arXiv:2611.30084v1 [physics.plasm-ph] 23 Nov 2026

时空等离子体光子晶体中的相对论谐波产生

HaojieZhang[1], Boyuan Li[1,*], Xiangyan An[1,2], Rong Huang[1], Feng Liu[1], Zheng-Ming Sheng[1,2],和 MinChen[1,*]

[1]暗物质物理全国重点实验室、激光等离子体教育部重点实验室、物理与天文学学院、上海交通大学，中国上海 *200240*[2]李政道研究所、上海交通大学，中国上海 *200240*[*]*minchen@sjtu.edu.cn*（*Min Chen*） *liby1990@sjtu.edu.cn*（*Boyuan Li*）

时空光子晶体为调控光的频率、动量和能量提供了一种途径。若要将这一能力拓展至相对论激光强度，就需要一种等离子体平台。在此，我们提出一种时空等离子体光子晶体（SPPC）：它由强泵浦脉冲驱动，在固体表面形成，另有独立的探测光与由此产生的调制相互作用。SPPC的空间和时间周期性决定了允许的谐波频率和发射角，而其复Floquet能带则揭示了探测光如何从调制中汲取能量。除了谐波产生之外，该图像还预测，当探测光进入SPPC的放大模式时，会出现波长依赖的探测光放大，从而建立能带结构与能量传递之间可通过实验检验的联系。粒子模拟结果与之吻合，支持了这一解释。

1. 引言

时空光子晶体（SPC）是一种光学介质，其电磁性质在空间和时间上均呈周期性变化 [1, 2]。它将空间光子晶体 [3, 4] 和光子时间晶体 [5] 加以推广，结合了空间和时间周期性。这种结合的周期性可使入射光同时发生频率和动量偏移 [1, 6]。正如光子时间晶体所展示的那样，时间周期性还可使调制与光场之间发生能量传递 [7, 8]。这些效应共同带来了在单一时空光子晶体内协同控制散射光的光谱、发射方向和强度的可能性。将这一方法拓展至相对论激光强度，促使人们探索基于等离子体的时空结构。

相对论驱动的等离子体表面为实现这种时空调制提供了一种途径。当强激光脉冲照射固体靶时，其表面形成的等离子体可在反射光中产生高次谐波，这一过程称为高次谐波产生（HHG） [9, 10]。在相对论振荡镜（ROM）模型中，反射等离子体表面以相对论速度沿靶面法线振荡。其运动调制反射场的相位，并可产生高次谐波 [11–14]。从时空角度看，这一过程可理解为光与动态调制的等离子体边界相互作用。

在单光束构型中，同一激光脉冲既驱动等离子体运动，又在反射时受到调制，因此难以独立改变驱动条件和调制光的特性。泵浦–探测光构型能够分别控制这两种作用 [15–17]。从激光-等离子体相互作用的角度来看，多光束构型面临的一项挑战，是将受驱动等离子体响应与谐波的发射方向及各通道携带的能量联系起来。SPC框架通过将光学响应与被驱动等离子体的时空周期性和能带结构联系起来，为这些过程提供了统一的物理图像 [1, 6]。

在本研究中，我们采用 SPC 框架来描述相对论驱动的等离子体表面上的光学调制（图 1）。我们考虑一个斜入射的 p 偏振泵浦脉冲，它驱动表面周期性运动，形成时空等离子体光子晶体（SPPC）；与此同时，一个 s 偏振探测光与该受驱动表面相互作用，并在反射时产生高次谐波。正交偏振使探测诱导谐波能够与泵浦直接产生的辐射区分开来 [12]。我们表明，SPPC 的倒易晶格决定了允许出现的谐波频率和发射角。我们还发现，探测光可以从泵浦驱动调制中获取能量，这一过程可由复Floquet能带解释。预测的探测能量增益和谐波谱与粒子网格法（PIC）模拟结果吻合良好。该图像还预测，当探测光耦合到 SPPC 的放大模式时，会出现波长依赖的探测放大。随后，我们将 SPPC 的解释拓展到两个相交的p偏振泵浦的情形。

2. 物理模型与粒子网格法模拟设置

图1 展示了等离子体中的泵浦-探测相互作用
表面。x 轴垂直于靶，y 轴沿靶表面，位于入射面内。在单泵浦

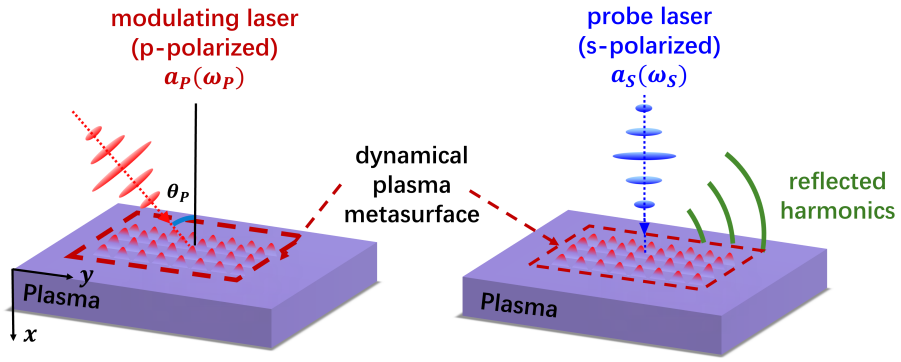


图 1. 激光驱动 SPPC 产生高次谐波过程的示意图。斜入射的 p 偏振调制激光脉冲驱动固体靶上表面等离子体的振荡运动，形成动态超表面（左）。垂直入射的 s偏振探测脉冲与该超表面相互作用，产生反射的高次谐波（右）。

模拟中，p偏振泵浦的波长为 $\lambda_P = 800\,\mathrm{nm}$，相对于靶面法线以 $\theta_P = \pi/4$的角度入射。法向入射的s偏振探测光沿z 方向偏振，波长为 $\lambda_S = 347\mathrm{nm}$（$\omega_S \simeq 2.305\omega_P$），形成非整数频率比，有助于区分探测边带。归一化峰值振幅为$a_P = 2$和$a_S = 0.5$，其中$aj = eEj/(mec\omega j)$ 表示$j = P$、S对应的归一化参数。p偏振泵浦驱动等离子体表面，s偏振探测光被由此产生的调制散射后，生成反射的s偏振谐波。

为揭示泵浦如何在等离子体上印刻时空调制，我们首先明确写出其光学相位。为便于定性讨论，忽略脉冲包络后，归一化矢势为

$$\boldsymbol{a}_P = a_P \sin\Phi_P(\hat{y}\cos\theta_P - \hat{x}\sin\theta_P), \tag{1}$$

其中

$$\Phi_P = \omega_P t - k_P x\cos\theta_P - k_P y\sin\theta_P. \tag{2}$$

这里 Φ_P 是泵浦的传播相位。与上述振幅定义一致，相应的电场可由$\boldsymbol{E}_P = -(mec/e)\partial_t \boldsymbol{a}_P$ 得出，其振幅为$E_P = a_P\omega_P mec/e$。因此，泵浦具有有限的表面法向分量，振幅为 $|E_{P,x}| = E_P\sin\theta_P$，该分量直接驱动表面电子，并将其相位印刻在等离子体响应上。

泵浦驱动的电子响应由相对论冷流体方程支配

$$\begin{aligned}
\partial_t n_e + \boldsymbol{\nabla}\cdot(n_e\boldsymbol{v}_e) &= 0,\\
(\partial_t + \boldsymbol{v}_e\cdot\boldsymbol{\nabla})(\gamma_e m_e\boldsymbol{v}_e) &= -e\left(\boldsymbol{E}_P + \boldsymbol{E}_{\mathrm{es}} + \boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{B}_P\right),\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{es}} &= -\frac{e(n_e - n_0)}{\varepsilon_0},
\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{es}}$ 为静电恢复场，$\gamma_e = [1 - (v_{e,x}^2 + v_{e,y}^2)/c^2]^{-1/2}$ 为电子洛伦兹因子，在当前二维几何中，$\boldsymbol{\nabla} = \hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y$。

为从解析角度说明泵浦相位如何印刻在表面密度响应上，我们取式（3）的微小位移极限下的首阶近似。令 $n_e = n_0(x) + \delta n_e$，设定 $\gamma_e \simeq 1$，并保留泵浦场的线性项。此时，连续性方程和动量方程可化为

$$\begin{aligned}
\partial_t\delta n_e + \boldsymbol{\nabla}\cdot(n_0\boldsymbol{v}_e) &= 0,\\
m_e\partial_t\boldsymbol{v}_e &= -e(\boldsymbol{E}_P + \boldsymbol{E}_{\mathrm{es}}).
\end{aligned} \tag{4}$$

