arXiv:2611.30082v1 [math.DG] 23 Nov 2026

受阻的 Harvey–Lawson 锥与对数特殊拉格朗日奇点

WEI-CHUN CHEN 和 CHUN-KAI LIEN

Abstract. 我们构造了两个精确嵌入特殊拉格朗日芽，它们具有相同的唯一重数一切锥，即 $\mathbb{C}^9$ 中的 Harvey–Lawson 锥。二次障碍和修正三次障碍分别产生不同且尖锐的 C^1 收敛速率 $|\log r|^{-1}$和 $|\log r|^{-1/2}$。这些速率在酉变换和膨胀下区分了这两个芽。我们还证明了 $\mathbb{C}^8$ 和 $\mathbb{C}^9$ 中 Harvey–Lawson 锥的 Jacobi 不可积性，并在八维锥上实现了尖锐速率 $|\log r|^{-1/2}$ 。

1. Introduction

令 $C^m_{HL} \subset \mathbb{C}^m$ 为 Harvey–Lawson 特殊拉格朗日锥 [7]。除去固定的公共相位旋转外，该锥及其链环参数化为

$$\Sigma_m = \{y \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^m : \textstyle\sum_j y_j = 0 \bmod 2\pi\},$$
$$X_0(y) = m^{-1/2}(e^{iy_1}, \dots, e^{iy_m}), \qquad C^m_{HL} = \{rX_0(y) : r \geq 0,\ y \in \Sigma_m\}.$$

此处及下文中，我们通过 X_0 将 Σ_m 与链环等同，并将特殊拉格朗日相位固定为 C^m_{HL} 的相位。

第 2 节图坐标中的线性化特殊 Legendrian 方程为 $L_m f = 0$，其中

$$L_m := \tfrac{1}{2}(\Delta_{\Sigma_m} - 2m)$$

且 Δ_{Σ_m} 是非负链环拉普拉斯算子。在 Collins and Li 对 $m \geq 3$所做的核计算中， $SU(m)$-旋转模式涵盖了整个核，但在八维和九维中例外，分别存在 70 个和 168 个额外的实 Jacobi 模态 [3, 第 2 节.1]。Joyce 猜想这两个锥是 Jacobi 不可积的 [10, 第 3 节.2]。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C38, 53C25, 35J60.

Key words and phrases. 特殊拉格朗日锥、Jacobi场、障碍、对数收敛。国立台湾大学数学系，台湾台北 10617（两位作者）。b14201028@ntu.edu.tw（Chen），d13221002@ntu.edu.tw（Lien）。

1.1. 锥的不可积性。图 1 展示了下文将用到的三种构型。在八维中，二次项在超额 Jacobi 空间上消失，而 Fano 构型产生三次障碍。在九维中，三元构型产生二次障碍，而向日葵构型产生修正三次障碍。



FIGURE 1. 从左到右分别为 u_F、u_T、u_S 的构型。Fano 集是图示七条直线在 $\{1,\dots,7\}$ 中的补集。三元盒是互不相交的三元组。每个向日葵三元组由一对方框标出的坐标和公共坐标 9 组成。

McLean 证明，紧致光滑特殊拉格朗日流形的变形不会受到阻碍，其无穷小变形由调和一形式参数化 [14, 定理 3。6]。对于特殊拉格朗日锥，链接方程中的非线性项可能会阻碍 Jacobi 场的积分。按照 Joyce 的定义 [9, 定义 6。7]，C^m_{HL} 若每个 $u \in \ker L_m$ 都是图坐标下经过 Σ_m 的一条特殊 Legendrian 链接光滑曲线的初始速度，则称其为***Jacobi*** 可积 。

定理1.1。 锥 C^8_{HL} 和 C^9_{HL} 是 ***Jacobi*** 不可积的。

1.2. 对数奇点。 上述障碍产生了三个具有尖锐对数收敛速率的芽。

定理1.2。 存在精确嵌入特殊拉格朗日芽 L_T和 L_S ，它们共享切锥 C^9_{HL}；另有第三个此类芽 L_F ，其切锥为 C^8_{HL}。每个芽在原点之外均光滑，并且具有唯一的重数一切锥。

对于每个 m维芽 L_ℓ、 $\ell \in \{F,T,S\}$，存在 c、$C>0$ ，使得对所有充分小的 r，重缩放 $r^{-1}L_\ell$ 在 $C^m_{HL} \cap \{x :\ 1/2 < |x| < 2\}$ 上具有正规图$x \mapsto x + \nu_{\ell,\,r}(x)$ ，满足

$$c|\log r|^{-q_\ell} \le \|\nu_{\ell,r}\|_{C^1} \le C|\log r|^{-q_\ell}, \qquad q_F = q_S = \tfrac{1}{2}, \quad q_T = 1. \quad (1)$$

特别地， L_T 和 L_S 在酉变换和膨胀下并不等价。

Adams 和 Simon 构造了具有对数收敛的极小子流形 [1], , 而 Joyce 在讨论特殊拉格朗日子流形时预见了这种行为[9, 第 6 节3]。Dimler 和 Gaia 在任意正则特殊拉格朗日锥处构造了具有幂衰减的精确特殊拉格朗日扰动，包括 C^9_{HL} [4, 定理 3]。(1) 中的下界排除了对每个 $\alpha > 0$ 的缩放法向图具有 $O(r^\alpha)$ 衰减的可能性。因此，这些芽不属于 Joyce 锥形奇点理论的正幂设定[11, 定义 37]。

令 $\xi(\tau)$ 表示所选 Jacobi 模式的振幅，其中 $\tau =$–对数 r。在每个对称类中，临界直线上的首个非零约化项 $\kappa\xi^k$ 给出主导的径向平衡，对于此处所考察的分支，其形式为 $\kappa > 0$ 。

$$\frac{m+2}{2}\xi'(\tau) + \kappa\xi(\tau)^k = 0. \tag{2}$$

其正解按 |对数 $r|^{-1/(k-1)}$衰减。 L_T的二次项和 L_S 的修正三次项分别给出 $k = 2$ 和 $k = 3$。因此，即使唯一切锥保持不变，精确的对数衰减率仍可能发生变化。

Simon 证明了具有光滑重数一切锥的平稳整变分簇的唯一性 [16, 推论，第 564] 页。相关结果包括可积极小锥的幂衰减 [2] ，以及几乎面积极小流的对数界 [5]。

Collins and Li 的可积性条件 [3, 定义2.2及注2.6], 用于其关于柱状切锥的唯一性定理[3, 定理1.1], , 并蕴含 Joyce 的条件。因此，定理1.1也排除了这两个锥满足其可积性条件的可能性。Yang Li 证明了 $\mathbb{C}^3$ 中具有带横截双重点的浸入的特殊 Legendrian 链环的锥的切锥唯一性，假设 Jacobi 可积性以及关于交图的条件 [12, 定理1.2]。

AI Usage Statement

在作者的引导下，通过反复交互，ChatGPT 5.6 Sol 帮助识别出能够在第 4 节中分离一维 Jacobi 核的对称性，并在第 5 节中为线性化算子和非线性余项建立了加权估计。作者独立核查了相关论证，并对手稿的正确性和内容承担全部责任。

