从正向时间线性响应重构纯态 OTOC

Yu-Hang Jin, [1] Xudong He, [1] 和 Yu Chen[1], *
[1] *Graduate School of China Academy of Engineering Physics, Beijing, 100193, China*（日期：2026年11月24日）

我们证明，任意纯态的连通非时间序相关函数（OTOC）都可以仅由对易子线性响应精确重构。该方案无需时间反演、无需辅助量子比特、无需双重拷贝，也无需弱测量：只需施加幺正字符串脉冲，进行正向多体演化，并执行一次局域读出即可。对脉冲生成元的完备基取平均，就能精确得到 OTOC。我们进一步证明，通过将脉冲限制在固定算符权重内，可以使测量变得稀疏；这会将截断转化为一个解析可控的谱滤波器：确定性偏差可以在实验前计算出来，并与统计抽样方差清晰分离。对于高斯态，有限权重响应在经过已知的组合因子重标度后，与完整 OTOC 严格成正比。对于量子混沌系统，典型残差会随着扇区大小按幂律受到抑制。在 Sachdev-Ye-Kitaev模型和非可积伊辛链中的精确对角化基准验证了这些预测。

arXiv:2611.30068v1 [quant-ph] 23 Nov 2026

引言。— 非时序关联函数（OTOC）量化了多体演化 [1–5]过程中非对易性的增长。其独特的算符排序推动了时间反演协议 [6, 7]和辅助量子比特辅助干涉测量 [8]的发展。为绕过时间反演，人们开发了多种正向时间协议，包括随机化测量 [9], 、经典阴影 [10, 11], 、双重拷贝 [12] 以及基于准概率 [13, 14], 和序列广义测量 [15] 的方案。这些协议近期已在液态和固态核磁共振 [16, 17], 、囚禁离子 [18–20], 、超导电路 [21–24], 以及中性原子 [25, 26]中得到验证。

在这些正向时间协议中，一个尤其值得注意的方案是 Vermersch等人 [9], 提出的随机测量方法，该方法通过对随机制备的初始态上的测量结果进行关联来重构 OTOC。与时间反演方案相比，这种方法对控制误差和退相干的敏感性要低得多，因为它完全不需要逆向演化。其唯一的根本性局限在于，态随机化将直接输出限制为无限温迹 OTOC。

在这些研究中，逐渐形成了一种普遍看法：仅凭对易子线性响应无法直接获取 OTOC。本文发现事实并非如此。常规的线性响应系数给出对易子 [28], 的期望值，而连通平方对易子则衡量其涨落。这一区别似乎意味着纯态 OTOC 超出了线性响应的范畴。然而，对于纯态，这些涨落恰好等于能量本征基下非对角矩阵元的平方和。因此，真正的问题并非线性响应在原理上是否足够，而是如何仅凭一系列对易子响应重构 OTOC，同时保持制备态和最终读出不变。

我们证明这是可行的。令 $A_t = [O_i(t)\ O_j]$ 表示正向演化下两个局域探针的对易子。对于脉冲生成元 W_μ，响应 $R_\mu = \langle [W_\mu, A_t] \rangle_\psi$ 是脉冲与演化后探针之间对易子的期望值。等价地，它是脉冲方向 $W_\mu|\psi\rangle$ 与演化后向量 $A_t|\psi\rangle$ 之间的重叠。所有这些响应构成的完备集合，可以确定 $A_t|\psi\rangle$ 中位于初始射线之外的分量。对于任意给定的纯态，连通平方对易子 $C(t)$ 恰好等于一组幺正脉冲完备基上响应平方和的归一化值。该方案在每次运行中仅使用幺正脉冲、正向多体演化和一次最终读出；既不需要辅助量子比特，也不需要中间广义测量。

该重构方法支持稀疏脉冲系综。将生成元限制为固定的算符权重，可使设置数量保持多项式级，并将截断转化为解析可控的谱滤波器。确定性偏差可以在实验前计算，并与统计抽样方差清晰地区分开来。对于高斯态，有限权重响应经过已知的组合因子重新缩放后，与完整 OTOC 严格成正比。对于混沌系统，典型残差随扇区大小按幂律衰减。对 Sachdev-Ye-Kitaev 模型和非可积伊辛链进行的精确对角化基准测试证实了这些预测。这使得脉冲系综的选择成为重构理论的一部分。