在局域表面层近似下，静电恢复响应由局域等离子体频率表示，这些方程给出

$$\left(\partial_t^2 + \omega_{pe}^2\right)\delta n_e = \frac{e}{m_e}\boldsymbol{\nabla}\cdot(n_0\boldsymbol{E}_P). \tag{5}$$

此处，$\omega_{pe} = \sqrt{n_0 e^2/(\varepsilon_0 me)}$ 为与平衡密度相关的局域等离子体频率。源项可分解为

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(n_0\boldsymbol{E}_P) = \boldsymbol{E}_P\cdot\boldsymbol{\nabla}n_0 + n_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}_P. \tag{6}$$

对于给定的横向平面波泵浦光，场散度项为零。令 $n_0 = n_0(x)$，则源项可近似写为

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(n_0\boldsymbol{E}_P) \simeq E_{P,x}\frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}x}. \tag{7}$$

在远离共振的固定深度处，方程（5）的局部特解为

$$\delta n_e \simeq \frac{e}{m_e}\frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}x}\frac{E_P\sin\theta_P}{\omega_{pe}^2 - \omega_P^2}\cos\Phi_P. \tag{8}$$

方程（8）表明，在斜入射时，表面密度扰动继承了泵浦相位，从而产生有效介电常数的时空调制。这种领先阶响应由表面法向电场驱动，在正入射时消失；此时，更高阶的有质动力仍可驱动周期性的密度变化。在相对论区域，电子层在陡峭的表面密度梯度上运动，呈现出强烈的非线性。这种非线性运动改变了每个光学周期内密度和介电率的演化。总体调制模式近似地在每个泵浦周期重复一次。线性化解揭示了这种重复性的起源。我们利用仅泵浦 PIC 模拟获得用于重建介电率的非线性波形。

我们使用二维PIC代码 EPOCH [18] 模拟具有截断指数型预等离子体的过密靶。补充材料1第1节给出了脉冲、靶和数值参数。仅泵浦运行提供受驱动等离子体响应。仅探针运行为泵浦诱导增益提供基线。泵浦加探针运行独立检验所预测的增益和光谱。SPPC计算中的入射探针由其注入参数指定。

利用仅泵浦PIC密度n_e 和胞元平均动能 $\langle K\rangle$，我们得到s偏振探测光的标量响应，

$$\bar{\gamma}(x,y,t) = 1 + \frac{\langle K(x,y,t)\rangle}{m_e c^2}, \tag{9}$$

$$\varepsilon_{\text{eff}}(x,y,t;\omega) = 1 - \frac{e^2 n_e(x,y,t)}{\varepsilon_0 m_e \bar{\gamma}(x,y,t)\omega^2}. \tag{10}$$

图 2 展示了固定y 位置（$y = y_0$）处的密度和介电率调制。右图显示了从 $\varepsilon_{\text{eff}}(x,y_0,t;\omega_S)$ 中减去其在所示四个泵浦周期内的时间平均值后得到的 $\Delta\varepsilon_{\text{eff}}(x,t)$。

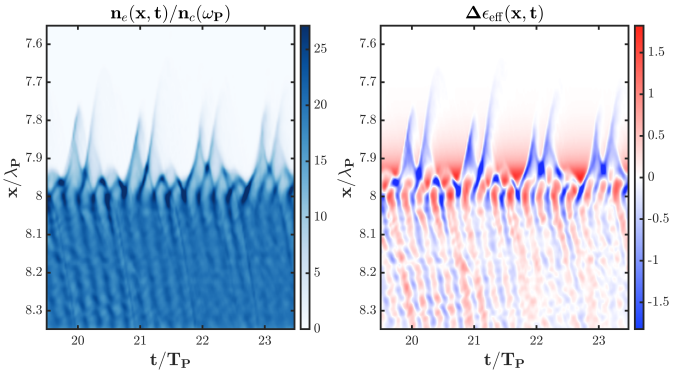


图 2。 从 PIC模拟中提取的单束 p偏振激光驱动的等离子体表面时空调制，取自固定横向位置$y = y_0$。左图显示归一化到临界密度$n_c(\omega_P)$的电子密度$n_e(x,t)$ 。振荡的等离子体边界及表面下方的密度结构在x-t 平面中大致每个泵浦周期重复一次。右图显示在探针频率 ω_S 处计算得到的有效介电常数调制 $\Delta\varepsilon_{\text{eff}}(x,t)$。

3. 时空光子晶体中的谐波产生

图 2中观察到的逐周期重复性，加上式（2）中由泵浦相位施加的切向周期性，使受驱动等离子体表面成为一个 SPPC。我们利用这一描述推导谐波频率和发射角的选择定则，并计算探测能量增益和谐波谱。

A. 几何时空界面旋转下的场变换

时空光子晶体（SPC）的周期性介电常数调制可建模为一系列局部时空界面。因此，我们首先考虑探测光与单个界面的相互作用（图3）。为简单起见，我们将空间变化限制在x 方向。随后，随时间和空间变化的介电率 $\varepsilon(t、x)$可表示为x $-t$ 平面上跨越界面的不连续剖面。界面两侧介质的介电率不同，其间的过渡可用 Heaviside函数表示：

$$\varepsilon(t,x) = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Theta(\beta t - x), \tag{11}$$

其中，$\beta \equiv \tan\theta$ 是界面在t $-x$坐标中的速度。为方便起见，这里设c $= 1$ 。一般而言，β 可能同时依赖于时间和空间。然而，在足够短的时间区间内，界面的运动总可以近似为局部匀速运动。

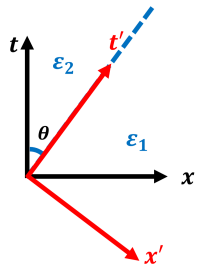


图 3. 时空界面描述t-x 平面上介电率的局部变化。在适当的几何时空变换下，新的时间轴（t'）变得与界面平行，从而将时空界面变换为纯空间界面。

可引入几何旋转而非洛伦兹变换，将时空界面变换为纯空间界面，

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \tag{12}$$

其中 $x^{\mu} = (t, x, y, z)$。旋转矩阵为

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

坐标导数变换为

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \tag{14}$$

其中 Λ^{-1} 是 Λ的逆矩阵。

经过这次旋转后，介电率与新的时间坐标 t'无关，

$$\varepsilon(t,x) = \varepsilon'(x'). \tag{15}$$

因此，沿 t' 方向的平移不变性得以恢复，如图 3所示。根据式(13)，旋转坐标中的广义频率和波矢为

$$k'^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} k^{\nu}, \tag{16}$$

其中 $k^{\mu} = (\omega, k_x, k_y, k_z)$。Biancalana 等人 已经证明，广义频率 ω' 在时空界面 [6]处发生散射时守恒。这一守恒定律可由沿 t' 方向恢复的平移对称性来理解： ω' 是与该对称性对应的生成元。

电磁场张量在相同的旋转下进行变换，

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\ \mu} (\Lambda^{-1})^{\beta}_{\ \nu} F_{\alpha\beta}, \tag{17}$$

其中 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu$和 A^μ是电磁四维势。

B. SPPC发射光的频率

接下来，我们推导由周期性驱动的时空界面产生的频率分量。为方便起见，我们考虑单色s偏振探针在由较强的p偏振泵浦产生的给定调制背景上的散射。探测光是沿x 方向传播的平面波，其电场沿z方向偏振。在一段较短时间内，该描述在局部范围内有效，此时界面速度可近似为 $\beta = \tan\theta$。

在有效介质描述中，探测场的麦克斯韦方程为

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \tag{18}$$

$$\nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} = 0, \tag{19}$$

在频率选择推导中，我们忽略弱探针对泵浦驱动等离子体的反馈，并在固定的横向位置（t，x）ε（x，y_0,t；ω_S）处计算绝对介电常数。瞬时本构关系为

$$D = \varepsilon(t,x)E, \tag{20}$$

$$H = B/\mu_0. \tag{21}$$

在几何旋转坐标系中，介电率仅取决于x'。由于泵浦驱动的等离子体响应在相邻光学周期之间近似重复，因此在相关相互作用区间内，可将 ε'（x'）视为周期函数。我们将旋转坐标中的周期记为l',

$$\varepsilon'(x') = \varepsilon'(x'+l'). \tag{22}$$

对于调制频率 ω_P，原坐标中的时间周期为$T_P = 2\pi/\omega_P$。在旋转$x' = -t\sin\theta + x\cos\theta$下，在固定$x$处进行时间平移 $\Delta t = T_P$，对应于 $\Delta x' = -T_P\sin\theta$。由于介电率与$t'$无关，因此其沿$x'$ 方向的周期为$l' = |\Delta x'| = 2\pi|\sin\theta|/\omega_P$。

