InteMaxwell–Bloch方程的grable离散化 ns

I. Kuk[1] 和 I. Gabitov[1], *

[1]亚利桑那大学数学系，美国亚利桑那州图森，*85721*

arXiv:2611.30080v1 [nlin.SI] 23 Nov 2026

摘要

麦克斯韦–布洛赫方程的数值格式能够保持布洛赫矢量的长度，却不能保持其可积结构，因此孤子只是近似解。我们以物理变量写出这些方程在时间和空间上的可积离散化，用于描述共振两能级介质中的复场，并将其用作数值格式。该晶格源自一个具有与连续情形相同解析结构的离散 Lax 对；辅助场变量通过等谱归一化确定，所得格式是显式的，相当于在每个网格节点对密度矩阵进行一次 2×2 相似变换。它保持每个布洛赫矢量的长度，并满足场与介质之间的精确能量平衡。若将其视为场自旋与布洛赫矢量之间的交换相互作用，该晶格便与一个已知的全离散可积系统一致；我们利用这一点求得闭式孤子和呼吸子。它们是无反射势，能量为 $16\sum_j \operatorname{Im}\lambda_j$，其中 λ_j 为特征值，并收敛至 McCall–Hahn孤子和 Lamb呼吸子。通过引入有序子层，可在纳入非均匀展宽的同时保持可积性。在有限时间窗口上，散射数据按闭合映射演化，而介质的末态由谱平面上一点处的数据给出。在无限直线上，若介质在脉冲后方恢复至基态（我们在第一行证明了这一点，并在后续各行通过数值计算观察到这一现象），则透射系数守恒，反射系数则以线性化晶格的乘子线性演化。作为一种数值方法，该晶格是显式的二阶格式，其单位精度成本与 Cayley 格式和指数中点格式相当；此外，采用保面积输入映射和经校准的介质耦合，可使其对选定的孤子精确成立。

I. 引言

双能级原子共振介质中的短光脉冲可以作为自感应透明（SIT）孤子无损传播 [1]；同一介质会产生光子回波，并在反转时产生超荧光 [2, 3]。在不存在弛豫的情况下，这些现象由完全可积的麦克斯韦–布洛赫（MB）方程描述 [4–6]。逆散射变换给出了它们的孤子和呼吸子、面积定理以及

* gabitov@arizona.edu

任意脉冲的渐近重塑；这一领域仍是活跃的研究课题，近期研究涉及非零背景和非均匀展宽 [7, 8]。

实际应用中，MB方程通常通过数值方法求解，例如 Ziolkowski等人 [9] 针对不采用旋转波近似的全波方程提出的克兰克–尼科尔森预测校正格式，或者针对包络方程采用将场与介质解耦的时间离散化方法 [10]。采用求解至收敛的隐式中点（凯莱）法则旋转布洛赫矢量 [11,12] ，或在分裂格式中进行精确旋转 [13, 14]，都能精确保留布洛赫矢量的长度。这些格式无法保留方程的可积结构：孤子并非格式的精确解，其能量和面积只能近似守恒，且其位置会在长距离传播过程中缓慢漂移。对于非线性薛定谔方程，不可积离散化甚至会产生数值诱导混沌，而可积离散化可以避免这一现象 [15]；不过，可积离散化也并非不存在数值困难，例如双重离散正弦-戈登格式在同宿流形附近就存在此类问题 [16, 17]。

可积离散化保留了这一结构：格点方程具有自身的 Lax对、精确孤子解和守恒律 [18–21]；对于定义在四边形图上的方程，Lax对可由方程在立方体上的相容性导出 [22, 23]。对于 MB方程，Bogoliubov等和 Rybin等发现了时间连续的可积晶格 [24, 25], ，而 Saksida 研究了部分离散化 [26]；对于实场，完全离散问题可化约为 Hirota 离散正弦-戈登方程 [27–29]。据我们所知，尚未有人以物理变量写出复麦克斯韦–布洛赫系统在空间和时间上均离散的可积离散化，也未将其用作数值格式。

本文用物理变量表示这种离散化 E， ρ， N 并将其同时作为两个相互作用的经典自旋——场和布洛赫矢量——的模型以及一种数值方法来研究。该晶格源自一个离散 Lax 对，其解析结构和对称性与连续情形相同（第 III节）；它是显式的，能保持每个布洛赫矢量的长度，并满足场与介质之间精确的能量平衡。作为一种晶格，它并非新事物：它与 Tsuchida 的一个全离散系统一致 [30]，并与 Goncharenko 和 Veselov 的杨–巴克斯特映射相关 [31]（关于杨–巴克斯特映射的 Lax 矩阵，见 [32]）。本文的新意在于将其解读并用作麦克斯韦–布洛赫格式。利用这一联系，我们得到了孤子和呼吸子的闭式解（第 IV节），将该格式与标准方法进行比较（第V节），并通过有序子层将其推广到非均匀展宽介质

（第VI节）。对于散射数据（第VII节），我们得到了连续理论方程的格点对应形式 [6]: 在有限时间窗口上是一个闭合映射；而在无限直线上，若介质在脉冲后方恢复到基态，则反射系数按线性化晶格的乘子线性演化；对于实约化，Boiti等人 [33]已发现这一线性定律。与连续理论不同，此时透射系数守恒；两种图景如何在连续极限下衔接，仍有待研究。作为数值格式，该晶格是显式的、二阶的，无需迭代；其达到相同精度的计算成本与标准保结构格式相当，而且对于校准输入，它能精确再现指定的孤子。

第 II 节回顾模型，第 III节推导晶格及其性质，第 IV节给出精确解，第 V 节将该方案与标准方法进行比较，第 VI 节讨论非均匀展宽，第 VII 节推导散射数据的演化，第 VIII节总结结果并指出尚待解决的问题。推导过程汇集于附录中。

II. 模型

我们考虑在不存在弛豫的情况下，相干光脉冲在由双能级原子构成的共振介质中的传播。在随脉冲运动的参考系中，并采用无量纲单位，电场的包络 $E(x,\ t)$ 和原子的密度矩阵

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} N & \rho \\ \rho^* & -N \end{pmatrix}$$

其中原子的极化为 ρ ，布居反转为 N，它们满足麦克斯韦–布洛赫（MB）方程 [1, 2, 4–6]

$$E_x = \rho, \qquad \rho_t + 2\mathrm{i}\lambda_0\rho = NE, \qquad N_t = -\tfrac{1}{2}\big(E^*\rho + E\rho^*\big). \tag{1}$$

这里， x 为传播距离， t 为迟滞时间， λ_0 为原子跃迁相对于载波频率的失谐。对于单条（尖锐）谱线，令$\rho = \tilde{\rho}\, e^{-2\mathrm{i}\lambda_0 t}$， $E = \tilde{E}\, e^{-2\mathrm{i}\lambda_0 t}$ ，即可从 $\tilde{E}$，$\tilde{\rho}$的方程中消去 λ_0 ，下文中我们设 $\lambda_0 = 0$:

$$E_x = \rho, \qquad \rho_t = NE, \qquad N_t = -\tfrac{1}{2}\big(E^*\rho + E\rho^*\big); \tag{2}$$

非均匀展宽介质将在第 VI 节中讨论。方程（1）保持布洛赫矢量的长度不变，我们将其归一化为 $N^2 + |\rho|^2 = 1$。我们考虑信号

问题：对于所有 t，输入场 $E(0,\ t)$ 均已知，并且在脉冲到达之前，介质处于已知状态 $N = N_{-}$, $\rho = 0$ （对于处于基态 $N_{-} = -1$ 的吸收介质）。

方程（1） 是超定线性系统 [5, 6]的相容条件

$$\Psi_t = U\Psi, \qquad \Psi_x = V\Psi, \tag{3}$$

$$U = -\mathrm{i}\lambda\sigma_3 - \tfrac{1}{2}u, \quad u = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = -\frac{\hat{\rho}}{4\mathrm{i}(\lambda - \lambda_0)}, \tag{4}$$

其中， 2×2 矩阵波函数 $\Psi(x,t,\lambda)$；第一个方程是 Zakharov–Shabat 谱问题 [34] 的 Ablowitz、Kaup、Newell和Segur形式 [35]。混合偏导数相等，即 $\Psi_{tx} = \Psi_{xt}$，可得 $U_x - V_t + [U,V] = 0$，这与（1）等价。谱参数 λ 在线性项 U 以及通过谱线中心处的简单极点 V进入 $\lambda = \lambda_0$。两个矩阵都满足对称性 $\sigma_2 U(\lambda)\sigma_2 = U^*(\lambda^*)$、 $\sigma_2 V(\lambda)\sigma_2 = V^*(\lambda^*)$, 它体现了 N的实性以及共轭对（E, E^*）和（ρ, ρ^*）。接下来，我们将在（t, x）的矩形格点上离散化（3），以保留这种解析结构和对称性。

III. 可积晶格

本节将从离散 Lax 对推导格点方程，通过等谱归一化确定其辅助变量，写出显式步进关系及其守恒律，并将该晶格与已知的可积系统联系起来。

A. 离散 Lax 对与格点方程

我们将波函数 $\Psi_{n,\ m}$置于矩形格点的节点（$t_n,\ x_m$） $=$（$n\Delta t,\ m\Delta x$），并将（3）替换为移位

$$\Psi_{n+1,m} = \mathbf{U}_{n,m}\Psi_{n,m}, \qquad \Psi_{n,m+1} = \mathbf{V}_{n,m}\Psi_{n,m}, \tag{5}$$

其相容条件为

$$\mathbf{U}_{n,m+1}\mathbf{V}_{n,m} = \mathbf{V}_{n+1,m}\mathbf{U}_{n,m}. \tag{6}$$

场定义在时间边上（$n,\ m$） $\to$（$n+1,\ m$），而介质定义在空间边上（$n,\ m$） $\to$（$n,\ m+1$） [图 1（a）]。

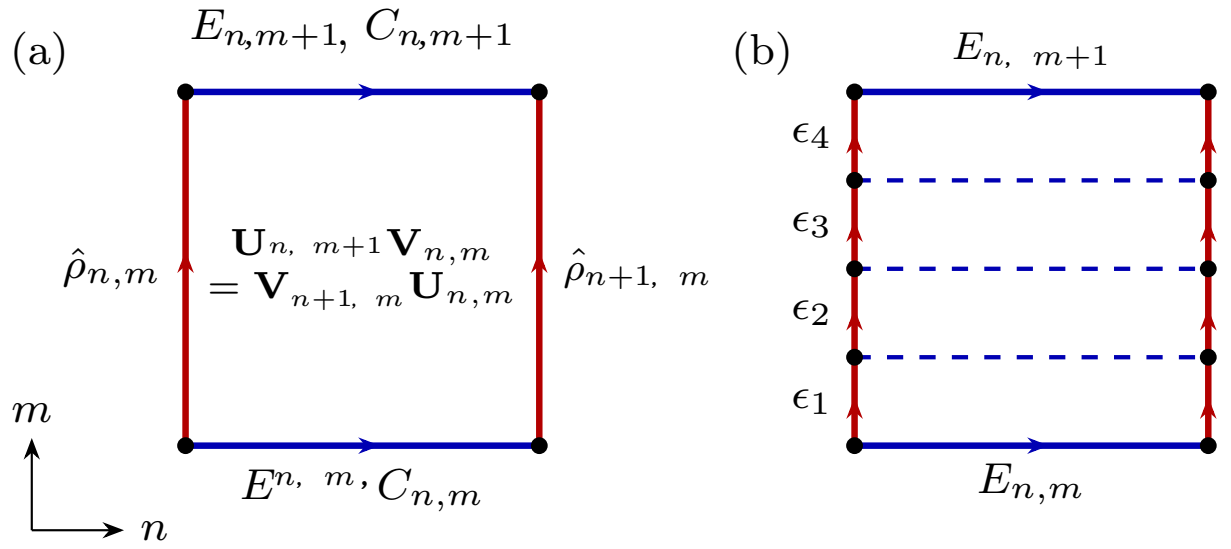


图1。(a) 晶格的基本胞元。场变量 E、C 位于时间边上，密度矩阵 $\hat{}\rho$ 位于空间边上；显式步进（11）根据下边和左边计算上边和右边。(b) 对于非均匀展宽，一个空间步长被分成有序子层，每个子层对应一个失谐类 ϵ_j （第 VIB节）；场依次通过这些子层。

朴素的选择 $\mathbf{U} = I + \Delta t\, U$、$\mathbf{V} = I + \Delta x\, V$行不通：(6) 必须对所有 λ 都成立，这会为五个实未知量 $E_{n,\ m+1}$、$\rho_{n+1,\ m}$、$N_{n+1,\ m}$带来七个独立的实条件；对于一般数据，这些条件无解。

因此，我们寻求一对具有与（4）相同解析结构的矩阵对（ λ 对$\mathbf{U}$呈线性依赖，在 $\lambda = 0$ 处对 $\mathbf{V}$有一个简单极点），且具有相同的 σ_2-对称性；并要求 $\det\mathbf{U}_{n,\ m}$ 的零点不依赖于 n 和 m。经过规范变换，并将晶格步长吸收到变量中（$\lambda \to \Delta t\,\lambda$、$E \to \Delta t\, E$、$\hat{}\rho \to \Delta t \Delta x\, \hat{}\rho$；附录 A），这对矩阵变为

$$\mathbf{U}_{n,m} = -\mathrm{i}\lambda\sigma_3 - \tfrac{1}{2}u_{n,m} + (1 + C_{n,m})\, I, \qquad \mathbf{V}_{n,m} = I - \frac{\hat{\rho}_{n,m}}{4\mathrm{i}\lambda}. \tag{7}$$

