每个 $\hat{\mathbf{r}}_{ij}\to\hat{\mathbf{r}}^\perp_{ij}=e^{i\pi/2}\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ 替换后，即可得到手性力产生的力。于是，总合力为

$$\mathbf{F}_{\rm net}=2(\zeta^2-1)Q\left(\alpha_3+e^{i\pi/2}\beta_3\right). \tag{A11}$$

因此，推进与剪切 Q 呈线性关系，并且在任意尺寸的等边三角形上均为零。

4. 谐波理论

假设每个粒子位于参考位置$\mathbf{R}_i$，其瞬时位置为 $\mathbf{r}_i=\mathbf{R}_i+\mathbf{u}_i$，其中$\mathbf{u}_i$ 是小位移。键 (i,j) 上的相对位移为 $\mathbf{u}_{ij}=\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i$。在 u_{ij}/ℓ 的一阶近似下（参考间距为 $\ell=R_{ij}$），力可分为两部分：一部分来自标量系数的变化，另一部分是键旋转产生的几何项：

$$\mathbf{F}^{\rm lin}_i=\sum_{(j,k)}\delta a_{ijk}\,\hat{\mathbf{R}}_{ij}+a^0_{ijk}\,\delta\hat{\mathbf{r}}_{ij}+\text{chiral terms}. \tag{A12}$$

为计算 δa_{ijk}，我们首先将键长偏差线性化，

$$\begin{aligned}\delta r_{ij}&=|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|-\ell=|\mathbf{R}_{ij}+\mathbf{u}_{ij}|-\ell\\ &\approx\mathbf{u}_{ij}\cdot\hat{\mathbf{R}}_{ij}\equiv u^{\parallel}_{ij},\end{aligned}$$

因此，一阶近似下，δr_{ij} 只是$\mathbf{u}_{ij}$沿参考键方向$\mathbf{R}_{ij}$的投影。横向运动仅在二阶时才会影响键长。因此我们得到

$$\delta a_{ijk}=k_a u^{\parallel}_{ij}+a_3(u^{\parallel}_{ik}+u^{\parallel}_{jk})+\alpha_3(u^{\parallel}_{ik}-u^{\parallel}_{jk}) \tag{A13}$$

$$\delta b_{ijk}=k_b u^{\parallel}_{ij}+b_3(u^{\parallel}_{ik}+u^{\parallel}_{jk})+\beta_3(u^{\parallel}_{ik}-u^{\parallel}_{jk}). \tag{A14}$$

预应力和预扭矩项分别乘以 $\delta\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ 和$\delta\hat{\mathbf{r}}^\perp_{ij}$，其中

$$\delta\hat{\mathbf{r}}_{ij}=\frac{\hat{\mathbf{R}}^\perp_{ij}\cdot\mathbf{u}_{ij}}{\ell}\hat{\mathbf{R}}^\perp_{ij}=\frac{u^\perp_{ij}}{\ell}\hat{\mathbf{R}}^\perp_{ij};\ \delta\hat{\mathbf{r}}^\perp_{ij}=-\frac{u^\perp_{ij}}{\ell}\hat{\mathbf{R}}_{ij}. \tag{A15}$$

第二个关系可由第一个关系应用 $R^{\pi/2}$ 并使用 $R^{\pi/2}\hat{\mathbf{R}}^\perp=-\hat{\mathbf{R}}$ 得出。注意，单位向量不受沿自身方向运动的影响：拉伸会以相同的因子缩放 $\mathbf{r}_{ij}$ 和 $|\mathbf{r}_{ij}|$，因此只有 $u^\perp_{ij}$ 会使键旋转。我们的总力

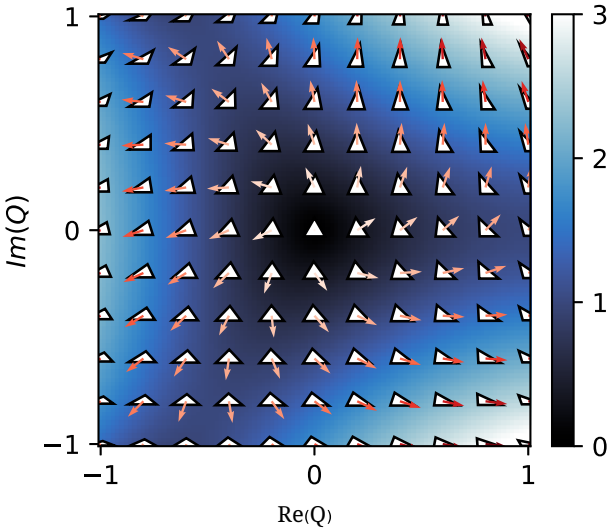


图 8. **形状空间中的合力。** 合力，方程（A8），在 Q-空间中对应于 $k_a=-\alpha_3=1$，其余所有系数均设为零。颜色表示合力的大小，箭头表示方向（箭头颜色仅为便于可视化而选取，不代表物理意义）。三角形显示了 Q-空间中的构型。

因此为

$$\mathbf{F}_i^{\text{lin}} = \sum_{(j,k)} \Bigg[\Big(k_a u_{ij}^{\parallel} + a_3(u_{ik}^{\parallel} + u_{jk}^{\parallel}) + \alpha_3(u_{ik}^{\parallel} - u_{jk}^{\parallel}) \Big) \hat{\mathbf{R}}_{ij} + a_{ijk}^0 \frac{u_{ij}^{\perp}}{\ell} \hat{\mathbf{R}}_{ij}^{\perp} + \Big(k_b u_{ij}^{\parallel} + b_3(u_{ik}^{\parallel} + u_{jk}^{\parallel}) + \beta_3(u_{ik}^{\parallel} - u_{jk}^{\parallel}) \Big) \hat{\mathbf{R}}_{ij}^{\perp} - b_{ijk}^0 \frac{u_{ij}^{\perp}}{\ell} \hat{\mathbf{R}}_{ij} \Bigg]. \tag{A16}$$

在无应变晶格上， $a_{ijk}^0 = a_0$ 和 $b_{ijk}^0 = b_0$。值得注意的是两个预应力项的结构： a_0 会产生由横向运动引起的横向力，类似于欧拉屈曲；而 b_0 会产生由横向运动引起的纵向力。

5. 动力学矩阵和弹性模量

a. Setup and conventions

现在，我们将粒子置于间距为 ℓ的三角晶格上，并研究最小模型产生何种弹性模量。动力学矩阵及其傅里叶变换定义为

$$F^{\alpha}(\mathbf{x}) = -\sum_{\mathbf{y}} D^{\alpha\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, u^{\beta}(\mathbf{y}), \qquad D^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} D^{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \tag{A17}$$

因此， $F^{\alpha}(\mathbf{q}) = -D^{\alpha\beta}(\mathbf{q})u^{\beta}(\mathbf{q})$。我们取相互作用仅作用于最近邻三角形。

在三角晶格上，每个格点属于六个三角形，而每个三角形贡献两个有序对（j， k）；因此，方程（A1）中的求和$\sum$（j， k）对每个格点包含十二项（图 7b）。也可以对一个格点的六个邻居的所有邻居对求和，从而得到 $\binom{6}{2} = 15$ 个无序项（或 30 个有序项）。然而，该规则并非置换闭合的。如果 j 和 k 位于 i的相对两侧，那么 $|\mathbf{r}_{jk}| = 2\ell$，因此从 j的角度看， k 不是邻居，三元组$\{i,j,k\}$ 永远不会出现在 $\mathbf{F}_j$中。选择定则必须是三元组的属性，而不能是单个顶点的属性。否则，方程（A5）不成立，甚至纯互易力定律（$\alpha_3 = \beta_3 = 0$）也会获得虚假的合力。

b. Fourier transforming the linearized force

我们代入一个平面波$\mathbf{u}_m = \mathbf{U}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_m}$ 到式（A16）中，并利用布洛赫定理将相对位移替换为相位差。记 $E_j \equiv e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_{ij}}$ 以及 $E_k \equiv e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_{ik}}$，

$$u_{ij}^{\parallel} \to (E_j - 1)\,\mathbf{U}\cdot\hat{\mathbf{R}}_{ij}, \qquad u_{ik}^{\parallel} \to (E_k - 1)\,\mathbf{U}\cdot\hat{\mathbf{R}}_{ik}, \qquad u_{jk}^{\parallel} \to (E_k - E_j)\,\mathbf{U}\cdot\hat{\mathbf{R}}_{jk}, \tag{A18}$$

同样地， $u_{ij}^{\perp} \to (E_j - 1)\mathbf{U}\cdot\hat{\mathbf{R}}_{ij}^{\perp}$。不同于类似的成对计算，三角形的三条键带有三个不同的相位因子，从而将三体结构引入计算中。

将$\mathbf{q}$ 在三角形上的两个独立投影命名为：

$$\phi_j \equiv \mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{R}}_{ij}, \qquad \phi_k \equiv \mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{R}}_{ik}, \qquad \text{so that} \qquad \mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{R}}_{jk} = \phi_k - \phi_j, \tag{A19}$$

其中，最后一个恒等式是利用$\mathbf{R}_{jk} = \mathbf{R}_{ik} - \mathbf{R}_{ij}$得到的。展开这些相位，

$$E_j - 1 = i\ell\phi_j - \tfrac{1}{2}\ell^2\phi_j^2 + \ldots, \qquad E_k - E_j = i\ell(\phi_k - \phi_j) - \tfrac{1}{2}\ell^2(\phi_k^2 - \phi_j^2) + \ldots. \tag{A20}$$

在到达弹性项之前，有两阶项消失了。 $O(q^0)$项恒为零，因为其中只出现位移差，因而满足声学求和规则，$\sum_{\mathbf{x}} D^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = 0$ （等价于平移不变性）。 $O(q^1)$项则因反演对称性而消失：十二个有序对两两互为反演伙伴（$\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ik}$）$\to (-\mathbf{R}_{ij}, -\mathbf{R}_{ik})$，在这种反演下，每个 ϕ 都改变符号，而每个二重矢量 $R_{ab}^{\alpha} R_{cd}^{\beta}$ 均为偶。因而，第一个非零项是 $O(q^2)$。

c. The dynamical matrix

汇总 $O(q^2)$项并利用 $D^{\alpha\beta} = -\partial F^{\alpha}/\partial U^{\beta}$,

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) = \frac{\ell^2}{2} \sum_{(j,k)} \Big[& k_a\, \hat{R}^{\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{ij}\hat{R}^{\gamma}_{ij}\hat{R}^{\eta}_{ij} + (a_3+\alpha_3)\, \hat{R}^{\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{ik}\hat{R}^{\gamma}_{ik}\hat{R}^{\eta}_{ik} + (a_3-\alpha_3)\hat{R}^{\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{jk}\big(\hat{R}^{\gamma}_{ik}\hat{R}^{\eta}_{ik} - \hat{R}^{\gamma}_{ij}\hat{R}^{\eta}_{ij}\big) \\
& + k_b\, \hat{R}^{\perp\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{ij}\hat{R}^{\gamma}_{ij}\hat{R}^{\eta}_{ij} + (b_3+\beta_3)\, \hat{R}^{\perp\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{ik}\hat{R}^{\gamma}_{ik}\hat{R}^{\eta}_{ik} + (b_3-\beta_3)\hat{R}^{\perp\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{jk}\big(\hat{R}^{\gamma}_{ik}\hat{R}^{\eta}_{ik} - \hat{R}^{\gamma}_{ij}\hat{R}^{\eta}_{ij}\big) \\
& + \frac{1}{\ell}\Big(a_0\, \hat{R}^{\perp\alpha}_{ij} - b_0\, \hat{R}^{\alpha}_{ij}\Big)\hat{R}^{\perp\beta}_{ij}\hat{R}^{\gamma}_{ij}\hat{R}^{\eta}_{ij} \Big]\, q^{\gamma}q^{\eta} \;+\; O(q^4).
\end{aligned}
\tag{A21}
$$

这些行依次表示：宇称偶刚度、手性刚度以及两个预应力。请注意，手性行是在宇称偶行的基础上，将 $D^{\alpha\beta}$ 第一指标中的 $\hat{}\, R^{\alpha}_{ij} \to \hat{}\, R^{\perp\alpha}_{ij}$ 替换得到的，该指标给出了力的方向。预应力行带有额外的 $1/\ell$，因为 a_0 和 b_0 的单位是力，而动力学矩阵的单位是力/长度。

式（A21）是一个熟知结果的三体推广。对于简单的中心弹簧，整个动力学矩阵由键方向的四阶力矩决定，$\hat{}\, n^{\alpha}\hat{}\, n^{\beta}\hat{}\, n^{\gamma}\hat{}\, n^{\eta}$，其中四个因子都指向同一个键 [63]。在这里，每个求和项中的四个因子可以指向三角形中不同的键。