在旋转坐标中表示介电率后，本构关系可写为

$$D = \varepsilon'(x')E. \tag{23}$$

应用公式（14）和（17）中的变换，并令 E′z(x′, t′) = E′z0(x′)e$^{-i\omega' t'}$ 和 B′y(x′, t′) = B′y0(x′)e$^{-i\omega' t'}$，即可得到电场振幅满足的下列波动方程（见补充材料1第2节）。

$$\frac{\mathrm{d}^2E'_{z0}}{\mathrm{d}x'^2} - \frac{\mu_0\sin^2\theta\,\partial_{x'}\varepsilon' + 2i\omega'\sin\theta\cos\theta(1+\mu_0\varepsilon')}{\cos^2\theta - \mu_0\varepsilon'\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}E'_{z0}}{\mathrm{d}x'} + \frac{(\mu_0\varepsilon'\cos^2\theta - \sin^2\theta)\omega'^2 - i\omega'\mu_0\sin\theta\cos\theta\,\partial_{x'}\varepsilon'}{\cos^2\theta - \mu_0\varepsilon'\sin^2\theta}E'_{z0} = 0. \tag{24}$$

由于公式（24）中的系数关于 x' 以 l'为周期，因此根据弗洛凯定理，场可以展开为布洛赫模。对于一般的波包，可以写成

$$E'_{z0}(x') = \int_{\mathrm{BZ}} \mathrm{d}q\, A(q)\, u_q(x')e^{iqx'}, \tag{25}$$

其中，q 是布洛赫波数，BZ 表示由$G = 2\pi/l'$定义的倒易晶格的第一布里渊区，而$u^q(x') = u^q(x'+l')$ 具有周期性。等价地，

$$u_q(x') = \sum_n e'_{q,n}e^{iG_nx'}, \qquad G_n = \frac{2\pi n}{l'}. \tag{26}$$

因此，每个布洛赫分量都包含波数为$q + G_n$的傅里叶谐波。

对于以下频率选择论证，只需考虑一个入射布洛赫分量，因为在这个线性弗洛凯问题中，不同的布洛赫分量彼此独立地演化。该分量的布洛赫波数由入射探测激光确定。具体而言，在原坐标中指定入射探测激光的频率和传播方向后，通过旋转即可确定其在旋转坐标中的广义频率和波数。对于频率为ω_S、波数为k_S 且沿x 方向传播的入射探测激光分量，有

$$\omega'_S = \omega_S\cos\theta - k_S\sin\theta, \qquad k'_S = \omega_S\sin\theta + k_S\cos\theta. \tag{27}$$

因此，对于固定的入射分支，ω_S k'_S 是一一对应的。

对于这个入射布洛赫分量，其周期部分可以按倒格子谐波展开，

$$E'_{z0}(x') = \sum_n e'_n e^{i(k'_S+G_n)x'}, \qquad G_n = \frac{2\pi n}{l'}. \tag{28}$$

同理，

$$B'_{y0}(x') = \sum_n b'_n e^{i(k'_S+G_n)x'}. \tag{29}$$

变换回原坐标并利用方程（27），可得

$$\begin{aligned} E_z &= \cos\theta E'_{z0}e^{-i\omega'_S t'} - \sin\theta B'_{y0}e^{-i\omega'_S t'} \\ &= \sum_n (e'_n\cos\theta - b'_n\sin\theta)e^{i[(k_S+G_n\cos\theta)x - (\omega_S+G_n\sin\theta)t]}. \end{aligned} \tag{30}$$

因此，第n个分量的频率为

$$\omega_n = \omega_S + G_n\sin\theta = \omega_S + \frac{2\pi n}{l'}\sin\theta. \tag{31}$$

对于频率选择推导，不失一般性，我们取 $\sin\theta > 0$；反转界面取向等价于重新标记 $n \to -n$。因此，$l' = 2\pi\sin\theta/\omega_P$，生成的频率为

$$\omega_n = \omega_S + n\omega_P. \tag{32}$$

因此，周期驱动时空界面会将入射探测激光转换为间隔等于调制频率的谐波。尽管上述推导假设界面在局部以恒定速度运动，但更复杂的等离子体运动可以分解为足够短的时间段，其中一个时间段产生的场作为下一时间段的入射场。

这一推导从调制周期性确立了频率选择定则，但并未确定各个谐波的频率相关响应或强度。生成的分量具有各自的频率相关等离子体响应，并可能进一步发生频率转换。每次转换都会使频率偏移 ω_P的整数倍，因此允许的频率仍为 $\omega_S + n\omega_P$。下文将使用频率相关响应模型计算定量谐波谱，具体内容见补充材料1第3节。

C. 谐波发射角

接下来，我们利用广义频率守恒，求出单束斜入射p偏振激光驱动的等离子体表面的谐波辐射角。在实验室坐标系L中，p偏振驱动光以角度 θ_P^L入射，而s偏振探测光垂直入射。为更清晰地分析守恒量，我们引入洛伦兹变换，将其变换到运动系M，在该系中，p偏振驱动光变为垂直入射，如图4所示。漂移速度为$v_d = \sin\theta_P^L$。在平面波和局部平面靶面近似下，M 系中的系统沿靶面具有平移不变性，且泵浦驱动等离子体响应不依赖于y 。

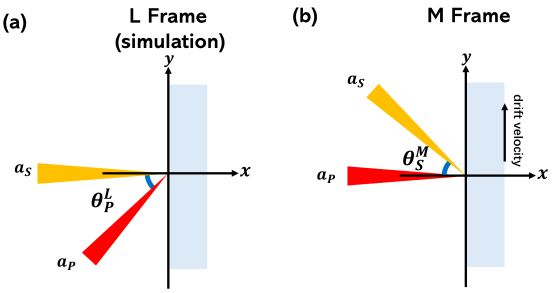


图 4. 实验室系 L **(a)**和运动系M **(b)**中激光脉冲与靶的相对取向。红色和黄色光束分别表示 p 偏振和 s 偏振激光。对于带符号的入射角，s 偏振激光满足 $\theta_S^M = -\theta_P^L$。

在这种平移不变性近似下，界面在y 方向上是时间性的。它可以写成

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Theta(\beta_x t - x)\Theta(\beta_y t - y),\ \beta_y \to +\infty. \tag{33}$$

在极限 $\beta_y \to +\infty$ 下，第二个阶跃函数化简为 $\Theta(t)$。随后在 t-y 平面内进行几何旋转，得到

$$\begin{pmatrix} t' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}. \tag{34}$$

相应地，

$$\begin{pmatrix} \omega' \\ k_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ k_y \end{pmatrix}. \tag{35}$$

因此，运动系M中的广义频率守恒 ω' 等价于 $-k_y$ 守恒，其中 k_y 是运动系M 中沿y方向的波数。

将这一守恒量变换回实验室系可得

$$k_{n,y}^L = \frac{k_{n,y}^M + v_d\omega_n^M}{\sqrt{1-v_d^2}} = nk_P^L \sin\theta_P^L. \tag{36}$$

此处n 表示探测光的泵浦调制谐波，上标L 和M 分别表示实验室系和运动系。将此横向动量选择定则与频率选择定则及真空色散关系结合起来，即可得到谐波位置和发射角，

$$\begin{aligned} &(k_{n,x}^L, k_{n,y}^L) = \omega_n(\cos\theta_n, \sin\theta_n), \\ &\omega_n = \omega_S + n\omega_P, \\ &\sin\theta_n = \frac{k_{n,y}^L}{k_n^L} = \frac{n\omega_P \sin\theta_P}{\omega_S + n\omega_P}. \end{aligned} \tag{37}$$

θ_n 对谐波频率的依赖表明，单泵浦谐波辐射具有角度色散。

图5将式（37）预测的谐波位置与第2节所述单泵浦构型的PIC模拟结果进行了比较。背景显示了 $|Ez(kx,ky)|$在k 空间中的分布，该分布由PIC模拟中的反射场获得；圆圈标示理论预测的位置。