2. The Special Lagrangian Phase Equation

在下文的生成函数坐标中，当缩放势与半径无关时，锥的变形所满足的相位方程可约化为链环上的特殊 Legendrian 方程。

2.1. 锥附近的精确拉格朗日图。 令 $\mathbf{1}=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^m$和 $\mathcal{H}=\mathbf{1}^{\perp}$。记 $\Pi:\mathbb{R}^m\to\mathcal{H}$ 为正交投影。下文的角向导数 $\nabla f, D^2 f$ 采用 $\mathcal{H}$上的欧几里得度量。链路度量是该度量的 $1/m$ 倍。设 $r=|z|$, $R=r^2$, 并令 $a=(a_1,\dots,a_m)$ 满足$a_j=|z_j|^2/R$, 于是 $\sum_j a_j=1$。记 $z_j=\sqrt{R}a_j\,e^{i(y_j+\varphi)}$，其中 $y\in\Sigma_m$, 且$m\varphi$是 $z_1\cdots z_m$在去心锥邻域上靠近零的分支中的辐角。标准李乌维尔形式为

$$\lambda=\tfrac{R}{2}\sum_j a_j\,\mathrm{d}(y_j+\varphi)=\tfrac{R}{2}\big(\mathrm{d}\varphi+\langle\Pi a,\,\mathrm{d}y\rangle\big).$$

对于势函数 $G=G(R,\ y)$, 令 $R\Pi a=\nabla_y G$ 和 $\varphi=-G_R$。李乌维尔形式限制为

$$\lambda=\tfrac{1}{2}(-R\,\mathrm{d}G_R+\mathrm{d}_y G)=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}(G-RG_R),$$

因此该图是精确拉格朗日子流形。将 $G=Rf(\tau,\ y)$ 写成 $\tau=-\log r$。于是 $G_R=f-\frac{1}{2}f_\tau$和 $\mathrm{H}a=\nabla_y f$。记 $r_0>0$为图邻域的半径，则该图参数化为

$$\begin{gathered}\big\{z_f(r,y):0<r<r_0,\ y\in\Sigma_m\big\},\\ z_f(r,y)=r\,e^{i\varphi}\big(\sqrt{a_j}\,e^{iy_j}\big)_{j=1}^m,\qquad a_j=\frac{1}{m}+(\nabla f)_j,\qquad \varphi=-f+\tfrac{1}{2}f_\tau.\end{gathered}\tag{3}$$

对于 f 的小 C^1 阶喷流，每个 $a_j>0$ 和 $m\varphi$ 都位于所选分支内。逆参数 $r=|z|$ 和 $y_j=\arg z_j-\varphi$ (模 2π) 是光滑的，因此 (3) 给出一个嵌入图。当 $f\equiv 0$ 时，我们有 $a_j=1/m$ 和 $\varphi=0$，因此 $z_0(r,\ y)=rX_0(y)$，且该图是限制在 $0<|z|<r_0$ 上的 Harvey–Lawson 锥 C^m_{HL}。对于静态的 f，其链环是一个满足 $\varphi=-f$ 的 Legendrian 图。充分接近的 Legendrian 链环的角向投影是一个度为一的局部微分同胚。其接触方程于是给出满足 $f=-\varphi$ 的图表示。

关于特殊 Legendrian 链接的变形理论，参见 [3, 引理 2。1]和 [15]。

2.2. 特殊拉格朗日相位。 为计算拉格朗日角，将 z_j 从复切向量行列式的第 j 行中提取出来。对于$v\in\mathcal{H}$，令 D_v 表示沿方向 v的角导数。列中的元素满足

$$\frac{\partial_\tau z_j}{z_j}=-1+\frac{\partial_\tau a_j}{2a_j}+i\varphi_\tau,\qquad \frac{D_v z_j}{z_j}=\frac{D_v a_j}{2a_j}+i(v_j+D_v\varphi).$$

令 $\mathfrak{D}(f)$ 表示这些列在固定正交角向标架下的行列式。相对于该锥，图形的提升的拉格朗日相位为

$$\mathcal{E}_m(f)=m\varphi+\operatorname{Im}\log(\mathfrak{D}(f)/\mathfrak{D}(0)),$$

其中，对数取在 1 附近。对于静态的 f，径向列为 $-\mathbf{1}$，因此行列式仅涉及角向列在$\mathcal{H}$上的投影。这些投影会消去 $D_v\varphi$ 项。将每个投影列中的 i 提取出来，并将 (3) 中的 a_j 代入，得到特殊 Legendrian 方程 $F_m(f) = 0$ 中的算子 F_m

$$\begin{aligned} F_m(f) &= -mf + \operatorname{Im}\log\det(I - iM(f)),\\ M(f) &= \frac{m}{2}\Pi\,\operatorname{diag}\big((1+m(\nabla f)_j)^{-1}\big)D^2 f\big|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{4}$$

相位在零点附近关于二阶喷射是解析的，其中

$$\mathcal{E}_m(tf) = t\big(m\varphi - \varphi_\tau - \tfrac{m}{2}\operatorname{tr} D^2 f\big) + O(t^2), \qquad \varphi = -f + \tfrac{1}{2}f_\tau.$$

利用 $L_m = \frac{1}{2}(\Delta_{\Sigma_m} - 2m)$ 和 $\Delta_{\Sigma_m} = -m\operatorname{tr} D^2$，我们得到圆柱线性化

$$\mathcal{L}_m = L_m + \tfrac{1}{2}(-\partial_\tau^2 + (m+2)\partial_\tau). \tag{5}$$

对于较小的喷射，圆柱方程是一致椭圆的。令 F_m 作用于每个角向切片上，将径向非线性余项定义为

$$\mathcal{E}_m(f) = F_m(f) + \tfrac{1}{2}(-f_{\tau\tau} + (m+2)f_\tau) + \mathcal{R}_{\mathrm{rad}}(f). \tag{6}$$

2.3. 二次项和三次项。式（4）的泰勒展开为

$$F_m(tf) = tL_m f + t^2 F_{m,2}(f) + t^3 F_{m,3}(f) + O(t^4).$$

设 $D_j = D_{\Pi e_j}$，其中 e_j 是第 j个标准基向量，并记$f_j = D_j f$和 $f_{jj} = D_j^2 f$。系数为

$$F_{m,2}(f) = \frac{m^2}{2}\sum_j f_j f_{jj}, \tag{7}$$

$$F_{m,3}(f) = -\frac{m^3}{2}\sum_j f_j^2 f_{jj} + \frac{1}{3}\operatorname{tr}\Big(\big(\tfrac{m}{2}D^2 f\big)^3\Big).$$

对于完整相位，将径向列除以 $\sqrt{m}$ ，并使用以 $\mathbf{1}/\sqrt{m}$开头的目标标架。右乘 $\operatorname{diag}(-1,\ -iI)$ 得到 tf 的归一化矩阵 $I + tK_1 + t^2K_2 + O(t^3)$，其中

$$K_1 = \begin{pmatrix} -i\varphi_\tau & \sqrt{m}\,(\nabla\varphi)^{\mathsf{T}} \\ -\frac{\sqrt{m}}{2}\nabla f_\tau & -i\frac{m}{2}D^2 f \end{pmatrix}, \qquad \varphi = -f + \tfrac{1}{2}f_\tau.$$

对角块是纯虚数，非对角块是实数，因此 $\operatorname{tr} K_1^2$ 为实数。在归一化的径向列中，虚部关于 φ_τ 是线性的。在归一化的角向列中，所有径向依赖都包含在线性的一阶项 $\sqrt{m}D_v\varphi$ 中。因此，$\operatorname{Im}\operatorname{tr} K_2$ 等于其静态值。由此，二次系数 $\operatorname{Im}\operatorname{tr}(K_2 - \frac{1}{2}K_1^2)$ 为 $F_{m,\,2}$，因为 $m\varphi$ 是线性的。