因此，计算式（A21）需要对十二个有序对求和得到四阶力矩。将$\Delta^{\alpha\beta\gamma\eta} \equiv \delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\eta} + \delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\eta} + \delta^{\alpha\eta}\delta^{\beta\gamma}$ 记作各向同性组合，四者中的三个都只是与其成正比：

$$
\sum_{(j,k)} \hat{R}^{\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{ij}\hat{R}^{\gamma}_{ij}\hat{R}^{\eta}_{ij} = \tfrac{3}{2}\,\Delta^{\alpha\beta\gamma\eta}, \tag{A22a}
$$

$$
\sum_{(j,k)} \hat{R}^{\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{ik}\hat{R}^{\gamma}_{ik}\hat{R}^{\eta}_{ik} = \tfrac{3}{4}\,\Delta^{\alpha\beta\gamma\eta}, \tag{A22b}
$$

$$
\sum_{(j,k)} \hat{R}^{\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{jk}\hat{R}^{\gamma}_{ij}\hat{R}^{\eta}_{ij} = -\tfrac{3}{4}\,\Delta^{\alpha\beta\gamma\eta}, \tag{A22c}
$$

$$
\sum_{(j,k)} \hat{R}^{\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{jk}\hat{R}^{\gamma}_{ik}\hat{R}^{\eta}_{ik} = -3\,\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\eta} + \tfrac{3}{2}\big(\delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\eta} + \delta^{\alpha\eta}\delta^{\beta\gamma}\big), \tag{A22d}
$$

相应的力矩在第一个指标上带有一个 $\perp$，通过在该位置 $\delta^{\alpha\bullet} \to \varepsilon^{\alpha\bullet}$ 得到。二阶矩为

$$
\sum_{(j,k)} \hat{R}^{\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{ij} = 6\,\delta^{\alpha\beta}, \qquad \sum_{(j,k)} \hat{R}^{\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{ik} = 3\,\delta^{\alpha\beta}, \qquad \sum_{(j,k)} \hat{R}^{\alpha}_{ij}\hat{R}^{\beta}_{jk} = -3\,\delta^{\alpha\beta}. \tag{A23}
$$

两种情况下的各向同性都源于邻壳层具有六重对称性。方程（A22）的最后一行才是真正的新内容，也是它生成了下面的（$a_3-\alpha_3$）块。

d. Elastic moduli for three-body force

将位移分解为纵向和横向部分，即 $u^{\parallel} = \hat{}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}$ 和 $u^{\perp} = \hat{}\,\mathbf{q}^{\perp}\cdot\mathbf{u}$，并定义旋转后的归一化动力学矩阵

$$
\tilde{D} \equiv \frac{1}{Vq^2}\,\mathsf{R}^{\top} D(\mathbf{q})\,\mathsf{R}, \qquad \mathsf{R} = \big[\,\hat{\mathbf{q}}\;\;\hat{\mathbf{q}}^{\perp}\,\big], \tag{A24}
$$

其中，$V = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell^2$ 是实空间原胞的面积。对于各向同性的二维奇异固体，$\tilde{D}$ 与$\mathbf{q}$ 的方向无关，其形式为

$$
\tilde{D} = \begin{pmatrix} B+G & K^{o} \\ A^{o}-K^{o} & G \end{pmatrix}. \tag{A25}
$$

~ ~ ~ ~ ~ ~模量可以直接从这个矩阵中读出，分别为 $G = D_{22}$、$B = D_{11} - D_{22}$、$K^{o} = D_{12}$和 $A^{o} = D_{21} + D_{12}$。与其进行对角化，不如这样做：$D(\mathbf{q})$ 的特征值无法标记各个分支，因为纵向

分支在参数空间的某些区域比横向分支更软；而一旦 $K^o \neq 0$ 矩阵变为非正规，其特征值就会变成复数。

将式（A22）代入式（A21，并旋转到（$\hat{\mathbf{q}}$，$\hat{\mathbf{q}}^{\perp}$）坐标系后，每一项都归结为一个固定且与方向无关的 2×2 整数元素矩阵块：

$$\begin{aligned}\tilde{D} = \frac{\sqrt{3}}{4}\Bigg[& k_a \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (a_3+\alpha_3)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (a_3-\alpha_3)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \frac{a_0}{\ell}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ & + k_b \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + (b_3+\beta_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + (b_3-\beta_3)\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{b_0}{\ell}\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\Bigg].\end{aligned} \tag{A26}$$

以 k_a 项为例。该项与旁观粒子无关，因此十二个有序对可化为对六个邻居求和再乘以二。式（A22）的第一行于是给出 $\frac{3}{2}\Delta^{\alpha\beta\gamma\eta}q^\gamma q^\eta = \frac{3}{2}(\delta^{\alpha\beta}q^2 + 2q^\alpha q^\beta)$，所以$D^{\alpha\beta}|_{k_a} = \frac{3}{4}\ell^2 k_a(\delta^{\alpha\beta}q^2 + 2q^\alpha q^\beta)$。在（$\hat{\mathbf{q}}$，$\hat{\mathbf{q}}^{\perp}$）坐标系中，$q^\alpha q^\beta/q^2 \to \mathrm{diag}(1,\,0)$，再除以 $Vq^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell^2 q^2$ 后，ℓ^2中的因子相互抵消，得到 $\frac{\sqrt{3}}{2}k_a\,\mathrm{diag}(3,\,1)$。3∶1 的比值正是 $\delta^{\alpha\beta}q^2 + 2q^\alpha q^\beta$各向同性四阶矩的结构：纵向方向得到 $1+2$，横向得到 $1+0$。

将公式 (A26) 与公式 (A25) 进行比较，可得四个模量，

$$B = \sqrt{3}\left(k_a + 2a_3 - \alpha_3 - \frac{a_0}{\ell}\right), \qquad G = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(k_a - a_3 + 2\alpha_3 + \frac{3a_0}{\ell}\right), \tag{A27a}$$

$$A^o = \sqrt{3}\left(k_b + 2b_3 - \beta_3 - \frac{b_0}{\ell}\right), \qquad K^o = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-k_b + b_3 - 2\beta_3 - \frac{3b_0}{\ell}\right). \tag{A27b}$$

系数 $1/\ell$ 只出现在 a_0 和 b_0上：它们是预应力，单位为力；而将力转换为二维模量，需要乘以一个长度。

几点说明：

a. 三体结构在体相中不可见。八个系数通过八个块引入，但这些块仅张成一个四维空间。例如，$(a_3+\alpha_3)$ 块恰好是 k_a 块的一半。只有四种组合得以保留，从而得到我们的四个模量。这种简化发生在力矩层面，即公式 (A22) 中，而非力定律层面。四个混合矩中有三个与单键矩成比例，比例常数为等边三角形的余弦值 $\pm\frac{1}{2}$。在非布拉维晶格（例如 Kagome晶格）上，壳层不再具有六重对称性，因此这种比例关系应当不再成立。

b. 对测量的影响。 由于只有四种组合保留下来，对无缺陷筏进行声子测量无法将 α_3 与预应力 a_0区分开来；二者都会重整化 B 和 G，区别仅在于比值 $\delta G/\delta B$，对于 α_3 该比值为 -1，而对于 a_0则为 $-3/2$。要将二者明确区分开来，需要一个孤立三聚体或一个缺陷。相反，b_0和 k_b 可以区分，因为它们以不同的比值进入 A^o 和 K^o。

6. 一般线性化力的弹性模量

处于静止位置$\mathbf{x}$ 的粒子与处于静止位置$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}^{(n)}$的邻居相互作用，其中$\mathbf{a}^{(n)}$ 是长度为 ℓ的晶格矢量。在小变形下，粒子移动到$\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$，而$\mathbf{x}' + \mathbf{u}(\mathbf{x}')$。力取决于它们的分离矢量

$$\Delta\mathbf{x} \equiv \big(\mathbf{x}' + \mathbf{u}(\mathbf{x}')\big) - \big(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})\big) = \mathbf{a}^{(n)} + \delta\mathbf{u}(\mathbf{a}^{(n)}), \tag{A28}$$

其中我们定义 $\delta\mathbf{u}(\mathbf{a}^{(n)}) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{a}^{(n)}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$。正如

文中所述，在 在正文中，对任意晶格力定律进行线性化，都会得到如下形式的键框架关系

$$\begin{pmatrix} F_r \\ F_\phi \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} k_{rr} & k_{r\phi} \\ k_{\phi r} & k_{\phi\phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta r \\ \delta\phi \end{pmatrix}, \tag{A29}$$

其中 $\delta r = r - r_0$ 和 $\delta\phi = \phi - \phi_0$。

在笛卡尔坐标中，这可以写成

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\Delta\mathbf{x}) = & -k_{rr}\frac{\Delta\mathbf{x}}{|\Delta\mathbf{x}|}\big(|\Delta\mathbf{x}| - \ell\big) - k_{r\phi}\frac{\Delta\mathbf{x}}{|\Delta\mathbf{x}|}\cdot\big(\Delta\mathbf{x}\times\hat{\mathbf{a}}^{(n)}\big) \\ & - k_{\phi r}\frac{\Delta\mathbf{x}}{|\Delta\mathbf{x}|}\times\big(|\Delta\mathbf{x}| - \ell\big) - k_{\phi\phi}\frac{\Delta\mathbf{x}}{|\Delta\mathbf{x}|}\times\big(\Delta\mathbf{x}\times\hat{\mathbf{a}}^{(n)}\big),\end{aligned} \tag{A30}$$

小角度时，可使用 $|\Delta\mathbf{x}\times\hat{}\,\mathbf{a}^{(n)}|\approx\delta\phi$。三重积等价于 $|\Delta\mathbf{x}\times\hat{}\,\mathbf{a}^{(n)}|\,\hat{}\,\boldsymbol{\phi}$，因为 $\hat{}\,\boldsymbol{\phi}$ 与 $\Delta\mathbf{x}/|\Delta\mathbf{x}|$ 正交。

对 $|\delta\mathbf{u}|/\ell\ll1$ 进行线性化，得到

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=\left(k_{rr}\,\hat{\mathbf{a}}^{(n)}+k_{\phi r}\,\hat{\mathbf{b}}^{(n)}\right)\left(\delta\mathbf{u}(\mathbf{a}^{(n)})\cdot\hat{\mathbf{a}}^{(n)}\right)+\left(k_{r\phi}\,\hat{\mathbf{a}}^{(n)}+k_{\phi\phi}\,\hat{\mathbf{b}}^{(n)}\right)\left(\delta\mathbf{u}(\mathbf{a}^{(n)})\cdot\hat{\mathbf{b}}^{(n)}\right).\tag{A31}$$

这里，$\mathbf{b}^{(n)}$ 垂直于$\mathbf{a}^{(n)}$，其分量为 $b_i^{(n)}=\varepsilon_{ij}a_j^{(n)}$。项 $\delta\mathbf{u}(\mathbf{a}^{(n)})\cdot\hat{}\,\mathbf{a}^{(n)}$ 表示沿键方向的位移（即 δr），而 $\delta\mathbf{u}(\mathbf{a}^{(n)})\cdot\hat{}\,\mathbf{b}^{(n)}$ 表示横向位移（即 $\delta r^{\perp}$）。乘以 $\hat{}\,\mathbf{a}^{(n)}$ 的系数会产生沿键方向的力，而乘以 $\hat{}\,\mathbf{b}^{(n)}$ 的系数则会产生垂直于键方向的力。

由于粒子存在 于三角晶格上，位于$\mathbf{x}$ 处的粒子所受总力为以下各项之和:
来自其 6 个相邻粒子的力 。晶格矢量为

$$\mathbf{a}^{(1)}=\frac{\ell}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix};\quad\mathbf{a}^{(2)}=\frac{\ell}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix};\quad\mathbf{a}^{(3)}=\ell\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\tag{A32}$$

其中$\mathbf{b}^{(n)}$ 相应地定义。总力为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x})&=\sum_{n=1}^{3}\mathbf{F}\left(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{a}^{(n)}\right)+\mathbf{F}\left(\mathbf{x},\mathbf{x}-\mathbf{a}^{(n)}\right)\\&=\sum_{n=1}^{3}\Bigg(\left(k_{rr}\hat{\mathbf{a}}^{(n)}+k_{\phi r}\hat{\mathbf{b}}^{(n)}\right)\left[\left(\delta\mathbf{u}(\mathbf{a}^{(n)})+\delta\mathbf{u}(-\mathbf{a}^{(n)})\right)\cdot\hat{\mathbf{a}}^{(n)}\right]\\&\qquad+\left(k_{r\phi}\hat{\mathbf{a}}^{(n)}+k_{\phi\phi}\hat{\mathbf{b}}^{(n)}\right)\left[\left(\delta\mathbf{u}(\mathbf{a}^{(n)})+\delta\mathbf{u}(-\mathbf{a}^{(n)})\right)\cdot\hat{\mathbf{b}}^{(n)}\right]\Bigg).\end{aligned}\tag{A33}$$

总力与位移 $\delta\mathbf{u}$呈线性关系，因此可写为

$$F_i(\mathbf{x})=-\sum_{\mathbf{x}'}D_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta u_j(\mathbf{x}'),\tag{A34}$$