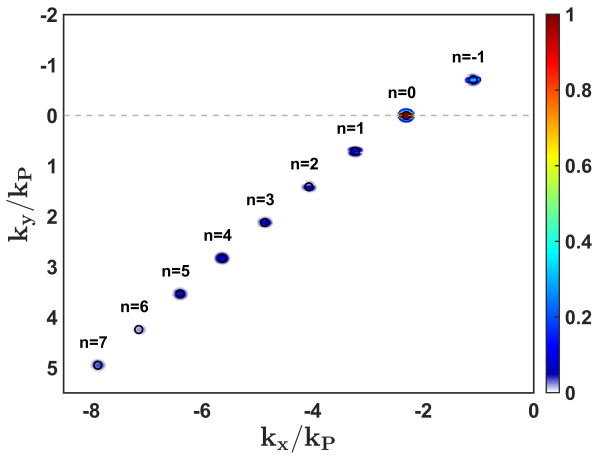


图 5. 单泵浦PIC模拟所得谐波位置与理论预测的比较。背景显示了 $|Ez(kx,ky)|$ 在k 空间中的分布，圆圈标示式（37）预测的谐波位置。整数n 表示与p偏振泵浦驱动的SPPC相关联的谐波阶数。由于分析的是反射谐波分量，k_x 为负值。

D. 辐射效率增强

在光子时间晶体（PTC）中，时间调制可以打开具有复数Floquet本征频率 [5]的动量带隙。在这些带隙内，增长模从调制中汲取能量 [1, 7]。我们以这一放大机制为出发点，考察泵浦驱动的SPPC如何放大探测光并增强其谐波辐射。

图6比较了泵浦加探测光与仅探测光PIC模拟所得的角度积分光谱（分别以蓝色和橙色表示）。存在泵浦时，在 $\omega_S + n\omega_P$ 处出现明显峰值，高频光谱强度提高了数个数量级。黄色虚线连接各峰，描绘出非单调的光谱包络。我们将这种调制归因于预等离子体截断形成的紧凑电子层所产生的亚周期辐射脉冲之间的干涉（补充材料1第1节） [19, 20]。

对于图7所示的代表性区域，我们将 ε_{eff}（x、y、t；ω）根据公式（10）中的一个泵浦周期窗口进行周期性延拓，并利用传递矩阵法 [5, 21]计算复Floquet能带结构。我们在仅泵浦PIC 模拟中跟踪电子层的时间演化

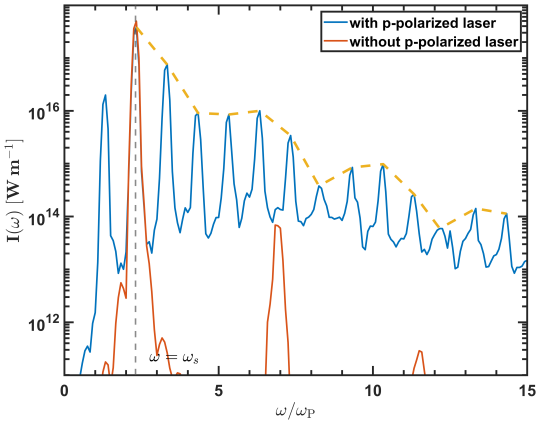


图 6. 有无 p 偏振泵浦时 s 偏振探测光的角度积分谐波光谱。蓝线表示存在 p 偏振驱动光时的光谱强度，橙线表示仅由 s 偏振探测光产生的谐波。

并根据相邻时间切片确定其瞬时速度 $\beta(t) = \mathrm{d}x_{\mathrm{ref}}/(c\mathrm{d}t)$。在选定时刻，$\beta = -0.709$，从而得到旋转角 $\theta = \arctan\beta = -35.33°$，利用该角度，根据公式（16、$k'$）将复色散变换到广义坐标（$\omega'$、$k'$）。

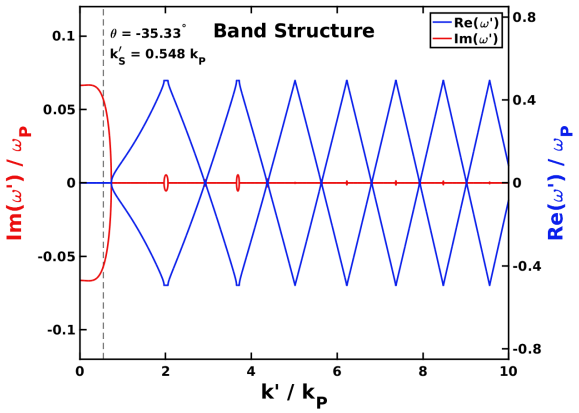


图 7. 根据代表性横向位置 $y = 23.253\lambda_P$ 在第二个泵浦周期内仅由泵浦驱动的 PIC 电子动力学重建的复能带结构，并以广义坐标表示(ω',k')。蓝色曲线表示右轴上的 $\mathrm{Re}(\omega')/\omega_P$，红色曲线表示左轴上的 $\mathrm{Im}(\omega')/\omega_P$。灰色虚线标示广义探针波数 $k'_S = 0.548k_P$，其对应于$\theta = -35.33°$。

对于入射的 s偏振探测光，$k_S = 2.305k_P$。根据从临界面运动中提取的旋转角，以及上文采用的 $c = 1$约定，式（16）给出 $k'_S = \omega_S \sin\theta + k_S \cos\theta = 0.548k_P$，如图 7中的灰色虚线所示。因此，入射探测光位于第一动量带隙内，此处两个广义频率分支构成一对共轭复数对。$\mathrm{Im}(\omega') > 0$为正的分支从由 p偏振泵浦维持的时变等离子体调制中汲取能量，因而不断增长。具体而言，对于与 $\exp(-i\omega' t')$成正比的 Floquet 模式，其场能量按 $\exp[2\mathrm{Im}(\omega')t']$增长，因此 $2\mathrm{Im}(\omega')$ 直接给出时间广义坐标中的能量增长率。

时空旋转的作用至关重要。在纯 PTC 中，动量带隙主要导致时间增长。然而，在时空光子晶体中，广义频率和波矢是物理频率与波矢的混合量。因此，广义能带结构中的带隙在实验室坐标系中对应于时间放大与空间衰减的组合。对于低频分量，传播过程中的空间衰减可能会部分抵消时间增长。由于入射探针位于第一个动量带隙内，p 激光驱动调制可以通过广义频率的虚部放大探针频率附近的分量，同时将这一放大的响应耦合到 $\omega_S + n\omega_P$阶边带。由于这些较高频率的边带位于低频带隙之外，受到的衰减要弱得多。由此，被驱动等离子体调制中储存的能量可以转化为高频谐波辐射，这与图6所示的光谱一致。

为定量评估这种放大，我们首先利用局域复能带结构，计算从泵浦驱动的等离子体调制传递到 s 偏振场的总能量。图7展示了一个具有代表性的局域能带，而增益计算则在相继的点 (x_i, y_j, t_p) 对相互作用区域进行采样，其中层 $\{\Delta x_i\}$ 覆盖探针趋肤深度，子区域 $\{\Delta y_j\}$ 覆盖探测光与泵浦驱动的等离子体调制之间的横向重叠区域，而 $\{\Delta T_p\}$ 为选定的调制区间。此处使用的采样增量为 $\Delta x = 0.01\lambda_P$、$\Delta y = 0.05\lambda_P$ 和 $\Delta t = 0.025T_P$。在每个时间切片处，以该切片为中心、总跨度为一个泵浦周期的窗口会被周期性延拓，以定义局域 Floquet问题。在每个 (x_i, y_j, t_p) 处，根据局域等离子体响应重建有效介电常数和复能带结构。将 Floquet 模变换回实验室坐标后，局域能量增长率 g^{net}_{ijp} 由 $2\,\mathrm{Im}(\omega)$ 确定，而入射探针能量密度 $u_{S,\mathrm{in}}(x_i, y_j, t_p)$ 则根据给定的探测场计算，同时计入由 $2\,\mathrm{Im}(k_x)$ 决定的空间能量密度衰减。

局域能量增益通过进入同一时空单元的探测光能量密度进行评估，

$$\dot{u}^{\mathrm{gain}}_{S,ijp} = g^{\mathrm{net}}_{ijp} u_{S,\mathrm{in}}(x_i, y_j, t_p). \tag{38}$$

截至第N个调制区间末端的累积预测能量增益为

$$\Delta W_{S,\mathrm{pred}}(t_N) = \sum_{p=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{i=1}^{N_x} \dot{u}^{\mathrm{gain}}_{S,ijp}\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta T_p. \tag{39}$$