与朴素的配对相比，唯一新增的成分是实标量 $C_{n,\ m}$ 它位于时间边上。它在 (1) 中没有对应项；我们将在下文说明，它由场确定，并在连续极限下按 $O(\Delta t^2$ 消失。除非另有说明，第 III、IV 和 VII 节中的符号均采用这些晶格单位，而第 V 节中的符号采用物理单位；两种单位同时出现时，下标“ph”和“lat”分别标明所用单位。

将（7）代入（6）（ λ中的一次项恰好抵消），并比较各项

关于 λ 的常数项以及在 $\lambda = 0$ 处的留数，可得

$$E_{n,m+1} = E_{n,m} + \tfrac{1}{2}(\rho_{n,m} + \rho_{n+1,m}), \tag{8a}$$

$$C_{n,\ m+1} = C_{n,\ m} - \tfrac{1}{4}(N_{n,\ m} - N_{n+1,\ m}) \ , \tag{8b}$$

$$\rho_{n+1,m} = \rho_{n,m} + \tfrac{1}{2}\big(E_{n,m+1}N_{n,m} + E_{n,m}N_{n+1,m}\big) + \rho_{n,m}C_{n,m+1} - \rho_{n+1,m}C_{n,m}, \tag{8c}$$

$$N_{n+1,m} = N_{n,m} - \tfrac{1}{2}\big(E_{n,m+1}\rho^*_{n,m} + E^*_{n,m}\rho_{n+1,m}\big) + N_{n,m}C_{n,m+1} - N_{n+1,m}C_{n,m}. \tag{8d}$$

对于时间边上的给定（E，C）以及离开节点（n，m）的空间边上的 $\hat{}\rho$，方程（8）是关于四个未知量 $E_{n、\ m+1}$、$C_{n、\ m+1}$、$\rho_{n+1、\ m}$、$N_{n+1、\ m}$ 的方程（6）的唯一解。方程（8a）是 x 中 $E_x = \rho$ 的中点法则，其中 ρ 取相邻两个时间的平均值；方程（8c）和（8d）描述了空间边上的原子在相邻两条时间边上的场驱动下进行的离散布洛赫旋转；方程（8b）传输辅助变量 C。方程（7）的 σ_2 对称性由方程（6）保持，因此 C 和 N 保持为实数。

B. 归一化和显式步进

Lax矩阵的行列式为

$$\det \mathbf{U}_{n,m} = \lambda^2 + \kappa^2_{n,m}, \quad \kappa^2 = (1+C)^2 + \tfrac{1}{4}|E|^2, \qquad \det \mathbf{V}_{n,m} = 1 + \frac{r^2_{n,m}}{16\lambda^2}, \quad r^2 = N^2 + |\rho|^2. \tag{9}$$

对（6）取行列式，我们发现 $\kappa_{n,\ m+1} = \kappa_{n,\ m}$ 只要 $r_{n+1,\ m} = r_{n,\ m}$；后者将在第 IIIC 节中证明。因此，随着脉冲传播，每条时间边上的 κ 值保持不变。我们要求 $\det \lambda = \pm \mathrm{i}\kappa$ 的零点$\mathbf{U}$ 在所有边上相同，这使得 κ 成为全局常数，通过对 λ 和 Δt 进行重标度，可将其设为 1：

$$1 + C_{n,m} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}|E_{n,m}|^2}. \tag{10}$$

只需在输入行 $m = 0$上施加条件 (10)；随后，方程 (8) 会使该条件在各处都成立。条件 (10) 要求 $|E| < 2$ 以晶格单位表示，即 $|E|\Delta t < 2$ 以物理单位表示，并给出 $C = -\frac{1}{8}|E|^2\Delta t^2 + O(\Delta t^4)$，因此除非 $E \equiv 0$，否则归一化会排除 $C \equiv 0$。只要 $|E_{n、\ m}|^2 < 4 - r^2$，每个时间边上都会将正根从 m 保留到 $m+1$，因为由 (8b) 可知 $|C_{n、\ m+1} - C_{n、\ m}| \le r/2$；对于足够小的步长，这一结论成立。在条件 (10) 下，自由晶格谱问题具有 Jost 解 $(1 \mp \mathrm{i}\lambda)^n$，其连续谱为实轴。

方程 (8c) 和 (8d) 等价于对密度矩阵进行相似变换，

$$\hat{\rho}_{n+1,m} = G_{n,m}\,\hat{\rho}_{n,m}\,G_{n,m}^{-1}, \qquad G_{n,m} = (1 + C_{n,m})\,I - \tfrac{1}{2}u_{n,m} - \tfrac{1}{4}\sigma_3\hat{\rho}_{n,m}, \tag{11}$$

其中 G 仅取决于节点处的数据（n，m）。因此，该步骤是显式的：计算 G，求逆一个 2×2 矩阵，更新 $\hat{\rho}$，然后由$E_{n,\,m+1}$和$C_{n,\,m+1}$根据（8a）和（8b）求得。只要

$$\det G = \left(1 + C - \tfrac{1}{4}N\right)^2 + \left|\tfrac{1}{2}E + \tfrac{1}{4}\rho\right|^2 \neq 0. \tag{12}$$

由（10）和 $r < 2\sqrt{2}$ 可知，右端对任意场和原子态均为正：若$|E| \le r/2$，则 $1 + C \ge \sqrt{1 - r^2/16} > r/4 \ge N/4$；否则第二项为正。在物理单位 $r = \Delta t\,\Delta x$下，这一条件远非苛刻。

C. 守恒律

由于（11）是相似变换，$\hat{\rho}$ 的特征值$\pm r$ 沿着 t守恒：每个原子都精确保有其布洛赫矢量的长度，$N_{n+1,\,m}^2 + |\rho_{n+1,\,m}|^2 = N_{n,\,m}^2 + |\rho_{n,\,m}|^2$，且对任意步长均成立。场具有类似的不变量 κ，见第 IIIB节，该不变量沿着 x守恒。这两个不变量都是 Lax矩阵（9）的行列式；它们作为自旋长度的含义将在第 IIID节中解释。

在时间窗口内对（8b）求和 $0 \le n < n_{\max}$ 得到

$$W_{m+1} - W_m = -2\left(N_{n_{\max},m} - N_{0,m}\right), \qquad W_m = -8\sum_n C_{n,m} = 8\sum_n\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}|E_{n,m}|^2}\right). \tag{13}$$

这里，$W = \sum_n |E_{n,\,m}|^2\left[1 + O(|E|^2)\right]$ 是脉冲的晶格能量，而（13）是 $\partial_x \int |E|^2 dt = -2\,[N(t{=}+\infty) - N(t{=}-\infty)]$的精确格点对应形式：场损失的能量恰好等于介质获得的能量。朴素的量$\sum_n |E_{n,\,m}|^2$ 仅在 $O(\Delta t^2)$范围内守恒。

D. 连续极限及与已知系统的关系

在物理变量（$E_{\rm lat} = \Delta t\,E$，$\hat{\rho}_{\rm lat} = \Delta t\Delta x\,\hat{\rho}$）中，方程（8a）是中点法则 $E(x + \Delta x) = E(x) + \frac{\Delta x}{2}\left[\rho(t_n) + \rho(t_{n+1})\right]$ 对于 $E_x = \rho$，其中 ρ 取值于 $x_{m+1/2}$ 并对两个

时间取平均，
且

$$G = I - \tfrac{\Delta t}{2}\, u + O(\Delta t^2, \Delta t\, \Delta x), \qquad \hat{\rho}_{n+1,m} = \hat{\rho}_{n,m} + \Delta t \left[-\tfrac{1}{2} u, \hat{\rho}_{n,m}\right] + \ldots,$$

即布洛赫方程 $\hat{\rho}_t = [-\frac{1}{2}u, \hat{\rho}]$ 包含于-（2）中。因此，该晶格是（2）的一种相容离散化，其中场位于时间边（在 $t_{n+1/2}$处），介质位于空间边（在 $x_{m+1/2}$处）。这一相容性论证是形式上的；在第 V 节中已通过数值方法证实孤子和一般脉冲具有二阶收敛性，并在第IVC节中证实呼吸子具有二阶收敛性。

分别将Lax矩阵乘以 $\mathrm{i}\sigma_3$ 和 λ，我们得到

$$\mathrm{i}\sigma_3 \mathbf{U} = \lambda I + \mathrm{i} S_E, \quad S_E = \sigma_3\left[(1+C)I - \tfrac{1}{2}u\right], \qquad \lambda \mathbf{V} = \lambda I + \mathrm{i} S_B, \quad S_B = \tfrac{1}{4}\hat{\rho}, \tag{14}$$

其中， S_E 和 S_B 是无迹厄米矩阵，满足 $S_E^2 = \kappa^2 I$ 和 $S_B^2 = (r/4)^2 I$。两个因子都是经典海森堡（XXX）型的有理Lax算子 [36]，，而相容条件（6）中用 $\sigma_3 S_B'' \sigma_3$ 表示的更新后的布洛赫自旋 S_B'' （如下文的交错规范所示），是时间边上的场自旋 S_E 与空间边上的布洛赫自旋 S_B 的重因式分解：每个晶格步长都是两个自旋之间的一次精确交换相互作用。由这类二体映射构成的经典自旋和矩阵场的可积时空电路已由Krajnik、Ilievski和Prosen [37]研究。经过交错规范 $\Psi_{n,\,m} \to \sigma_3^n \Psi_{n,\,m}$后，在奇数 n上反转 E 和 ρ 的符号，该晶格与Tsuchida [30], 的全离散系统的标量厄米情形相吻合，其参数为 $\alpha_{\mathrm{T}} = \mathrm{i}\kappa$ 和 $a_{\mathrm{T}} = \mathrm{i}r/4$，立体投影坐标为 $u_{\mathrm{T}} = -E/[2(\kappa - 1 - C)]$ 和 $q_{\mathrm{T}} = \rho/(r - N)$ （附录 B ）；该系统推广了Goncharenko和Veselov的重因式分解问题 [31]，，其重因式分解和杨–巴克斯特映射的约化形式此前已有研究 [38, 39]。Tsuchida还将非线性薛定谔¨层级的第一负流与SIT（MB）方程联系起来，并在传播变量 [中给出了其可积离散化，见参考文献 [30]] 的方程（2.21）。对于实场，当 $1 + C = \cos\alpha$、$E/2 = \sin\alpha$、 $N = r\cos\Theta$和 $\rho = r\sin\Theta$时，常数规范变换将（7）映射为Orfanidis的Hirota 离散正弦-戈登方程的Lax对 [27–29]，，其中Orfanidis的参数为 $\gamma_{\mathrm{O}} = r/4$ ，谱参数为 $k_{\mathrm{O}} = -\lambda$。

具有连续时间的可积MB格点已在文献 [24, 25]中构造；而在此，两个变量都是离散的。据我们所知，尚未有人将完全离散的格点解释为MB方程的一种离散化，其中场和布洛赫矢量是两个相互作用的

自旋。我们利用已知结构作为工具：它给出了第IV 节的精确解以及第VI节的展宽晶格。

IV. 精确解

晶格的精确解可由达布变换法得到；我们给出孤子和呼吸子的闭式表达，以及它们的连续极限。

A. 晶格上的达布变换

方程（8）的精确解可由达布（dressing）方法得到 [40] ，该方法应用于离散 Lax 对（5）。我们设介质处于静止状态， $E = C = \rho = 0$， $N = N_0$ 在所有边上，因此 $\rho_0 = N_0\sigma_3$， $\mathbf{U}_0 = I - \mathrm{i}\lambda\sigma_3$ 和 $\mathbf{V}_0 = I - N_0\sigma_3/(4\mathrm{i}\lambda)$ 。自由波函数为

$$\Psi^{(0)}_{n,m}(\lambda) = \begin{pmatrix} (1-\mathrm{i}\lambda)^n c^m & 0 \\ 0 & (1+\mathrm{i}\lambda)^n d^m \end{pmatrix}, \qquad c, d = 1 \mp \frac{N_0}{4\mathrm{i}\lambda}. \tag{15}$$

我们选取一点 $\lambda_1 = \xi + \mathrm{i}\eta$ ，满足 $\eta > 0$ ，以及一个常数 $\gamma \neq 0$，并令 $\psi_{n,m} = \Psi^{(0)}_{n,m}(\lambda_1)(1, \gamma)^T \propto (1, z_{n,m})^T$，其中

$$z_{n,m} = \gamma\, q^n p^m, \qquad q = \frac{1+\mathrm{i}\lambda_1}{1-\mathrm{i}\lambda_1}, \qquad p = \frac{1 + N_0/(4\mathrm{i}\lambda_1)}{1 - N_0/(4\mathrm{i}\lambda_1)}. \tag{16}$$