重构与脉冲序列。令 $A_t = [O_i(t)\ O_j]$ 表示标记为 i, j的厄米探针，其中 $O_i(t) = e^{iHt} O_i e^{-iHt}$ 在哈密顿量 H 和 $\hbar = 1$作用下。纯态输入 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 对任意算符 X的期望值为 $\langle X \rangle_\psi = \mathrm{Tr}(\rho X)$。对于一组完备的厄米算符基 W_μ，满足$\mathrm{Tr}(W_\mu W_\nu) = D\delta_{\mu\nu}$，其中 D 为希尔伯特空间维数，$\delta_{\mu\nu}$ 为克罗内克δ函数，定义 $R_\mu = \langle [W_\mu, A_t] \rangle_\psi$。于是

$$C(t) = -\langle A_t^2 \rangle_\psi + \langle A_t \rangle_\psi^2 = \frac{1}{2D} \sum_\mu R_\mu^2. \qquad (1)$$

事实上，$R_\mu = \mathrm{Tr}(W_\mu [A_t, \rho])$，且 $[A_t, \rho]$ 是厄米的。帕塞瓦尔恒等式给出$\sum_\mu R_\mu^2 = D\,\mathrm{Tr}([A_t, \rho]^2)$。利用

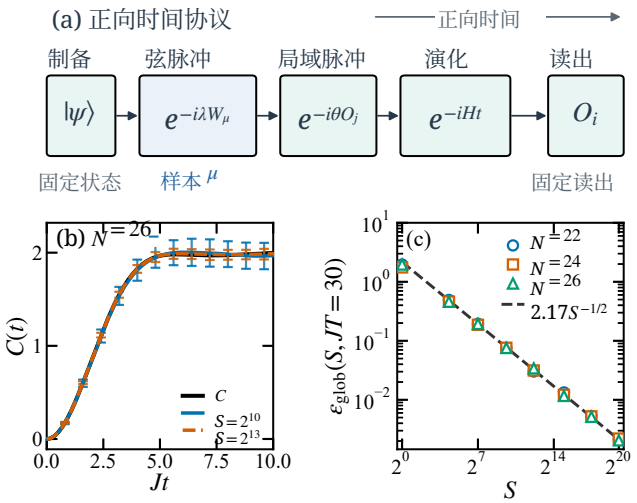


图 1. 正向时间协议与全基底采样。（a）固定的纯态输入依次接受弦脉冲、局域脉冲、正向演化以及固定的局域读出。对于每个采样的 μ，四种脉冲符号设置通过公式（3）确定 R_μ。（b）中间谱 SYK$_4$ 在 $N=26$处的精确$C(t)$与系综平均估计量，其中 $S=1024, 8192$。柱状图表示 30 个相互独立的算符采样系综中的一个标准差。（c）在 $N=22,24,26$ 处，相对于 C的平均相对时间均方根误差 $\epsilon_{\rm glob}$，在取平均前，针对每个 S-弦估计量分别计算。虚线为经验拟合曲线 $2.17S^{-1/2}$，在 $1\le S\le 2^{20}$上联合拟合得到。误差采用 $0.1\le Jt\le JT$、$JT=30$ 。

$\rho^2=\rho$ 可得式（1）。等价地，$C=\|(I-\rho)A_t|\psi\rangle\|^2$。在正交归一的能量本征基 $\{|m\rangle\}$中，输入 $|n\rangle$给出 $\sum_{m\neq n}|\langle m|A_t|n\rangle|^2$。对于对合探针 $O_i^2=O_j^2=I$，其中 I 是恒等算符，令 $F=\langle O_i(t)O_jO_i(t)O_j\rangle_\psi$为四点 OTOC。于是 $2(1-\mathrm{Re}\ F)=C+|\langle A_t\rangle_\psi|^2$。平均对易子可由同一局域脉冲（不含弦脉冲）得到。

实验序列依次为态制备、$U_\mu=e^{-i\lambda W_\mu}$、$V_j=e^{-i\theta O_j}$、在 H 下演化 t 时间，以及对 O_i [的读出]图 1(a)。脉冲角为 λ，θ。测量信号为

$$s_\mu(t;\lambda,\theta)=\langle U_\mu^\dagger V_j^\dagger O_i(t)V_jU_\mu\rangle_\psi. \tag{2}$$

它满足

$$\begin{aligned}R_\mu(t)&=\partial_\lambda\partial_\theta s_\mu(t;\lambda,\theta)|_{0,0}\\&=\frac{\sum_{\sigma,\tau=\pm1}\sigma\tau\, s_\mu(t;\sigma\lambda,\tau\theta)}{\sin(2\lambda)\sin(2\theta)}.\end{aligned} \tag{3}$$