其中 $D_{ij}(\mathbf{x})$ 是动力学矩阵,

$$D_{ij}(\mathbf{x})=-\sum_{n=1}^{3}\left(k_{rr}\,\hat{a}_i^{(n)}\hat{a}_j^{(n)}+k_{\phi r}\,\hat{b}_i^{(n)}\hat{a}_j^{(n)}+k_{r\phi}\,\hat{a}_i^{(n)}\hat{b}_j^{(n)}+k_{\phi\phi}\,\hat{b}_i^{(n)}\hat{b}_j^{(n)}\right)\left[\delta(\mathbf{x}+\mathbf{a}^{(n)})-2\delta(\mathbf{x})+\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}^{(n)})\right].\tag{A35}$$

这里， $\delta(\mathbf{x})$ 是狄拉克 δ 函数，并且我们使用了 $\delta\mathbf{u}(\mathbf{a}^{(n)})+\delta\mathbf{u}(-\mathbf{a}^{(n)})=\mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{a}^{(n)})-2\mathbf{u}(\mathbf{x})+\mathbf{u}(\mathbf{x}-\mathbf{a}^{(n)})$。将傅里叶变换定义为 $f(\mathbf{q})=\sum_{\mathbf{x}}e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}f(\mathbf{x})$，可得

$$D_{ij}(\mathbf{q})=2\sum_{n=1}^{3}\left(k_{rr}\,\hat{a}_i^{(n)}\hat{a}_j^{(n)}+k_{\phi r}\,\hat{b}_i^{(n)}\hat{a}_j^{(n)}+k_{r\phi}\,\hat{a}_i^{(n)}\hat{b}_j^{(n)}+k_{\phi\phi}\,\hat{b}_i^{(n)}\hat{b}_j^{(n)}\right)\left[1-\cos\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}^{(n)}\right)\right].\tag{A36}$$

在小 $q=\|\mathbf{q}\|$ 处展开可得

$$D_{ij}(\mathbf{q})=\frac{3q^2\ell^2}{8}\begin{pmatrix}3k_{rr}+k_{\phi\phi}&3k_{r\phi}-k_{\phi r}\\3k_{\phi r}-k_{r\phi}&k_{rr}+3k_{\phi\phi}\end{pmatrix}.\tag{A37}$$

二维的 一种各向同性且通常不与旋转耦合的弹性材料具有 [64]

$$D_{ij}(\mathbf{q})=Vq^2\begin{pmatrix}B+G&K^o\\A^o-K^o&G\end{pmatrix},\tag{A38}$$

其中 $V=\sqrt{3}\ell^2/2$ 是晶胞面积， B 是体积模量， G 是剪切模量， A^o 将膨胀与力矩耦合， K^o 是奇剪切模量。比较式（A38）与式（A37）可得

$$\begin{aligned}B&=\frac{\sqrt{3}}{2}(k_{rr}-k_{\phi\phi});&\qquad G&=\frac{\sqrt{3}}{4}(k_{rr}+3k_{\phi\phi});\\A^o&=\frac{\sqrt{3}}{2}(k_{r\phi}+k_{\phi r});&\qquad K^o&=\frac{\sqrt{3}}{4}(3k_{r\phi}-k_{\phi r}).\end{aligned}\tag{A39}$$

结合式（A27），可得有效刚度 k_{ij} 与最小模型系数之间的对应关系。

我们通过在完美三角晶格圆盘的一个内部格点上使用中心差分来计算 D，以此检验这些代数推导与实际实现的力定律是否一致；每次仅将一个粒子位移 $h = 10^{-5}\ell$。这种方法仅使用正文公式（2）的力定律，与上述推导无关。所得长波长模量与公式（A27）的相对误差为 6×10^{-11}，对 $\mathbf{q}$ 的所有方向均成立。对于每个单独的系数，以及所有八个（包括手性）系数均非零的随机参数组，这一结论都成立。将测得的键块旋转到各自的键坐标系后，其结果以相同的精度复现了正文公式（4）中的 k_{rr} 和 $k_{\phi\phi}$。它们还复现了由公式（A27）和（A39）得到的手性刚度 $k_{r\phi}$ 和 $k_{\phi r}$。由于三体力在晶格上仅耦合最近邻，公式（A36）对每个波矢都成立。沿 $D(\mathbf{q})$ 方向测得的 Γ–K 和 Γ–M 与其相符，误差为 5×10^{-9}；最大偏差出现在最小的 q处，此时有限差分限制了精度。

附录 B：弹性动力学

体运动方程可写为

$$\rho\,\partial_{tt}u_j + \gamma\,\partial_t u_j = F_j(\mathbf{x}) = -\sum_{\mathbf{x}'} D_{jn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,u_n(\mathbf{x}'). \tag{B1}$$

我们寻求沿$\mathbf{q}$传播的平面波解，$u_i(\mathbf{x}\ t) = u_i^0(\mathbf{q})\exp(i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t))$。代入方程可得特征值问题 (B1)

$$-(\rho\omega^2 + i\gamma\omega)\,u_j^0 = -D_{jn}(\mathbf{q})\,u_n^0, \tag{B2}$$

其中 $D(\mathbf{q})$ 是方程（A36）的动力学矩阵。

在 纵向–横向基底中，$u_r = \hat{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{u}$ 和 $u_\phi = \hat{\mathbf{q}}\times\mathbf{u}$，该问题对角化为 o

$$-(\rho\omega^2 + i\gamma\omega)\begin{pmatrix} u_r \\ u_\phi \end{pmatrix} = -q^2\begin{pmatrix} B+G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_r \\ u_\phi \end{pmatrix}. \tag{B3}$$

对于 $\gamma = 0$，特征频率给出相速度 $c = \omega/q$，

$$c_L = \sqrt{\frac{B+G}{\rho}}, \quad c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{B4}$$

当 $k_{\phi\phi} = 0$ 时，这些速度化为标准的纵向声速和横向声速。

泊松比。为计算泊松比，我们施加单轴应力 $\sigma_{yy} = p$，其中 $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0$，并求解应变。此外，我们设定 $u_{xy} = 0$，以保持顶部和底部边界水平。在基 $\sigma^a = C^{ab}u^b$下，本构矩阵由式（A39）得到，其中 $A^o = K^o = 0$，并且（在式（A38）的规范下）不存在与旋转的耦合：

$$\begin{pmatrix} p \\ 0 \\ -p \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}. \tag{B5}$$

最后一行给出 $u^3 = 0$。由于 $u^1 = u_{yx} - u_{xy}$ 和 $u^3 = u_{yx} + u_{xy}$，施加 $u_{xy} = 0$ 也将旋转分量固定为 $u^1 = 0$。其余各行均为对角形式，从而得到

$$u^0 = \frac{p}{2B}, \quad u^2 = -\frac{p}{2G}, \quad u^1 = u^3 = 0. \tag{B6}$$

回顾 $u^a = u_{ij}\tau^a_{ij}$，我们得到

$$u_{xx} = \frac{p}{2}\frac{G-B}{BG}, \quad u_{yy} = \frac{p}{2}\frac{G+B}{BG}. \tag{B7}$$

因此，

$$\nu = -\frac{u_{xx}}{u_{yy}} = \frac{B-G}{B+G}. \tag{B8}$$

1. 拟合测量光谱得到的色散关系

将测得的功率谱脊拟合到方程（A36）在三角晶格（图 9）上产生的色散关系。在手性扇区为零假设且每个刚度均以 k_{rr} 为单位时，该矩阵仅取决于单一比值 $\kappa = k_{\phi\phi}/k_{rr}$，

$$D(\mathbf{q}) = 2k_{rr}\sum_{n=1}^{3}\left[\hat{\mathbf{a}}^{(n)}\hat{\mathbf{a}}^{(n)} + \kappa\left(\mathsf{I} - \hat{\mathbf{a}}^{(n)}\hat{\mathbf{a}}^{(n)}\right)\right]\left[1 - \cos\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}^{(n)}\right)\right], \tag{B9}$$

其中 $\mathsf{I} - \hat{\mathbf{a}}^{(n)}\hat{\mathbf{a}}^{(n)} = \hat{\mathbf{b}}^{(n)}\hat{\mathbf{b}}^{(n)}$ 在二维空间中。

我们通过将 $D(\mathbf{q})$ 投影到传播方向及其垂直方向上，得到两个分支，

$$\lambda_L = \hat{q}_i D_{ij}\,\hat{q}_j, \qquad \lambda_T = \hat{q}_i^{\perp} D_{ij}\hat{q}_j^{\perp}. \tag{B10}$$

定义自然角频率 $\omega_0 = \sqrt{k_{rr}/m} \equiv 2\pi f_0$，其中 m 为粒子质量，则波矢为$\mathbf{q}$ 的平面波具有频率

$$f = f_0\sqrt{\lambda(q\ell;\kappa)}. \tag{B11}$$

频率尺度 f_0 包含唯一的量纲信息，因此每个筏贡献两个自由参数。将它们与四条测量分支进行拟合，即沿 Γ–K 方向和 Γ–M 方向的纵向脊线与横向脊线。Γ–K 方向位于 $\theta = 0$ 处，其布里渊区边界为 $q\ell = 4\pi/3$；Γ–M 方向位于 $\theta = 30^\circ$ 处，其布里渊区边界为 $q\ell = 2\pi/\sqrt{3}$。

正文中引用的速度尺度仅由 ω_0 单独决定，$c_0 = \ell\omega_0$。在小 q 条件下展开式（B9）可得$\lambda_L \to 3\,(3+\kappa)\,(q\ell)^{\,2}/8$ 以及 $\lambda_T \to 3\,(1+3\kappa)\,(q\ell)^{\,2}/8$，因此

$$c_L = c_0\sqrt{\frac{3(3+\kappa)}{8}}, \qquad c_T = c_0\sqrt{\frac{3(1+3\kappa)}{8}}, \qquad \frac{c_T}{c_L} = \sqrt{\frac{1+3\kappa}{3+\kappa}}. \tag{B12}$$

声速取自拟合关系的 $|\mathbf{q}| \to 0$ 极限，无需另外对线性区域进行拟合。式（B12）与 B 和 G 的式（A39）在 $c_L = \sqrt{(B+G)/\rho}$ 和 $c_T = \sqrt{G/\rho}$处一致。比值 c_T/c_L 仅取决于 κ，因此无需知道 k_{rr} 或粒子质量，便可通过拟合确定泊松比。横向分支在 $\kappa \to -1/3$时软化，这就是 $G = 0$ 处的剪切失稳，并为网格搜索设定下界。

脊点在满足四个条件时才会纳入拟合。它不能固定在布里渊区边界处。Welch 分段的前半段和后半段平均值必须在 $q\ell$ 以内一致，差异不得超过 0.15。相对于 $|\mathbf{q}|$中位数的对比度，必须达到位置置换零模型的 1.3 倍以上。纵向脊点仅保留 170 Hz 以上的部分，因为低于该频率时，纵向峰会落入有限尺寸孔径内。拟合本身是在 $\kappa \in (-1/3,\ 0.3]$其中 f_0 通过解析方法求解）上进行网格搜索。

颗粒筏的间距并不均匀（图10）。在浮筏 A 中，最近邻间距在距中心 51.2 μm 范围内为 200 μm，并在最外环增至 57.9 μm。我们始终使用颗粒筏平均值，定义为 Delaunay 键长的中位数。对于浮筏 A，我们根据时间平均位置计算该值，得到 54.0 μm。对于其他颗粒筏，我们从整个记录中选取分布均匀的 20 帧进行计算；将此操作流程应用于浮筏 A，得到 54.1 μm。我们首先合并间距小于最近邻距离中位数一半的检测结果，因为追踪器有时会将一个粒子识别为两个。这对颗粒筏 D 的影响最大，每帧约有 20 对合并后的粒子。

表I. 五种条件下的色散拟合。d 为粒子直径，f_d 为驱动频率。ℓ 为筏平均间距（图10）。N 表示参与拟合的脊点数量，σ_κ 表示通过对这些脊点进行移动区块自助法得到的不确定度。由于记录期间颗粒筏发生了重排，条件 C 和 E 未纳入弹性分析。对于粒子未组装成颗粒筏的条件（例如正文图 4c 中的 25 μm 个粒子），没有可拟合的色散，因此未列出。

筏	d (μ米)	f_d (千赫兹)	ℓ(μ米)	κ	s(赫兹)	c_L (毫米/秒)	c_T (毫米/秒)	ν	N	σ_κ
A	41.1	34.7	54.0	−0.302	788	269	50	0.930	120	0.0045
B	41.1	64.5	50.7	−0.290	504	162	35	0.904	43	0.0064
D	59.7	64.4	63.4	−0.274	852	343	88	0.869	660	0.0048
C	59.7	34.7	77.0	−0.285	808	395	91	0.893	129	0.0056
E	32.0	34.8	65.5	−0.302	629	261	49	0.930	65	0.0055