利用正交投影算子 $\Pi_{n,m} = \psi\psi^\dagger/(\psi^\dagger\psi)$，我们定义

$$\mathcal{D}_{n,m}(\lambda) = I + \frac{\bar\lambda_1 - \lambda_1}{\lambda - \bar\lambda_1}\,\Pi_{n,m}, \qquad \det\mathcal{D} = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \bar\lambda_1}. \tag{17}$$

函数 $\Psi = \mathcal{D}\Psi^{(0)}$ 满足（5），其中

$$\tilde{\mathbf{U}}_{n,m} = \mathcal{D}_{n+1,m}\mathbf{U}_0\mathcal{D}^{-1}_{n,m}, \qquad \tilde{\mathbf{V}}_{n,m} = \mathcal{D}_{n,m+1}\mathbf{V}_0\mathcal{D}^{-1}_{n,m}.$$

位于 λ_1 和 $\bar\lambda_1$ 处的极点相互抵消，因为 ψ 由$\mathbf{U}_0$（λ_1）和$\mathbf{V}_0$（λ_1）以及 $\psi^\perp$ 共轭矩阵 ˜ ˜输运。因此，$\mathbf{U}$ 关于 λ是线性的，$\mathbf{V}$ 在 $\lambda = 0$处有一个单极点，并且二者都恰好具有（7）的形式。新场可读出为

$$E = -2\big(\tilde{\mathbf{U}}\big)_{12}\big|_{\lambda^0}, \qquad 1 + C = \big(\tilde{\mathbf{U}}\big)_{11}\big|_{\lambda^0}, \qquad \hat\rho_{n,m} = \mathcal{D}_{n,m+1}(0)\,\hat\rho_0\,\mathcal{D}_{n,m}(0)^{-1}. \tag{18}$$

由于 $\det\mathcal{D}$ 不依赖于 n 和 m，$\det\tilde{\mathbf{U}} = \det\mathbf{U}_0 = \lambda^2 + 1$ 以及 $\det\tilde{\mathbf{V}} = \det\mathbf{V}_0$：达布变换后的解自动满足 $(1+C)^2 + \frac{1}{4}|E|^2 = 1$ ，并且具有 $r = |N_0|$。对于较小的

晶格参数，$1+C>0$，因此（10）取正根时成立；对于一个点 λ_1，当 $8\eta^2<$（$|1-\mathrm{i}\lambda_1|+|1+\mathrm{i}\lambda_1|$）^{2}，时，即 $\eta<1/\sqrt{2}$ 对于 $\xi=0$。对于较大的参数C，其值由达布变换给出。特别地，$C\neq 0$ 无论在何处 $E\neq 0$；晶格的非平凡解都不具有 $C\equiv 0$。用若干个点迭代该构造 λ_j 可得到多孤子解（附录C）。

B. 孤子

对于一个点 $\lambda_1=\xi+\mathrm{i}\eta$，由方程（18）可得，其中 $R=|z_{n,\,m}|^2$，

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{8\eta\,\bar{z}\left[\eta(R-1)-(1-\mathrm{i}\xi)(1+R)\right]}{(1+R)\,\Delta_U}, \qquad C=-\frac{8\eta^2 R}{(1+R)\,\Delta_U},\\
N &= N_0\,\frac{N_0^2(1+R)^2-8N_0\eta(R^2-1)+16\xi^2(1+R)^2+16\eta^2(R^2-6R+1)}{(1+R)\,\Delta_V},\\
\rho &= \frac{16N_0\eta\,\bar{z}\left[N_0(1+R)-4\eta(R-1)-4\mathrm{i}\xi(1+R)\right]}{(1+R)\,\Delta_V},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

其中 $\Delta_U=(1+\xi^2+\eta^2)(1+R)-2\eta(R-1)$，且 $\Delta_V=N_0^2(1+R)-8N_0\eta(R-1)+16(\eta^2+\xi^2)(1+R)$。这些表达式恒满足（8）。脉冲中心位于$|q|\,|z_{n,\,m}|^2=1$，并沿晶格线 $(n+\frac{1}{2})\log|q|+m\log|p|=-\log|\gamma|$移动。对于 $\xi=0$和 $\eta<1/\sqrt{2}$，场在每条时间边上均满足 $|E|\le 4\eta\sqrt{1-\eta^2}$；仅当某条边位于中心处时取等号（适当的 γ）；以物理单位表示时，振幅趋于 $4\eta_{\mathrm{ph}}$。对于$\xi=0$ 和 $|N_0|<4\eta$，以物理单位表示的速度倒数为

$$
\frac{1}{v}=\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\frac{\operatorname{artanh}\!\left(-N_0/4\eta\right)}{\operatorname{artanh}\eta},
\tag{20}
$$

与 η 和 N_0 以晶格单位表示。取 $\eta=\Delta t\,\eta_{\mathrm{ph}}$ 和 $N_0=-\Delta t\Delta x$（基态）时，式（20）趋于 McCall–Hahn 值 $1/v=1/(4\eta_{\mathrm{ph}}^2)$。

该孤子是晶格谱问题的 Bargmann（无反射）势。当$n\to+\infty$、$z\to 0$和 $\Pi\to\mathrm{diag}(1,\,0)$；当 $n\to-\infty$、$z\to\infty$和 $\Pi\to\mathrm{diag}(0,\,1)$时。在 $n\to-\infty$、$\mathcal{D}\Psi^{(0)}$ $\mathrm{diag}(1,\,\tau^{-1})$ 处归一化的 Jost 解满足 $\tau=(\lambda-\lambda_1)/(\lambda-\bar{\lambda}_1)$，因此在 $n\to+\infty$ 处趋于 $\Psi^{(0)}\mathrm{diag}(\tau,\,\tau^{-1})$，而散射系数（散射矩阵第一列的元素）为

$$
a(\lambda)=\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\bar{\lambda}_1}, \qquad b(\lambda)\equiv 0 \quad (\lambda\in\mathbb{R}),
\tag{21}
$$

与连续问题中的 Zakharov–Shabat 孤子相同。

由 (19) 得，$C_{nm} = -2\eta\big[(1+|q|^2R_{n,m})^{-1} - (1+R_{n,m})^{-1}\big]$，因此 (13) 中的求和会望远镜式消去，晶格能量为 $W = 16\eta$（以物理单位表示为 $16\eta_{\rm ph}$，即 $\int |E|^2 dt$ 的连续介质极限值）。对于实孤子（$\xi = 0$，实数 $\gamma\ \eta < 1/\sqrt{2}$），离散面积 $2\sum_n \alpha_n$ 与 sin $\alpha_n = E_n/2$ 恰好等于 $-2\pi\,\mathrm{sgn}\,\gamma$。在连续极限下（当 $\xi = 0$ 时），$z \to \gamma\,\mathrm{exp}(-2\eta_{\rm ph}t + x/2\eta_{\rm ph})$，且除去一个常数相位因子后，$E \to 4\eta_{\rm ph}\,\mathrm{sech}(2\eta_{\rm ph}t - x/2\eta_{\rm ph} + \mathrm{const})$，即自感透明孤子；晶格解以二阶精度收敛于该解。

C. 呼吸子

采用 $\lambda_{1,2} = \pm\xi + \mathrm{i}\eta$ 的二重 dressing（附录 C）可得到一个束缚对。将 $z_1 = e^{-X+\mathrm{i}\Phi}$ 写成

$$X_{n,m} = X_0 + n\nu_t + m\nu_x, \quad \Phi_{n,m} = \Phi_0 + n\omega_t + m\omega_x, \qquad q = e^{-\nu_t+\mathrm{i}\omega_t}, \quad p = e^{-\nu_x+\mathrm{i}\omega_x}, \tag{22}$$

其中 q, p 为 由 16 式在 λ_1给出。于是，场和介质具有显式形式

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= 2\mathrm{i}\sin\frac{\theta_{n+1,m}-\theta_{n,m}}{2}, & 1+C_{n,m} &= \cos\frac{\theta_{n+1,m}-\theta_{n,m}}{2}, \\ N_{n,m} &= N_0\cos\Theta_{n,m}, & \rho_{n,m} &= \mathrm{i}N_0\sin\Theta_{n,m}, \end{aligned} \tag{23}$$

with

$$\theta_{n,m} = 4\arctan\frac{\xi\cosh X_{n,m}}{\eta\cos\Phi_{n,m}}, \qquad \Theta_{n,m} = \tfrac{1}{2}\big(\theta_{n,m+1} + \theta_{n,m}\big).$$

除去常数因子 i（固定的载波相位）外，场和极化均为实数。变量 θ 是第 IIID 节离散正弦-戈登方程的角度：除去因子 i 后，时间边上的场角为 $\alpha_n = (\theta_{n+1} - \theta_n)/2$，而当 $N_0 = -r$ 时，空间边上的布洛赫角为 $\Theta + \pi$。因此，23 式的实数情形就是 Hirota–Orfanidis 晶格的呼吸子 [27, 28]；新的要素在于将其解读为双能级介质中的光脉冲，并给出介质状态 N, ρ。

两个分量具有相同的 $|q|$ 和 $|p|$，因此包络 cosh X 以单一速度沿晶格线 X =const 运动，而相位 Φ 产生内部振荡（呼吸）。脉冲的离散面积 $2\sum_n \alpha_n$ 为零（即 0π 脉冲）。其晶格能量为 $W = 16(\eta_1 + \eta_2) = 32\eta$；更一般地，$W = 16\sum_j \eta_j$ 对于每个多孤子解都成立，因为 $C_n = -\mathrm{i}[(\mathcal{D}_1)_{11}(n+1) - (\mathcal{D}_1)_{11}(n)]$, 其中 $\mathcal{D} = I + \mathcal{D}_1/\lambda + \ldots$，且 $(\mathcal{D}_1)_{11}$ 在 $n \to \pm\infty$时趋于 $-2\mathrm{i}\sum_j \eta_j$和 0。在连续极限下，$X = 2\eta_{\rm ph}t + \ldots$和 $\Phi = 2\xi_{\rm ph}t + \ldots$，而（23）变为 $E = \mathrm{i}\,\partial_t\theta$，其中 $\theta = 4\,\mathrm{arctan}[\xi\,\mathrm{cosh}\,X/(\eta\,\mathrm{cos}\ \Phi)]$, 这就是 Lamb 的 0π

自感应透明呼吸子：除一个加性常数和一个平移量外 Φ， θ 是角度 $\sigma = 4\tan^{-1}[(\alpha/\beta)\sin q/\cosh p]$，见参考文献 [4] 其中 $\alpha = \eta$， $\beta = \xi$， $p = X$以及 $q = \Phi - \pi/2$ ($\theta = \sigma + 2\pi$ 当 $|\Phi| < \pi/2$）。晶格呼吸子以二阶精度收敛于该解。

多孤子解可通过迭代达布变换得到。对于两个任意点（复场），$E_{n,\ m} = 2\mathrm{i}(\Xi_{n+1,\ m} + \Xi_{n,\ m})$，其中 $\Xi = \sum_{jk}(M^{-1})_{kj}\bar{z}_j$和 $M_{jk} = (1 + \bar{z}_j z_k)/(\lambda_k - \bar{\lambda}_j)$（附录 C）；对于呼吸子， Ξ 为实数，而在连续极限下， $4\Xi/\Delta t \to \partial_t\theta$。

V. 数值性能

现在我们将晶格用作数值格式：将其精度与计算成本同标准格式进行比较，描述非孤子脉冲留下的尾部，并校准孤子的输入。

A. 格式与测试问题

我们将可积晶格与两种同样能精确保守布洛赫矢量长度的标准格式进行比较。三者使用相同的交错网格（$h = \Delta t = \Delta x$）和相同的麦克斯韦步（8a）；它们的区别仅在于时间边上跨越一步的布洛赫步，该步由场 $\bar{E} = \frac{1}{2}(E_{n,m} + E_{n,m+1})$ 驱动：(I) 可积步（11），将输入映射为$E_{\mathrm{lat}} = hE(t_{n+1/2})$；(C) 凯莱步 $\hat{\rho} \to Q\hat{\rho}Q^{-1}$, $Q = (I - \frac{h}{2}A)^{-1}(I + \frac{h}{2}A)$, $A = -\frac{1}{2}\bar{u},$其中 $\bar{u}$ 是将 E 替换为 E后的 u ，即将隐式中点（凯莱）法则 [11] 应用于其投影算子给出 $\hat{\rho}$的旋量；以及 (S) 指数中点步 $Q = e^{hA}$，它对布洛赫矢量 [2], 进行精确旋转，也是参考文献 [14]中分裂格式的基本构件。方案 C 和 S 对 $E_{n,m+1}$ 是隐式的，并通过在 $E_{n,m+1}$上进行不动点迭代求解：从下文的预测步开始，当 $E_{n,m+1}$ 的变化绝对值小于 10^{-15} 时停止（最多扫描 60 次）；方案 I 则是显式的。所有格式均以相同的编译型语言编写，并在台式机处理器的一个核心上计时。我们还采用 C 和 S 的最低成本变体，分别记作 C_1 和 S_1, ，它们只执行一次扫描：预测步 $E_{n,m+1} = E_{n,m} + \rho_{n,m}$，由 E驱动的一次布洛赫步，以及校正步（8a）。它们同样能精确旋转布洛赫矢量。测试问题包括精确的 2π 孤子 $E = 4\eta\,\mathrm{sech}[2\eta(t - x/4\eta^2)]$，其中 $\eta = 0.5$，将其传播至 $x = 10$；以及