导数恒等式普遍成立。对于 $W_\mu^2=O_j^2=I$ 和非零分母，有限角度等式成立。脉冲的符号决定混合响应，而多体演化始终向前进行。该方案每次只需进行一次态制备，既不需要辅助量子比特，也不需要中间进行广义读出。对 D^2 字符串进行独立均匀抽样时，当已知斜率时，$DR_\mu^2/2$ 的样本均值是 C 的无偏估计，

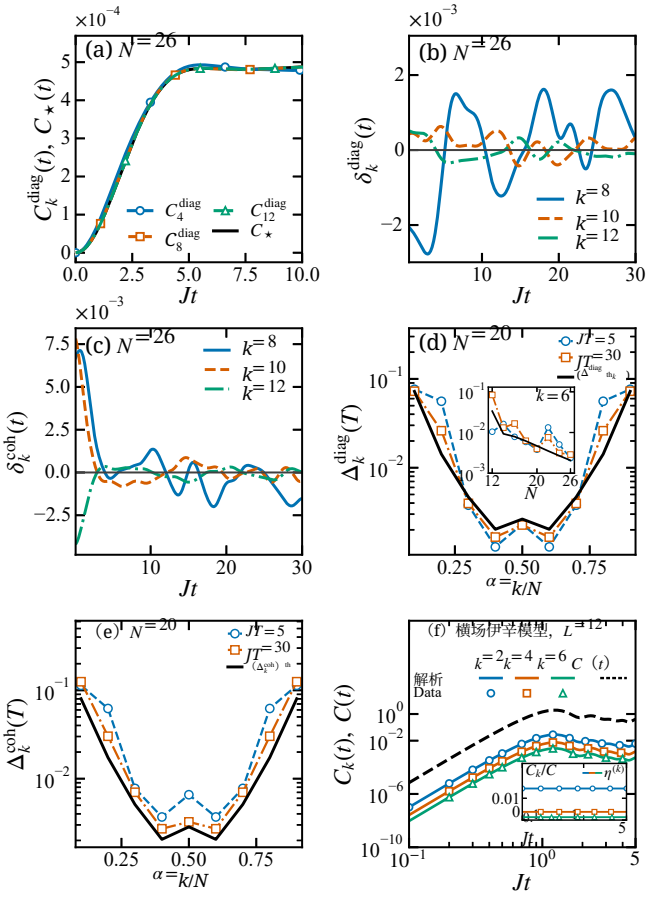


图 2. SYK$_4$ 和横场伊辛模型中的完整定权求和。(a) $C_k^{\rm diag}(t)$ 对应 $k=4$、8、12，以及在 $N=26$ 时的扇区参考值 $C_\star(t)$。(b)、(c) 在 $N=26$ 时，$k=8$、10、12 对应的有符号对角残差和相干残差。(d)、(e) 在 $N=20$ 时，残差时间均方根随 $\alpha=k/N$ 的变化；(d) 的插图：在 $k=6$ 时的尺寸依赖性。圆形和方形分别对应 $JT=5$、30，并采用 $0.1\le Jt\le JT$。黑色曲线表示复 Haar 估计（下标 th）。(f) $L=12$、$J=h=1$时的开边界横场伊辛模型，处于接近中心的 Fock 本征态，探针位于位置 6 和 8，Z。符号表示完整扇区求和，彩色曲线表示 $k=2$、4、6 时的 $\eta_2^{(k)}C(t)$，黑色虚线表示 $C(t)$。插图比较 C_k/C 和 $\eta_2^{(k)}\equiv\eta^{(k)}$。

若读出测量次数有限，可以将对同一斜率的两个独立估计值相乘，从而保证其平方的估计无偏。

固定的 *Majorana* 权重。对于 L 个费米子模式，共有 $N=2L$ 个马约拉纳算符 γ_a、$D=2^L$ 和 $\{\gamma_a,\gamma_b\}=2\delta_{ab}I$。令 $[N]=\{1,\dots,N\}$ 和 $\mu=\{\mu_1<\cdots<\mu_k\}\subseteq[N]$。字符串 $W_\mu=i^{k(k-1)/2}\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_k}$ 是厄米对合。对于 $\mathcal{S}_k=\{\mu:|\mu|=k\}$ 和 $\mathcal{N}_k=\binom{N}{k}$，定义通道 Φ_k 和扇区响应 C_k 为

$$\Phi_k(X)=\frac{1}{\mathcal{N}_k}\sum_{\mu\in\mathcal{S}_k}W_\mu XW_\mu,\quad C_k=\frac{1}{2\mathcal{N}_k}\sum_{\mu\in\mathcal{S}_k}R_\mu^2. \tag{4}$$