κ 的五个数值均值为 −0.291，标准差为 0.012，而仅由三种形成筏的条件得出 −0.289。这五种条件均远高于 $\kappa = -1/3$处的剪切失稳。与三聚体测定结果的一致性

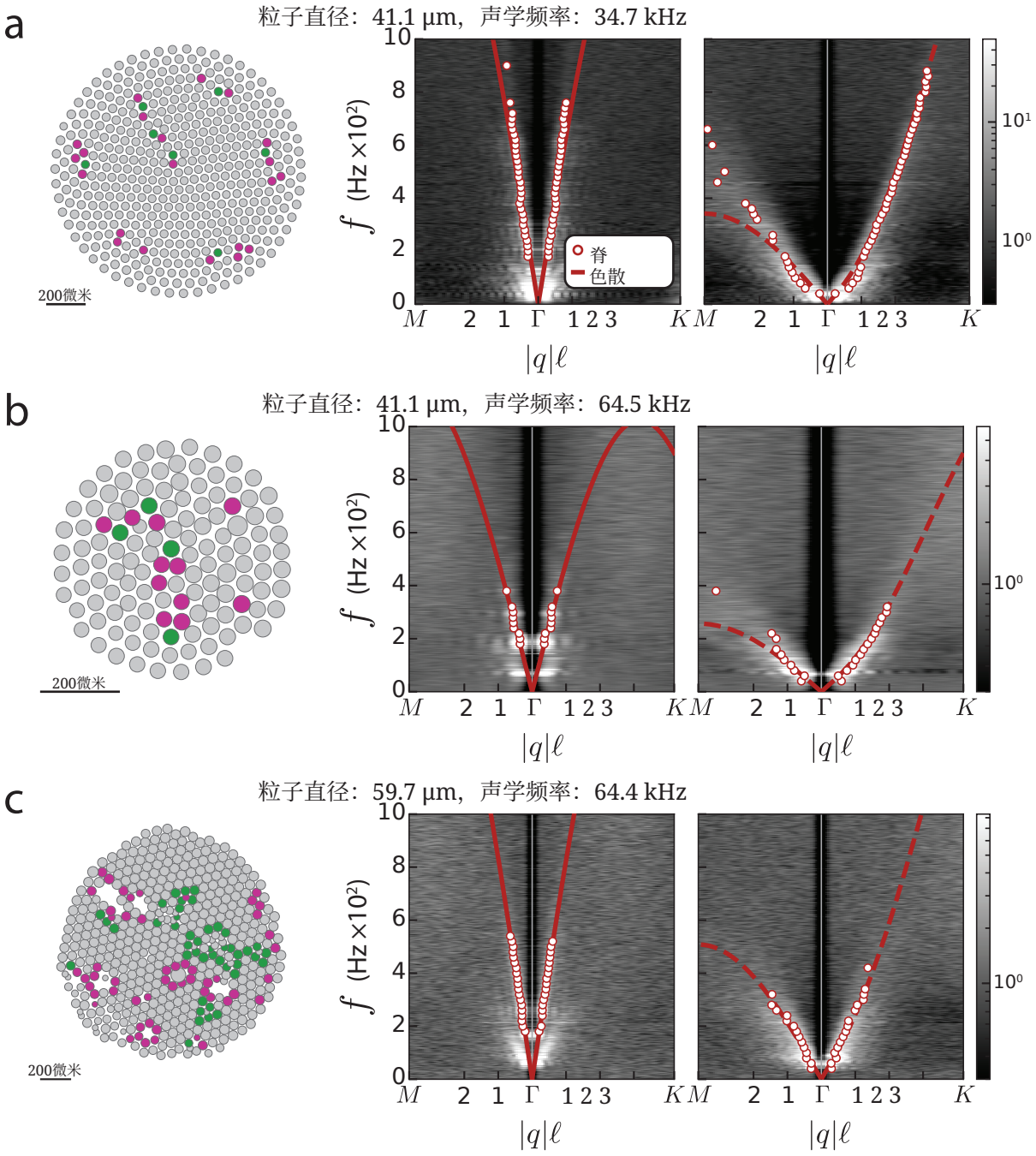


图9. **三种形成筏的条件下的测量光谱与拟合色散关系。** 行 **a.–c.** 对应表 I 中的条件 A、B 和 D（正文图4c中的三种晶体）。左：筏的一帧图像，每个粒子均按追踪器报告的半径绘制。具有五个邻居的内部格点为粉色，具有七个邻居的为绿色。比例尺为 200 μ m。中间和右侧：沿 $M \leftarrow \Gamma \rightarrow K$ 方向的纵向和横向速度通量功率谱，在共旋转晶格坐标系中计算，因此波矢方向始终与晶轴保持一致。每个频率行均按其在 $|\mathbf{q}|$ 上的中位数归一化，从而去除随频率升高的与波矢无关的噪声底。红色曲线显示使用表 B9 中的参数拟合得到的式（1）色散关系（纵向：实线；横向：虚线）。圆圈标出拟合所用的脊点。频率以帧率 6000 fps 为准。

是正文公式（4）中弹性分析的核心一致性检验。这五种条件对应具有测量光谱的五个颗粒筏。正文图 4c 也展示了五种条件，但所选条件不同。该图展示了颗粒筏 A、B 和 D，以及两种粒子始终不会组装的条件，并省略了 C 和 E。

横向分支依赖　　取决于颗粒筏 A、B、C 和 E 中的方向。测得的频率沿

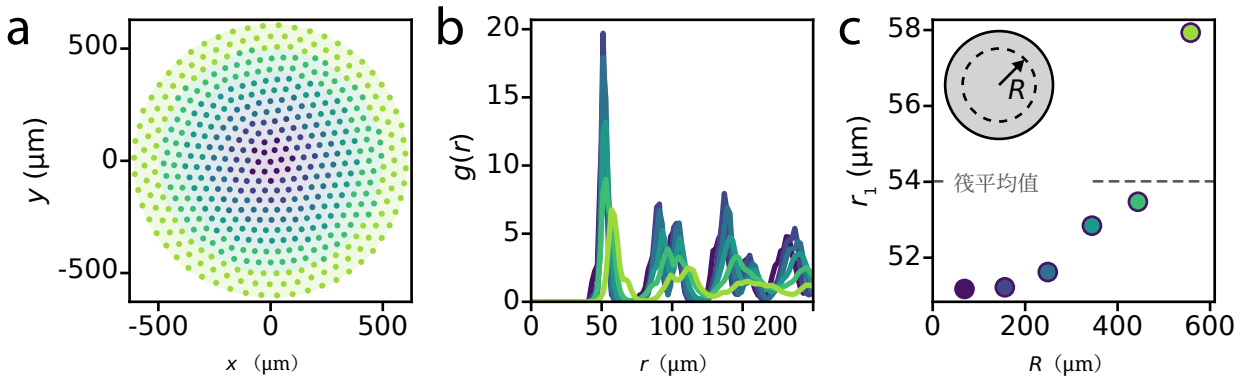


图 10。浮筏 A 的晶格间距向其边缘逐渐增大。**a.** 按距中心的 $100\ \mu$m 环带着色的粒子平均位置（从深到浅表示从中心到边缘）。**b.**每个环带的径向分布函数 $g(r)$，取 1000 帧的平均值。**c.** 每个 $g(r)$ 的第一个峰的距离（ r_1）与该区间内距中心的平均距离。虚线表示筏平均间距，即中位数 Delaunay 键长， $54.0\ \mu$m。

Γ–M 方向高于拟合值，而沿 Γ–K 方向低于拟合值。在颗粒筏 A 中，$\ln f$ 的平均残差沿 Γ–M 方向为 $+0.096$，沿 Γ–K 方向为 -0.080，拟合结果处于两者之间。这种差异几乎完全来自较大的波矢。在颗粒筏 A 中，沿 $q\ell = 1.5$ 方向低于 -0.003，沿 $q\ell = 1.5$ 方向高于 $+0.35$；颗粒筏 C 和 E 则分别给出 $+0.44$ 和 $+0.51$ 高于 $q\ell = 1.5$ 的结果。颗粒筏 D 没有表现出这种分裂，但其横向脊在接近 $q\ell = 1.5$ 处结束，因此没有出现这种分裂的点。第二近邻壳层是最自然的怀疑对象，因为它会改变大 q 下分支的方向依赖性。将每个第二壳层系数都取自三粒子模拟后，它给出了符号正确且随 q 增大的分裂。不过，它产生的分裂仅为测得值的三分之一到一半。因此，我们仍无法解释各向异性的其余部分。

2. 谱中的水平线

测量光谱包含水平线，即在每个波矢处都有功率出现的频率（图11）。我们在此表明，这些是集体模态，而不是单粒子运动的结果。

首先，我们利用 58 个由 4096 帧组成的 Hann窗分段，在每个频率处构建所有粒子速度的互谱矩阵。我们将与最大特征值对应的特征向量 $\lambda_{\max}$称为主导模态。为了测量该单一特征向量对筏在该频率处运动的贡献程度，我们将模式 n 的模态占比定义为 $\lambda_n / \sum_m \lambda_m$。在检测到的 16 条谱线中，有 13 条的主导模态承载了 69% 至 97% 的运动。在相位随机化数据上进行相同计算时，每个粒子的谱均得以保留，但粒子之间的相干性被移除；在中位频率处，模态占比为 7%，在第 95 百分位处为 12%（补充信息图 9a）。

我们还通过参与比 PR 统计参与每个模式的粒子数$= \left(\sum_i |\mathbf{u}_i|^2\right)^2 / \left(N \sum_i |\mathbf{u}_i|^4\right)$，其中$\mathbf{u}_i$ 是粒子x，y在主导模式中的双分量（ i ）振幅，而 $N = 466$。由 m 个粒子组成的模式具有 PR $\approx m/N$，随机扩展图样的 PR 为 ≈ 0.67。在第 13 条谱线处，PR $= 0.25$ 为 0。55，因此每个模式覆盖筏的四分之一到一半。谱线之间的频率给出相近的数值，因此该范围内没有任何频率承载局域模态。这些模式略微偏向缺陷。位于内部 5 重或 7 重位点 1.5ℓ附近的粒子占筏的 24%，却承载了典型谱线模式的 36%，而谱线之间的这一比例为 34%（补充信息图11c、b）。

我们推测，这些谱线是由作用于非正规特征模态上的非互易力在系统内部驱动产生的。通过对整个筏进行COMSOL模拟，我们测得动力学矩阵具有显著的非正规性（补充信息图 11d）。将筏的运动投影到这些模式上后，我们发现所得谱的色散关系与 COMSOL 模态的频率吻合（补充信息图 11e）。此外，由于系统具有非互易性，特征频率将为复数，表示模式的增长率/衰减率。170 Hz 处占主导地位的谱线，与未阻尼 COMSOL 计算中增长最快的模式的频率一致（补充图 11f）。与此同时，由于系统具有非正交性，占主导地位的模式会通过模态耦合“泄漏”到所有 k 值上，从而在预测的频率处形成一条水平线。非线性相互作用可能会在该模式的次谐波或高次谐波处产生其他一些谱线。