每个调制区间结束后，相互作用区域内剩余的场能量将作为输入的一部分传递至下一个区间，从而考虑场能量在连续泵浦周期中的持续存在和累积。

在 PIC模拟中，能量增益定义为在其他条件相同的情况下，s偏振场相较于仅探针模拟所携带的额外能量。图 8 左图将这一 PIC 结果与方程（39）进行了比较。预测的累积能量增益在四个主要调制周期内始终与 PIC 结果高度吻合。在相互作用结束时，总能量增益为

$$\Delta W_{S,\mathrm{pred}} = 160.07\,\mathrm{J\,m^{-1}}, \quad \Delta W_{S,\mathrm{PIC}} = 161.41\,\mathrm{J\,m^{-1}}, \tag{40}$$

对应的相对差异约为 0.83%。这种一致性表明，与 SPPC动量带隙相关的局部增长，在相互作用区域和连续调制区间内累积后，定量解释了向 s偏振场的净能量转移。

接下来，我们根据重构的等离子体响应计算谐波谱。对于s偏振场，局域无碰撞标量近似给出

$$\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)E_z-\frac{1}{c^2}\partial_t^2E_z-\frac{\mu_0e^2n_e(x,y,t)}{m_e\bar{\gamma}(x,y,t)}E_z=0. \tag{41}$$

将所给定探测光的连续入射谱作为输入，并保留其有限带宽。谐波谱计算保留最高至$n_{\max}=12$的傅里叶阶数。与频率相关的多阶传输与散射矩阵计算及其数值实现详见补充材料1第3节。

在图8的右图中，计算得到的光谱再现了$\omega_S+n\omega_P$处主要谐波的位置和强度。PIC光谱中更宽的峰以及更强的连续背景，可能由有限的相互作用持续时间、周期间变化、时空非均匀性和非共振Floquet耦合引起。

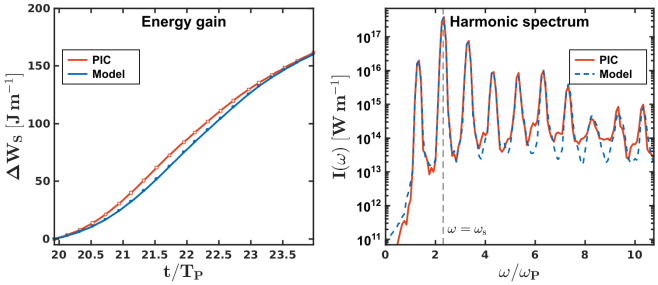


图8。 SPPC预测与PIC模拟的比较。左图显示了s偏振场在四个主导调制周期内的累积能量增益；红色和蓝色曲线分别表示PIC结果和预测结果。右图比较了相应的角度积分、时间平均连续光谱强度，其中红色实线表示PIC结果，蓝色虚线表示预测结果。灰色竖直虚线标出了探针频率 $\omega=\omega_S$。

为考察能量增益对入射探针频率的依赖关系，我们进行了探测波长分别为225、236、300、325、347和1000 nm的PIC模拟，并将增益与模型预测进行比较。在全部六个波长下，靶密度平台均为过密。图 9 的上图给出了增益对比，下图给出了ω' 在与图7 相同的代表性局域调制下的实部和虚部。

225和236 nm的探测光对应于所选局部调制的允许带，其中$\mathrm{Im}(\omega')=0$，并表现出相对较小的增益。相比之下，300、325、347和1000 nm的探测光位于动量带隙内，其中广义频率分支具有非零虚部，并表现出显著更大的增益。从300到347 nm，能量增益的增大也与广义频率正虚部的增大相一致。

此处所示的广义频率对应于一个代表性局域区域和时间区间。总能量增益是通过在整个相互作用区域和持续时间内，累积局部评估的贡献而获得的，如式（39）所示，在此期间局域能带结构会发生变化。因此，与所选局部调制的允许带相对应的探测光波长，可能落入其他局域区域或时间区间的动量带隙中，但仍可获得有限的净增益。出于同样的原因，对于这一代表性局域调制，最终能量增益预计不会与广义频率的虚部直接成正比。

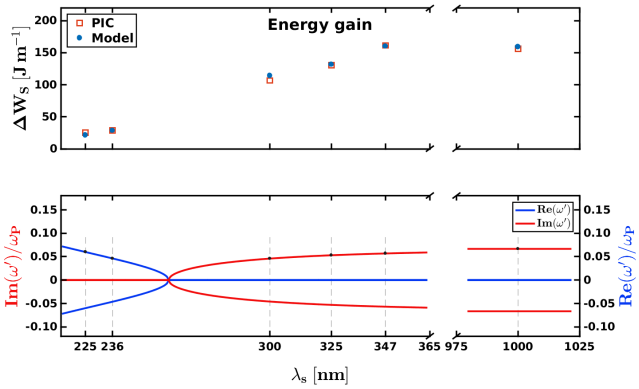


图9. 入射探测波长对应的能量增益和广义频率。上图：s偏振场的总能量增益，红色空心方块表示PIC结果，蓝色实心圆表示模型预测。下图：广义频率 ω'的实部和虚部，采用与图7 相同的代表性局域调制进行计算，并显示为入射探测波长 λ_S的函数。蓝色曲线表示右侧纵轴上的$\mathrm{Re}(\omega')/\omega_P$，红色曲线表示左侧纵轴上的$\mathrm{Im}(\omega')/\omega_P$。黑点和灰色虚线标示所测试的探测波长。

4. 扩展至双泵浦情形

现在，我们将第2 节中的单泵浦构型扩展为两个p偏振泵浦脉冲。单个泵浦脉冲替换为两个相对于靶法线对称入射的泵浦脉冲，其带符号的入射角为 $\theta_{P1}=\theta_P$ 和 $\theta_{P2}=-\theta_P$，其中 $\theta_P=\pi/4$。它们的波长分别为 $\lambda_{P1}=800$ nm和$\lambda_{P2}=1000$ nm，且二者具有相同的归一化峰值振幅$a_{P1}=a_{P2}=2$。探测光及其余模拟参数保持不变。

对于双泵浦情形，我们通过以整数对 (n_1,n_2) 标记的傅里叶通道，描述由两个泵浦共同驱动的完整等离子体响应。一个通道会给探测光带来频率和横向动量偏移，分别为 $n_1\omega_{P1}+n_2\omega_{P2}$ 和 $n_1k_{P1}\sin\theta_{P1}+n_2k_{P2}\sin\theta_{P2}$。这些标记也涵盖联合驱动响应的非线性混合分量。将允许的偏移与真空色散关系结合，可得

$$\begin{aligned}&(k^L_{(n_1,n_2),x},k^L_{(n_1,n_2),y})=\omega_{(n_1,n_2)}(\cos\theta_{(n_1,n_2)},\sin\theta_{(n_1,n_2)}),\\&\omega_{(n_1,n_2)}=\omega_S+n_1\omega_{P1}+n_2\omega_{P2},\\&\sin\theta_{(n_1,n_2)}=\frac{k^L_{(n_1,n_2),y}}{k^L_{(n_1,n_2)}}=\frac{n_1\omega_{P1}\sin\theta_{P1}+n_2\omega_{P2}\sin\theta_{P2}}{\omega_S+n_1\omega_{P1}+n_2\omega_{P2}}.\end{aligned} \tag{42}$$

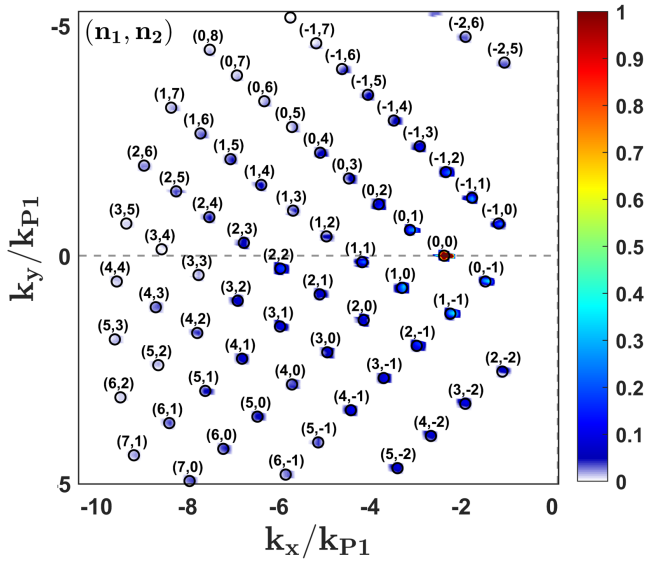


图 10. 双泵浦PIC模拟得到的谐波位置与理论预测的比较。背景显示 $|E_z(k_x,k_y)|$ 在k 空间中的分布，两个坐标轴均以k_{P1}归一化，圆圈标出由式（42）预测的谐波位置。数对(n_1,n_2) 标示联合驱动响应中允许的傅里叶通道。由于分析的是反射谐波分量，k_x 为负值。