因此， $\mathcal{R}_{\mathrm{rad}}$ 由次数至少为三且至少包含一个径向导数的项组成。令 $j^2 f$ 表示完整喷流，并写作 $j^2_{\mathrm{rad}} f = (f_\tau,\ f_{\tau\tau},\ \nabla f_\tau)$。对于较小的喷流，

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{R}_{\mathrm{rad}}(f)| &\le C|j^2 f|^2 |j^2_{\mathrm{rad}} f|,\\
|D\mathcal{R}_{\mathrm{rad}}(f)[g]| &\le C\big(|j^2 f||j^2_{\mathrm{rad}} f||j^2 g| + |j^2 f|^2 |j^2_{\mathrm{rad}} g|\big),\\
|D^2\mathcal{R}_{\mathrm{rad}}(f)[g,h]| &\le C|j^2 f||j^2 g||j^2 h|.
\end{aligned}
$$

这些界通过对解析喷流展开求导得到，并且将绝对值替换为局部 $C^{0,\,\alpha}$ 范数时仍然成立。

对称极化为 $F_{m,\,2}(f,\ g) = \frac{m^2}{4}\sum_j D_j(f_j g_j)$。分部积分给出了 $L^2(\Sigma_m)$ 配对的对称恒等式

$$
\langle h, F_{m,2}(f,g)\rangle = -\frac{m^2}{4}\int_{\Sigma_m} \sum_j h_j f_j g_j \ \mathrm{dvol}_{\Sigma_m}.
$$

3. Non-Integrability of the Harvey–Lawson Cones

3.1. 临界模态。 对于 $v \in \Pi\mathbb{Z}^m$，写作 $\chi_v(y) = e^{iv\cdot\tilde{y}}$，其中 $\tilde{y} \in \mathcal{H}$是 $y \in \Sigma_m$ 的零和提升。[1] 这些特征函数满足第 $\Delta_{\Sigma_m}\chi_v = m|v|^2\chi_v$[10，节。有关进一步的谱计算，请参见第 [13, 6.3 节4]和 [8]。

对于 $A \subset \{1,\dots,m\}$，定义其示性向量 $\mathbf{1}_A \in \mathbb{R}^m$ 为

$$
(\mathbf{1}_A)_j = \begin{cases} 1, & j \in A,\\ 0, & j \notin A. \end{cases}
$$

Set

$$
v_A = \Pi\mathbf{1}_A, \qquad \theta_A = v_A\cdot\tilde{y} = \sum_{j\in A}\tilde{y}_j \pmod{2\pi}.
$$

旋转空间 $\mathcal{R}_m$ 由频率为 $e_i - e_j$ 的特征函数的实部和虚部在 $\mathbb{R}$ 上张成，这可由 $SU(m)$ 矩映射得出。恒等式 $m|v_A|^2 = |A|(m-|A|)$ 给出了八维中的四元素子集和九维中的三元组所对应的 $\Delta_{\Sigma_m}\chi_{v_A} = 2m\chi_{v_A}$。令 E_8 和 E_9 分别为这些 θ_A 的余弦函数与正弦函数的实张成空间。取补运算将八维中的四元素子集两两配对；在九维中，每个三元组贡献两个实模态。这些空间与旋转空间正交，维数分别为 70 和 168，恰好穷尽了 [3, 第 2 节1]中的超额重数。因此，在八维和九维中，我们有 $\ker L_m = \mathcal{R}_m \oplus E_m$。

[1]选取这些角度 y_j 的实代表元。它们的和为 $2\pi k$，其中某个 $k \in \mathbb{Z}$，因此从一个代表元中减去 $2\pi k$，即可使总和为零。两个这样的提升相差 $2\pi n$，其中 $n \in \mathbb{Z}^m \cap \mathcal{H}$。若 $v = \Pi n'$ 且 $n' \in \mathbb{Z}^m$，则 $v\cdot n = n'\cdot n \in \mathbb{Z}$，因此指数映射与提升的选取无关。

3.2. 二次项与三元构型。 将 $F_{m,2}(f,g)$ 作复双线性延拓。在傅里叶特征上，这给出

$$2F_{m,2}(\chi_v,\chi_w)=-\frac{im^2}{2}\sum_j (v_j w_j^2+w_j v_j^2)\,\chi_{v+w}. \tag{8}$$

对于子集 A，B，频率内积为 $v_A\cdot v_B=|A\cap B|-|A||B|/m$。子集公式为

$$2F_{m,2}(\chi_{v_A},\chi_{v_B})=-im(m-|A|-|B|)(v_A\cdot v_B)\,\chi_{v_A+v_B},$$
$$2F_{m,2}(\chi_{v_A},\chi_{-v_B})=-im(|A|-|B|)(v_A\cdot v_B)\,\chi_{v_A-v_B}.$$

三元构型按照图 1 将九个坐标划分为 $A=\{1,2,3\}$、$B=\{4,5,6\}$和 $C=\{7,8,9\}$。令

$$u_T=-\sin\theta_A-\sin\theta_B-\sin\theta_C. \tag{9}$$

频率向量满足 $v_A+v_B+v_C=0$。每个向量的平方长度均为二，它们的两两内积为 -1。在 u_T 的两个频率之和中，只有 $\pm v_A$、$\pm v_B$、$\pm v_C$的平方长度为二。和为 $-v_C$ 的唯一无序对是 $\{v_A,v_B\}$，而第一个子集公式给出

$$2F_{9,2}\big(\tfrac{i}{2}\chi_{v_A},\tfrac{i}{2}\chi_{v_B}\big)=27i(i/2)^2\chi_{-v_C}=-\tfrac{27i}{4}\chi_{-v_C}.$$

循环置换和复共轭给出正交投影

$$\mathrm{proj}_{\ker L_9}F_{9,2}(u_T)=-\tfrac{27}{2}\big(\sin\theta_A+\sin\theta_B+\sin\theta_C\big)=\tfrac{27}{2}u_T. \tag{10}$$

对于 $m=8$ 和 $|A|=|B|=4$，因子 $m-|A|-|B|$ 和 $|A|-|B|$ 均为零。共轭相互作用也为零。因此

$$F_{8,2}(v,w)=0\qquad(v,w\in E_8). \tag{11}$$

3.3. Fano 构型。由于 E_8 上的二次项为零，我们使用 Fano 构型[2]

$$\mathscr{F}=\left\{\begin{matrix}\{1,2,4,7\},\ \{1,2,5,6\},\ \{1,3,4,6\},\ \{1,3,5,7\},\\ \{2,3,4,5\},\ \{2,3,6,7\},\ \{4,5,6,7\}\end{matrix}\right\}.$$

在八维空间中，对于 $v_A\cdot v_B=|A\cap B|-2$ 四元素子集。$\mathscr{F}$ 中的任意两个不同集合都恰好有两个元素相交，因此由 $\mathscr{F}$ 索引的向量构成了 $\mathcal{H}$ 的正交基。它们的条目具有相同的幅值，因此只需计算一个系数，就能得到投影到它们的余弦和上的三次投影。

[2]Th集合 $\mathscr{F}$ 是 $\{1,\dots,7\}$ 中图 1 所示直线的四元素补集。

设 $v_i \in \Pi\mathbb{Z}^m$ 为平方长度为二且互相正交的频率。将 $\theta_i = v_i \cdot \tilde{y}$ 模 2π 写作 $V = \sum_i \cos\theta_i$。三次项关于 y 为偶函数，其展开式为

$$F_{m,3}(V) = \sum_i \left(-\frac{m^3}{4} + \frac{m^3}{8} \sum_j (v_i)_j^4 + \frac{m^3}{4} \sum_{\ell \neq i} \sum_j (v_i)_j^2 (v_\ell)_j^2 \right) \cos\theta_i + \cdots, \tag{12}$$