为考察长距离行为，将其传播至 $x = 200$；另一个测试是非孤子输入 $E(0, t) = 1.5 \operatorname{sech} t$，其参考解通过对方案 I 在 $h = 0.0125$ 和 0.*00625*处的结果进行理查森外推得到（在较细的步长下，该解与方案 C 的结果相差不超过 10^{-6}）。所有计算均使用时间窗口 $t \in [-15, 25)$ ($[-15, 230)$，持续时间为 $x = 200$）；孤子位置取 $|E|$最大三个采样值所拟合抛物线的顶点；对于一般输入，则通过线性插值，在网格 $t = -14 + 0.05k$ 上比较各场。

B. 精度和成本

表 I 总结了结果。所有方案均以二阶收敛。对于一般输入，I、C 和 S 的误差在 1.1% 以内一致（2.2×10^{-4} 在 $h = 0.025$）。对于孤子，在相同 h下，方案 I 的精度比 C 和 S 低 3.7–5.2 倍。原因并非振幅：在 $x = 200$ 之后， $h = 0.1$ 处 I 的相对峰值误差为 4.3×10^{-4}，而 C 和 S 分别为 1.0×10^{-3}和 5.7×10^{-4} 。误差来自速度：孤子的位置误差在 I 中为 -0.67 ，而在 C 和 S 中分别为 $+0.17$ 和 -0.11 。排序取决于孤子：在 $h = 0.05$ 和 $\eta = 0.25$ 处，方案 I 比 C 和 S 更精确（5.7×10^{-3} ，而 C 和 S 为 8.4×10^{-3} 和 7.5×10^{-3}）；而在 $\eta = 1$ 处，其精度低 3–9 倍。按节点计算，方案 I 的成本最低：它只需要一次 2×2 相似变换，而 C 和 S 需要迭代。迭代至 10^{-15} （每个节点 3.5–5 次迭代）时，在实现相同的情况下，它们比 I 慢 5–8 倍（ $h = 0.025$时对 6.4×10^5 个节点的耗时分别为 0.013 秒、0.073 秒和 0.067 秒；在 $h = 0.1$ 相对于 $x = 200$时，因子为 7–8）。如果在10^{-8} 时停止迭代，或进行三次扫描，它们的误差不会改变；此时因子为 2.5–5。一次扫描已足以达到二阶：C_1 和 S_1 每个节点的成本是 I 的 1.6–1.7 倍，但精度更高；对于孤子，C_1和 S_1的精度分别约高 2 倍和 9 倍，而对于一般输入，在相同 h下精度高 2.5 倍。在相同精度下，S_1 因此是所比较方案中成本最低的：对于孤子，其耗时不到 I 的五分之一；对于一般输入，C_1 和 S_1 的耗时均约为其三分之二。因此，可积晶格在单位精度成本方面并无优势。它的优势属于另一类：该步是显式的，无需停止规则；布洛赫长度和能量平衡严格成立；第 IV 节中的孤子和呼吸子是该方案的精确解。I 的速度误差将在第 V C 节中消除。

第 IV 节中的精确孤子 传播时不会释放辐射：经过 200 步后，时间窗口边缘处的场仍低于 10^{-100}，且 $W = 16\eta$ 保持到 10^{-13}。

表 I. 在 $x = 10$ 处的最大误差（对于孤子为 $|E|$，对于一般输入的复场为 E），适用于迭代至 10^{-15} 的可积 (I)、Cayley (C) 和指数中点 (S) 格式，以及它们的单次扫描变体 C_1 和 S_1，$h = \Delta t = \Delta x$；在 $h = 0.025$ 处处理 6.4×10^5 个节点所需的时间（C_1, S_1 根据测得的相对于 I 的成本比计算；一般输入的情况未测量）。数值越低越好；I 是本文所用的格式。

	$h = 0.2$	0.1	0.05	0.025	阶数	时间（秒）
孤子，I	1.35×10^{-1}	3.35×10^{-2}	8.34×10^{-3}	2.09×10^{-3}	2.00	0.013
孤子，C	3.51×10^{-2}	8.97×10^{-3}	2.25×10^{-3}	5.64×10^{-4}	2.00	0.073
孤子，S	2.58×10^{-2}	6.43×10^{-3}	1.61×10^{-3}	4.01×10^{-4}	2.00	0.067
孤子，C_1	6.87×10^{-2}	1.75×10^{-2}	4.41×10^{-3}	1.10×10^{-3}	2.00	0.022
孤子，S_1	1.48×10^{-2}	3.74×10^{-3}	9.38×10^{-4}	2.35×10^{-4}	2.00	0.021
通用型，I	1.40×10^{-2}	3.47×10^{-3}	8.66×10^{-4}	2.17×10^{-4}	2.00	—
通用型，C	1.41×10^{-2}	3.50×10^{-3}	8.72×10^{-4}	2.18×10^{-4}	2.00	—
通用型，S	1.41×10^{-2}	3.49×10^{-3}	8.70×10^{-4}	2.17×10^{-4}	2.00	—
通用型，C_1	5.63×10^{-3}	1.41×10^{-3}	3.50×10^{-4}	8.75×10^{-5}	2.00	—
通用型，S_1	5.59×10^{-3}	1.39×10^{-3}	3.47×10^{-4}	8.66×10^{-5}	2.00	—

该方案本身经过 200 步后，能够以 9×10^{-14} 的精度重现闭式孤子 (19)，并以 1.4×10^{-14} 的精度重现呼吸子 (23)。非纯孤子脉冲会发生重塑，并在其后留下缓慢衰减、非单调振荡的极化（图2）。对于 $E(0,t)$ =2 双曲正割$(t/0.8)$ $e^{0.3it}$, $|t| \le 20$，在 $h = 0.1$ 和 $x = 4$ 时，介质偏离基态的程度 $\lceil\hat{\rho} - \hat{\rho}_-|/r \equiv [|\rho|^2 + (N - N_-)^2]^{1/2}/r$，在输入结束时以及之后 100 和 400 个时间单位时分别为 0.20、0.11 和 0.06；介质只有到 $t \approx 2.6 \times 10^3$ 才以 10^{-12} 的精度回到基态，其机制见第VII C节。这种延迟回归是晶格效应，其时间尺度为 $1/\Delta x$：在 $h = 0.05$ 时，偏离量的包络与 $h = 0.1$ 时的包络在截至 $t \approx 10^3$ 的范围内相差约 15%，但在窗口 $t = 4 \times 10^3$ 结束时，介质仍未回到基态。

能量平衡（13）在舍入误差范围内成立（3×10^{-17} 在一次测试运行中）。

将 (8) 在 $E = \rho = 0$、$N = N_0$ 且 E、$\rho \propto \mu^n \nu^m$ 附近线性化，得到

$$(\nu - 1)(\mu - 1) = \tfrac{N_0}{4}(\nu + 1)(\mu + 1). \tag{24}$$

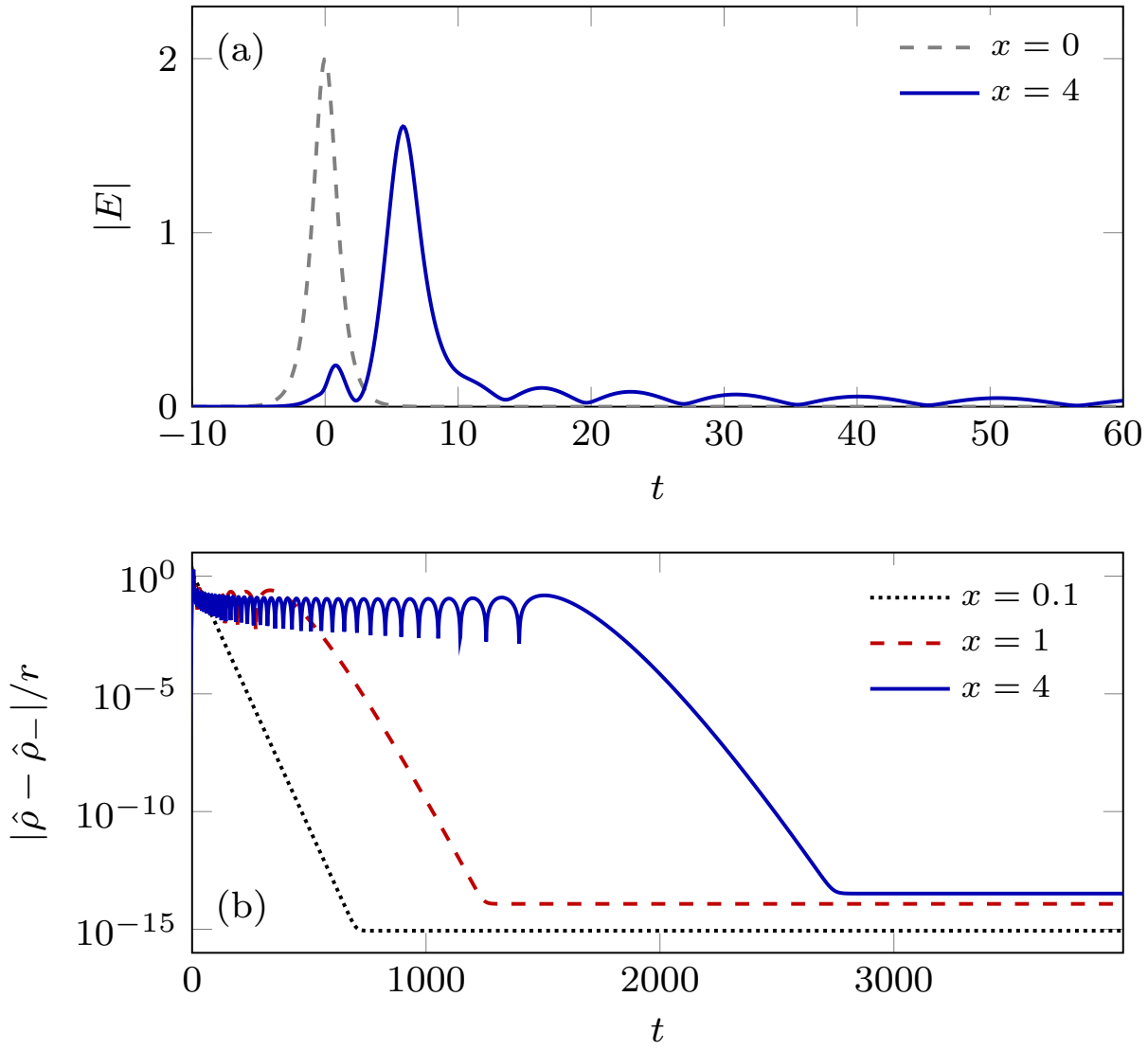


图2. 非孤子输入 $E(0,\ t) = 2$双曲正割$(t/0.8)\ e^{0.3it}$，$h = 0.1$。（a）$|E|$ 在 $x = 0$ 和 $x = 4$: 脉冲发生重塑，并留下振铃尾部。（b）脉冲后方介质偏离基态的情况，时间为 $x = 0.1$、1 和 4。第一行中，它以每单位时间 $\Delta x/2$ 的速率衰减（第VIIC节）；后续各行中，振铃持续时间更长，而且在所示时间范围内，恢复得更慢。平台是舍入误差。

对于时间傅里叶模，$|\mu| = 1$，这对 $|\nu| = 1$ 的正负两种情况都给出 N_0：小信号既不放大也不衰减地传播；无论是在吸收介质还是反转介质中，情况都与连续信号传输问题相同，其中 $E_{xt} = N_0 E$ 对于实频率，给出纯振荡的x依赖关系。在凯莱变量 $\nu = (1 + \mathrm{i}\Delta x\, k/2)/(1 - \mathrm{i}\Delta x\, k/2)$ 和 $\mu = (1 - \mathrm{i}\Delta t\, \omega/2)/(1 + \mathrm{i}\Delta t\, \omega/2)$ 中，方程 (24恰好变为连续情形下的关系

$k\omega = N_0$。

C. 校准输入

方案 I 的速度误差有两个来源。首先，采样 $E_{\mathrm{lat}} = hE(t_{n+1/2})$ 并不能将入射孤子准确地置于晶格孤子上。自然输入映射保留了脉冲面积，

$$E_{\mathrm{lat},n} = 2\sin\frac{|A_n|}{2}\, e^{\mathrm{i}\arg A_n}, \qquad A_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} E\, dt, \tag{25}$$