双泵浦粒子网格法模拟中观测到的谐波位置与公式（42）一致，其中包括发射角随频率的变化，如图10所示。

图11 表明，该模型与PIC增益曲线高度吻合，并在绝对强度尺度上捕捉到了主要光谱特征。最终能量增益为

$$\Delta W_{S,\mathrm{pred}} = 104.73\,\mathrm{J\,m^{-1}}, \quad \Delta W_{S,\mathrm{PIC}} = 106.51\,\mathrm{J\,m^{-1}}, \qquad \textbf{(43)}$$

相对差异约为 1.68%。

值得注意的是，这种双泵浦配置下的能量增益低于图8所示的单泵浦情形，尽管增加了一个泵浦。因此，加入第二个泵浦并不一定会增强探测光放大。这一结果与将等离子体调制视为联合驱动响应的处理方式一致。我们的计算直接采用这种组合响应，而不假设两个泵浦分别产生的调制可以线性叠加。

为考察这种降低的空间起因，图12 比较了单泵浦和双泵浦PIC模拟中，按周期积分的探测光能量增益的横向分布。两种分布均在相同的近表面深度和四个周期的时间区间内进行评估。单泵浦分布形成相对宽阔的平台，而双泵浦分布则呈现增益增强区与显著低增益谷交替出现的特征。在若干区域，双泵浦增益高于单泵浦值，但这些局部增强无法弥补受抑制区域中的损失。

两个对称入射的泵浦在表面法向驱动场E_x中产生周期性干涉图样。当它们的E_x 分量发生相长干涉时，增强的法向驱动可加强周期性电子层运动及其相关的有效介电常数调制，从而提高局部放大。这与以下部分相符：

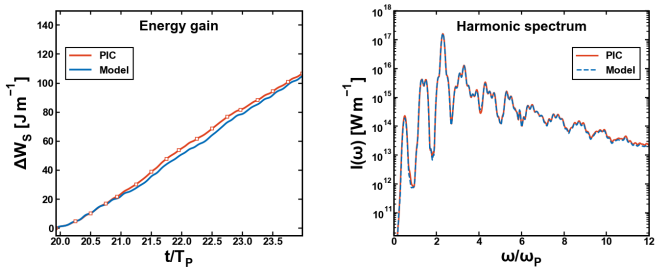


图 11. 双泵浦构型下SPPC预测与PIC模拟的比较。左图：s偏振场的累积能量增益。右图：反射s偏振场的绝对强度谐波谱。红色曲线表示PIC结果，蓝色曲线表示模型预测；左图中的模型曲线为实线，右图中为虚线。时间和频率分别以800 nm泵浦的周期和频率为归一化单位。

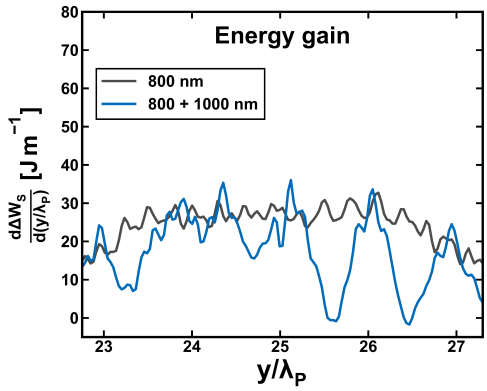


图12。 单泵浦（800 nm，灰色）和双泵浦（800 +1000 nm，蓝色）PIC模拟中近表面探测光能量增益的横向剖面。这里，λ_P 表示800 nm泵浦波长。

图12中双泵曲线高于单泵结果的部分。相反，相消干涉会削弱法向驱动及相应的有效介电常数调制，从而降低局部放大。由此产生的对比为一种物理解读：尽管某些区域的放大更强，空间积分增益却更低。

由于两个泵浦的频率不同，该干涉图样会沿$v_b = \Delta\omega_P/\Delta k_{P,y}$方向沿表面漂移，其中 $\Delta\omega_P = \omega_{P1} - \omega_{P2}$和 $\Delta k_{P,y} = k_{P1}\sin\theta_{P1} - k_{P2}\sin\theta_{P2}$。这种漂移远慢于单泵浦情形下泵浦驱动的表面调制的相位传播。因此，对此处所考虑的几个周期取平均，并不能完全消除增强驱动区域与抑制驱动区域之间的横向对比度；这种对比度在图12中的周期积分增益剖面里仍然可见。

5. 结论

总之，我们证明了，相对论驱动的等离子体表面对于弱探针而言可充当时空等离子体光子晶体（SPPC）。SPPC 的空间和时间周期性决定了允许出现的谐波频率和发射角。对于两个泵浦，同一框架可识别

共同驱动的等离子体响应中的混合频率–动量通道。两种配置下，预测的谐波位置均与 PIC结果一致。

SPPC 图景阐明了探测光如何从泵浦驱动调制中汲取能量。我们利用复Floquet能带量化探测能量增益，并根据相同的等离子体响应预测谐波谱。在单泵浦和双泵浦情况下，最终能量增益与 PIC结果的差异分别为 0.83% 和 1.68%。两种情况下，预测的谐波光谱也都与 PIC 光谱吻合良好。

多个泵浦为构建可重构的 SPPC 提供了途径。改变其频率、入射角、相对相位和偏振态，可以调控等离子体调制，进而控制谐波频率、发射方向和转换效率。结构化驱动光还可将这种控制扩展至谐波波前。例如，拉盖尔–高斯光束可在等离子体调制上写入方位角结构，为产生阿秒涡旋辐射提供途径。更广泛地说，将周期性驱动的等离子体视为时空光子晶体，为理解和设计新的激光等离子体相互作用机制提供了有用框架。

致谢

本研究得到中国国家自然科学基金（项目编号：12225505、12475245 和 12135009）、中国教育部基础学科与交叉学科突破计划（JYB2025XDXM204）、上海交通大学2030计划的资助，并部分得到暗物质物理全国重点实验室的资助。本文的计算在 π 2.0集群上完成，该集群由上海交通大学高性能计算中心提供支持。

补充文件。支持性内容见补充材料1。

参考文献

1. Y. Sharabi、A. Dikopoltsev、E. Lustig等，“时空光子晶体”，Optica**9**，585–592（2022年）。 2. X. Ye、Y. G. Wang、J. F. Yao等，“基于有源超表面的时空光子晶体实现”，Laser & Photonics Reviews**19**，2401345（2025）。 3. E. Yablonovitch，“固态物理和电子学中的自发辐射抑制”，《物理评论快报》**58**，2059–2062（1987）。 4. S. John，“某些无序介电超晶格中光子的强局域化”，《物理评论快报》**58**，2486–2489（1987）。 5. E. Lustig、Y. Sharabi 和 M. Segev，“光子时间晶体的拓扑性质”，Optica**5**，1390–1395（2018）。 6. F. Biancalana、A. Amann、A. V. Uskov 和 E. P. O’Reilly，“时空介电结构中的光传播动力学”，《物理评论E》**75**，046607（2007）。 7. M. Lyubarov、Y. Lumer、A. Dikopoltsev等，“光子时间晶体中的放大辐射与激光振荡”，Science**377**，425–428（2022年）。 8. X. Wang、M. S. Mirmoosa、V. S. Asadchy等，“基于超表面的光子时间晶体实现”，Science Advances**9**，eadg7541（2023）。 9. P. Gibbon，“飞秒激光与固体相互作用产生的谐波：一种相干的‘水窗’光源？”，《物理评论快报》**76**，50–53（1996）。 10. R. J. L. Timmis、C. R. J. Fitzpatrick、J. P. Kennedy等，“针对极端场优化效率的相对论等离子体谐波”，Nature**652**，1153–1158（2026）。 11. S. V. Bulanov、N. M. Naumova 和 F. Pegoraro，“超短、相对论强度激光脉冲与过密等离子体的相互作用”，Physics of Plasmas**1**，745–757（1994）。 12. R. Lichters, J. Meyer-ter Vehn 和 A. Pukhov，“相对论强度驱动的振荡等离子体表面产生的短脉冲激光谐波”，Physics of Plasmas**3**, 3425–3437 (1996). 13. B. Dromey, M. Zepf, A. Gopal等，“相对论极限下的高次谐波产生”，《自然·物理》**2**, 456–459 (2006). 14. T. Baeva, S. Gordienko 和 A. Pukhov，“相对论激光与过密等离子体相互作用中的高阶谐波产生理论”，《物理评论E》 **74**, 046404 (2006). 15. Y. Xia, B. Li, M. Chen等，“双激光脉冲与固体靶相互作用产生高效角度色散高阶谐波”，Physics of Plasmas**30**, 123108 (2023). 16. X. Wang, J. Gao, F. Liu等，“两个激光脉冲驱动固体靶产生的孤立阿秒脉冲”，Physics of Plasmas **32**, 083303 (2025). 17. H.-J. Zhang, B.-Y. Li, X.-Y. An等，“相对论振荡等离子体光栅产生阿秒脉冲”，《物理评论研究》 **8**, 023261 (2026). 18. T. D. Arber, K. Bennett, C. S. Brady等，“激光等离子体建模的现代粒子网格方法”，《等离子体物理与受控聚变》 **57**, 113001 (2015). 19. B. Y. Li, F. Liu, M. Chen等，“通过预等离子体截断实现高质量高阶谐波产生”，《物理评论E》 **100**, 053207 (2019). 20. B. Y. Li, F. Liu, M. Chen等，“利用激光实现表面等离子体压缩并高效产生谐波的实验演示”，《物理评论快报》 **128**, 244801 (2022). 21. S. Mishra 和 S. Satpathy，“一维光子晶体：克罗尼格-彭尼模型”，《物理评论B》 **68**, 045121 (2003).