交换具有 $s=|\mu\cap\nu|$ 个共享指标的权重串 k 与 $q=|\nu|$，得到符号$(-1)^{kq-s}$。因此

$\Phi_k(W_\nu) = \kappa_{kq} W_\nu$，其中

$$\kappa_{kq} = \frac{1}{\mathcal{N}_k} \sum_s (-1)^{kq-s} \binom{q}{s} \binom{N-q}{k-s}. \tag{5}$$

这是归一化的Krawtchouk特征值，其中包含Clifford交换符号。对于超出整数范围的较小下标，二项式系数为零。

对于费米子宇称特征值为 $p_\psi = \pm 1$的输入，$\rho_k = \Phi_k(\rho)$ 属于宇称为$(-1)^k p_\psi$ 、维数为 $d = D/2$的扇区。令 $\Pi_k = \mathbb{I}_{(-1)^k p_\psi}/d$，其中 $\mathbb{I}_{(-1)^k p_\psi}$是该扇区上的恒等算符，因此$\mathrm{Tr}\,\Pi_k = 1$。精确的Hilbert–Schmidt距离为

$$\|\rho_k - \Pi_k\|_2^2 = \frac{1}{D} \sum_{\nu \notin \{\varnothing, [N]\}} \kappa_{k,|\nu|}^2 |\langle W_\nu \rangle_\psi|^2. \tag{6}$$

如果 A_t 具有确定宇称，那么对于偶数 A_t ，只有偶数 k 会产生贡献；对于奇数 A_t ，只有奇数k 会产生贡献。令 $z_\mu = \langle A_t W_\mu \rangle_\psi$ ，并令 $|v\rangle = A_t|\psi\rangle$。展开式 $R_\mu^2/2 = |z_\mu|^2 + \mathrm{Re}\, z_\mu^2$ 给出

$$\begin{aligned} C_k &= C_k^{\mathrm{diag}} + C_k^{\mathrm{coh}}, \\ C_k^{\mathrm{diag}} &= \langle v|\rho_k|v\rangle, \quad C_k^{\mathrm{coh}} = \frac{1}{\mathcal{N}_k} \mathrm{Re} \sum_{\mu \in \mathcal{S}_k} z_\mu^2. \end{aligned} \tag{7}$$

对角项度量twirling态在探测方向上的投影。相干项保留了相同振幅的相位。宇称扇区参考量为 $C_\star = \langle v|v\rangle/d$，因此连通目标为 $dC_\star - |\langle A_t\rangle_\psi|^2$。因此，使用宇称扇区参考量进行估计需要减去这一项。下面的精确高斯重构直接针对 C 。

截断误差和采样误差。 从 $\mathcal{S}_k$ 中独立且均匀地有放回抽取 S 个算符串。记作 $Y_\mu = R_\mu^2/2$，令 $\widehat{C}_{k,S}$ 为其样本均值，并使用$\|f\|_T^2 = \int_{0^+}^T |f(t)|^2\, dt$，其中省略孤立的零时间点。对于任意固定的比较曲线 $B(t)$，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\widehat{C}_{k,S} - B\|_T^2 &= \|C_k - B\|_T^2 \\ &\quad + \frac{1}{S} \int_{0^+}^T \mathrm{Var}_{\mu \in \mathcal{S}_k} Y_\mu(t)\, dt. \end{aligned} \tag{8}$$

这里的 $\mathbb{E}$表示在固定状态和哈密顿量下对算符串采样取平均。对于 $B = C_\star$，确定性下限包括相干项及其与对角残差的干涉。其数值取决于状态和探针。该恒等式在带有求积权重的固定时间网格上同样成立。它以精确的斜率计入字符串采样。读出测量次数和脉冲误差则分别计入。

我们定义在信号非零时的 $\delta_k^{\mathrm{diag}} = (C_k^{\mathrm{diag}} - C_\star)/C_\star$ 和 $\delta_k^{\mathrm{coh}} = C_k^{\mathrm{coh}}/C_\star$，并将它们的时间均方根定义为

$$\Delta_k^x(T) = \left[\frac{1}{T} \int_{0^+}^T (\delta_k^x(t))^2\, dt \right]^{1/2}, \quad x \in \{\mathrm{diag}, \mathrm{coh}\}. \tag{9}$$