其中省略的模态的频率位于 $\{\pm v_i\}_i$ 之外。由于 $D^2V\, v_i = -2\cos\theta_i\, v_i$，式（7）中的迹项为 $-\frac{m^3}{3}\sum_i \cos^3\theta_i = -\frac{m^3}{4}V + \cdots$。根据频率的独立性，$\pm v_i$ 处的其他项由下式得到

$$\cos\theta_i \sin^2\theta_i = \tfrac{1}{4}(\cos\theta_i - \cos 3\theta_i),$$
$$\cos\theta_i \sin^2\theta_\ell = \tfrac{1}{2}\cos\theta_i(1 - \cos 2\theta_\ell) \qquad (\ell \neq i).$$

对于 Fano 构型，令

$$u_F = 7^{-1/2} \sum_{A \in \mathscr{F}} \cos\theta_A. \tag{13}$$

向量 $v_A = \mathbf{1}_A - \frac{1}{2}\mathbf{1}$ 的平方长度为 2，且其分量为 $\pm 1/2$，因此

$$\sum_j (v_A)_j^4 = \frac{1}{2}, \qquad \sum_j (v_A)_j^2 (v_B)_j^2 = \frac{1}{2} \quad (A \neq B).$$

将 $V = \sqrt{7}\, u_F$ 代入式（12）得

$$F_{8,3}(V) = (-128 + 32 + 384)V + \cdots = 288V + \cdots.$$

三次齐次性以及式（13）中的归一化给出

$$\mathrm{proj}_{\mathbb{R}u_F} F_{8,3}(u_F) = \tfrac{288}{7} u_F. \tag{14}$$

定理*1.1*的证明。经过Σ_m的一族特殊 Legendrian 链接的光滑曲线可表示为 $f(t)$，其中 $f(0) = 0$且 $F_m(f(t)) = 0$。对于 u_T，解曲线 $f(t) = tu_T + t^2 g + O(t^3)$ 应满足 $L_9 g + F_{9,2}(u_T) = 0$。由于 L_9 是自伴的，投影到其核上会与式（10）矛盾。

对于 u_F，曲线 $f(t) = tu_F + t^2 g + t^3 h + O(t^4)$ 应根据式（11）满足 $L_8 g = -F_{8,2}(u_F) = 0$。在三次阶，它应满足

$$L_8 h + 2F_{8,2}(u_F, g) + F_{8,3}(u_F) = 0.$$

与 u_F 配对后，利用自伴性可消去第一项。中间项由二次配对的对称性而消失，

$$\langle u_F, F_{8,2}(u_F, g)\rangle = \langle g, F_{8,2}(u_F)\rangle = 0.$$

由（14），剩余项为 $\frac{288}{7}\|u_F\|_{L^2}^2$，这与假设矛盾。因此，每个锥都有一个无法积分的 Jacobi 方向。□

4. Reduced Equations and Asymptotic Profiles

径向恒定的缩放势 f 会使锥本身发生变形。为了构造奇异芽，我们令 Jacobi 振幅依赖于 τ。由此产生的（5）中的一阶径向项，在主阶上与静态障碍相平衡。对于每个方向，我们都将相位方程限制在一个对称类中，该对称类的 Jacobi 核由该方向张成。

4.1. 对称类与临界直线。 在八维中，Fano 构型还决定了在 Jacobi 模态中选取其七个频率对的那些平移。记 $x=(y_1,\dots,y_7)$，从而 $y_8=-\sum_a x_a$ 模 2π。用 $\mathbb{F}_2^3$的非零元素标记 Fano 点。在这些点上对线性泛函求值，得到一个二进制码 $S_F\subset\mathbb{F}_2^7$。非零泛函的核中的三个非零点构成一条 Fano 直线，因此 S_F 的七个非零字是 $\mathscr{P}$中诸集合的指示函数。设 $S_F^{\perp}$ 为 $\mathbb{F}_2$上关于标准点积的正交补。其元素h 由下文平移中 $\{0,1\}^7$ 内的向量表示。设 $\mathcal{X}_F$为被对 $h\in S_F^{\perp}$ 的平移 $x\mapsto x+\pi h$、保持 Fano 直线的置换以及对合$f(x)\mapsto -f((\pi/4,\dots,\pi/4)-x)$所固定的实角函数空间。

对于式 (9) 中的三元构型，令 $\mathcal{X}_T$ 为在每个块内对和为零的平移及对块的循环置换保持不变，并在 $y\mapsto -y$ 下为奇的角函数。

图 1 中的向日葵构型有四组三元组 $A_i=\{2i-1,\ 2i,\ 9\}$，对应 $1\le i\le 4$，且都共用坐标 9。为选取余弦方向，取满足以下条件的 $t\in\Sigma_9$：对每个 i，$\theta_{A_i}(t)=\pi$，例如 $t=(-\pi/6,\dots,-\pi/6,\ 4\pi/3)$。令 $\mathcal{X}_S$ 在每对 $\{2i-1,2i\}$ 内的相反平移、对这些数对的置换，以及 $f(y)\mapsto -f(t-y)$ 下保持不变。设

$$u_S=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\cos\theta_{A_i}. \tag{15}$$

引理 4.1。 相位算子保持三个对称类，其中对 $\mathcal{E}_m$ 的每个切片施加角对称性。它们的临界特征子空间为

$$\ker L_8\cap\mathcal{X}_F=\mathbb{R}u_F,\qquad \ker L_9\cap\mathcal{X}_T=\mathbb{R}u_T,\qquad \ker L_9\cap\mathcal{X}_S=\mathbb{R}u_S.$$

证明。 两个相位算子在角平移和坐标置换下均保持等变。复共轭作用于两个势函数和相位强迫项时满足 $f(y)\mapsto -f(-y)$，因为它会取反 φ，并在反射点处对行列式比取复共轭。与平移复合后，便得到两个平移后的对合。

对于 $n \in \mathbb{Z}^7$，平移 πh 会使 $e^{in\cdot x}$ 乘以 $(-1)^{n\cdot h}$，因此

$$e^{in\cdot(x+\pi h)} = e^{in\cdot x} \text{ for every } h \in S_F^{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad n \bmod 2 \in S_F.$$

一个旋转相位 $y_i - y_j$ 与 i、$j \le 7$ 有两个奇系数，而 $y_i - y_8 = x_i + \sum_a x_a$ 有六个。两种权重均被排除。每个超额对都有一个避免坐标 8 的四元素代表元 A，通过取补得到。其奇偶性是 A 的指示函数，因此 S_F 的七个非零字恰好选出来自 $\mathscr{F}$ 的这些对。$GL(3, \mathbb{F}_2)$ 的作用在 Fano 直线上是传递的，因而在这些集合上也是传递的，同时保持余弦和与正弦和不变。平移后的对合将 θ_A 送到 $\pi - \theta_A$。带有 f 上的符号时，它保持余弦和不变，并使正弦和变号，从而恰好留下 $\mathbb{R}u_F$。

$\mathcal{X}_T$ 中的分块平移在临界特征值处选出三个三元组对。循环置换和奇性固定了 u_T 所在的直线。

在 $\mathcal{X}_S$ 中，每对上取常值的代表元只能在 $\pm v_{A_i}$ 中的某一个处于临界状态。对的置换保持余弦和与正弦和不变。在 $\theta_{A_i}(t) = \pi$ 处，带符号的对合保持余弦和不变，并使正弦和变号。□