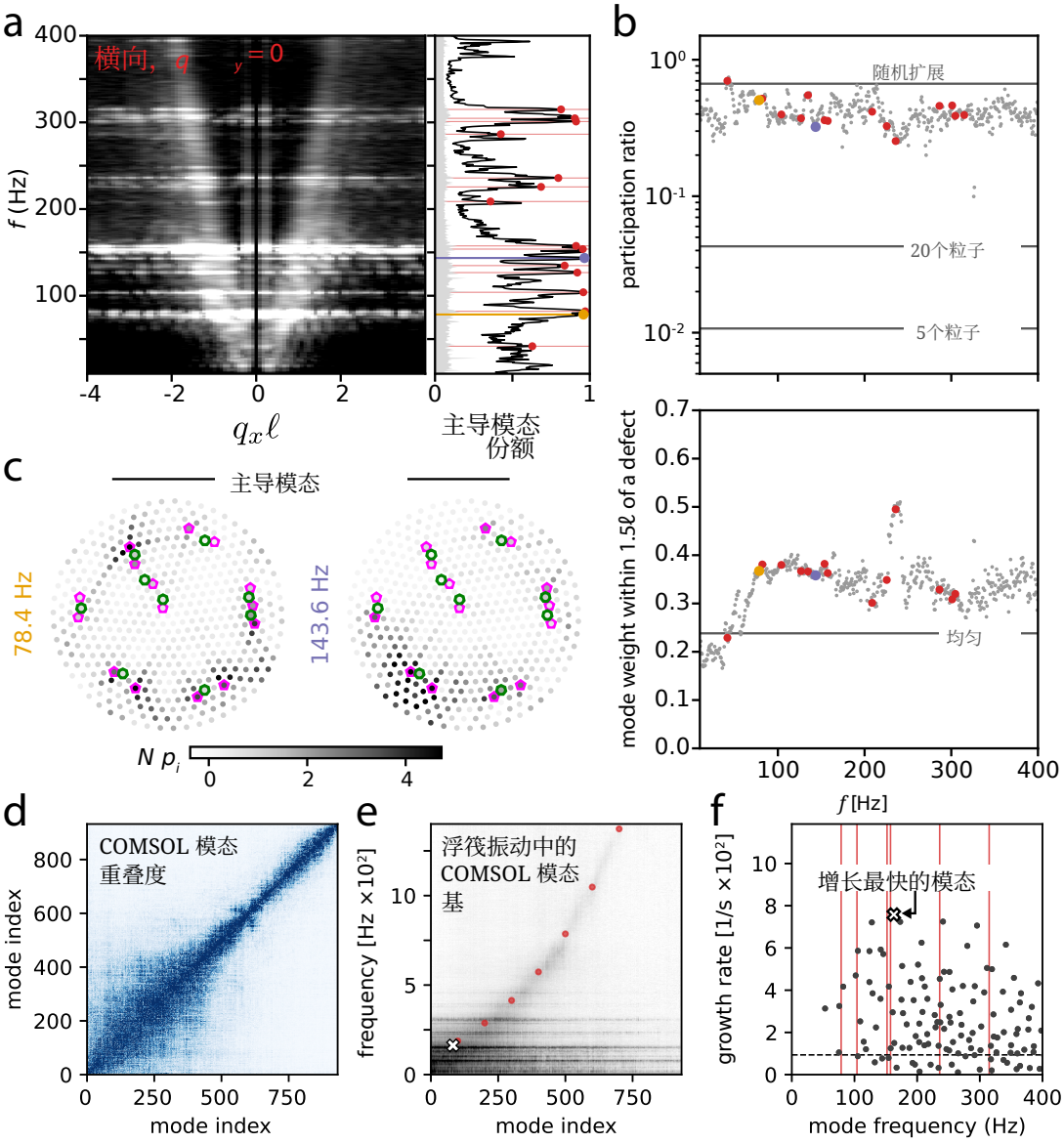


图 11。**功率谱中的非色散谱线是浮筏整体集体振荡。a.** 左：浮筏 A 沿 $q_y = 0$ 的横向谱，其为波矢 $q_x\ell$（ℓ 是晶格间距）和频率 f 的函数。水平亮线表示在所有波矢下均以固定频率出现的振荡。右：每个频率下的主导模态占比，定义为该频率下浮筏功率中由其单一最强空间模式承载的份额（该模式是跨时间窗口的粒子速度的主导奇异向量）。红色点和线标出谱线的频率；橙色和紫色点标出 (c) 中所示的 78.4 Hz 和 143.6 Hz 谱线。在这些谱线上，几乎所有运动都集中于同一个模式中。**b.** 上：每个频率下主导模态的参与比（灰色；彩色点同 (a)）。水平线显示覆盖整个浮筏的随机模式，以及局限于 20 个或 5 个粒子的模式所对应的数值。下：主导模态权重中位于拓扑缺陷 1.5ℓ 内粒子的份额。水平线表示均匀分布于所有粒子的模式所对应的数值。**c.** 78.4 Hz 和 143.6 Hz 下的主导模态。每个粒子根据 Np_i 进行着色，其中 p_i 是其在模态权重中的份额，N 是粒子数（均匀运动时为 $Np_i = 1$）。粉色和绿色符号标出五配位和七配位粒子。**d.** 由有限元（COMSOL）模拟获得的动力学矩阵的本征模态之间的重叠度 $|\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j|$，按本征频率排序。**e.** 将测得的粒子运动投影到每个 COMSOL 本征模态上得到的功率谱。红色点表示每第 100 个模态的本征频率。白色十字标出增长率最大的模态。测得的运动在高频下遵循预测的本征频率，而谱线则作为水平带出现在所有模态中。**f.** 无阻尼条件下，COMSOL 本征模态的增长率随其频率的变化。红线标出测得的谱线频率，虚线表示克服空气阻力所需的增长率，十字标出增长最快的模态。

附录 C：六重对称性破缺时非互易性显现

将动力学矩阵写作 $D_{ij}^{\alpha\beta} = -\partial F_i^\alpha/\partial u_j^\beta$，可得 $D = D^+ + D^-$ 其中 $D^\pm = (D \pm D^{\mathsf{T}})/2$ 且 $(D^{\mathsf{T}})_{ij}^{\alpha\beta} = D_{ji}^{\beta\alpha}$。反对称部分 D^- 体现了麦克斯韦–贝蒂互易定理不成立，而$\|D_i^-\|^2 = \sum_{j,\ \alpha,\ \beta}[(D^-)_{ij}^{\alpha\beta}]^2$表示粒子 i 对应的 2×2 块行的弗罗贝尼乌斯范数（平方）。

1. 非互易性仅与 α_3 成正比

忽略力定律的手性扇区，可以看出动力学矩阵的反对称部分仅取决于 α_3，依据有两点。首先，力定律关于系数呈线性（a_0，k_a，a_3，α_3），因此 D^- 关于这些系数呈线性。其次，令 $\alpha_3 = 0$，则有 $a_{ijk} = a_0 + k_a\delta r_{ij} + a_3(\delta r_{ik} + \delta r_{jk})$，此时 $f_2 = a_3$ 为常数，且可积性条件方程（A4）恒成立。因此，力是保守的，其雅可比矩阵是对称的，并且$D^- = 0$ 在所有构型下均成立。综合以上两点可得

$$D^- = \alpha_3\, D^{-(\alpha_3)}(\{\mathbf{r}\}), \tag{C1}$$

其中 $D^{-(\alpha_3)}$ 是在单位 α_3 处计算的反对称部分，用于表征构型的几何性质。

2. 非互易性随应变幅值的预测

我们在正交归一基中写出局部形变梯度

$$\nabla\mathbf{u} = \sum_\alpha c_\alpha \tau^\alpha, \qquad \tau^{\mathrm{dil}} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \tau^{\mathrm{rot}} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \tau^1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ \tau^2 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \tag{C2}$$

该基在内积 $(u,v) = \mathrm{Tr}(u^{\mathsf{T}}v)/2$ 下满足正交归一条件，因此有 $c_\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\nabla\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\tau^\alpha)$。将位移梯度分量写为 $u_{ij} = \partial u_i/\partial x_j$，可得 $c_{\mathrm{dil}} = (u_{xx} + u_{yy})/2$、$c_{\mathrm{rot}} = (u_{yx} - u_{xy})/2$、$c_1 = (u_{xx} - u_{yy})/2$ 和 $c_2 = (u_{xy} + u_{yx})/2$。在晶格 C_{6v} 的六方点群下，这四个量并不可互换。膨胀是不变量 A_1，旋转是赝标量 A_2，而两个剪切构成二重态 E_2 [63]。

非互易三体力 α_3 仅与 E_2耦合。换言之，晶格的均匀膨胀或刚性旋转永远不会产生非互易性，而剪切会产生非互易性，其大小与剪切量成正比，并且与剪切方向无关。我们通过计算均匀形变晶格中内部粒子 i 的 D^-，并保留关于 $\nabla\mathbf{u}$ 的一阶项，来说明这一点。只要做好两项记账工作，计算就很简短：六重邻壳层的几何结构，以及均匀形变如何移动单个键。

令 $\hat{\mathbf{r}}_n = (\cos\theta_n, \sin\theta_n)$，$n = 1,\dots,6$，为从粒子 i指向其六个邻居的单位向量，其中 $\theta_n = (n-1)2\pi/6$。键与自身的外积可在式（C2）的基上展开为

$$\hat{\mathbf{r}}_n\hat{\mathbf{r}}_n^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix}\cos^2\theta_n & \cos\theta_n\sin\theta_n\\ \cos\theta_n\sin\theta_n & \sin^2\theta_n\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos 2\theta_n & \sin 2\theta_n\\ \sin 2\theta_n & 1-\cos 2\theta_n\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\tau^{\mathrm{dil}} + \cos 2\theta_n\,\tau^1 + \sin 2\theta_n\,\tau^2\right). \tag{C3}$$

倍角 $2\theta_n$ 表明，一个键及其反向键给出相同的矩阵。因此，对壳层求和会产生 $\sum_n e^{im\theta_n}$ 形式的和，其中 m 为偶数；对于六重壳层，

$$\sum_{n=1}^{6} e^{2i\theta_n} = 0, \qquad \sum_{n=1}^{6} e^{4i\theta_n} = 0, \qquad \sum_{n=1}^{6} e^{6i\theta_n} = 6. \tag{C4}$$

对式（C3）在壳层上取平均，并使用第一项求和，可得 $\langle\hat{\mathbf{r}}_n\hat{\mathbf{r}}_n^{\mathsf{T}}\rangle = \mathsf{I}/2$。换言之，三角晶格是各向同性的。

在均匀形变下，每个键矢量的变化为 $\mathbf{r}_n \to (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})\mathbf{r}_n$。一阶近似下，键的方向转过的角度为

$$\delta\theta_n = \hat{\mathbf{r}}_n^{\perp}\cdot(\nabla\mathbf{u}\,\hat{\mathbf{r}}_n) = c_{\mathrm{rot}} + c_2\cos 2\theta_n - c_1\sin 2\theta_n, \tag{C5}$$

其中，第二个等式是通过对每个生成元计算 $\hat{\mathbf{r}}_n^{\perp}\cdot(\tau^\alpha\hat{\mathbf{r}}_n)$ 得到的，结果分别为 0、1、$-\sin 2\theta_n$ 和 $\cos 2\theta_n$，对应于 $\alpha =$膨胀、旋转、1、2。三种形变的作用方式各不相同。膨胀会改变每条键的长度，但

不会改变它们中的任何一条。旋转会使每条键转过相同的角度 $c_{\rm rot}$。剪切会使不同的键转过不同的角度，具体取决于剪切方向。我们将两个剪切分量合并为一个复数，$c_1 + ic_2 = |\varepsilon_{\rm dev}|\, e^{2i\phi}$，其中 $|\varepsilon_{\rm dev}|$ 表示剪切的大小，而 ϕ 表示其伸长方向。剪切轴只在模 $180°$意义下定义，因此，与键一样，相位是实际角度的两倍。用这种记号，式（C5）可写为

$$\delta\theta_n = c_{\rm rot} + |\varepsilon_{\rm dev}| \sin 2(\phi - \theta_n). \tag{C6}$$

步骤1：每个非互易块都是纯扭转。考虑 D 中将 i 耦合到邻居 j的块。绕键 ij 的中点旋转 π，可将均匀变形的晶格映射到自身，并交换 i 与j。力定律在旋转下协变，而旋转 π 会使力和位移都反向，因此动力学矩阵的每个块都保持不变。于是 $D_{ij} = D_{ji}$，并且

$$(D^-)_{ij} = \left(D_{ij} - D_{ji}^{\mathsf{T}}\right)/2 = \left(D_{ij} - D_{ij}^{\mathsf{T}}\right)/2 = w_{ij}\,\tau^{\rm rot}, \qquad w_{ij} = \mathrm{Tr}\left(D_{ij}^{\mathsf{T}}\tau^{\rm rot}\right)/2. \tag{C7}$$

第一个等式是 D^-的定义，第二个等式使用 $D_{ji} = D_{ij}$，第三个等式利用如下事实：每个反对称 2×2 矩阵都是 $\tau^{\rm rot}$的倍数。因此，一个键的非互易性是单个数，w_{ij}，即$\tau^{\rm rot}$ 分量，也就是该块在式（C2）的基中的分量。我们称之为键的扭转。在自由边缘，绕键中点的旋转并非对称性，因此这一步不成立（我们将在本节末尾回到这一点）。

根据方程 (C1)，只有 α_3 对 w_{ij}有贡献。在顶点为 i、j 和 k的三角形中，作用于 i上的力的 α_3 部分，是将方程 (A7) 对两个有序对 $(j,\ k)$ 和 $(k,\ j)$ 求和所得，

$$\mathbf{F}_i^{\alpha_3} = \alpha_3\left[(\delta r_{ik} - \delta r_{jk})\,\hat{\mathbf{r}}_{ij} + (\delta r_{ij} - \delta r_{jk})\,\hat{\mathbf{r}}_{ik}\right]. \tag{C8}$$

我们对 $\mathbf{r}_j$ 求导，利用 $\partial\delta r_{ij}/\partial\mathbf{r}_j = \hat{}\mathbf{r}_{ij}$, $\partial\delta r_{jk}/\partial\mathbf{r}_j = -\hat{}\mathbf{r}_{jk}$ 和 $\partial\delta r_{ik}/\partial\mathbf{r}_j = 0$，得到

$$\frac{\partial\mathbf{F}_i^{\alpha_3}}{\partial\mathbf{r}_j} = \alpha_3\left[\hat{\mathbf{r}}_{ij}\hat{\mathbf{r}}_{jk}^{\mathsf{T}} + \hat{\mathbf{r}}_{ik}\left(\hat{\mathbf{r}}_{ij} + \hat{\mathbf{r}}_{jk}\right)^{\mathsf{T}}\right] + \alpha_3\left(\delta r_{ik} - \delta r_{jk}\right)\frac{\mathsf{I} - \hat{\mathbf{r}}_{ij}\hat{\mathbf{r}}_{ij}^{\mathsf{T}}}{r_{ij}}. \tag{C9}$$