输出场读回为 $2\arcsin(|E_{\mathrm{lat}}|/2)\; e^{\mathrm{i}\arg E_{\mathrm{lat}}}/h$。对于实场，(25) 精确采样了第 IV 节 C 中的正弦-戈登角 $\theta(t_n)$，因此离散面积等于连续面积，并且 $|E_{\mathrm{lat}}| \le 2$，从而归一化 (10) 始终有定义。对于孤子，(25) 精确给出具有 $\eta_{\mathrm{lat}} = \tanh(\eta h)$ 的晶格孤子，因为 $|q| = e^{-2\eta h}$。其次，根据 (20)，该孤子的速度具有相对误差 $\frac{1}{3}[(\eta h)^2 + (\Delta x/4\eta)^2] + O(h^4)$。仅输入映射 (25) 就将误差减半（图 3）；在 $x = 200$ at$h = 0.1$ 之后剩余的位置误差为 0.33403，与根据 (20) 预测的 0.33397 一致。介质仅通过 r in p 产生影响，因此选择

$$r = 4\tanh(\eta_* h)\tanh(\Delta x/4\eta_*), \tag{26}$$

这等于 $h\Delta x + O(h^3)$，使 x 因子 $|p|$ 对 $\eta = \eta_*$ 精确。于是，晶格在任意 h 都能以 η_* 精确再现连续孤子：剩余误差 10^{-6} 来自时间窗口的截断（将窗口从 $[-15, 25$ 扩大到 $[-30, 40$ 可使误差降至 10^{-12} 以下），而经过 $x = 200$ 后的位置误差为 2×10^{-8}。单个介质常数不可能对所有 η 都精确，因此其他孤子仍会有 $O(h^2)$ 误差，但误差很小：对于 $\eta = 0.4$ 和 0.6，在 $\eta_* = 0.5$ 条件下，$h = 0.05$ 处的误差分别为 4.2×10^{-4} 和 2.8×10^{-4}，比对相同孤子迭代至收敛的 C（3.3×10^{-3} 和 2.0×10^{-3}）及 S（1.1×10^{-3} 和 3.7×10^{-3}）小 2.6 至 13 倍。对于一般脉冲，映射 (25) 本身只会使误差改变几个百分点（在 $h = 0.025$ 时为 2.11×10^{-4}，而非 2.17×10^{-4}），但针对孤子调优的标定会使误差增大 1.7 倍（3.58×10^{-4}）；因此，只有当关注的脉冲接近所选孤子时，标定才有用。该方法已针对实孤子进行了测试（$\xi = 0$）。

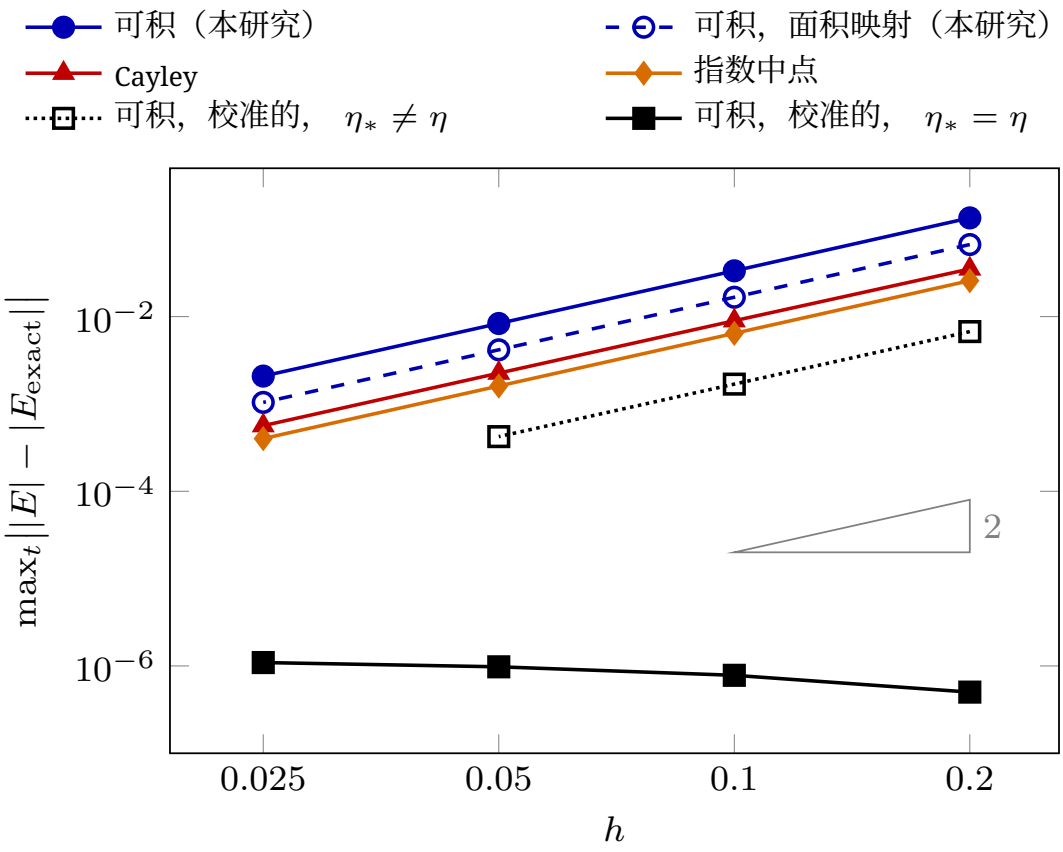


图 3. $|E|$在 $x = 10$处的 2π 孤子 $\eta = 0.5$的最大误差与步长 $h = \Delta t = \Delta x$的关系：采用点采样和输入映射（25）的可积格式、Cayley 格式和指数中点格式，以及采用映射（25）和标定（26）的可积格式，适用于 $\eta_* = \eta$，以及在 $\eta = 0.4$ 处具有 $\eta_* = 0.5$的孤子。使用输入映射时，通过其逆映射读回输出，并将其与精确场的单元平均值进行比较。三角形标记斜率 2；校准方案在 10^{-6} 附近的误差下限由时间窗口（第VC节）决定。

VI. 非均匀展宽

对于非均匀展宽的谱线，连续拉克斯对的直接晶格类比会失效；单类步进的有序乘积则能保持可积性。

A. 模型与加性晶格的失效

在非均匀展宽介质中，原子的失谐量具有分布 $g(\epsilon)$，$\int g(\epsilon)\, d\epsilon = 1$。每个失谐类都有自己的密度矩阵 $\hat{\rho}(x,\ t,\ \epsilon)$，而场由

它们的平均值 [2, 6]驱动。

$$E_x = \int g(\epsilon)\,\rho(\epsilon)\,d\epsilon, \qquad \rho_t + 2\mathrm{i}\epsilon\rho = NE, \qquad N_t = -\tfrac{1}{2}\big(E^*\rho + E\rho^*\big), \tag{27}$$

对于 $N^2 + |\rho|^2 = 1$ 对每个 ϵ。第II 节的尖锐线对应于 $g = \delta(\epsilon - \lambda_0)$；一个典型例子是洛伦兹线型 $g = (\gamma/\pi)/[(\epsilon - \epsilon_0)^2 + \gamma^2]$。方程(27)保留了具有相同 U 和

$$V = -\frac{1}{4\mathrm{i}} \int \frac{g(\epsilon)\,\hat{\rho}(\epsilon)}{\lambda - \epsilon}\,d\epsilon, \tag{28}$$

因此，每个失谐类都会在 $\lambda = \epsilon$ [6]处贡献一个简单极点。对于连续的 g，这些极点会合并成沿实轴的一条割线；在连续逆散射理论中，这需要采用极限处方（$\epsilon - \lambda \pm \mathrm{i}0$） [6, 8]。在晶格上，割线由单极点因子的乘积取代，每个失谐类对应一个因子。

(28)的直接晶格类比将所有类别置于同一条空间边上，$\mathrm{V}_{n,m} = I - \sum_j w_j \hat{\rho}_{j;n,m}/[4\mathrm{i}(\lambda - \epsilon_j)]$, 其中 ϵ_j 和 w_j 是 g求积的节点和权重。这并不能产生可积晶格。(6)在 $\lambda = \epsilon_j$ 处的留数确定了$\hat{\rho}_j'' = \mathrm{U}_{n,m+1}(\epsilon_j)\,\hat{\rho}_j\,\mathrm{U}_{n,m}(\epsilon_j)^{-1}$。由于对于实数 ϵ，$\mathrm{U}(\epsilon)/\sqrt{1+\epsilon^2}$ 是幺正的，只有当$\mathrm{U}_{n,m+1}(\epsilon_j)\hat{\rho}_j\mathrm{U}_{n,m}^{\dagger}(\epsilon_j) = \mathrm{U}_{n,m}(\epsilon_j)\hat{\rho}_j\mathrm{U}_{n,m+1}^{\dagger}(\epsilon_j)$时，$\hat{\rho}_j''$才是厄米的。对于单个类别，这一条件确定了$E_{n,m+1}$，并回到(8)；对于共享同一场的两个或更多类别，一般无法满足该条件。对于两个类别，方程(6)仍有解，但$\hat{\rho}_j''$会出现非厄米部分，其迹的量级为耦合 $r_j \propto \Delta x$（1.6×10^{-4}至 3.6×10^{-3}，对应 $r_j = 0.006$和0.004，两个类别分别位于 $\epsilon_j = 0.13$ 和 -0.27，随机数据）：加性晶格仅在 Δx的首阶近似下自洽。

B. 有序子层

因此，我们让一个单元中的原子按失谐类依次作用于场 [图1(b)]。一个空间步长分为 J 个子层 $s = (m, j)$，这些子层承载类别 ϵ_j，其布洛赫半径为$r_j = w_j \Delta t \Delta x$（以晶格单位计，$\epsilon_j \to \Delta t\,\epsilon_j$），且单元的 x阶步长对应的有序乘积

$$\mathbf{V}_m(\lambda) = \mathbf{V}_{m,J}(\lambda)\cdots\mathbf{V}_{m,1}(\lambda), \qquad \mathbf{V}_{m,j}(\lambda) = I - \frac{\hat{\rho}_{m,j}}{4\mathrm{i}(\lambda - \epsilon_j)}, \tag{29}$$

使场先通过类别 $j = 1$。该乘积与（28）的晶格模拟一致，直到 $O(\Delta x^2)$。对于洛伦兹线型，我们在均匀的 $\epsilon_j = \gamma\tan\vartheta_j$ 上使用节点

中点网格，位于 $\vartheta \in (-\pi/2,\ \pi/2)$ 中，并采用相等权重 $w_j = 1/J$。每个因子都是一个单极点步，其中（6）具有唯一的显式解（一个撇号表示更新后的时间边，两个撇号表示更新后的空间边）

$$E' = E + \tfrac{1}{2}(\rho + \rho''), \quad C' = C - \tfrac{1}{4}(N - N''), \quad \hat{\rho}'' = G_\epsilon \hat{\rho}\, G_\epsilon^{-1}, \quad G_\epsilon = (1+C)I - \mathrm{i}\epsilon\sigma_3 - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}\sigma_3\hat{\rho}. \tag{30}$$

由于 $(\lambda - \epsilon_j)\,\mathbf{V}^j = (\lambda - \epsilon_j)\,I + \mathrm{i}\,4\hat{}\rho_j$ 是带有平移谱参数的海森堡 Lax 算子，因此，展宽晶格是 Tsuchida 系统的非自治形式 [30], ，其参数可以依赖于晶格坐标；此处 $a_{\mathrm{T},\ s} = -\epsilon_j + \mathrm{i}r_j/4$。因此，每个原子都保持其布洛赫矢量的长度，$\kappa$保持守恒，并且将 C方程对各子层求和可得能量平衡 $W' - W = -2\sum_j (N_{j,\ \mathrm{end}} - N_{j,\ \mathrm{start}})$，这是（13）的展宽对应形式。

第 IVA 节的达布变换保持不变。在展宽背景（$E = C = 0$中，其基态下的每个类别 $N_j = -r_j$）上，自由波函数为

$$\Psi^{(0)}_{n,s} = \mathrm{diag}\Big((1-\mathrm{i}\lambda)^n \prod_{s'<s} c_{s'},\ (1+\mathrm{i}\lambda)^n \prod_{s'<s} d_{s'}\Big), \qquad c_s, d_s = 1 \mp \frac{N_s}{4\mathrm{i}(\lambda - \epsilon_s)},$$

一个达布因子（17）给出了展宽晶格的一个孤子。该解在每个节点处满足子层步（30）至 3×10^{-15}，并满足归一化（10），且每个布洛赫长度均得以保持。从 $x = 0$ （具有 $\epsilon_0 = 0$、$\gamma = 0.5$、$\lambda_1 = 0.4\mathrm{i}$ 的洛伦兹线型 $h = 0.1$）处的孤子出发，将该方案推进经过 8 个子层组成的 30 个单元，可将精确解复现至 2×10^{-14}；在每个子层上，能量平衡均成立至 4×10^{-15}，并且¯孤子仍然是无反射的，$a = (\lambda - \lambda_1)\,/\,(\lambda - \lambda_1)$，且在实轴上 $b = 0$，其精度由时间窗口决定。

式（29）中的排序是一种约定；当介质以非相干态开始时，它不会影响场。我们将啁啾脉冲 $E(0,t) = 2.2$ 双曲正割$(t/0.8)\, e^{0.4\mathrm{i}t}$依次以自然顺序、逆序和随机顺序通过由六个洛伦兹线型子层构成的单元，并选择耦合，使得每个单元令场变化 0.1：输出场的差异为4×10^{-15}，通过十个单元后也是如此。若原子制备为具有相干性的状态（$\rho \neq 0$），逆转顺序会使输出改变 3×10^{-2}。在这项测试中，单个原子的末态确实取决于顺序，差异为 (1–2) $\times\, 10^{-2}$，因为在一个单元内，每个原子所见的场都略有不同；只有离开单元的场与顺序无关。这就是单极点步的 Bianchi 可置换性（杨–巴克斯特性质） [31, 41], ，可以直接证明。令