在每个对称类中，令 P 为 $L^2(\Sigma_m)$ 在其临界直线上的正交投影，并在该对称类上设定 $Q = I - P$。将 $L_m|_Q$ 限制到 Q 的值域后，其在零点处存在谱隙。

4.2. 向日葵构型及其二次修正。 对于 Fano，$F_{8,\ 2}(u_F) = 0$。对于向日葵，二次项非零，且位于临界空间的补空间中。其消去对三次系数有贡献。向量 v_{A_i} 的平方长度为二。对于 $i \neq \ell$，这些三元组在一个坐标处相交，因此 $v_{A_i} \cdot v_{A_\ell} = 0$。随后由 (8) 得到的子集公式可知，混合二次相互作用为零。由于 $\sum_j (v_{A_i})_j^3 = 2/3$，$F_{9,\ 2}(g(\theta_{A_i})) = 27 g' g''$。特别地，

$$F_{9,2}(u_S) = \tfrac{27}{8} \sum_i \sin 2\theta_{A_i}.$$

由于 $L_9 \sin 2\theta_{A_i} = 27 \sin\ 2\theta_{A_i}$，强迫项与 L_9 的完整核正交。为消去 $F_9(\xi u_S + \xi^2 h_S)$ 中的二次项，令

$$h_S = -\tfrac{1}{8} \sum_i \sin 2\theta_{A_i}, \qquad L_9 h_S = -F_{9,2}(u_S). \tag{16}$$

特别是 $h_S \in \mathcal{X}_S$ 和 $P h_S = 0$。

直接三次投影使用式 (12) 以及不同向日葵三元组 $\sum_j (v_A)_j^4 = 2/3$ 和 $\sum_j (v_A)_j^2 (v_B)_j^2 = 4/9$ 的四阶矩 A，B。对于混合项，二次配对的对称性给出

$$2\langle u_S, F_{9,2}(u_S, h_S)\rangle = -2\langle h_S, L_9 h_S\rangle = -\tfrac{27}{8} \|u_S\|_{L^2}^2,$$

使用 $L_9 h_S = 27 h_S$ 和 $\|h_S\|_{L^2}^2 = \|u_S\|_{L^2}^2/16$。因此，两个投影为

$$PF_{9,3}(u_S) = \tfrac{243}{8} u_S, \qquad 2PF_{9,2}(u_S, h_S) = -\tfrac{27}{8} u_S.$$

它们的和为

$$P\big(F_{9,3}(u_S) + 2F_{9,2}(u_S, h_S)\big) = 27 u_S. \tag{17}$$

任何与 u_S 相切的解曲线，其二次项都为 $h_S + g$，且满足$g \in \ker L_9$。二次配对给出 $\langle u_S,\ F_{9,2}(u_S,\ g)\rangle = \langle g,\ F_{9,2}(u_S)\rangle = 0$。因此，与 u_S 配对的三次方程左侧为 $27\|u_S\|_{L^2}^2$，这证明了所有链环中都存在这一障碍。

4.3. 约化静态方程。 在每条临界直线上设 $\Phi(\xi) = \xi u + \xi^2 h$，其中 $h = h_S$ 用于其中两条直线，$h = 0$ 用于另一条直线。由于$Ph = 0$，$P\Phi(\xi) = \xi u$。方程 (14)、(10) 和 (17) 给出

$$\mathcal{S}(\xi) := F_m(\Phi(\xi)) = O_{C^{0,\alpha}}(|\xi|^k), \qquad P\mathcal{S}(\xi) = \kappa \xi^k u + O(|\xi|^{k+1}). \tag{18}$$

这里，对于 $u = u_F$，$(k,\ \kappa) = (3,\ 288/7)$；对于 $u = u_T$，为 $(2,\ 27/2)$；对于$u = u_S$，为 $(3,\ 27)$。在三次扇区中，二次修正抵消了整个二阶静态项。

$$\mathcal{S}''(0) = 2\big(L_m h + F_{m,2}(u)\big) = 0 \qquad (k = 3). \tag{19}$$

在二次扇区 $k = 2$ 中，$P\mathcal{S}''(0) = 2\kappa u \neq 0$。由于 $L_m|_Q$ 可逆且 $Q\mathcal{S}(\xi) = O(\xi^k)$，隐函数定理给出修正项 $\eta(\xi) = O(\xi^k)$，其中 $P\eta(\xi) = 0$，且 $QF_m(\Phi(\xi) + \eta(\xi)) = 0$。由于 $PL_m = 0$，该修正项仅在 $k+1$ 阶及更高阶上改变 $P\mathcal{S}(\xi)$。对于圆柱方程，我们将 Φ 用作近似剖面，并在第 5 节中求解互补修正 w。

5. Weighted Inversion and Solvability

在引理 4.1 的每一类中，令 $c = m+2$、$q = 1/(k-1)$ 和 $\xi_0 = A\tau^{-q}$，其中 $A > 0$ 由 $\kappa A^{k-1} = cq/2$ 确定。对于较大的 T，我们在半圆柱 $\tau \geq T$ 上寻求一个解 $f = \Phi(\xi_0 + b) + w$，满足 $Pw = 0$ 及权重

$$\beta = q + \tfrac{1}{2}, \qquad \gamma = kq = q + 1.$$

权重 γ 与下文估计的互补残差 $Q\mathcal{E}_m(\Phi(\xi_0)) = O(\tau^{-q-1})$ 相匹配。相较于 ξ_0，权重 β 使 b 多出半个幂次的衰减。主导剖面满足

$$\tfrac{c}{2}\xi_0' + \kappa \xi_0^k = 0, \qquad k\kappa \xi_0^{k-1} = \frac{c\gamma}{2\tau}. \tag{20}$$

5.1. 加权右逆。固定 $\alpha\in(0,\ 1)$，并将 $I_s=[s,s+1]$ 记作 $s\geq T\geq 2$。中心范数为用于估计 $\mathcal{R}_{\mathrm{rad}}$ 的径向导数额外赋予一个幂次的衰减。

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{Y^{\mathrm{sc}}_\sigma}&=\sup_{s\geq T}s^\sigma\|\psi\|_{C^{0,\alpha}(I_s)},\\ \|\psi\|_{Y^{\mathrm{cyl}}_\sigma}&=\sup_{s\geq T}s^\sigma\|\psi\|_{C^{0,\alpha}(I_s\times\Sigma_m)},\\ \|b\|_{B_\beta}&=\sup_{s\geq T}\big(s^\beta\|b\|_{C^0(I_s)}+s^{\beta+1}\|b'\|_{C^{1,\alpha}(I_s)}\big),\\ \|w\|_{Z_\gamma}&=\sup_{s\geq T}s^\gamma\|w\|_{C^{2,\alpha}(I_s\times\Sigma_m)}.\end{aligned}$$

标量空间 $Y_{\mathrm{sc}\sigma}$ 和 B_β 由定义在 $[T,\infty)$ 上且相应范数有限的实值函数组成。柱面空间 Y^{cyl}_σ 和 Z_γ 由定义在 $[T,\infty)\times\Sigma_m$ 上、属于所选对称类且相应范数有限的实值函数组成。记号 $QY_{\mathrm{cyl}\sigma}$,QZ_γ 表示零 P-投影的闭子空间。下文的衰减阶均指相应的条带 H¨older 范数。