最后一项来自对方向 $\hat{}\mathbf{r}_{ij}$ 求导；它是对称的，因此不包含扭转。对于其余项，我们需要两个方向角分别为 θ_a 和 θ_b 的单位向量的外积 $\hat{}\mathbf{a}\hat{}\mathbf{b}^{\mathsf{T}}$ 的 $\tau^{\rm rot}$ 分量，即$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left((\hat{}\mathbf{a}\hat{}\mathbf{b}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}\tau^{\rm rot}\right) = \frac{1}{2}\hat{}\mathbf{a}\cdot\hat{}\mathbf{b}^{\perp} = -\frac{1}{2}\sin(\theta_b - \theta_a)$。利用 $D_{ij} = -\partial\mathbf{F}_i/\partial\mathbf{r}_j$，并将共享键 ij 的两个三角形 T 和 T' 相加，

$$w_{ij} = \frac{\alpha_3}{2}\sum_{k\in\{T,T'\}}\left[\sin(\theta_{jk} - \theta_{ij}) + \sin(\theta_{ij} - \theta_{ik}) + \sin(\theta_{jk} - \theta_{ik})\right], \tag{C10}$$

其中 θ_{ab} 表示从 a 到 b的键的方向。式（C10）中只包含键之间方向的差异。这就是选择定则。膨胀不会改变方向，因此不会产生扭转。旋转会使每个方向都改变相同的角度，因此所有方向差异都保持不变，所以也不会产生扭转。这两个结论严格成立，并非仅在一阶近似下成立。只有剪切会使不同的键转过不同的角度，从而使 w_{ij} 不为零。

在未变形晶格上，取 $\theta_{ij} = \theta$。在第三个顶点 k 位于键的逆时针一侧的三角形中，$\theta_{ik} = \theta + 60°$和 $\theta_{jk} = \theta + 120°$，式（C10）中的括号项为 $\sin 120° - \sin 60° + \sin 60° = \sqrt{3}/2$。另一个三角形是第一个三角形关于该键的镜像，其中有 $\theta_{ik'} = \theta - 60°$ 和 $\theta_{jk'} = \theta - 120°$，其括号项为$-\sqrt{3}/2$。两者相互抵消，因此 $w_{ij} = 0$，未变形晶格是互易的，$D^{-(\alpha_3)} = 0$。这种抵消正是晶格镜像对称性发挥作用的结果。

在形变下，我们将每个正弦函数在其未形变的自变量处展开至一阶。在每个括号中，θ_{jk} 的变化相互抵消，剩下的是 $\delta\theta_{ij} - \delta\theta_{ik}$，因此

$$w_{ij} = \frac{\alpha_3}{2}\left(2\,\delta\theta_{ij} - \delta\theta_{ik} - \delta\theta_{ik'}\right), \tag{C11}$$

其中 ik 和 ik' 是与 ij相邻的壳层的两条键，位于 $\theta \pm 60°$处。代入方程（C6），旋转 $c_{\rm rot}$抵消了，因为 $2 - 1 - 1 = 0$。剪切项合并为 $2\sin x - \sin(x - 120°) - \sin(x + 120°) = 3\sin x$，其中$x = 2(\phi - \theta)$。结果为

$$w_{ij} = \frac{3}{2}\,\alpha_3\,|\varepsilon_{\rm dev}|\sin 2(\phi - \theta_{ij}) = \frac{3}{2}\,\alpha_3\left(\delta\theta_{ij} - c_{\rm rot}\right). \tag{C12}$$

键上的扭转与剪切使该键转过的角度成正比。沿剪切主轴方向的键不具有非互易性，而与其成 $45°$ 的键具有最强的非互易性。

平移不变性给出 $D_{ii} = -\sum_j D_{ij}$，因此 $(D^-)_{ii} = -\left(\sum_n w_n\right)\tau^{\mathrm{rot}}$，其中 w_n 是键 n的扭转。将式 (C12) 写成 $w_n = \frac{3}{2}\alpha_3 \,\mathrm{Im}\left[(c_1 + ic_2)\, e^{-2i\theta_n}\right]$，该和与 $\sum_n e^{-2i\theta_n}$成正比，而根据式 (C4) 其为零。因此，自块是互易的，粒子 i的行中的全部非互易性都包含在六个键的扭转中。

步骤 5：非互易性的大小。每个键块对平方弗罗贝尼乌斯范数的贡献为 $\|w_n\tau^{\mathrm{rot}}\|^2 = 2w_n^2$，因此

$$\|D_i^-\|^2 = 2\sum_n w_n^2 = \frac{9}{2}\,\alpha_3^2\,|\varepsilon_{\mathrm{dev}}|^2 \sum_n \sin^2 2(\phi - \theta_n). \tag{C13}$$

将 sin 写为$^2\, x = (1-\cos 2x)/2$后，求和变为 $3 - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[e^{4i\phi}\sum_n e^{-4i\theta_n}\right] = 3$，根据方程（C4）中的第二个式子。因此

$$\|D_i^-\| = \frac{3\sqrt{6}}{2}\,|\alpha_3|\,|\varepsilon_{\mathrm{dev}}| + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \qquad |\varepsilon_{\mathrm{dev}}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}. \tag{C14}$$

每个单独的扭转取决于剪切方向 ϕ，但它们的平方和并不取决于此，因为第二个壳层求和为零。用点群的语言来说，E_2 二重态中唯一在 C_{6v}下保持不变的二次量是 $c_1^2 + c_2^2$。对 ϕ的依赖性最早会通过第三个壳层求和出现，而这需要键角的六阶谐波。一阶扭转只包含二阶谐波，因此 $\cos 6\phi$ 各向异性只有在应变的更高阶项中才会出现。由于扭转仅取决于键方向，常数 $3\sqrt{6}/2$ 是一个纯数：它不依赖于晶格间距、力定律的参考长度，也不依赖于所选取的内部粒子。

力定律中的手性项沿着 $\hat{\mathbf{r}}_{ij}^{\perp}$ 方向，在反射下会改变符号。当 b_0、 k_b、 b_3 或β_3 中的任意一项开启时，在步骤 3 中，键两侧的两个三角形不再相互抵消，而 $D^- \neq 0$ 在未变形晶格上就已存在。这就是为何选择定则针对非手性模型提出。

图 5b 的横坐标直接根据粒子位置测量同一物理量，无需参照位移场。定义壳层张量 $\mathsf{S}_i = \langle \mathbf{d}_{ij} \otimes \mathbf{d}_{ij}\rangle/\ell^2$，其中 $\mathbf{d}ij$ 是从 i 指向邻居 j的键矢量，平均值取自六个邻居，而 ℓ 是晶格间距。对于理想壳层，$\mathbf{d}_{ij} = \ell\hat{\mathbf{r}}_n$，而式（C4）下方的壳层平均值恰好给出 $\mathsf{S}_i = \mathsf{I}/2$。在均匀形变下，$\mathbf{d}_{ij} = \ell(\mathsf{I} + \nabla\mathbf{u})\hat{\mathbf{r}}_n$，并且在一阶近似下

$$\mathsf{S}_i = \tfrac{1}{2}\mathsf{I} + \tfrac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\right) = \left(\tfrac{1}{2} + c_{\mathrm{dil}}\right)\tau^{\mathrm{dil}} + c_1\tau^1 + c_2\tau^2. \tag{C15}$$

旋转因其为反对称项而消去，膨胀仅通过迹进入，而 S_i 的无迹（偏差）部分的分量恰好为 $(c_1,\ c_2)$，大小为 $|\varepsilon_{\mathrm{dev}}|$。因此，图 5b 的横坐标衡量的是局部形变偏离 $A_1 \oplus A_2$ 子空间的程度。

这三项预测——对膨胀或旋转无响应、对两种剪切的响应相等，以及与剪切方向 ϕ 无关——分别在应变幅值 $\varepsilon = 10^{-2}$ 下，于完整圆盘的内部进行检验。两个核方向在所有测试幅值下都处于有限差分下限：膨胀为 $\|D^-\|/\|D^+\| = 2.3\times10^{-11}$，旋转为 2.5×10^{-11}。两种剪切彼此一致，分别为 1.589×10^{-5}和 1.593×10^{-5}。在固定 $|\varepsilon_{\mathrm{dev}}|$ 下，让双重态相位经历一个完整周期，响应在峰峰值 0.50% 内保持不变；残差主要由相对幅度为 2.5×10^{-3} 的 $\cos 6\phi$ 调制主导——这是六重壳层所允许的第一种各向异性（步骤 5）。正如预期，这是一种高阶效应：在理想内部区域，其相对幅度为 $\varepsilon/4$，并随应变线性增长。较弱的 $\cos 2\phi$、$\cos\ 4\phi$ 和 $\cos\ 8\phi$ 项幅度为 1.2×10^{-3}或更低，与有限圆盘和圆形内部掩模相符，因为二者都不具有六重对称性。

式（C14）是关于分子的表述。正文中的图 5b 绘出了比值 $\|D_i^-\|/\|D_i^+\|$，其斜率通过分母继承了非手性刚度。分母也可以写成闭式。我们将四个非手性系数汇总为向量$\mathbf{x}\ =\ (a_0/\ell,\ k_a,\ a_3,\ \alpha_3)$，其各分量的单位均为单位长度力。我们分三个步骤推导未变形晶格中内部粒子的 $\|D_i^+\|^2$。

首先，i 的 D^+ 行。每个包含 i 的三角形都由 i 和其六个最近邻中的两个组成，因此该行只有七个非零 2×2 块。这些块包括一个将 i 与其六个邻居分别耦合的块，以及一个自块。设 $\hat{\mathbf{n}}j$ 为从 i 指向邻居 j的单位向量，设 $\hat{\mathbf{p}}j$ 为其经过 90° 逆时针旋转后的向量。在键坐标系中，力定律为正文中的式（3），其中 $k_{r\phi} = k_{\phi r} = 0$ 适用于非手性模型。旋转回实验室坐标系后，得到将 i 与 j耦合的块，

$$(D^+)_{ij} = -\left(k_{rr}\,\hat{\mathbf{n}}_j\hat{\mathbf{n}}_j^{\mathsf{T}} + k_{\phi\phi}\,\hat{\mathbf{p}}_j\hat{\mathbf{p}}_j^{\mathsf{T}}\right). \tag{C16}$$

平移不变性使自块等于单位矩阵减去六个键块之和。对于相隔 60° 的六个键，$\sum_j \hat{\mathbf{n}}j\hat{\mathbf{n}}_j^{\mathsf{T}} = \sum_j \hat{\mathbf{p}}j\hat{\mathbf{p}}_j^{\mathsf{T}} = 3\mathbf{I}$，因此

$$(D^+)_{ii} = 3\,(k_{rr} + k_{\phi\phi})\,\mathsf{I}. \tag{C17}$$

其次，我们将这七个块的平方项相加。旋转不会改变弗罗贝尼乌斯范数，因此每个键块贡献 $k_{rr}^2 + k_{\phi\phi}^2$，六个键块合计贡献 $6(k_{rr}^2 + k_{\phi\phi}^2)$。自块有两个相等的对角项，贡献 $2 \times 9(k_{rr} + k_{\phi\phi})^2$。总和为

$$\|D_i^+\|^2 = 24k_{rr}^2 + 36k_{rr}k_{\phi\phi} + 24k_{\phi\phi}^2. \tag{C18}$$

第三，我们用 $\mathbf{x}$ 表示 k_{rr} 和 $k_{\phi\phi}$。正文中的公式（4）将它们分别写成系数的固定线性组合，

$$k_{rr} = \mathbf{r}\cdot\mathbf{x}, \quad \mathbf{r} = \left(0,\, 2,\, \tfrac{5}{2},\, -\tfrac{1}{2}\right), \qquad k_{\phi\phi} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}, \quad \mathbf{p} = \left(2,\, 0,\, -\tfrac{3}{2},\, \tfrac{3}{2}\right). \tag{C19}$$

系数 α_3 同时出现在两者中，因为它在未变形晶格上对力的贡献包含对称部分，该部分会重新归一化 k_{rr} 和 $k_{\phi\phi}$。将公式（C19）代入公式（C18），得到关于$\mathbf{x}$的二次型，

$$\|D_i^+\|^2 = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{Q}\,\mathbf{x}, \qquad \mathsf{Q} = 24\,\mathbf{r}\mathbf{r}^{\mathsf{T}} + 18\left(\mathbf{r}\mathbf{p}^{\mathsf{T}} + \mathbf{p}\mathbf{r}^{\mathsf{T}}\right) + 24\,\mathbf{p}\mathbf{p}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 96 & 72 & 18 & 54 \\ 72 & 96 & 66 & 30 \\ 18 & 66 & 69 & -3 \\ 54 & 30 & -3 & 33 \end{pmatrix}. \tag{C20}$$

例如 ，左上角的元素是 $24r_1^2 + 36r_1p_1 + 24p_1^2 = 24 \times 2^2 = 96$，因为 $r_1 = 0$ 和 $p_1 =$ 2.