时空等离子体光子晶体中的相对论谐波产生：补充文档

1. 粒子网格模拟参数

激光脉冲。p偏振泵浦（$\lambda_P = 800$ nm，$a_P = 2$）以 $\theta_P = \pi/4$入射。s偏振探测光（$\lambda_S = 347$ nm，$a_S = 0.5$）垂直入射。它们的焦斑尺寸分别为 $3\lambda_P$ 和 $8\lambda_P$，且 $a_j = eE_j/(m_e c\omega_j)$，其中 $j = P, S$。每个脉冲具有 $\sin^2(\pi t/2\tau_j)$ 包络，其中 $\tau_P = 10T_P$、$\tau_S = 5T_P$，且 $T_P = 2\pi/\omega_P$。设置延迟，使强度峰值同时到达靶面。

靶。固体靶的厚度为 $2\lambda_P$，平台电子密度为20n
$\varepsilon_0 \quad {}_e\omega_P^2 \quad {}^2 = 1\,7 \times 10^{21} \quad {}^{-3}$
$_0 = 8\lambda_P$
$_c \qquad _c =$
$_e \qquad =$，其中 n m /e . cm 。

平台从 x 处开始。预等离子体满足 n (x) 20n_c exp[(x $-$ x_0)/d] ，适用于 x $< x_{0,}$，其中 d $= 0.1\lambda_P$，并在 $7n_c \cos\theta_P$ 处截断。此选择的依据是关于预等离子体截断 [1] 和激光驱动的表面等离子体压缩[2] 的研究，以实现高效谐波产生。

数值设置。二维 EPOCH 模拟采用一个 $12\lambda_P \times 50\lambda_P$ 计算区域（沿x 和y方向），其中有 $\Delta x = \Delta y = \lambda_P/250$ 个网格单元，每个网格单元包含 64 个电子宏粒子和 16 个离子宏粒子。脉冲以指定角度从左边界入射。其他边界均为开放边界。对于双泵浦配置，只有正文第 4 节中指定的泵浦设置会发生变化。

2. 旋转坐标系中的波动方程

在有效介质描述中，探测场的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \tag{S1}$$

$$\nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} = 0, \tag{S2}$$

在频率选择推导中，我们忽略弱探针对泵浦驱动等离子体的反馈，并在固定横向位置 y_0 处计算绝对介电常数 $\varepsilon(t,x) = \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{eff}}(x,y_0,t;\,\omega_S)$。瞬时本构关系为

$$D = \varepsilon(t,x)E, \tag{S3}$$

$$H = B/\mu_0. \tag{S4}$$

在几何旋转坐标系中，介电率仅依赖于 x'。由于泵浦驱动的等离子体响应在相邻光学周期之间近似重复，因此在相关相互作用区间内，可将 $\varepsilon'(x')$ 视为周期函数。我们将旋转坐标中的周期记为 l'，

$$\varepsilon'(x') = \varepsilon'(x' + l'). \tag{S5}$$

对于调制频率 ω_P，原坐标中的时间周期为 $T_P = 2\pi/\omega_P$。在旋转变换 $x' = -t\sin\theta + x\cos\theta$ 下，在固定 x 处进行时间平移 $\Delta t = T_P$，对应于 $\Delta x' = -T_P\sin\theta$。由于介电率与 t' 无关，因此其沿 x' 的周期为$l' = |\Delta x'| = 2\pi|\sin\theta|/\omega_P$。

将介电率表示在旋转坐标中，本构关系可写为

$$D = \varepsilon'(x')E. \tag{S6}$$

利用正文中的公式（14）和（17），原坐标中的坐标导数和场可表示为

$$\frac{\partial}{\partial t} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial t'} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial x'},$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x'} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial t'}. \tag{S7}$$

场分量变换为

$$E_z = \cos\theta E'_z - \sin\theta B'_y,$$
$$B_y = \cos\theta B'_y + \sin\theta E'_z. \tag{S8}$$

对于此处考虑的一维几何，其他场分量和导数保持不变。

将这些关系代入法拉第定律，得到

$$\begin{aligned}\left(\nabla\times E+\frac{\partial B}{\partial t}\right)_y &= -\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial t}\\ &= -\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x'}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\cos\theta E'_z-\sin\theta B'_y\right)\\ &\quad+\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial t'}-\sin\theta\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\cos\theta B'_y+\sin\theta E'_z\right)\\ &= -\frac{\partial E'_z}{\partial x'}+\frac{\partial B'_y}{\partial t'}=0.\end{aligned} \tag{S9}$$

因此，麦克斯韦方程组的这一部分在几何旋转下保持其形式。其余导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_y}{\partial x} &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x'}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\cos\theta B'_y+\sin\theta E'_z\right)\\ &= \cos^2\theta\frac{\partial B'_y}{\partial x'}+\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial E'_z}{\partial x'}+\frac{\partial B'_y}{\partial t'}\right)+\sin^2\theta\frac{\partial E'_z}{\partial t'},\end{aligned} \tag{S10}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_z}{\partial t} &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial t'}-\sin\theta\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left[\varepsilon'\left(\cos\theta E'_z-\sin\theta B'_y\right)\right]\\ &= \cos^2\theta\varepsilon'\frac{\partial E'_z}{\partial t'}-\sin\theta\cos\theta\varepsilon'\frac{\partial B'_y}{\partial t'}-\sin\theta\cos\theta\varepsilon'\frac{\partial E'_z}{\partial x'}\\ &\quad+\sin^2\theta\varepsilon'\frac{\partial B'_y}{\partial x'}-\sin\theta\cos\theta E'_z\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x'}+\sin^2\theta B'_y\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x'}.\end{aligned} \tag{S11}$$

对 t' 求导并利用式（S9），得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\mu_0\frac{\partial D_z}{\partial t}\right)\\ &= \left(\cos^2\theta-\mu_0\varepsilon'\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 E'_z}{\partial x'^2}+\left(\sin^2\theta-\mu_0\varepsilon'\cos^2\theta\right)\frac{\partial^2 E'_z}{\partial t'^2}\\ &\quad+2\sin\theta\cos\theta\left(1+\mu_0\varepsilon'\right)\frac{\partial^2 E'_z}{\partial t'\partial x'}\\ &\quad+\mu_0\left(\sin\theta\cos\theta\frac{\partial E'_z}{\partial t'}-\sin^2\theta\frac{\partial E'_z}{\partial x'}\right)\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x'}=0.\end{aligned} \tag{S12}$$

取

$$E'_z(x',t')=E'_{z0}(x')e^{-i\omega' t'},\quad B'_y(x',t')=B'_{y0}(x')e^{-i\omega' t'},$$