引理 5.1。对于 $c>0$ 和 $p>\beta>0$，算子 $\mathcal{A}_p=\frac{1}{2}\left(-\partial_\tau^2+c\partial_\tau+cp/\tau\right)$ 存在右逆 $J_p\colon Y_{\mathrm{sc}\beta+1}\to B_\beta$，其范数在 T 足够大时有与之无关的上界。

证明。中心算子可因式分解为

$$2\mathcal{A}_p=(-\partial_\tau+c)(\partial_\tau+p/\tau)+(p/\tau)\partial_\tau-p/\tau^2.$$

对于强迫项 ψ，定义 $J_{p,0}\psi:=b$ 如下:

$$g(\tau)=2\int_\tau^\infty e^{-c(s-\tau)}\psi(s)\ \mathrm{d}s,\qquad b(\tau)=\tau^{-p}\int_T^\tau s^pg(s)\ \mathrm{d}s.$$

这些公式给出了 $b'+pb/\tau=g$ 和 $-g'+cg=2\psi$。指数积分给出了每单位强迫项范数对应的 $g=O(\tau^{-\beta-1})$，而 $p>\beta$ 给出了

$$\tau^{-p}\int_T^\tau s^{p-\beta-1}\ \mathrm{d}s\leq\frac{\tau^{-\beta}}{p-\beta}.$$

这些界和两个一阶方程给出了

$$\|J_{p,0}\psi\|_{B_\beta}\leq C\|\psi\|_{Y^{\mathrm{sc}}_{\beta+1}}.$$

因式分解给出了

$$\mathcal{A}_pJ_{p,0}\psi-\psi=\frac{p}{2\tau}(J_{p,0}\psi)'-\frac{p}{2\tau^2}J_{p,0}\psi.$$

由前述估计可知 $\|\mathcal{A}_pJ_{p,\ 0}-I\|\leq CT^{-1}$ 在 $Y_{\mathrm{sc}\beta+1}$上成立，因此 Neumann 级数定义了一个一致有界的右逆

$$J_p=J_{p,0}(\mathcal{A}_pJ_{p,0})^{-1}.$$

□

引理 5.2。对于 $\gamma > 0$，$\mathcal{L}_m|_Q$ 存在一个右逆 $QY^{\mathrm{cyl}}_\gamma \to QZ_\gamma$，其范数有界，且界与 T 无关。

证明。通过在时间上与 $\tau \mapsto \max(T,\tau)$ 复合，将强迫项 ψ 延拓到整个圆柱上。这保持了带权的局部 H¨older 界，其权重为 $\omega_T(\tau) = \max(T,\tau)^\gamma$，包括穿过 T 的板块。对于补空间上的 $\Delta_{\Sigma_m} - 2m$ 的特征值 $\lambda \neq 0$，特征根为 $r_\pm = (c \pm \sqrt{c^2 + 4\lambda})/2$。由于 $c^2 + 4\lambda \geq (m-2)^2$，它们彼此不同。格林核为

$$K_\lambda(t) = \frac{2}{r_+ - r_-} \begin{cases} e^{r_- t}, & \lambda > 0,\ t \geq 0, \\ e^{r_+ t}, & \lambda > 0,\ t < 0, \\ e^{r_+ t} - e^{r_- t}, & \lambda < 0,\ t < 0, \\ 0, & \lambda < 0,\ t \geq 0. \end{cases}$$

这些核是连续的，并满足 $K'_\lambda(0^+) - K'_\lambda(0^-) = -2$。令 $K(t)$ 在 $\Delta_{\Sigma_m} - 2m$ 的每个补特征空间上通过 $K_\lambda(t)$ 作用，并在其余模态上取零。谱隙和有限个负模态给出

$$\|K(t)\|_{L^2(\Sigma_m)\to L^2(\Sigma_m)} \leq Ce^{-\delta|t|}$$

由于 $\omega_T(\tau)/\omega_T(\tau - t) \leq (1+|t|)^\gamma$，卷积 $w(\tau) = \int_{\mathbb{R}} K(t)\psi(\tau - t)\,\mathrm{d}t$ 满足

$$\|\omega_T w\|_{L^\infty_\tau L^2(\Sigma_m)} \leq C\|\psi\|_{Y^{\mathrm{cyl}}_\gamma},$$

其中，强迫项范数取在 $\tau \geq T$ 上。将模态方程与有限角向谱和作检验，并取极限，得到 $\mathcal{L}_m w = \psi$ 在整个圆柱上的分布意义下成立。

加权 L^2 界以及在嵌套圆柱上的内部 $W^{2,p}$、Sobolev 和 Schauder 估计见第 6 章和第 9] 章，给出

$$\|w\|_{Z_\gamma} \leq C\|\psi\|_{Y^{\mathrm{cyl}}_\gamma}.$$

该常数一致于 T，因为 Σ_m 是紧的，且 $\omega_T \asymp s^\gamma$ 在 $[s-1, s+2]$ 上对 $s \geq T$ 成立。□

5.2. **定量估计与可解性**。使用空间

$$X = B_\beta \oplus QZ_\gamma, \qquad Y = Y^{\mathrm{sc}}_{\beta+1} \oplus QY^{\mathrm{cyl}}_\gamma.$$

对于强迫项 g，使用逐切片坐标

$$g_P(\tau) = \frac{\langle g(\tau,\cdot), u\rangle_{L^2(\Sigma_m)}}{\|u\|^2_{L^2(\Sigma_m)}}, \qquad Pg = g_P u, \qquad g_Q = Qg.$$

对于 $g = \mathcal{E}_m(\Phi(\xi_0 + b) + w)$，记 $\mathscr{E}(b, w) = (g_P, g_Q)$。令 $\mathcal{D} = D\mathscr{E}(0,0)$，且令 $\mathcal{N}(v) = \mathscr{E}(v) - \mathscr{E}(0,0) - \mathcal{D}v$ 对于 $v = (b, w)$。在 $\mathcal{D}$ 的分块记号中，

第一个下标表示输出分量，因此 $\mathcal{D}_{PQ}w=(\mathcal{D}(0,\ w))_P$。对于每个固定的 M 以及所有充分大的 T，$\mathcal{D}$ 都有一个右逆 $J_{\mathcal{D}}:\ Y\to X$，使得

$$\|\mathscr{E}(0,0)\|_Y\le C, \tag{21}$$
$$\|J_{\mathcal{D}}\|_{Y\to X}\le C, \tag{22}$$
$$\|\mathcal{N}(v)-\mathcal{N}(\widetilde{v})\|_Y\le C_MT^{-1/2}\|v-\widetilde{v}\|_X. \tag{23}$$

最后一个估计对 $v,\ \widetilde{v}$ 在半径为 M 的球内成立。对于充分大的 T，这些常数与之无关，且前两个界与 M 无关。

在 $\Phi(\xi_0)$ 处，对于 $0\le j\le 2$，有 $\xi_0^{(j)}=O(\tau^{-q-j})$，因此喷射界给出$\mathcal{R}_{\mathrm{rad}}(\Phi(\xi_0))=O(\tau^{-3q-1})$。根据 (20)，首要临界项相互抵消，因此由 (6) 和 (18) 得到

$$(\mathscr{E}(0,0))_P=O(\tau^{-q-2}+\tau^{-2q-1}),$$
$$(\mathscr{E}(0,0))_Q=O(\tau^{-q-1}).$$