同一个矩阵还有第二种解读方式，我们用它进行数值检验。力定律关于系数是线性的，因此 D^+ 也是线性的，并且 $D^+ = \sum_\alpha x_\alpha D^{+(\alpha)}$，其中 $D^{+(\alpha)}$ 是仅将系数α 设为单位值时计算得到的对称部分。于是 $\|D_i^+\|^2 = \sum_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \langle D_i^{+(\alpha)}$，$D_i^{+(\beta)}\rangle$，其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是两行的弗罗贝尼乌斯内积。因此$\mathsf{Q}_{\alpha\beta} = \langle D_i^{+(\alpha)}$，$D_i^{+(\beta)}\rangle$ 是四个单系数行构成的格拉姆矩阵。通过对完整圆盘上实现的力定律进行有限差分，计算各个 $D^{+(\alpha)}$并构造该格拉姆矩阵，可以重现公式（C20）中的整数，精度达到 3×10^{-9}。该二次型与测得的 $\|D_i^+\|$ 也相符；在四个系数均独立变化时，相对误差为 3×10^{-11}。

推导得出两个性质。Q 是半正定的，因为方程（C18）是关于（k_{rr}，$k_{\phi\phi}$）的正定型。Q 的秩为二，因为 $\|D_i^+\|$ 对四个系数的依赖仅通过以下两个组合 k_{rr}和 $k_{\phi\phi}$。它的两个非零特征值为 82。0 和 212。0。将方程（C14）除以方程（C20）的平方根，可得图 5b 中绘出的斜率，

$$C = \frac{3\sqrt{6}}{2}\,\frac{|\alpha_3|}{\sqrt{\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{Q}\mathbf{x}}}. \tag{C21}$$

分子和分母关于系数都是一次齐次的，因此 C 不受尺度影响：它仅取决于无量纲比值 $a_0/(\ell k_a)$、a_3/k_a 和 α_3/k_a，可以直接根据测量表计算。这样计算得出每单位偏应变对应的 $C = 1.593 \times 10^{-3}$，而在 $\varepsilon = 10^{-2}$ 处测得的 1.589×10^{-3}，两者相差 0。3%；这一差异是二阶项，随 $\varepsilon \to 0$ 而消失，并不代表存在偏差。因此，图 5b 中的虚线是无参数预测，而非拟合结果。有限筏的自由边缘在零应变下是非互易的——整个圆盘即使完全不施加应变，也会产生 $\|D^-\|/\|D^+\| = 3.9 \times 10^{-4}$ ——因此，应变定律是对体相的描述，应在内部或周期性边界条件下提取。

3. 作用于位错的力沿攀移方向

如上所述，三元组上的合力仅取决于 α_3 和 β_3。力的方向由这两项的镜像对称性决定。伯格斯矢量为$\mathbf{b}$ 的刃型位错关于其攀移轴 $\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{b}$反射后保持不变。当$\mathbf{b}$ 沿着 x时，应变分量 u_{xx} 和 u_{yy} 关于 x 为偶函数，而 u_{xy} 为奇函数。对于我们的系统，手性系数为零，且力定律与反射运算对易。对于关于该镜像 σ_v不变的构型，我们有$\mathbf{F} = \sigma_v\mathbf{F}$，并且由于对称性，滑移和力矩均为零，

$$\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{b}} = 0, \qquad \tau = 0, \qquad \mathbf{F} = c\,\alpha_3\,(\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{b}). \tag{C22}$$

这些结果在正文图6的模拟筏中得到了重现。在 $\alpha_3 = 0$ 合力和力矩达到机器精度下的零值，其中 $|\mathbf{F}| \le 1.4\times10^{-16}$和 $|\tau| \le 1.2\times10^{-15}$ 以晶格单位表示。 $|\mathbf{F}|$ 关于 α_3严格呈线性关系，当 α_3 跨越五个数量级进行缩放时，其保持不变至5×10^{-12}。对于三角晶格的六种伯格斯取向，单个位错的攀移力均在1%以内取相同数值，且$\mathbf{F}$ 的方向与攀移轴的夹角在 0.9° 以内，并且在$\mathbf{b} \to -\mathbf{b}$下反向。

方程（C22）的零假设适用于严格镜像对称的构型。由连续体位移场生成并随后弛豫的位错仅近似满足这一条件，因为生成场的分支切线破坏了镜像对称性，而叠加多个生成场会使这种偏离进一步累积。合力的滑移-攀移比从单个位错的0.015，到由两个、三个和四个位错组成的位错墙的0.039、0.060和0.084。在正文图6的轨迹中，相应的滑移速度与攀移速度之比为单个位错的0.014，以及四个位错的0.081。这些残差就是该构造方法的系统误差。

手性构型是指六个位错组成的环带，其伯格斯矢量沿径向向外；它没有镜面对称，但具有一个六重旋转轴。该轴迫使$\mathbf{F} = 0$为零，同时使力矩保持自由。这一零假设也只能近似达到。六个位错中的一个弛豫为一个位错和一个额外的 5–7 对，从而打破六重对称性。残余合力为 $|\tau|/r_0$的 12%，其中 $r_0 = 9\ell$ 是环带的半径。

4. 位错的播种与弛豫

筏是一个半径为 R 个晶格常数、中心位于晶格点上的三角晶格圆盘。每个位错都通过将每个粒子沿伯格斯矢量为$\mathbf{b}$的连续体刃型位错场进行位移来播种，该位错场取泊松比 $1/3$。$\mathbf{b}$ 的角度是 60° 的整数倍，因此它是一个晶格矢量；没有这一条件，该缺陷就不具有拓扑性。播种仅提供一个初始构型，所采用的几何形状来自随后进行的弛豫。位错墙在半径为 $R = 18$的筏中构建，其中 n 个种子沿攀移方向以 3ℓ 的间距堆叠。六个位错环在半径为 $R = 22$的筏中构建，其中六个种子位于半径 $r_0 = 9\ell$处，角度为 $0^\circ, 60^\circ, \dots, 300^\circ$。其中每个伯格斯矢量都沿径向向外，每条分支切线都向外延伸至边缘。然后 $\sum \mathbf{b}$ 消失，攀移力全部沿方位角方向。

播种后的构型在原长为 ℓ 的谐和弹簧作用下弛豫，使 $\sum$键（$|\mathbf{r}_{ij}| - \ell$）^{2} 最小化，并在五轮 L-BFGS-B 优化后重建键列表。整个过程中，筏的边缘均为自由边界。随后冻结三角剖分，并在固定键列表下再次最小化能量。只有在此之后才开启非互易系数 α_3。本节所述的合力和力矩均在弛豫后的几何构型上计算。正文图6中的轨迹由过阻尼动力学 $\gamma\,\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$得出，在零温下冻结三角剖分，并用前向欧拉法积分 2×10^5 步。弛豫后筏的合力和力矩对稳态漂移和旋转速率的预测误差在 5% 以内。播种和弛豫所用的弹簧均对应泊松比 $1/3$，即中心力弹簧晶格的泊松比。测得的筏的 $\nu = 0.87$ 接近 0.93。不能直接在此处计算连续场，因为其中某些部分会随 $1/(1-\nu)$ 增长。在 $\nu = 0.9$ 处，其位移达到两个晶格间距，弛豫产生的不是一个位错，而是一个包含约八个位错的团簇。因此，模拟中的缺陷承载着 $\nu = 1/3$ 晶格的应变场。C 3 节的对称性结果不受此影响，但力的大小会受影响。长度以 ℓ 为单位，刚度以 k_a 为单位，时间以 γ/k_a 为单位。

5. 对尺寸依赖的 α_3的稳健性

三粒子模拟表明， α_3 取决于间距，因此上文使用的均匀 α_3 是一种近似。为检验三角形之间的近似抵消在非均匀系数下是否仍然成立，我们为每个母三角形的平均边长赋予 α_3 一个单参数线性剖面。该直线经过 ℓ 处的测量值，并在间距 s_0处穿过零点；每个三角形取其自身平均边长对应的值。令 $s_0 \to \infty$即可恢复均匀模型。这个模型族有意设置得较为粗略，因为它旨在回答：在不依赖测量剖面具体形状的情况下，三角形尺寸范围内任意位置发生的符号变化是否会使筏的总值发生翻转。

这些三角形的尺寸范围很窄。取晶格常数为筏平均间距 $\ell = 54.01\ \mu$m，单位错设计的平均边长为 $54.0\ \mu$m。第1和第99百分位数分别为53.2和 $54.8\ \mu$m，完整范围则为50.1至 $56.9\ \mu$m。我们将零交叉点置于45、50、55、58、60、63、66和 $70\ \mu$m处。尝试的任何剖面都不会使攀移力的符号翻转。将零交叉点置于 $63\ \mu$m（即三粒子数据给出的所在位置）时，单位错的总攀移力变化5%，而四位错墙的总攀移力变化3%。整个模型族中的最大偏离是1.42倍，在零交叉点置于 $55\ \mu$m时达到。该数值略高于三角形分布的主体部分；此时将直线锚定在测量值处，会迫使其在整个筏范围内具有非常陡的斜率，因此这一倍数描述的是该单参数模型族，而非任何物理预测。

6. 对压缩预应力的稳健性

正文图6中的颗粒筏具有 $a_0 = 0$ 和一条自由边缘，因此，除缺陷的应变场外，其键不承受应力。在实验中，键受到压缩，最小模型通过 $a_0 < 0$吸收了这一影响。为检验

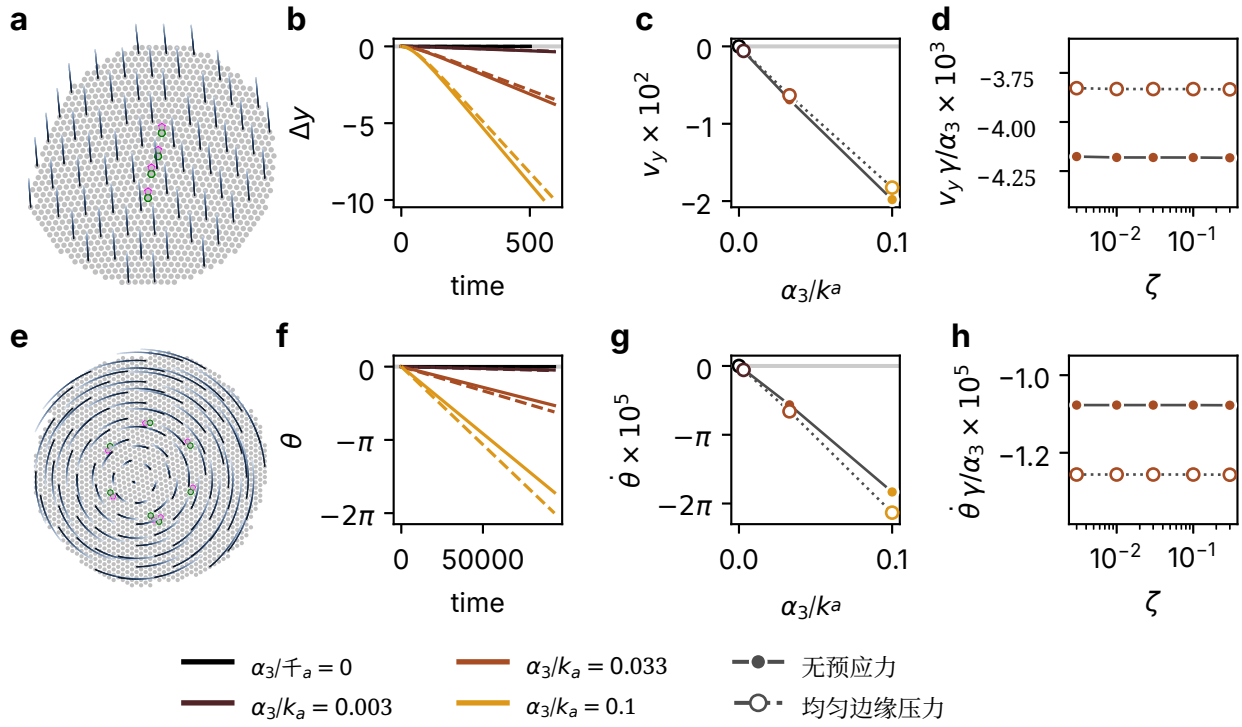


图 12。设计活动性在均匀预应力下仍然存在。与正文图6相同的颗粒筏和动力学：阻尼比为 $\zeta = 0.01$、$a_0 = 0$ 的欠阻尼系统，除 k_a 和 α_3 外的所有系数均为零。晶格单位为 $\ell = k_a = m = 1$，时间以 $\sqrt{m/k_a}$ 为单位，角度以弧度表示。每个颗粒筏分别在无预应力条件下（实线、实心圆）以及均匀压力 $P = 0.28\,k_a$ 下进行比较；该压力垂直施加于其自身的自由边缘（虚线、空心圆），使晶格均匀压缩 7.5%（C 6 节）。首先在 $\alpha_3 = 0$ 的压力下使每个颗粒筏达到松弛状态，然后在 $t = 0$ 时开启 α_3。颜色表示 $\alpha_3/k_a = 0$、0.003、0.033 和 0.1。a. 压力下的四个位错组成的位错墙。五重缺陷和七重缺陷分别以洋红色五边形和绿色七边形表示。线条表示部分粒子的轨迹，颗粒筏以 $\alpha_3/k_a = 0.1$ 的速度沿 4ℓ 运动（经过时间 $t \approx 270$），颜色由浅变深。b. 攀移位移 Δy，以 ℓ 为单位随时间变化。c. 攀移速度 v_y 随 α_3/k_a 变化。d. 以阻尼系数 $v_y\gamma/\alpha_3$ 重标度的攀移速度，随 ζ 在 $\alpha_3/k_a = 0.033$ 时变化。e. 压力下的六个位错环，粒子轨迹记录了以 $\alpha_3/k_a = 0.1$ 进行的 $30°$ 旋转（经过时间 $t \approx 7.9 \times 10^3$）。f. 取向 θ 随时间变化。g. 角速度 $\dot{\theta}$ 随 α_3/k_a 变化。h. 重标度角速度 $\dot{\theta}\gamma/\alpha_3$ 随 ζ 在 $\alpha_3/k_a = 0.033$ 时变化。