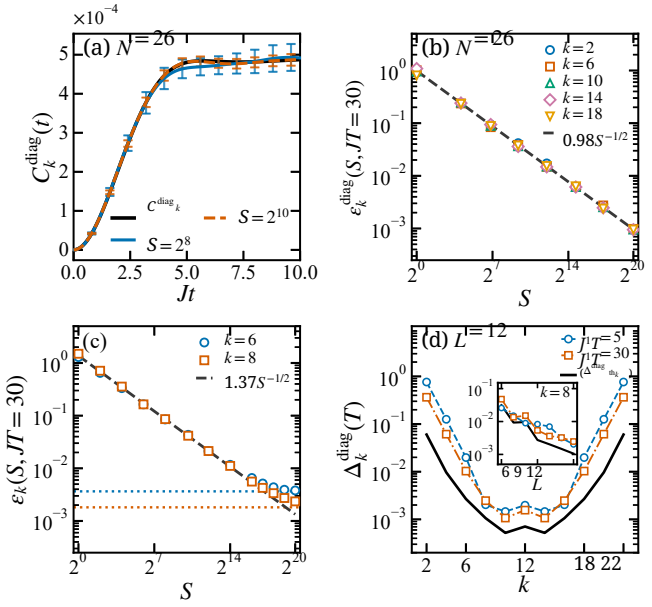


图 3。采样与截断。(a)–(c)面板使用处于 $N = 26$的中间谱 SYK_4 。(a) $k = 12$ 在 $S = 256, 1024$ 处的对角响应及其完整扇区值。条形图同图 1(b)。(b) 相对对角误差 $\epsilon_k^{\mathrm{diag}}$ 相对于C_k^{diag}，对应 $k = 2, 6, 10, 14, 18$；公共的 $0.98S^{-1/2}$引导线在 $1 \le S \le 2^{20}$上联合拟合。(c) 完整响应误差 ϵ_k在 $k = 6, 8$ 处相对于 $C_\star$的结果。虚线为精确的扇区下限。公共的 $1.37S^{-1/2}$引导线保留了从 $k = 6, 8, 12$ 在 $1 \le S < 2^{12}$上的联合校准。(b)、(c)中的误差均在对 30 个系综取平均之前，按每个估计量计算，并满足 $0.1 \le Jt \le JT$，$JT = 30$。(d) 非可积伊辛链中对角残差 RMS 随 Majorana 权重的变化，见公式 (13)，对应 $L = 12$。插图展示 $L = 6, \ldots, 12$ 在 $k = 8$处的变化。圆形和方形数据使用 $J_1 T = 5, 30$；主图和插图中的黑色实线曲线给出复Haar预测（Δ_k^{diag}）$_{\mathrm{th}}$，见补充材料公式 (??)。 Z-探针的位置遵循与 SYK 中相同的规则，但此处使用 L 个自旋。

复 Haar 统计为典型固定权重残差提供了参照。对源奇偶扇区中的纯态取平均，式 (6) 得到 $\left[d^2(1 + \delta_{2k,N})/\mathcal{N}_k - 1\right]/[d(d+1)]$。关于探测方向相对取向的二阶矩模型表明，对于固定的 k 和较大的 N，对角相对均方根的量级为 $\mathcal{N}_k^{-1/2}$。相位敏感的 Gram 矩阵矩给出了相同固定-k 阶的相干基准。半权重处的因子源于互补字符串，它们在奇偶扇区内的作用正比于恒等算符。这些模型预言了典型状态的全扇区残差的尺度。对于固定状态和时间，残差本身是确定的。补充材料 (SM) [33] 推导了这两个矩，并给出了用于检验各向同性假设的精确表达式。

精确高斯校准。采用一种经过调整的福克基，其中高斯输入为 $|\psi\rangle = |\mathbf{n}\rangle$。这里，$\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_L)$ 和 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_L)$ 分别是初始和最终占据向量，$n_a, m_a \in \{0, 1\}$ 对应模 $a = 1, \ldots, L$。它们的占据距离为 $d_{\mathrm{occ}}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) =$

$\sum_{a=1}^{L}|m_a-n_a|$。对于 $r=0,\dots,L$，到距离为 r 的状态的跃迁振幅平方总和为

$$u_r(t)=\sum_{\mathbf{m}:\,d_{\rm occ}(\mathbf{m},\mathbf{n})=r}|\langle\mathbf{m}|A_t|\mathbf{n}\rangle|^2. \tag{10}$$