$\sim X_n = \mathrm{V}_{n,J}\cdots\mathrm{V}_{n,1}$ 表示时间边 n 上按一种顺序排列的单元矩阵，$\tilde{X}_n$ 表示另一种顺序，输入相同，均为 U_n，输出分别为 U'_n、$\tilde{\mathrm{U}}_n$。子层步的相容性给出 $\mathrm{U}'_n X_n = X_{n+1}\mathrm{U}_n$ 以及 $\tilde{\mathrm{U}}'_n \tilde{X}_n = \tilde{X}_{n+1}\mathrm{U}_n$。若 $X_n = \tilde{X}_n$，则 $\tilde{X}_{n+1}X_{n+1}^{-1} = \tilde{\mathrm{U}}'_n \mathrm{U}'^{-1}_n$。左边只有极点 ϵ_j 和 $\epsilon_j \pm \mathrm{i}r_j/4$，右边只有 $\det \mathrm{U}'_n$的零点$\lambda = \pm\mathrm{i}$；对于实数 ϵ_j 和 $r_j < 4$，这两组集合不相交，因此两边都是关于 λ的多项式$\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$，且当 $\lambda \to \infty$时趋于 I，故两边都等于 I。因此 $\mathrm{U}'_n = \mathrm{U}'_n$ 且 $X_{n+1} = X_{n+1}$；通过归纳法可知，只要初始时有序乘积相同，在每条时间边上的输出场就相同。对于对角（非相干）初始态 $\hat{\rho}_j$，因子可交换，因此任意顺序均满足这一性质，无论处于基态、反转态还是混合态；对于四个子层、所有 24 种顺序和三个单元，在这些情形中输出场的差异都为 3×10^{-16}。原子态本身会重新因子分解，因而可能不同。因此，该晶格能在每个单元中实现一条连续谱线，而场不会产生排序歧义。

C. 洛伦兹线型

对于具有 $\epsilon_0 = 0$ 的洛伦兹线型，具有 $\lambda_1 = \mathrm{i}\eta$ 的孤子以 McCall–Hahn 速度 $1/v = \int g(\epsilon)\, d\epsilon/[4(\eta^2+\epsilon^2)]$ [1],运动；对于洛伦兹线型，该速度等于 $1/[4\eta(\eta+\gamma)]$。在晶格上，速度由 $|q|$ 和 $\prod_j |p_j|$得出。对于第VI.B节中的节点，$\lambda_1 = 0.4\,\mathrm{i}$ 和 $\gamma = 0.5$，它以二阶收敛至连续介质极限值：相对误差分别为5.3×10^{-4}、1.3×10^{-4}、3.3×10^{-5} 和 8.3×10^{-6}，对应于 $h = 0.1$、0.05、0.025 和 0.0125（其中$J = 8$、8、256 和 1024）；而在最大的两个步长下，$J = 64$ 的误差与 $J = 8$ 相同。

对于这种线型，人们或许希望能够避免使用子层：在线性区，洛伦兹系综的作用等同于一个具有复失谐的单个原子，$\langle\rho\rangle = \rho(\epsilon_0 - \mathrm{i}\gamma)$，这意味着每个节点只有一个复极点。在非线性区，即使对于连续布洛赫方程，这种闭合关系也会失效。对于具有 $\epsilon_0 = 0.2$，$\gamma = 0.5$ 且给定场为 $E = A$双曲正割 t, $|t| \le 12$ 的洛伦兹线型，在 $A = 0.02$ 处相对误差为 2×10^{-3}；面积为 π时误差为 5。4，面积为 2π时误差为 10。这是因为 ρ^* 在解析延拓至下半平面后会增长，因此 $\rho(\epsilon)$ 在那里无界。因此，即使对于洛伦兹线型，也需要使用有序子层。

VII. 散射数据的演化

我们通过散射数据来描述介质的状态，推导它们在有限时间窗口上的闭合演化，并在线性定律于无限直线上成立。

A. 单值矩阵与介质状态

我们考虑时间窗口 $0 \le n < n_{\max}$ 上的一行 m，脉冲到来前介质处于基态，$\hat{\rho}_{0,m} = \mathrm{diag}(-r,\ r)$，并定义单值矩阵和归一化散射矩阵

$$T(\lambda, m) = \mathbf{U}_{n_{\max}-1,m}(\lambda)\cdots\mathbf{U}_{0,m}(\lambda), \qquad S(\lambda, m) = \mathbf{U}_{\infty}(\lambda)^{-n_{\max}}\, T(\lambda, m) = \begin{pmatrix} a & \cdot \\ b & \cdot \end{pmatrix}, \tag{31}$$

其中 $\mathbf{U}_{\infty} = I - \mathrm{i}\lambda\sigma_3$ 是式 (15) 中与自由 x 无关的因子。对于支撑在该窗口内的场，左端的解等于 $\mathbf{U}_{\infty}^{n}$，右端的解等于 $\mathbf{U}_{\infty}^{n} S$；因此，$S$ 仅通过 n 中的自由演化进行归一化，而不通过式 (15) 中依赖于 x 的因子进行归一化。其矩阵元 a 和 b 是第 IV 节 B 部分中的散射系数；对于孤子，随着窗口增大，它们趋近于式 (21)。我们称 a 为透射系数，称 $R = b/a$ 为反射系数。数值计算中，S 通过归一化因子 $\mathbf{U}_{\infty}^{-1}\mathbf{U}_{n,m}$ 的乘积逐步累积，从而避免在较长时间窗口上发生溢出。相容条件 (6) 可望远镜式化为

$$T(\lambda, m+1) = \mathbf{V}_{n_{\max},m}(\lambda)\, T(\lambda, m)\, \mathbf{V}_{0,m}(\lambda)^{-1}, \tag{32}$$

因此，只要窗口后的介质恢复到初始状态，$\mathrm{tr}\, T$ 的系数就会守恒。

介质的状态本身是散射数据的函数。在 $\lambda_* = \mathrm{i}r/4$ 处，$\det \mathbf{V}$ 的一个零点，矩阵 $\mathbf{V}_{n,m}(\lambda_*) = I + \hat{\rho}_{n,m}/r$ 的秩为一，其核是 $\hat{\rho}_{n,m}$ 的特征向量，对应特征值 $-r$。若 $\mathbf{V}_{n,m}(\lambda_*)\, v = 0$，则由 (6) 得到 $\mathbf{V}_{n+1,m}(\lambda_*)\,\mathbf{U}_{n,m}(\lambda_*)v = \mathbf{U}_{n,m+1}(\lambda_*)\mathbf{V}_{n,m}(\lambda_*)v = 0$，且 $\mathbf{U}_{n,m}(\lambda_*)v \neq 0$，因为对 $r < 4$，$\det \mathbf{U}(\lambda_*) = 1 - r^2/16 \neq 0$。因此，核沿着 n 由 $\mathbf{U}(\lambda_*)$ 输运。从 $n = 0$ 处的 $e_1 = (1, 0)^T$ 出发，n 处的特征向量为 $w = T_n(\lambda_*, m)e_1$，其中 T_n 是前 n 个因子的乘积；由于 $\hat{\rho}$ 是无迹厄米矩阵，其特征值为 $\pm r$，

$$\hat{\rho}_{n,m} = r\Big(I - \frac{2ww^{\dagger}}{w^{\dagger}w}\Big), \qquad w = T_n(\lambda_*, m)\, e_1. \tag{33}$$

在连续极限下， $\lambda_* \to 0$ 且 $T_n(0)$ 变为幺正矩阵，因此 (33) 转化为 $\hat{\rho} = T\hat{\rho}_0 T^{-1}$，即关系式 $\hat{\rho} = \Psi_0 \hat{\rho}_0 \Psi_0^{-1}$ 的锐线形式，见参考文献 [6]。在脉冲结束时，它变为该文中的关系式 $\hat{\rho}^+ = S\hat{\rho}^- S^{-1}$，并再现了该文对介质最终态的表达式。晶格在上半平面的点λ_* 处计算这一关系，而在连续问题中，则是在实轴上的谱线中心处计算。

B. 有限窗口上的闭合演化

将 $n = n_{\max}$ 代入（33），可通过ρ_+ 表示窗口后方的介质状态$S(\lambda_*, m)$，于是（32）成为一个闭合映射

$$S(\lambda, m+1) = \mathbf{U}_\infty^{-n_{\max}} \mathbf{V}_+ \, \mathbf{U}_\infty^{n_{\max}} \, S(\lambda, m) \, \mathbf{V}_-^{-1}, \qquad \mathbf{V}_\pm = I - \frac{\hat{\rho}_\pm}{4\mathrm{i}\lambda}, \tag{34}$$

其中 $\hat{\rho}_- =$为 $\mathrm{diag}(-r,\ r)$，而 $\hat{\rho}_+$ 由（33）给出，其中 $w = \mathbf{U}_\infty(\lambda_*)^{n_{\max}} S(\lambda_*, m) e_1$。这一步在 S 处以及单点 λ 处都需要 λ_*。对于反射系数，这是一个莫比乌斯映射，

$$R' = \frac{\left(1 + \frac{N_+}{4\mathrm{i}\lambda}\right) R - \frac{\bar{\rho}_+}{4\mathrm{i}\lambda} Q^{-n_{\max}}}{1 - \frac{N_+}{4\mathrm{i}\lambda} - \frac{\rho_+}{4\mathrm{i}\lambda} Q^{n_{\max}} R}, \qquad Q(\lambda) = \frac{1 + \mathrm{i}\lambda}{1 - \mathrm{i}\lambda}, \tag{35}$$

其中 $R' = R(\lambda,\ m+1)$、$R = R(\lambda,\ m)$，而介质最终态为

$$N_+ = r\,\frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1}, \qquad \rho_+ = -\frac{2r\bar{\zeta}}{1 + |\zeta|^2}, \qquad \zeta = Q(\lambda_*)^{n_{\max}} R(\lambda_*, m), \quad Q(\lambda_*) = \frac{1 - r/4}{1 + r/4}. \tag{36}$$

关于 r 的一阶近似下，方程（35）是离散黎卡提方程 $R' - R = \left(2N_+ R - \bar{\rho}_+ Q^{-n_{\max}} + \rho_+ Q^{n_{\max}} R^2\right)/(4\mathrm{i}\lambda)$。结合（36），它就是文献 [6] 中方程（1.28）–（1.29）的格点对应形式，其闭合形式由该文献关于介质最终态的表达式（1.39）–（1.40）给出。

对于非均匀展宽，映射按式（29）的顺序逐个子层应用：在经过类别 ϵ_j 的步骤中，在 $\mathbf{V}_\pm$ 中将 λ替换为 $\lambda - \epsilon_j$，并在式（35）的分母 $4\mathrm{i}\lambda$ 中，将 r 替换为 r_j，将 λ_* 替换为 $\lambda_{*,j} = \epsilon_j + \mathrm{i}r_j/4$；因子 $Q^{\pm n_{\max}}$ 保持自变量 λ不变，而式（36）中的 ζ 使用复因子 $Q(\lambda_{*,j})$（其中给出的实数值对应尖锐线）。我们用60位精度运算，在实数和复数 λ下，分别针对尖锐线和三个子层，将方程（33）–（36）与显式步骤进行了核对：残差小于 10^{-45}。

C. 无限直线：线性演化

设脉冲后方的场衰减。则 $\mathbf{U}_{n,m}(\lambda_*) \to \mathbf{U}_\infty(\lambda_*) = \mathrm{diag}(1+r/4,\, 1-r/4)$，并且在式（33）中，$w$ 的第二个分量相对于第一个分量每步按因子 $Q(\lambda_*)$衰减，条件是 $a(\lambda_*) \neq 0$。因此，脉冲后方的介质以每时间步 $\ln[(1+r/4)/(1-r/4)] \simeq r/2$ 的速率返回基态（式（36）中的 $\zeta \to 0$），即以物理单位表示时每单位时间 $\Delta x/2$。在第一行，测得的速率与 $r/2$一致，精确到四位数 [图2(b)]。在后续各行中，脉冲后方的场带有从前几行的极化继承而来的尾部，返回所需的窗口随m增大；我们认为这对应于一种形如 $P_m(n)\,Q(\lambda_*)^n$ 、带有多项式 P_m的衰减，但尚未推导出其形式。晶格上介质的这一返回过程，是第五节B中振荡极化的对应现象；后者会在有限窗口内持续存在。

由于 $n_{\max} \to \infty$，对于实数 λ 以及条带 $|Q(\lambda_*)| < |Q(\lambda)| < |Q(\lambda_*)|^{-1}$ 在实轴附近（宽度约为 $r/4$），映射（34）可化为 $S(m+1) = \mathbf{V}_- S(m) \mathbf{V}_-^{-1}$，且散射数据呈线性演化：

$$a(\lambda, m{+}1) = a(\lambda, m), \qquad R(\lambda, m{+}1) = \chi(\lambda)\, R(\lambda, m), \qquad \chi(\lambda) = \prod_j \frac{\lambda - \epsilon_j + \mathrm{i}r_j/4}{\lambda - \epsilon_j - \mathrm{i}r_j/4}, \tag{37}$$