由于 $q\ge 1/2$，这些界蕴含 (21)。

在选定权重下，

$$\|\mathcal{D}_{PP}-\mathcal{A}_\gamma\|_{B_\beta\to Y^{\mathrm{sc}}_{\beta+1}}\le CT^{-q},$$
$$\|\mathcal{D}_{QQ}-\mathcal{L}_m|_Q\|_{QZ_\gamma\to QY^{\mathrm{cyl}}_\gamma}\le CT^{-q},$$
$$\|\mathcal{D}_{QP}\|_{B_\beta\to QY^{\mathrm{cyl}}_\gamma}\le CT^{-1/2}.$$

对于中心块，根据 (20)，bu 和 $k\kappa\xi_0^{k-1}b$ 上的线性径向项给出 $\mathcal{A}_\gamma b$。剩余的静态项对于单位 b 为 $O(s^{-kq-\beta})$。在 $\mathcal{R}_{\mathrm{rad}}$ 的一阶变分中，无论径向导数作用于剖面还是中心变分，都会增加 s^{-1}，因此该项为 $O(s^{-2q-\beta-1})$。QQ界由解析性和 $O(s^{-q})$基喷射推出。对于左下块，解析展开 (18) 给出 $Q\mathcal{S}'(\xi_0)=O(\tau^{-1})$，因为 $(k-1)q=1$。径向项（包括 $2\xi_0hb$的导数）均为更高阶。于是，间隙 $\gamma-\beta=\frac{1}{2}$ 给出 $T^{-1/2}$界。由于 $P\mathcal{L}_mw=0$和 $\mathcal{R}_{\mathrm{rad}}$ 从三次项开始，右上块在 I_s上满足

$$\|\mathcal{D}_{PQ}w-2\xi_0(F_{m,2}(u,w))_P\|_{C^{0,\alpha}(I_s)}$$
$$\le Cs^{-2q}\|w\|_{C^{2,\alpha}(I_s\times\Sigma_m)}.$$

对于每个 $w\in QZ_\gamma$，首项均由以下内容控制

$$s^{\beta+1}\|\xi_0\|_{C^{0,\alpha}(I_s)}\|w\|_{C^{2,\alpha}(I_s\times\Sigma_m)}\le Cs^{1/2-q}\|w\|_{Z_\gamma}.$$

余项的加权大小为 $O(T^{1/2-2q})$。在三元情形下，$q=1$ 给出算子范数中的 $\mathcal{D}_{PQ}=O(T^{-1/2})$。对于 Fano，$q=1/2$，且主导项因二次配对而消失，并且 $F_{8,2}(u_F)=0$，再次得到

$O(T^{-1/2})$。对于向日葵， $q = 1/2$ 给出一致界 $QZ_\gamma \to Y_{\mathrm{sc}^{\beta+1}}$。在 $w = \tau^{-\gamma} h_S$ 上的混合投影给出

$$\mathcal{D}_{PQ} w = -\tfrac{27}{8} A \tau^{-\beta-1} + O(\tau^{-\beta-3/2}),$$

因为 $q + \gamma = \beta + 1$。该 w 具有一致有界的 Z_γ 范数，并且当 T足够大时， $\tau = T$ 处的加权值的绝对值有一个正的下界。因此，我们在主算子中保留向日葵耦合

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\gamma & \mathcal{T}_{PQ} \\ 0 & \mathcal{L}_m|_Q \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{T}_{PQ} = \begin{cases} \mathcal{D}_{PQ} & \text{for sunflower,} \\ 0 & \text{for Fano and triadic.} \end{cases}$$

采用这一选择，我们得到

$$\|\mathcal{D} - \mathcal{T}\|_{X \to Y} \le C T^{-1/2}.$$

由于 $\gamma > \beta$，引理 5.1 给出了 $\mathcal{A}_\gamma$的具有一致有界性的右逆 J_γ。结合引理 5.2 中的 J_Q， $\mathcal{T}$的一个右逆为

$$J_{\mathcal{T}}(g_P, g_Q) = \big(J_\gamma(g_P - \mathcal{T}_{PQ} J_Q g_Q),\, J_Q g_Q\big),$$

其中 $\|J_{\mathcal{T}}\|_{Y \to X} \le C$。由于 $\mathcal{D} J_{\mathcal{T}} - I = (\mathcal{D} - \mathcal{T}) J_{\mathcal{T}}$，

$$\|\mathcal{D} J_{\mathcal{T}} - I\|_{Y \to Y} \le C T^{-1/2}. \tag{24}$$

当 T足够大时，Neumann 级数定义了 $J_{\mathcal{D}} = J_{\mathcal{T}} (\mathcal{D} J_{\mathcal{T}})^{-1}$，并满足界（22）。

对于 (23)，令 $\xi = \xi_0 + b$。解析性和 (19) 给出 $\mathcal{S}''(\xi) = O(|\xi|^{k-2})$。在 $w = 0$ 处，链式法则给出 $D_b^2[F_m(\Phi(\xi))](b_1,\ b_2) = \mathcal{S}''(\xi) b_1 b_2$。对于单位中心变分， $b_i = O(\tau^{-\beta})$，而 $\xi = O_M(\tau^{-q})$ 且 $w = O_M(\tau^{-\gamma})$。解析性和 H¨older 乘积估计给出

$$\begin{aligned} &\big\| D_b^2[F_m(\Phi(\xi) + w)](b_1, b_2) \big\|_{C^{0,\alpha}(I_s \times \Sigma_m)} \\ &\qquad \le C_M \big(s^{-(k-2)q} + s^{-\gamma} \big) s^{-2\beta} \le C_M s^{-q-2}. \end{aligned}$$

$s^{-\gamma}$ 项来自从 $w = 0$ 的变化。混合静态变分和补充静态变分在单位输入上分别为 $O_M(s^{-\beta-\gamma})$ 和 $O_M(s^{-2\gamma})$。由上述喷射界，三次余项贡献 $O_M(s^{-q-2\beta})$。事实上，剖面映射的一阶和二阶变分喷射分别为 $O_M(s^{-\beta})$ 和 $O(s^{-2\beta})$。线性径向算子作用于 $2h b_1 b_2$，由于 B_β 中额外的导数权重，得到 $O(s^{-2\beta-1})$。中心–中心静态界的指数为 $(k-2)q + 2\beta = q + 2$。其余指数满足

$$\min\{\beta + \gamma, 2\gamma, q + 2\beta, 2\beta + 1\} \ge q + 2$$

因为 $q \ge 1/2$。两个投影都保留薄层界。乘以 $s^{\beta+1}$ 可得 $O_M(s^{-1/2})$，对应于 P 分量；乘以 s^γ

可得 $O_M(s^{-1})$，对应于 Q 分量。因此

$$\sup_{\|v\|_X \le M} \|D^2\mathscr{E}(v)\|_{X\times X\to Y} \le C_M T^{-1/2}.$$

中值定理和 $D\mathcal{N}(0) = 0$ 现在给出 (23)。

命题 5.3。对于三个扇区中的每一个，以及所有充分大的 T，都存在 $b \in B_\beta$ 和 $w \in QZ_\gamma$，使得 $f = \Phi(\xi_0 + b) + w$ 在半圆柱上满足 $\mathcal{E}_m(f) = 0$。b 和 w 的范数均有界，且该界与充分大的 T 无关。该解在开半圆柱上光滑。

证明。由 (21)–(23)，映射

$$v \longmapsto -J_{\mathcal{D}}\big(\mathscr{E}(0,0) + \mathcal{N}(v)\big)$$

当 T 足够大时，将 X 中的一个固定的充分大球映到自身并构成压缩映射。该不动点满足相位方程，而内部椭圆自举给出开半圆柱上的光滑性 [6, 第 6 章及 17]。□