在这个基底中，马约拉纳字符串会将输入态映射到一个占据态，仅相差一个相位。到达指定最终态的权重为 k 的字符串，在距离为 r 时所占的比例为

$$\eta_r^{(k)}=\frac{2^r}{\binom{2L}{k}}\binom{L-r}{(k-r)/2}. \tag{11}$$

除非 $(k-r)/2$ 是介于 0 和 $L-r$ 之间的整数，否则该系数为零。每个发生变化的模都需要从其对应的算符对中取一个马约拉纳算符，而 $(k-r)/2$ 个其他模则各贡献两个。对马约拉纳算符进行实正交旋转，只会在相同权重的字符串之间产生混合，并保持斜率平方之和不变。因此，这一计数方法适用于实验基底。对于每个 $r>0$，在一个发生变化的模上交换所选的马约拉纳算符，会使 $C_k^{\rm coh}$ 中复振幅平方的符号反转。当 $r=0$ 时，字符串本征值为实数，且相干项会抵消对角贡献。因此，

$$C_k(t)=\sum_{r=1}^{L}\eta_r^{(k)}u_r(t),\quad C(t)=\sum_{r=1}^{L}u_r(t). \tag{12}$$

这些求和包含 L 个占据距离项；横场伊辛模型的 ZZ 探测只涉及 $r=0,\ 2$，其中 $r=0$ 经连通减法移除。对于允许的正 r，权重 $k=r$ 构成一个对角元非零的三角系统。其逆矩阵给出完整固定权重响应的一个已知线性组合。反演系数还决定了测量噪声的放大程度。

对于开边界横场伊辛模型，$H=-J\sum_{j=1}^{L-1}X_jX_{j+1}-h\sum_{j=1}^{L}Z_j$，其中 X_j, Z_j 是格点泡利算符，J,h 分别是交换耦合强度和场强。Jordan–Wigner 变换使 H 成为二次型 [32]。对易子 $[Z_i(t)\ Z_j]$ 是马约拉纳算符的双线性形式，因此只能改变零个或两个占据数。于是，式（12）给出 $C_k=\eta_2^{(k)}C$，其中 $\eta_2^{(k)}\equiv\eta^{(k)}$，对偶数$2\le k\le 2L-2$而言这一结果是精确的。该关系适用于任意纯高斯输入态，包括准粒子福克本征态。补充材料中的 XX 和 XZ 示例说明了何时需要考虑多个权重。

数值基准测试。 我们对 SYK_4 [3, 29,30]，$H=\frac{1}{4}\sum_{a<b<c<e}J_{abce}\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_e$进行对角化，采用相互独立、均值为零且方差为 $6J^2/N^3$ 的高斯耦合，其中J 设定 SYK能标。我们使用中谱本征态 $N\le 26$，并在 $i=\lfloor(L-2)/2\rfloor+1$和 $j=i+2$ 处采用 Z探针，取 $L=N/2$ ，并使用从 1 开始编号的格点标签。图 1(b,c) 展示了结果向直接 OTOC 的收敛，以及其相对采样误差的 $S^{-1/2}$ 标度。在图 1(c) 和图 3(b,c) 中，$\epsilon_{\rm glob}$，$\epsilon_k^{\rm diag}$ ，ϵ_k 分别表示 $\|\widehat{Q}-\widehat{B}\|_T/\|B\|_T$ 采样曲线 Q 及其参考值 $\widehat{B}=C$，$C_k^{\rm diag}$，$C_\star$。先针对每个 S 串估计器分别评估误差，再对 30 个相互独立的算子采样系综取平均；使用 $0.1\le Jt\le JT$，其中 $JT=30$。所有绘制的时间均采用 $\hbar=1$；积分中的 0^+ 表示省略零时刻点，数值网格从 $Jt=0.1$ 开始。

为单独检验固定权重截断，我们对每个扇区中的所有弦求和。对角信号跟踪 $C_\star$，其带符号残差在零附近波动，而相干残差随时间改变符号 [图 2(a)–(c)]。均方根残差趋近半权重，并在 $k=N/2$ 处局部增强；Haar 参考中的互补弦项捕捉到了这一点 [图 2(d)、(e)]。图 2(f) 在一个接近中心的 Fock 本征态上检验了不同的高斯预测 $C_k=\eta_2^{(k)}C$ 。

图 3 恢复了有限采样。对角响应收敛于其扇区值，误差遵循公式 (8) 中的采样定律。对于完整响应，相对下限为 $\|C_k-C_\star\|_T/\|C_\star\|_T$。 $k=6$ 误差趋近于其下限，而 $k=8$ 具有更低的下限，并且在采样范围内始终高于该下限。非可积基准是开放链

$$H=-J_1\sum_{j=1}^{L-1}X_jX_{j+1}-J_2\sum_{j=1}^{L-2}X_jX_{j+2}-h\sum_{j=1}^{L}Z_j, \tag{13}$$