对于尖锐线，乘积只有一个因子 $(\lambda + \mathrm{i}r/4)/(\lambda - \mathrm{i}r/4)$。相同的因子 $\chi(\lambda_1) = p$ 也出现在（16）中（其中还有 $q = Q(\lambda_1)$），因此对于纯孤子，定范常数遵循相同的规律演化。孤子特征值位于条带之外，但在我们的测试中，该规律对它们同样成立：对于下文的输入 1.5 双曲正割 t，其中包含一个孤子，特征值 $\lambda_1 = 0.0250\mathrm{i}$ 保持不变，而定范常数经过 40 步后变化了p^{40} ，相对精度为 10^{-12}。乘子 χ 是晶格上线性波的乘子：当 $\mu = Q(\lambda)$，即 $\lambda = -\Delta t\,\omega/2$时，色散关系（24）恰好给出$\nu = \chi(\lambda)$。因此，叠加 $F_{n,\,m} = \int R(\lambda, 0)\,\chi(\lambda)^m Q(\lambda)^n\, d\lambda$ 满足线性化晶格方程。这是参考文献 [6], 中命题 2 的离散类比；根据该命题，$c = b^*/a$ 的傅里叶变换满足线性化麦克斯韦–布洛赫方程。

在下面的检查中，输入起始于 $t = -15$；孤子特征值 λ_1 通过二分法求得，即为 a 在虚轴上的零点，其定范常数 β 由以下比例关系得到：$\phi = \beta\psi$ 该比例关系涉及在窗口两端归一化的 Jost解。我们对输入（37）进行了检查，输入为 1。5 双曲正割 t，位于 $h = 0.1$，其中包含一个孤子（$\eta_{\mathrm{ph}} = 0.250$）和辐射，在九个点处进行检查 $|\lambda| \le 0.4$（晶格单位；排除满足 $|R| < 10^{-6}$ 的点），并且在

共振区域 $|\lambda| \le r$ 中，其中 $|\chi^m - 1|$ 达到 2。在 x 中经过 $m = 10$ 和 $m = 40$ 个时间步后，$R(\lambda,\ m)/R(\lambda,\ 0)$ 等于 χ^m 至 3×10^{-11}，并且窗口后方介质相对于基态的偏差 $\lceil\rho_+ - \hat{}\rho_-|/r$ 低于 10^{-13}；当窗口分别超过 1.6×10^4 和 3.2×10^4 个时间步时，情况即是如此；对于长度为 4×10^3 和 1.6×10^4 个时间步的窗口，该偏差仍分别为 0.25 和 0.16。对于包含三个子层的洛伦兹线型，在长度为 1.3×10^5 个时间步的窗口上，误差为 5×10^{-11}，偏差为 4×10^{-12}；之所以需要更长的窗口，是因为每个类别都以其自身较小的速率 $r_j/[2\ (1+\epsilon_j^2)\ ] \approx r_j/2$弛豫。图 4 展示了在 $m = 40$ 个时间步后、λ 中稠密网格上的比较：$R(\lambda,\ 40)/R(\lambda,\ 0)$ 的相位每步延拓至 λ，与 arg χ 一致，精度达到 10^{-12}；且 $|R(\lambda,\ 40)/R(\lambda,\ 0) - \chi^{40}| \le 4 \times 10^{-11}$。

因此，在晶格上，a 守恒，而 R 线性演化。对于实约化，在 Orfanidis的Lax对中 Hirota 离散正弦-戈登方程的情形下，Boiti 等人得到了相同的定律。 [33], 他们的式 (6.38)–(6.39) 给出了一个守恒的 a，以及一个关于 b 的因子；该因子与 $\gamma_{\mathrm{O}} = r/4$和 $k_{\mathrm{O}} = -\lambda$相乘后等于 $\chi^{\pm1}$，具体取决于 b的约定；式 (37) 将其推广到了复场和展宽谱线。在连续尖锐线型问题中，只有 $c = b^*/a$ 线性演化； [对于初始处于基态的介质，它满足 $\partial_x c = \mathrm{i}\varphi(x,\lambda)c$，即参考文献 [6]], 的式 (1.30)；而 a 则按照参考文献 [6], 的式 (1.28) 变化，因为脉冲过后介质中仍保留极化。我们认为，这种差异源于极限次序：当 $\Delta x \to 0$时，弛豫时间 $2/\Delta x$ 发散，因此晶格上的结果在固定 Δx时适用于无限直线。晶格将共振从实轴移至点 $\epsilon_j \pm \mathrm{i}r_j/4$；这一偏移在连续问题中起到了 $\pm$i0处方的作用。式 (37) 的连续极限如何恢复连续演化，以及展宽谱线的共振吸收如何由此在 $J \to \infty$时产生，仍有待研究。

八、结论

我们针对物理变量中的复场，构造了麦克斯韦–布洛赫方程的可积全离散化，并将其用作数值格式。该格式的关键性质在晶格上严格成立：步进是显式的，每个布洛赫矢量和场自旋的长度均保持不变，场与介质之间的能量平衡是精确的，孤子和呼吸子均为精确的无反射解。与 Tsuchida 的全离散系统之间的联系是我们的主要工具；它给出了精确解，并通过有序子层实现了向非均匀展宽介质的扩展；当介质初始处于

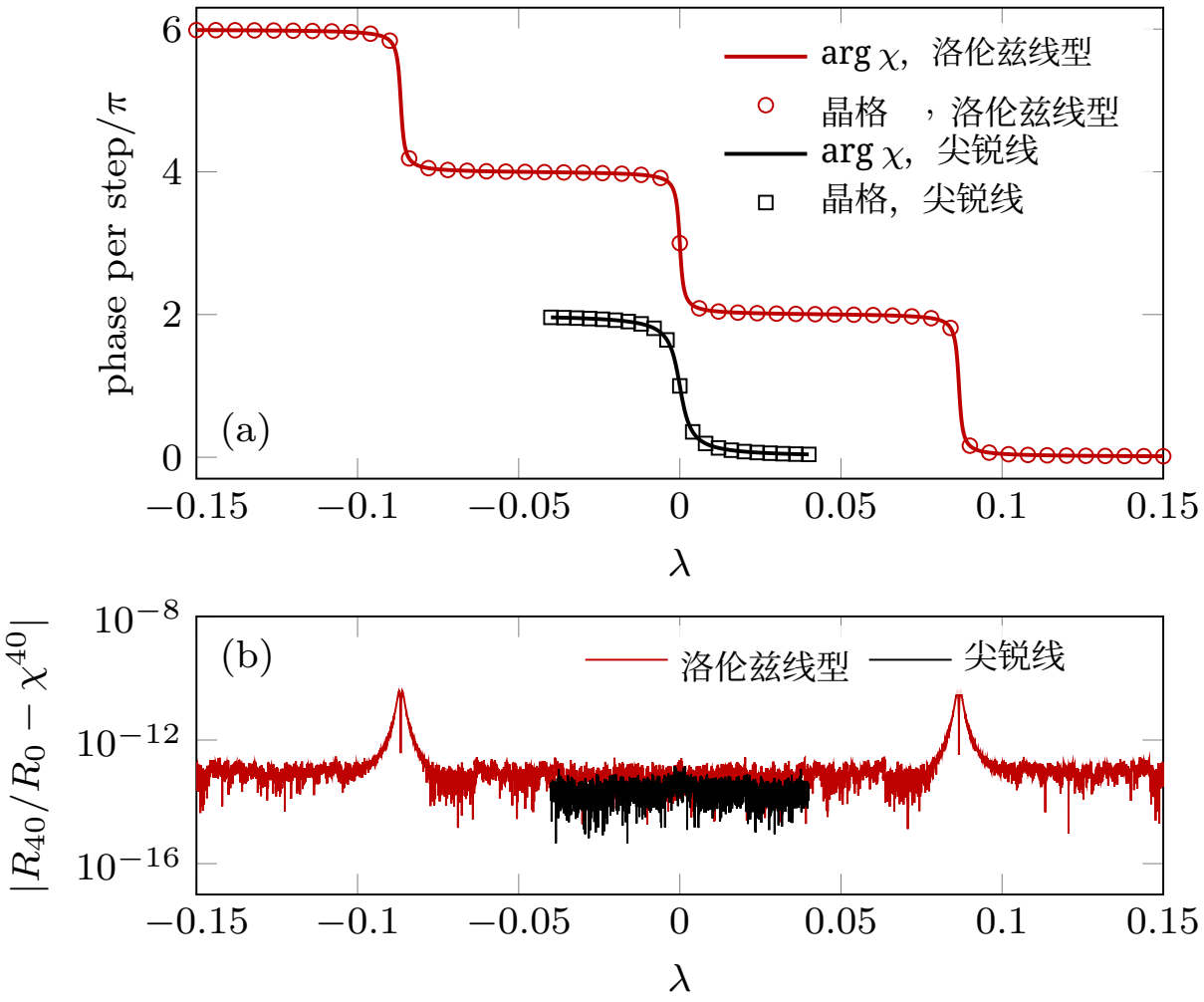


图 4. 无限直线上反射系数的线性演化，输入为 1.5sech t, $h = 0.1$，经过 $m = 40$ 步后，在 x 中；尖锐线和洛伦兹线型（以物理单位表示为 $\gamma = 0.5$ ），在 $\epsilon_j = 0, \pm 0.087$ 处有三个子层（晶格单位，类似 λ；以物理单位表示为 ± 0.87 ）。(a) 在晶格上计算并在 λ 中延拓的每步相位：$R(\lambda, 40)/R(\lambda, 0)$（符号），以及由 (37) 得出的 arg $\chi(\lambda)$（曲线）。每个共振都会增加 2π。(b) 与 (37) 的偏差；在 $\epsilon_j = \pm 0.087$ 处的峰值（此处 χ 的相位变化最快）在时间窗口加倍后保持不变。

非相干态时，子层的顺序不会影响场。作为一种数值方法，该晶格是显式的二阶格式；其单位精度成本与 Cayley 格式和指数中点格式相当，而后者单次扫描就已达到二阶；对于校准输入，它对选定的孤子是精确的。对于散射数据，该晶格在有限时间窗口上给出了精确的闭合映射，其中介质最终态由谱平面上一点处的数据确定，并且在无限直线上满足线性定律。

仍有一些问题尚待解决。连续极限目前只是形式上的，并得到数值验证；但尚无收敛性证明。标定仅对一个孤子参数是精确的。无限直线上的线性定律，即文献 [6] 中命题 2 的离散类比，以及 Boiti 等人 [33], 提出的定律的复扩展，都是在介质回到基态这一假设下推导的，并经过数值检验。后续各行中的回归现象（窗口随 m增大）虽有观察到，但尚未推导出来。线性定律的连续极限如何恢复连续演化仍有待理解；在这种演化中， a 会发生变化，因为脉冲过后介质仍保留极化。接下来的自然研究方向包括反转介质与超荧光、MB 变量下晶格的哈密顿结构（对于实约化，即 Hirota 方程，相关结果见文献 [42]），以及其连续时间极限与文献 [24, 25] 中的半离散 MB 格点和 Tsuchida 对负流的离散化 [30]之间的关系。

数据可用性

如有合理请求，可向作者获取支持本文研究结果的数据。

致谢

我们感谢 A . Bobenko、S. Burtsev 和 I. Timofeev 提供的宝贵讨论和建议 e.

附录 A：格点方程的推导

连续的 U 关于 λ 是线性的，而 V 在 $\lambda = 0$处有一个简单极点； σ_2-对称性要求系数矩阵具有 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{smallmatrix}\right)$的形式。因此，我们取具有这种形式矩阵的 U $= \lambda\mathcal{A} + \mathcal{B}$ 和 V $= \mathcal{F} + \mathcal{G}/\lambda$ 。规范变换 $\Psi_{n,m} \to g_{n,m}\Psi_{n,m}$， 其中$g_{n,m}$ 具有相同的形式，会使 U $\to g_{n+1,m}$ U$g^{-1}_{n,m}$ ，并使 V $\to g_{n,m+1}$V$g^{-1}_{n,m}$；当 det $\mathcal{A} \neq 0$且 det $\mathcal{F} \neq 0$ 时，它将 $\mathcal{A}$ 化为 $-\mathrm{i}\sigma_3$ ，并将 $\mathcal{F}$ 化为 I；这两个条件相容，因为式（6）的 $O(\lambda)$ 项给出 $\mathcal{A}_{n,m+1}\mathcal{F}_{n,m} = \mathcal{F}_{n+1,m}\mathcal{A}_{n,m}$。于是 $\mathcal{B} = (1 + C)I + \mathrm{i}\beta\sigma_3 - \frac{1}{2}u$，其中 C 和 β为实数。项 $\mathrm{i}\beta\sigma_3$ 使 U 中的 λ 发生平移，而 det U 的零点为 $\lambda = \beta \pm \mathrm{i}\kappa$；要求它们不依赖于 n ，并且 m使得 β 为常数。一个常数 β

是一个失谐：平移 $\lambda \to \lambda + \beta$ 后，$\mathbf{U}$ 具有如下形式（7），而 $\mathbf{V}$ 的极点移至$\lambda = -\beta$，这是第 VIB 节中失谐的因子，失谐为 $\epsilon = -\beta$；对于共振处的尖锐线，我们令 $\beta = 0$。对于 $\mathcal{G}$，我们取连续 V的形式，$\mathcal{G} = -\hat{}\rho/$（4i），其中 $\hat{}$ 是无迹厄米的ρ。将晶格步吸收到变量中后，即得到式（7）。