6. Proof of the Geometric Theorems

定理 6.1。定理 *1.2* 中的特殊拉格朗日子流形可以选取为具有以下重缩放生成函数：在第 *2* 节的坐标图中，其中 $\tau = -$对数 r：

$$\begin{aligned} f_F &= \frac{\sqrt{35}}{24}\tau^{-1/2}u_F + O(\tau^{-1}), \\ f_T &= \frac{11}{27}\tau^{-1}u_T + O(\tau^{-3/2}), \\ f_S &= \frac{\sqrt{33}}{18}\tau^{-1/2}u_S + O(\tau^{-1}). \end{aligned} \tag{25}$$

这里，u_F、u_T、u_S 分别由 (13)、(9) 和 (15) 给出。对于构造中任意固定的 $\alpha \in (0,1)$，误差在单位圆柱上满足 $C^{2,\,\alpha}$。在向日葵类中，Q 对 u_S 的正交投影给出

$$Qf_S = \frac{11}{108}\tau^{-1}h_S + O(\tau^{-3/2}), \tag{26}$$

其中，h_S 由 (16) 定义。

对于 $\ell \in \{F,T,S\}$，令 A_ℓ 为 (25) 中 $\tau^{-q_\ell}u_\ell$ 的系数。对于 $x = \rho X_0(y)$ 且满足 $\rho = |x|$ 的情形，设 $U_\ell(x) = \rho^2 u_\ell(y)$。定理 1.2 中的截面，$r$ 满足

$$\tau^{q_\ell}\nu_{\ell,r} \longrightarrow -\frac{A_\ell}{2}J\nabla_{C^m_{HL}}U_\ell \qquad in\ C^1 \tag{27}$$

在底环域上，其中 J 是环境复结构。

定理 *1.2* 和 *6.1* 的证明。 命题 5.3 和 $\kappa A^{k-1} = cq/2$ 给出（25）。在向日葵类中，$Qf_S = (\xi_0 + b)^2 h_S + w$，其中 b 是第 5 节中的标量修正项。该恒等式和 $A^2 = 11/108$ 给出（26）。

嵌入图 (3) 具有锥相位和原函数 $\tfrac{1}{2}(G - R\partial_R G)$。 B_r 中的质量为 $O(r^m)$，切片质量为 $O(r^{m-1})$，因此校准流在原点处无边界地延拓。重缩放在 B_δ 中的质量为$O(\delta^m)$，并根据 (25) 收敛，在 C^1 的紧环带上只有一片。因此， C^m_{HL} 是唯一的重数一切锥。其非平面性使原点成为奇异点。

在稍大的环带上写出 $x = \rho X_0(y)$，并将重缩放参数化为 $X_r(x) = r^{-1} z_{f_\ell}(r\rho,\ y)$。由 (25)， $\tau^{q_\ell} f_\ell(\tau - \log\,\rho,\ y) \to A_\ell u_\ell(y)$ 属于 C^2，且 $\tau^{q_\ell}\partial_\tau f_\ell(\tau - \log\,\rho,\ y) \to 0$属于 C^1。(3) 沿静态方向 u_ℓ 的一阶变分的第 j 个分量为 $x_j(\tfrac{m}{2} D_j u_\ell - i u_\ell)$。这是 $-\tfrac{1}{2} J\nabla_{C^m_{HL}} U_\ell$ 的第 j 个分量，因此

$$X_r(x) = x - \tfrac{A_\ell}{2}\tau^{-q_\ell} J\nabla_{C^m_{HL}} U_\ell(x) + o_{C^1}(\tau^{-q_\ell}).$$

由于该锥是拉格朗日的，首项场是法向的。因此，管状邻域垂足映射与恒等映射相差至多 $o_{C^1}(\tau^{-q_\ell})$，用它重新参数化后，底环域上得到 (27)。由于 $\partial_\rho U_\ell = 2\rho u_\ell \not\equiv 0$在那里，极限非零。在 (27) 中取 C^1 范数可知，$\tau^{q_\ell}\|\nu_{\ell,r}\|_{C^1}$ 趋于一个有限的正极限，从而得到 (1) 中的两个界。

识别酉映射会保持共同的切锥以及其上的法向图范数。固定的膨胀会使 τ 平移一个常数，因此，衰减指数 1 和 $1/2$ 不同，排除了这两个九维芽等价的可能。□

References

[1] D. Adams 和 L. Simon, *Rates of asymptotic convergence near isolated singularities of geometric extrema* **37** 1988 2, 225 254 , 《印第安纳大学数学杂志》（），第（–）期。[2] W. K. Allard 和 F. J. Almgren Jr., *On the radial behavior of minimal surfaces and the uniqueness of their tangent cones* 2 **113** 1981 2, 215 265 , 《数学年刊》（）（），第（–）期。doi:10.2307/2006984。[3] T. C. Collins 和 Y. Li, *Uniqueness of some cylindrical tangent cones to special Lagrangians* **33** 2023 376 420 10 1007 00039 023 00634 , 《几何与泛函分析》（），–。doi: . /s - - - x.[4] B. Dimler 和 F. Gaia, *Special Lagrangians with multiple isolated singularities*，预印本，2026，arXiv:2607.26302。[5] M. Engelstein、L. Spolaor 和 B. Velichkov, *(Log-)epiperimetric inequality and regularity over smooth cones for almost area-minimizing currents* **23** , 《几何与拓扑》（2019），第1期，513–540。doi:10.2140/gt.2019.23.513。[6] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Or- der* 2001 10 1007 978 , 第二版，数学经典丛书，施普林格，柏林，。doi: . / - 3-642-61798-0。

[7] R. Harvey 和 H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, 《数学学报》**148**（1982），47–157。[8] M. Haskins, *The geometric complexity of special Lagrangian T^2-cones*, 《发明数学》**157**（2004），第1期，11–70。doi:10.1007/s00222-003-0348-x。[9] D. Joyce, *Special Lagrangian submanifolds with isolated conical singularities. I.* , 《全球分析 *Regularity* **25** 2004 201 251 与几何年刊》（），–。[10] D. Joyce, *Special Lagrangian submanifolds with isolated conical singularities.* , 《全球分析 *II. Moduli spaces* **25** 2004 4, 301 352 与几何年刊》（），第（–）期。doi:10.1023/B:AGAG.0000023230.21785.8d。[11] D. Joyce, *Special Lagrangian submanifolds with isolated conical singularities.* , 《微分几何 *V. Survey and applications* **63** 2003 2, 279 347 杂志》（），第（–）期。arXiv:math/0303272。[12] Y. Li, *Uniqueness of tangent cones with immersed special Legendrian links*, 预印本，2026, arXiv:2610.10790。[13] S. P. Marshall, *Deformations of special Lagrangian submanifolds*, 哲学博士论文，牛津大学，2002。[14] R. C. McLean, *Deformations of calibrated submanifolds*, 《分析与几何通讯》**6**（1998），第4期，705–747。doi:10.4310/CAG.1998.v6.n4.a4。[15] T. Moriyama, *Deformations of special Legendrian submanifolds in Sasaki–Einstein* , *manifolds* **283** 2016 3 4, 1111 1147 10 1007 00209 016 1635 8 《数学杂志》（），第（– –）期。doi: . /s - - -。[16] L. Simon, *Asymptotics for a class of non-linear evolution equations with appli-* , , 《数学年 *cations to geometric problems* 2 **118** 1983 3, 525 571 刊》（）（），第（–）期。doi:10.2307/2006981。