设计运动是否依赖于此，我们对每个颗粒筏施加垂直于其自身自由边缘的均匀压力进行压缩。压力 $P = 0.28\,k_a$作用于三角剖分的边界边，并随颗粒筏移动，因此不会产生合力或力矩。它将晶格均匀压缩至平均间距 $\ell' = 0.926\,\ell$，使颗粒筏中心和边缘处的间距相同。

由于力定律对键偏差呈线性，在间距为 ℓ' 且具有 $a_0 = 0$ 的条件下固定的颗粒筏，与参考间距为 ℓ'、预应力为 $a_0' = k_a\,(\ell' - \ell) \approx -0.074\,k_a\ell$ 或 $a_0'/\,(k_a\ell') \approx -0.080$ 的颗粒筏相同。系数 α_3 保持不变，因为它乘以的是键偏差之差，而该差值与参考间距无关。因此，受压颗粒筏承受的压缩预应力约为测量值 $a_0/\,(\ell k_a) = -0.277$ 的 30%。

每个颗粒筏都在 $\alpha_3 = 0$处的压力下弛豫，随后开启 α_3。除此之外，动力学与正文图6完全相同。我们在 $\alpha_3/k_a = 0$、0.003、0.033 和 0.1 处模拟四个位错组成的位错墙和六个位错组成的环（图12）。

压力不会改变任一设计的运动方向。它会将速率按一个因子重新缩放，该因子对每个 α_3 以及从 $\zeta = 0.003$ 到 0.3的每个阻尼比都相同。墙的攀移速度慢了8%，因为其合力减小了9%。环带的旋转速度快了16–17%。其力矩几乎未变，而压缩使其转动阻力$\gamma\sum_i r_i^2$降低了一个因子（ℓ'/ℓ）。在 $\alpha_3 = 0$ 时，受压的颗粒筏不再运动，此时 $|\mathbf{F}|$ 和 $|\tau|$ 均低于 10^{-14} 晶格单位。

附录D：从测量轨迹推断动力学矩阵

我们仅根据跟踪到的粒子运动来推断颗粒筏的动力学矩阵。该方法假设线性动力学，但不假设互易性。输入是所有 $N = 466$ 个粒子在62,999帧、 $\delta t = 1/6000$ 秒内的位移$\mathbf{u}(t)$。我们首先去除整个颗粒筏的刚性平移和旋转。随后保留等时协方差 $\langle \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{T}} \rangle$ 中方差最大的$n_{\mathrm{modes}} = 40$ 个特征向量。我们将这些称为最软模态，因为在热谐固体中，最软模态的波动最大。投影到这些模态上，可得到一个包含40个分量的模态振幅时间序列$\mathbf{P}(t)$。速度$\mathbf{P}$ 由跨越九帧的三阶Savitzky–Golay导数得到。我们将二者堆叠为$\mathbf{z} = [\mathbf{P}, \dot{\mathbf{P}}]$，并用白噪声 $\boldsymbol{\xi}$对$\mathbf{z} = -\mathcal{J}\mathbf{z} + \boldsymbol{\xi}$ 建模。经过一帧后，这给出

$$e^{-\mathcal{J}\delta t} = \langle \mathbf{z}(t+\delta t)\, \mathbf{z}^{\mathsf{T}}(t) \rangle \, \langle \mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathsf{T}} \rangle^{-1}, \qquad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ D & \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix}. \tag{D1}$$

我们对右侧取矩阵对数，并从左下方的块中读出 D。这一构造并未强制其具有 D 对称性。因此，其反对称部分 D^{-} 可以自由取数据所支持的任意值。

跟踪误差会在每个测量位置中加入白噪声。在每个模式的功率谱中，它表现为高于 900 Hz 的平坦底噪。该底噪对应于 $0.18\ \mu$m 的噪声振幅，在全部 40 个模式中相差不超过±5%。这相当于最软模式波动的 0.6%，以及第四十个模式波动的 8 %。Savitzky–Golay 导数会将这一噪声带入$\dot{\mathbf{P}}$，在原则上可能伪装成反对称 D。我们在包含 40 个模式、频率介于 5 Hz 和 228 Hz 之间且阻尼率介于 25 s^{-1} 和 270 s^{-1} 之间的模拟互易筏上对此进行了检验。模拟所采用的长度和帧率与实验相同，并加入测量水平的各向同性白噪声。每个模拟都经过完整的处理流程，包括模式基的选择。所得 $\|D^{-}\|/\|D^{+}\| = 0.012$ 比值为 0.017，而颗粒筏的比值为 0.204。当阻尼耦合各模式，以及将噪声提高到某一模式波动的 25% 时，结果仍然成立。这一结果依赖于噪声具有各向同性。在混合各模式的方向上，若噪声大小极不相等，则可能产生与测量值相当的比值。测得的底噪排除了这种可能性。

在细致平衡条件下，模态振幅的滞后相关满足 $C_{ij}(\tau) = C_{ji}(\tau)$。等价地，它们的互谱矩阵 $C(f)$ 是实数。因此，其虚部包含了全部时间不可逆性。我们通过仅保留 Re $C(f)$，构建一个互易零模型。我们对4096 帧的数据按 75% 的重叠度划分为 58 个 Hann窗分段，并通过 Welch平均估计 $C(f)$。随后，我们生成高斯时间序列，其互谱矩阵为 Re $C(f)$，且长度与实验相同。每个替代序列都保留了每个模式的功率谱，包括其谱线和跟踪噪声底，也保留了模式之间的所有互易耦合。将 40 个替代数据通过相同的处理流程后，得到 $\|D^{-}\|/\|D^{+}\| = 0.121 \pm 0.001$，而筏的测量值为 0。204。测量值高于零假设 81 个标准差。

我们通过两种方式检验零假设。根据完整复数 $C\,(f)$ 生成的替代数据保留不可逆部分，因此应当重现测量值。它们给出 0.204 ± 0.001，相对于 0。204（筏）。在表II的每个模态数下，该对照组与测量值的偏差均不超过 2%。我们还将完整操作流程应用于动力学矩阵已知的模拟筏。每个模拟筏在 5 至 260 Hz 之间包含 40 个耦合模态，阻尼率为 189 s^{-1}，并具有指定强度的反对称部分。模拟所用的时长和帧率与实验相同。一个互易筏以及一个真实 $\|D^{-}\|/\|D^{+}\| = 0.026$ 的筏都落在各自的零假设范围内。真实比值为 0。064 和 0。128 的筏均被检测到。在这两个被检测到的案例中，处理流程返回的值是真实比值的 0。59 倍。我们尚未证明这一因子同样适用于该筏，因此不对其进行校正。零假设也不能被减去。以平方和减去其均值后，对于真实比值为 0。128 的情况得到 0。049。因此，我们将测量值与其零假设一并报告。

替代数据承载了数据功率的 2。4%。这一偏移源于替代数据的生成方式。 $C\,(f)$ 是在长度为 4096 帧的汉宁加窗窗口上估计的，并据此生成完整长度的序列，且不进行重新缩放。这使功率降低了 $\sum_n w_n^2/T = 0.0244$，其中 w_n 是窗函数， $T = 62,999$ 是帧数。测得功率比在各模式上取平均为 0。0237，而各个模式的比值介于 0。021 和 0。026 之间。每个模式的谱形状均得到重现，两个谱的对数之间的平均相关性为 0。997。这一偏移不会进入所推断的 D。方程（D1）将$\mathbf{z}$ 的一个协方差除以另一个协方差，因此所有振幅的共同缩放会相互抵消。将替代数据恢复到完整功率后， $\|D^{-}\|/\|D^{+}\|$ 在六位有效数字内保持不变。模式之间的差异不会完全抵消。将其施加到测量轨迹上后， $\|D^{-}\|/\|D^{+}\|$ 从 0。2036 变为 0。2046，变化幅度为 0。5%。

结果取决于保留的模式数（表 II）。筏在每种模态数下都超过零假设。超出幅度在 $n_{\mathrm{modes}} = 10$ 和 $n_{\mathrm{modes}} = 40$ 时最大，在 $n_{\mathrm{modes}} = 160$时最小，此时筏的数值为 0。201，而零假设为 0。186。它不会随 n_{modes}单调下降，我们也无法解释这种依赖关系。全文均使用$n_{\mathrm{modes}} = 40$ 。

表 II. 推断的 $\|D^-\|/\|D^+\|$ 与模式数 n_{modes}的关系。零假设为 40 个互易替代数据的均值和标准差。对照组使用从完整复数 $\tilde{C}(f)$ 中抽取的替代数据，并对 6 次实现取平均。

n_{modes}	raft	null	筏 / 零假设对照组	
10	0.155	0.077 ± 0.002	2.01	0.157
20	0.177	0.120 ± 0.001	1.48	0.180
40	0.204	0.121 ± 0.001	1.68	0.204
80	0.192	0.157 ± 0.001	1.22	0.192
160	0.201	0.186 ± 0.001	1.08	0.205

附录 E ：平衡态下的欠阻尼系统中禁止出现位置空间环流

考虑带有白噪声的欠阻尼朗之万方程

$$\partial_{tt}\mathbf{r} = -\gamma\partial_t\mathbf{r} + \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \sqrt{2T\gamma}\xi; \quad \langle\xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t'), \tag{E1}$$

其中 $\mathbf{F(r)} = -\nabla_{\mathbf{r}}U$ 是保守的，且将质量设为单位值。概率分布满足 Kramers–Chandrasekhar 福克–普朗克方程

$$(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})\,p(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}}\cdot[(\gamma\mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{r}))\,p] + T\gamma\,\nabla^2_{\mathbf{v}}p, \tag{E2}$$

其稳态解为 $p_{\mathrm{eq}}(\mathbf{r},\ \mathbf{v}) \propto \exp(-E/T)$，其中能量为 $E(\mathbf{r},\ \mathbf{v}) = U(\mathbf{r}) + v^2/2$。我们可以将方程（E2）改写为 $\partial_t p = -\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{J}_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{J}_{\mathbf{v}}$，其中

$$\begin{pmatrix}\mathbf{J}_{\mathbf{r}}(\mathbf{r},\mathbf{v})\\ \mathbf{J}_{\mathbf{v}}(\mathbf{r},\mathbf{v})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{v}p\\ (\mathbf{F}(\mathbf{r}) - \gamma\mathbf{v})p - \gamma T\,\nabla_{\mathbf{v}}p\end{pmatrix} \overset{\text{eq}}{=} \begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{F}\end{pmatrix} p_{\mathrm{eq}}, \tag{E3}$$

w这里最后一个方程在平衡态下成立。对速度积分消去 $\mathbf{J_r}$ ，我们得到 d

$$\mathbf{J}_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{J}_{\mathbf{r}}(\mathbf{r},\mathbf{v})\,d\mathbf{v} = \int \mathbf{v}\,p_{\mathrm{eq}}(\mathbf{r},\mathbf{v})\,d\mathbf{v} = 0, \tag{E4}$$

其中最后一个等式 是因为 p_{eq} 关于$\mathbf{v}$为偶函数。因此，我们看到不仅有 $\nabla_{\mathbf{r}}\times\mathbf{J}_{\mathbf{r}} = 0$，而且还有$\mathbf{J}_{\mathbf{r}} =$ 0.