将（7）代入（6）后，与 λ 成正比的项恒等于零。与 λ 无关的项给出（8a）和（8b），而在 $\lambda = 0$处的留数，

$$\mathbf{U}_{n,m+1}(0)\,\hat{\rho}_{n,m} = \hat{\rho}_{n+1,m}\,\mathbf{U}_{n,m}(0),$$

给出（8c）和（8d）。将它们写成实分量后，得到关于六个实未知量 $E_{n,m+1}$, $C_{n,m+1}$, $\rho_{n+1,m}$, $N_{n+1,m}$ 的十个方程；这些方程相容，且有唯一解（8）。利用（8a）和（8b），从留数条件中消去 $E_{n,m+1}$ 和 $C_{n,m+1}$，得到显式形式（11），其中 $\det G$ 等于关于四个未知量的线性系统的行列式。对（6）取行列式，并利用（9）和 r 的守恒，得到 $\kappa_{n,m+1} = \kappa_{n,m}$ （第三节B）。

附录B：作为双自旋系统的晶格

一个无迹厄米 2×2 矩阵 S，满足 $S^2 = k^2 I$，可写为 $S = k\,(2\Pi - I)$，其中 Π 是一个秩一正交投影算子，因此

$$\lambda I + \mathrm{i}S = (\lambda - \mathrm{i}k)\Big(I + \frac{2\mathrm{i}k\,\Pi}{\lambda - \mathrm{i}k}\Big). \tag{B1}$$

将其应用于 (14)，两个 Lax 因子都变为（相差的标量因子在 (6) 中会抵消）如下形式的因子 $I + (\alpha_{\mathrm{T}} - \beta_{\mathrm{T}})P/(\lambda + \beta_{\mathrm{T}})$，其中 $\beta_{\mathrm{T}} = \bar{\alpha}_{\mathrm{T}}$，且含有一个秩一投影算子 P：$\alpha_{\mathrm{T}} = \mathrm{i}\kappa$ 对应场因子，$a_{\mathrm{T}} = -\epsilon + \mathrm{i}r/4$ 对应失谐为 ϵ 的某一类别的布洛赫因子。将投影算子写成立体投影坐标，$P \propto (u_{\mathrm{T}}, 1)^T (u_{\mathrm{T}}, 1)^*$，其中场对应 $u_{\mathrm{T}} = -E/[2(\kappa - 1 - C)]$，介质对应 $q_{\mathrm{T}} = \rho/(r - N)$；再施加交错规范 $\Psi_n,\ _m \to \sigma_3^n \Psi_n,\ _m$，它会反转奇数 n 上 E 和 ρ 的符号，于是式 (6) 就成为文献 [30] 中重因式分解 (3.12) 的标量厄米情形；我们已用随机数据通过精确运算核验了这一对应关系，包括该文献中的分量方程。对于实场，令 $1 + C = \cos\alpha$，$E/2 = \sin\alpha$，$N = r\cos\Theta$，$\rho = r\sin\Theta$，常规范 $\mathcal{W} = e^{-\mathrm{i}\pi\sigma_1/4} e^{-\mathrm{i}\pi\sigma_2/4}$ 将 U 和 V 映射为 Orfanidis 的 Lax矩阵 [28]，它们对应于 Hirota 离散正弦-戈登方程 [27],，其谱参数为 $k_{\mathrm{O}} = -\lambda$ 和 $\gamma_{\mathrm{O}} = r/4$。

附录 C：达布变换公式

令 $\lambda_j = \xi_j + \mathrm{i}\eta_j,\ \eta_j > 0,\ j = 1, \ldots, K$ 为互不相同的点，且 $\psi_{j;n,m} = \Psi^{(0)}_{n,m}(\lambda_j)(1, \gamma_j)^T \propto (1, z_{j;n,m})^T$，其中 $z_j = \gamma_j q_j^n p_j^m$ 与（16）中的定义相同。该 K 重达布变换矩阵为

$$\mathcal{D}(\lambda) = I - \sum_{j,k=1}^{K} \frac{(M^{-1})_{kj}\, \psi_k \psi_j^\dagger}{\lambda - \bar{\lambda}_j}, \qquad M_{jk} = \frac{\psi_j^\dagger \psi_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_j}, \tag{C1}$$

对于 $K = 1$ 化简为 (17)。令 $\mathcal{D} = I + \mathcal{D}_1/\lambda + O(\lambda^{-2})$，达布变换后的场为

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= -2\mathrm{i}\big[(\mathcal{D}_1)_{12}(n+1, m) + (\mathcal{D}_1)_{12}(n, m)\big], \\ C_{n,m} &= -\mathrm{i}\big[(\mathcal{D}_1)_{11}(n+1, m) - (\mathcal{D}_1)_{11}(n, m)\big], \end{aligned} \tag{C2}$$

以及 $\hat{\rho}_{n,m} = \mathcal{D}_{n,m+1}(0)\, \hat{\rho}_0\, \mathcal{D}_{n,m}(0)^{-1}$。在归一化 $\psi_j = (1, z_j)^T$ 下，$(\mathcal{D}_1)_{12} = -\Xi$ with $\Xi = \sum_{jk} (M^{-1})_{kj} \bar{z}_j$，这给出了第 IV C 节中的 $E = 2\mathrm{i}(\Xi_{n+1,m} + \Xi_{n,m})$。由于 $(\mathcal{D}_1)_{11} \to -2\mathrm{i}\sum_j \eta_j$ as $n \to +\infty$ and $\to 0$ as $n \to -\infty$，(C2) 中的第二个关系给出 $W = -8\sum_n C_{n,m} = 16\sum_j \eta_j$。对于呼吸子，$\lambda_{1,2} = \pm\xi + \mathrm{i}\eta$ and $z_2 = -\bar{z}_1 = -e^{-X - \mathrm{i}\Phi}$，可得

$$\Xi = \frac{2\eta\xi\,(\eta \sinh X \cos\Phi + \xi \cosh X \sin\Phi)}{\eta^2 \cos^2\Phi + \xi^2 \cosh^2 X},$$

这将导出（23）。

---

[1] S. L. McCall 和 E. L. Hahn，自感应透明，《物理评论》**183**，457（1969）。

[2] L. Allen 和 J. H. Eberly，光学共振与双能级原子，交科学与天文学专著丛书，第 28 卷（威利，纽约，1975）。

[3] I. R. Gabitov、V. E. Zakharov 和 A. V. Mikhailov，《超荧光非线性理论》，《苏联物理学 JETP》**59**，703（1984），［《实验与理论物理学杂志》**86**，1204（1984）］。

[4] G. L. Lamb, Jr.，共振介质中超短光脉冲传播的解析描述，《现代物理评论》**43**，99（1971）。

[5] M. J. Ablowitz、D. J. Kaup 和 A. C. Newell，《相干脉冲传播：一种色散性不可逆现象》《数理物理学杂志》**15**，1852（1974）。

[6] I. R. Gabitov、V. E. Zakharov 和 A.V. Mikhailov，《麦克斯韦–布洛赫方程与反散射法》《理论与数学物理》**63**，328（1985）。

[7] G. Biondini、I. Gabitov、G. Kovačić 和 S. Li，具有非零背景的二能级系统的逆散射变换，《数学物理杂志》**60**，073510（2019）。

[8] A . Abeya, G. Biondini, G. K ovac i ˇc, 一个 d B. Prinari, On Maxwell–Bloch 带有 w 的系统 ith inh 均匀展宽和单侧非零背景，《Communications in Mathematical Physics》405, 192 (2024).[9] R. W. Ziolkowski、J. M. Arnold 和 D. M. Gogny，双能级原子中的超快脉冲相互作用，《Physical Review A》52, 3082 (1995).[10] B. Bid´egaray，麦克斯韦–布洛赫方程的时间离散化，《数值方法与偏微分方程》19, 284 (2003).[11] E. Hairer、C. Lubich 和 G. Wanner，《几何数值积分：常微分方程的保结构算法》，第2版，施普林格计算数学丛书，第31卷（施普林格，柏林，2006）.[12] A. Iserles、H. Z. Munthe-Kaas、S. P. Nørsett 和 A. Zanna，李群方法，《数值学报》9, 215 (2000).[13] R. I. McLachlan 和 G. R. W. Quispel，分裂方法，《数值学报》11, 341 (2002).[14] B. Bid´egaray、A. Bourgeade 和 D. Reignier，在布洛赫方程中引入物理弛豫项，《计算物理学杂志》170, 603 (2001).[15] B. M. Herbst 和 M. J. Ablowitz，非线性薛定谔方程中的数值诱导混沌，《物理评论快报》62, 2065 (1989).[16] M. J. Ablowitz、B. M. Herbst 和 C. Schober，关于正弦-戈登方程的数值求解，《计算物理学杂志》126, 299 (1996).[17] M. J. Ablowitz、B. M. Herbst 和 C. Schober，关于正弦-戈登方程的数值求解，《计算物理学杂志》131, 354 (1997).[18] M. J. Ablowitz 和 J. F. Ladik，非线性微分差分方程，《数学物理杂志》16, 598 (1975).[19] M. J. Ablowitz 和 J. F. Ladik，非线性微分差分方程与傅里叶分析，《数学物理杂志》17, 1011 (1976).[20] Y. B. Suris，《可积离散化问题：哈密顿方法》，数学进展丛书，第219卷（Birkh¨auser，巴塞尔，2003）.[21] A. I. Bobenko 和 Y. B. Suris，《离散微分几何：可积结构》，数学研究生教材丛书，第98卷（美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008）.[22] A. I. Bobenko 和 Y. B. Suris，四边形图上的可积系统，《国际数学研究通知》2002, 573 (2002).

[23] V. E. Adler、A. I. Bobenko 和 Y. B. Suris，四边形图上可积方程的分类：相容性方法，《Communications in Mathematical Physics》233, 513 (2003).[24] N. M. Bogoliubov、A. V. Rybin、R. K. Bullough 和 J. Timonen，晶格上的麦克斯韦–布洛赫系统，《Physical Review A》52, 1487 (1995).[25] A. Rybin、J. Timonen、G. Varzugin 和 R. K. Bullough，麦克斯韦–布洛赫晶格的q形变孤子与量子孤子，《J. Phys. A: Math. Gen.》34, 157 (2001).[26] P. Saksida，诺伊曼振子晶格与麦克斯韦–布洛赫方程，《Nonlinearity》19, 747 (2006).[27] R. Hirota，非线性偏差分方程 III；离散正弦-戈登方程，《J. Phys. Soc. Jpn.》43, 2079 (1977).[28] S. J. Orfanidis，离散正弦-戈登方程，《物理评论 D》18, 3822 (1978).[29] A. Bobenko 和 U. Pinkall，具有恒定负高斯曲率的离散曲面与Hirota方程，《J. Differential Geom.》43, 527 (1996).[30] T. Tsuchida，向量/矩阵非线性薛定谔方程的可积离散化及其相关的杨–巴克斯特映射（2015），v5 (2024)，arXiv:1505.07924 [nlin.SI].[31] V. M. Goncharenko 和 A. P. Veselov，杨–巴克斯特映射与矩阵孤子，载于《可积性与部分可解性的新趋势》，A. B. Shabat、A. Gonz´ález-L´opez、M. Ma˜ñas、L. Mart´ínez Alonso 和 M. A. Rodr´íguez 编（施普林格，多德雷赫特，2004），第191–197页。[32] Y. B. Suris 和 A. P. Veselov，杨–巴克斯特映射的Lax矩阵，《非线性数学物理杂志》10, 223 (2003).[33] M. Boiti、F. Pempinelli、B. Prinari 和 A. Spire，正弦–戈登方程的可积离散化，《逆问题》18, 1309 (2002).[34] V. E. Zakharov 和 A. B. Shabat，非线性介质中波的二维自聚焦与一维自调制的精确理论，《苏联物理学 JETP》34, 62 (1972),[《实验与理论物理学杂志》61, 118 (1971)].[35] M. J. Ablowitz、D. J. Kaup、A. C. Newell 和 H. Segur，逆散射变换——非线性问题的傅里叶分析，《应用数学研究》53, 249 (1974).[36] L. D. Faddeev 和 L. A. Takhtajan，《孤子理论中的哈密顿方法》（施普林格，柏林，1987）.[37] ˇ Z. Krajnik、E. Ilievski 和 T. Prosen，离散时空中的可积矩阵模型，《SciPost物理学》9, 038 (2020).

[38] C.-L. Terng 和 K. Uhlenbeck，B¨acklund 变换与环群作用，《纯粹与应用数学通讯》**53**，1（2000年）。[39] T. E. Kouloukas 和 V. G. Papageorgiou，具有二项式Lax矩阵的泊松杨–巴克斯特映射，《数学物理杂志》**52**，073502（2011年）。[40] V. B. Matveev 和 M. A. Salle，达布变换与孤子，Springer非线性动力学丛书（施普林格，柏林，1991年）。[41] T. E. Kouloukas 和 V. G. Papageorgiou，具有一次多项式2×2 Lax矩阵的杨–巴克斯特映射，《物理学杂志A：数学与理论》**42**，404012（2009年）。[42] L. Faddeev 和 A. Y. Volkov，Hirota方程作为可积辛映射的一个例子，《数学物理快报》**32**，125（1994年）。