其中 $J_2/J_1=0.5$、 $h/J_1=1.05$为 Majorana 固定权重脉冲，并采用奇偶扇区中的近中心本征态。这些数据表明，随着权重和系统尺寸的增加，对角残差受到类似的抑制 [图 3(d)]。补充材料提供了尺寸和能量扫描结果，以及稳定子态基准。

实现与结论。 固定的 Majorana 权重控制脉冲设置的数量。固定权重单项式的 Jordan–Wigner 映射仍可能具有与系统尺寸成正比的支撑。对于 Pauli 支撑为 ℓ （非恒等因子的数量）的直接 Pauli 弦旋转，在连接性适当时需要 $2(\ell-1)$ 个纠缠门。奇权重弦可以在量子比特编码中实现为 Pauli 旋转。物理上的费米子实现需要与宇称超选规则相兼容的控制。于是，每个时间点、针对 S 个采样设置的弦脉冲预算为 $O(SN)$，之后还需乘以脉冲设置数量、重复次数和路由开销。在相对采样前因子有界的情况下，对于预设的统计误差，该预算为 $S=O(\epsilon_{\rm stat}^{-2})$。态制备、读出精度和校准决定了达到该误差所需的实验成本。

平方响应恒等式可通过正向时间测量重构任意指定纯态的连通 OTOC。马约拉纳权重限制保留了足够的结构，使我们能够量化所损失的部分：对于高斯福克态，缺失的贡献可通过显式的组合系数得到恢复；而在混沌

基准中，则可以将残差与有限尺寸统计预测进行比较。这使得脉冲系综的选择成为重构理论的一部分。

本工作得到国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1405302）、国家自然科学基金（项目编号：12675031 和 12174358）以及 NSAF（项目编号：U2330401）的资助。