电场振幅满足

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2E'_{z0}}{\mathrm{d}x'^2}-\frac{\mu_0\sin^2\theta\,\partial_{x'}\varepsilon'+2i\omega'\sin\theta\cos\theta\left(1+\mu_0\varepsilon'\right)}{\cos^2\theta-\mu_0\varepsilon'\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}E'_{z0}}{\mathrm{d}x'}\\ &+\frac{\left(\mu_0\varepsilon'\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\omega'^2-i\omega'\mu_0\sin\theta\cos\theta\,\partial_{x'}\varepsilon'}{\cos^2\theta-\mu_0\varepsilon'\sin^2\theta}E'_{z0}=0.\end{aligned} \tag{S13}$$

3. 多阶 Floquet 传递矩阵法

我们将探测场的二维波动方程 [正文中的式（41）] 表示为有效等离子体频率的形式，

$$\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)E_z-\frac{1}{c^2}\partial_t^2E_z-\frac{\omega_{pe,\mathrm{eff}}^2(x,y,t)}{c^2}E_z=0. \tag{S14}$$

仅泵浦 PIC 模拟中的电子密度 n_e 和平均洛伦兹因子 $\bar{\gamma}$ 决定$\omega_{pe,\mathrm{eff}}^2(x,y,t)=e^2n_e(x,y,t)/[\varepsilon_0m_e\bar{\gamma}(x,y,t)]$。规定的入射探测场设定了边界条件。

对于与时间无关的等离子体响应，该方程可还原为 $\varepsilon_{\mathrm{eff}}(\omega)=1-\omega_{pe,\mathrm{eff}}^2/\omega^2$。连续入射谱按频率逐一计算。对于每个入射频率 ω，固定 $\mathrm{y}=\mathrm{y}^j$，定义 $\mathrm{E}j(\mathrm{x},\mathrm{t};\omega)\equiv\mathrm{E_z}(\mathrm{x},\mathrm{y}^j,\mathrm{t};\omega)$，并令$\omega_{pe,\mathrm{eff},j}^2(\mathrm{x},\mathrm{t})\equiv\omega_{pe,\mathrm{eff}}^2(\mathrm{x},\mathrm{y}^j,\mathrm{t})$，然后将等离子体响应和场展开为时间傅里叶分量：

$$\begin{aligned}\omega_{pe,\mathrm{eff},j}^2(x,t)&=\sum_l\left(\omega_{pe,\mathrm{eff}}^2\right)_{l,j}(x)e^{-il\omega_Pt},\\ E_j(x,t;\omega)&=\sum_m E_{m,j}(x;\omega)e^{-i\omega_mt},\qquad \omega_m=\omega+m\omega_P.\end{aligned} \tag{S15}$$

横向动量选择定则给出 $k_{m,y}=mk_P\sin\theta_P$。在方程（$E_m=-k_{m,y}^2E_m$ 中保留横向导数，S14）即可得到耦合的 Floquet 方程

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2E_{m,j}}{\mathrm{d}x^2}\\ &+\sum_n\left[\left(\frac{\omega_m^2}{c^2}-k_{m,y}^2\right)\delta_{mn}-\frac{\left(\omega_{pe,\mathrm{eff}}^2\right)_{m-n,j}(x)}{c^2}\right]E_{n,j}=0.\end{aligned} \tag{S16}$$

在每个空间层内，傅里叶系数均视为局部常数。将展开截断至$m=-M,\ldots,M$后，我们引入 Floquet 振幅向量$\boldsymbol{E}^j=(E_{-M,j},\ldots,E_{M,j})^{\mathrm{T}}$。对于每个入射频率 ω和局部单元(x_i,y^j,t^p)，耦合方程变为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{E}_j}{\mathrm{d}x^2}+\boldsymbol{C}_{ijp}(\omega)\boldsymbol{E}_j=0,\\ &\left(\boldsymbol{C}_{ijp}(\omega)\right)_{mn}=\left(\frac{\omega_m^2}{c^2}-k_{m,y}^2\right)\delta_{mn}-\frac{\left(\omega_{pe,\mathrm{eff}}^2\right)_{m-n}^{(ijp)}}{c^2}.\end{aligned} \tag{S17}$$

为简洁起见，后续传递矩阵和散射矩阵对入射频率 ω 的依赖关系予以省略。定义 $\boldsymbol{\Psi}_j=(\boldsymbol{E}^j,\partial_x\boldsymbol{E}^j)^{\mathrm{T}}$ 可将该方程转化为一阶形式，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_j}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}_{ijp}\boldsymbol{\Psi}_j,\quad \boldsymbol{A}_{ijp}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{C}_{ijp}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}. \tag{S18}$$

因此，厚度为 Δx_i 的层内状态向量按如下方式传播

$$\boldsymbol{\Psi}_j(x+\Delta x_i)=\boldsymbol{P}_{ijp}\boldsymbol{\Psi}_j(x),\quad \boldsymbol{P}_{ijp}=\exp\left(\boldsymbol{A}_{ijp}\Delta x_i\right). \tag{S19}$$

对于固定的(j,p)，场沿表面法线方向依次穿过N_x 层。因此，整个趋肤深度区域内的传播算子为以下有序乘积

$$\boldsymbol{P}_{jp}=\prod_{i=1}^{\overleftarrow{N_x}}\boldsymbol{P}_{ijp}, \tag{S20}$$

其中箭头表示表面法线排序，较大的i 对应的矩阵从左侧作用。

为区分沿 $+x$ 和 $-x$ 方向传播的波，我们写作

$$\boldsymbol{\Psi}_j = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}^+\\ \boldsymbol{E}^-\end{pmatrix}, \tag{S21}$$

其中$\boldsymbol{Q}$ 包含相应的弗洛凯特本征模。该模态基下的传递矩阵为

$$\boldsymbol{T}_{jp} = \boldsymbol{Q}_R^{-1}\boldsymbol{P}_{jp}\boldsymbol{Q}_L = \begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_{11} & \boldsymbol{T}_{12}\\ \boldsymbol{T}_{21} & \boldsymbol{T}_{22}\end{pmatrix}, \tag{S22}$$

因此

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_R^+\\ \boldsymbol{E}_R^-\end{pmatrix} = \boldsymbol{T}_{jp}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_L^+\\ \boldsymbol{E}_L^-\end{pmatrix}. \tag{S23}$$

这里，$(\boldsymbol{E}^+{}_L, \boldsymbol{E}^-{}_R)$ 为入射振幅，而$(\boldsymbol{E}^-{}_L, \boldsymbol{E}^+{}_R)$ 为出射振幅。假设$\boldsymbol{T}_{22}$ 非奇异，将第二个分块行方程对$\boldsymbol{E}^-{}_L$ 求解，并代入第一个分块行方程，得到

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_L^-\\ \boldsymbol{E}_R^+\end{pmatrix} = \boldsymbol{S}_{jp}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_L^+\\ \boldsymbol{E}_R^-\end{pmatrix}, \tag{S24}$$

with

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{S}_{jp})_{11} &= -\boldsymbol{T}_{22}^{-1}\boldsymbol{T}_{21}, & (\boldsymbol{S}_{jp})_{12} &= \boldsymbol{T}_{22}^{-1},\\ (\boldsymbol{S}_{jp})_{21} &= \boldsymbol{T}_{11} - \boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{T}_{22}^{-1}\boldsymbol{T}_{21}, & (\boldsymbol{S}_{jp})_{22} &= \boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{T}_{22}^{-1}.\end{aligned} \tag{S25}$$

对于每个(j, p) 组合及入射频率 ω，该散射矩阵将探测场映射为反射和透射的弗洛凯特边带，其横向波矢为$k_{m,y} = mk_{P,y}$。连续的输入频率体现了有限的探测带宽，而整数通道阶数决定了横向动量偏移。出射振幅按其对应的输出频率进行汇总，并通过对横向子区域j 和选定调制区间p中的通道强度求和，得到角度积分光谱。因此，该计算保留了依赖于阶数的横向波矢，尽管角度积分图并未分别显示各个横向动量通道。预测的累积能量增益和角度积分光谱均与PIC结果一致，这表明降阶模型捕捉到了主要转换过程，并为SPPC放大机制提供了定量证据。

参考文献

1. B. Y. Li, F. Liu, M. Chen, 等，“通过预等离子体截断实现高质量高阶谐波产生”，《物理评论E》**100**，053207（2019年）。2. B. Y.Li,F.Liu, M. Chen, 等，“利用激光通过表面等离子体压缩实现高效谐波产生的实验演示”，《物理评论快报》**128**，244801（2022年）。