* ychen@gscaep.ac.cn

[1] A. I. Larkin 和 Y. N. Ovchinnikov, *Quasiclassical Method in the Theory of Superconductivity*, 《苏联物理学—JETP》28，1200（1969）。[2] D. A. Roberts 和 D. Stanford, *Diagnosing Chaos Using Four-Point Functions in Two-Dimensional Conformal Field Theory* **115**, 131603 2015, 《物理评论快报》（）。[3] A. Kitaev, *A simple model of quantum holography*, KITP 报告（2015）。[4] J. Maldacena、S. H. Shenker 和 D. Stanford, *A Bound on Chaos* **08**, 106 2016, 《高能物理杂志》（）。[5] S. Xu 和 B. Swingle, *Scrambling Dynamics and Out-of-Time-Ordered Correlators in Quantum Many-Body Systems* **5**, 010201 2024, 《物理评论X》（）。[6] B. Swingle、G. Bentsen、M. Schleier-Smith 和 P. Hay-den, *Measuring the Scrambling of Quantum Information*, 《物理评论A》94，040302(R)（2016）。[7] M. Kastner、P. Osterholz 和 C. Gross, *Ancilla-Free Measurement of Out-of-Time-Ordered Correlation Functions: General Measurement Protocol and Rydberg Atom Implementation* **110**, 013303 2024, 《物理评论A》（）。[8] G. Zhu、M. Hafezi 和 T. Grover, *Measurement of Many-Body Chaos Using a Quantum Clock*, 《物理评论A》94，062329（2016）。[9] B. Vermersch、A. Elben、L. M. Sieberer、N. Y. Yao 和 P. Zoller, *Probing Scrambling Using Statistical Correlations between Randomized Measurements*, 《物理评论X》9，021061（2019）。[10] R. J. Garcia、Y. Zhou 和 A. Jaffe, *Quantum Scrambling with Classical Shadows* **3**, 033155, 《物理评论研究》（2021）。[11] Y. Wang、G. Liu、Z. Liu、Y. Tang、X. Ma 和 H. Dai, *Robust Estimation of Nonlinear Properties of Quantum Processes* **110**, 032415 2024, 《物理评论A》（）。[12] H. Shen、P. Zhang、R. Fan 和 H. Zhai, *Out-of-Time-Order Correlation at a Quantum Phase Transition*, 《物理评论B》96，054503（2017）。[13] N. Yunger Halpern, *Jarzynski-Like Equality for the Out-of-Time-Ordered Correlator* **95**, 012120, 《物理评论A》（2017）。[14] N. Yunger Halpern、B. Swingle 和 J. Dressel, *Quasiprobability behind the Out-of-Time-Ordered Correlator* **97**, 042105 2018, 《物理评论A》（）。[15] J. Dressel、J. R. Gonz´alez Alonso、M. Waegell 和 N. Yunger Halpern, *Strengthening Weak Measurements of Qubit Out-of-Time-Order Correlators*, 《物理评论A》98，012132 2018（）。[16] J. Li、R. Fan、H. Wang、B. Ye、B. Zeng、H. Zhai、X. Peng 和 J. Du, *Measuring Out-of-Time-Order Correlators on a Nuclear Magnetic Resonance Quantum Simulator*, 《物理评论X》7，031011（2017）。[17] Y.-C. Li、T.-G. Zhou、S. Zhang、Z. Wu、L. Zhao、H. Yin、X. An、H. Zhai、P. Zhang、X. Peng 和 J. Du, *Error-Resilient Reversal of Quantum Chaotic Dynamics Enabled by Scramblons* **136**, 060403, 《物理评论快报》（2026）。[18] M. G¨arttner、J. G. Bohnet、A. Safavi-Naini、M. L. Wall、J. J. Bollinger 和 A. M. Rey, *Measuring Out-of-Time-Order Correlations and Multiple Quantum Spectra in a Trapped-Ion Quantum Magnet* **13**, 781, 《自然·物理》（2017）。[19]M. K. Joshi、A. Elben、B. Vermersch、T. Brydges、C. Maier、P. Zoller、R. Blatt 和 C. F. Roos, *Quantum Information Scrambling in a Trapped-Ion Quantum Simulator with Tunable Range Interactions*, 《物理评论快报》124，240505（2020）。[20] P. Wang、H. Kwon、C.-Y. Luan、W. Chen、M. Qiao、Z. Zhou、K. Wang、M. S. Kim 和 K. Kim, *Snapshotting Quantum Dynamics at Multiple Time Points*, 《自然·通讯》15，8900（2024）。[21] 谷歌研究院, *Information Scrambling in Quantum Circuits* **374**, 1479 2021, 《科学》（）。[22] J. Braum¨uller、A. H. Karamlou、Y. Yanay、B. Kannan、D. Kim、M. Kjaergaard、A. Melville、B. M. Niedzielski、Y. Sung、A. Veps¨al¨ainen、R. Winik、J. L. Yoder、T. P. Orlando、S. Gustavsson、C. Tahan 和 W. D. Oliver, *Probing Quantum Information Propagation with Out-of-Time-Ordered Correlators* **18**, 172 2022, 《自然·物理》（）。[23] X. Wang、L. Xiong、X. Cai 和 X. Yuan, *Computing n-Time Correlation Functions without Ancilla Qubits*, 《物理评论快报》135，230602（2025）。[24] 谷歌量子人工智能和合作者, *Observation of Constructive Interference at the Edge of Quantum Ergodicity* **646**, 825 2025, 《自然》（）。[25] X. Liang、Z. Yue、Y.-X. Chao、Z.-X. Hua、Y. Lin、M. K. Tey 和 L. You, *Observation of Anomalous Information Scrambling in a Rydberg Atom Array*, 《物理评论快报》135，050201（2025）。[26] D.-S. Xiang、Y.-W. Zhang、H.-X. Liu、P. Zhou、D. Yuan、K. Zhang、S.-Y. Zhang、B. Xu、L. Liu、Y. Li 和 L. Li, *Observation of Quantum Information Collapse-and-Revival in a Strongly-Interacting Rydberg Atom Array*, 《自然·通讯》17，6998（2026）。[27] P. D. Blocher、S. Asaad、V. Mourik、M. A. I. Johnson、A. Morello 和 K. Mølmer, *Measuring Out-of-Time-Ordered Correlation Functions without Reversing Time Evolution* **106**, 042429 2022, 《物理评论A》（）。[28] R. Kubo, *Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems*, 《日本物理学会志》12，570（1957）。[29] S. Sachdev 和 J. Ye, *Gapless Spin-Fluid Ground State in a Random Quantum Heisenberg Magnet*, 《物理评论快报》70，3339（1993）。[30] J. Maldacena 和 D. Stanford, *Remarks on the Sachdev–Ye–Kitaev Model* **94**, 106002 2016, 《物理评论D》（）。[31] X. Nie、Z. Zhang、X. Zhao、T. Xin、D. Lu 和 J. Li, *Detecting scrambling via statistical correlations between randomized measurements on an NMR quantum simulator* 1903 12237 2019, arXiv:。[32] P. Pfeuty, *The One-Dimensional Ising Model with a Transverse Field* **57**, 79 1970, 《物理年鉴》（纽约）（）。[33] 详见补充材料。