arXiv:2611.30103v1 [math.DG] 23 Nov 2026

全纯向量丛上陈联络的差值估计

CHENGHONG HE、吴迪和XI ZHANG

Abstract. 本文从程-尤型估计的角度研究陈联络的唯一性问题。我们为具有下界里奇曲率的完备非紧K¨ahler流形上的全纯向量丛建立了陈联络的局部差值估计。这些局部估计不仅使我们能够获得具有非负Ricci曲率的完备非紧K¨ahler流形上厄米-爱因斯坦联络的唯一性结果，还可用于研究 $\mathbb{C}^n$ 上的复Monge-Amp`ère方程的Liouville定理，以及完备非紧里奇平坦K¨ahler流形上厄米度量的陈平坦性和K¨ahler性。

1. Introduction

¯设$(E,\ \partial_E)$是K¨ahler流形上的全纯向量丛。底层复向量丛上的厄米度量H 称为厄米-爱因斯坦度量，如果

$$\Lambda F_H^{\perp} \triangleq \Lambda F_H - \frac{\operatorname{tr}\Lambda F_H}{\operatorname{rank}(E)}\,\mathrm{id}_E = 0, \tag{1.1}$$

其中，Λ 表示与K¨ahler形式的缩并，F_H 是陈联络 D_H的曲率。我们称这样的 D_H 为厄米-爱因斯坦联络；文献中有时也称其为厄米-杨-米尔斯联络。得益于包括Narasimhan-Seshadri [NS], 、Mehta-Ramanathan [MR], 、Donaldson [Do1、Do2] 以及Uhlenbeck-Yau [UY], 在内的一系列研究，著名的紧致K¨ahler流形上的Donaldson-Uhlenbeck-Yau定理表明，Mumford-Takemoto多稳定丛上存在厄米-爱因斯坦度量。此外，不难看出，在Mumford-Takemoto稳定丛上，行列式相同的两个厄米-爱因斯坦度量必定相同。

关于在非紧 K¨ahler 流形上求解厄米-爱因斯坦方程 (1.1)，已有若干结果，参见 [Ban, Mo, MS, Ni, NR, Si, WZ, Zh] 及其中的参考文献。然而，在非紧流形上，唯一性问题似乎更加微妙。据我们所知，这方面已知的结果并不多。即使对于最重要的模型——底空间可以紧化的情形，直到 Mochizuki 最近的工作 [Mo] ，唯一性问题才得到解决；而存在性问题则早在三十多年前便由 Simpson [Si] 解决。另一种方法可参见 [WZ]。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 32L05，32W20，53C07，53C55。*Key words and phrases.*

陈联络、Hermitian–Einstein联络、全纯向量丛。作者获得国家自然科学基金项目（编号：12601105、12431004、12141104）、中国博士后科学基金项目（编号：2025T181124、2023M731699）、江苏省优秀博士后人才资助计划（编号：2022ZB282）、江苏省自然科学基金项目（编号：BK20230902）、中央高校基本科研业务费项目（编号：WZCT202601009）以及基础研究稳定支持计划项目（编号：WZJC202601001）的资助。

我们将从一个全新的视角研究厄米-爱因斯坦问题的唯一性。一个重要的灵感来源是经典的Cheng-Yau梯度估计。

定理 1.1 ([CY, Ya])。 设$(M、\ g)$ 是一个维数为 n 的完备黎曼流形，$\mathrm{Ric}_g \geq -\kappa g$，且在测地球 B_R 上有 $\kappa \geq 0$。若 $u \in C^\infty(B_R)$ 是一个正的调和函数，则存在一个只依赖于维数 M 的正常数 C，使得

$$\sup_{B_{R/2}} \frac{|\nabla u|}{u} \leq \frac{C(1+\sqrt{\kappa}R)}{R}. \tag{1.2}$$

特别地，当$\mathrm{Ric}_g \geq 0$时，不存在非平凡的全局正调和函数。

程-丘方法已成为五十多年来的典范和灵感来源。许多其他问题的重要结果都深受定理 1.1的影响。

我们从最简单的情形开始：两个厄米-爱因斯坦度量 H，K 彼此有界、共形，并满足 tr $\Lambda F_H =$tr ΛF_K。由定理 1.1可直接推出，只要底空间K¨ahler流形是完备的且具有非负Ricci曲率，它们就具有相同的陈联络。直观地说，这自然促使我们依据Cheng-Yau估计的思想研究一般的唯一性问题。我们预期，具有相同的行列式且彼此有界的两个厄米-爱因斯坦度量必定具有相同的陈联络。

给定两个厄米度量 H，K于 E上，我们定义 $h = K^{-1}H \in A^0(M,\ \mathrm{End}(E))$ 如下：

$$H(\bullet, \bullet) = K(h(\bullet), \bullet). \tag{1.3}$$

那么， h 关于 K 和 H是自伴的。令 $\lambda_{R,\ \max}$ 为 h 在 B_R 上的最大特征值的上确界，$\lambda_{R,\ \min}$ 为 h 在 B_R上的最小特征值的下确界。

本文中，除非另有说明，内积和范数均相对于 H 和 g取值。此外，我们始终用 C 表示一个仅依赖于 $\dim_{\mathbb{C}} M$ 的正常数，该常数可能随行文而变化。

我们的核心思路是建立陈联络的局部差估计 s.

¯**定理 1.2.** 设(E, ∂_E) 是完备 *K¨ahler* 流形(M, g) 上的全纯向量丛，且$\mathrm{Ric}_g \geq -\kappa g$ 和 $\kappa \geq 0$ 定义在测地球 B_R上。设 H, K 是 E上的两个厄米度量，满足行列式 $H =$行列式 K。若 H是厄米-爱因斯坦度量，则有

$$\begin{aligned}\sup_{B_{R/2}} |D_H - D_K| &\leq C(A_R\lambda_{R,\max})^{1/2}\frac{1+\sqrt{\kappa}R}{R} \\ &+ C(A_R\lambda_{R,\max})^{1/2}(\sup_{B_R}|F_K^\perp| + \sup_{B_R}|\Lambda F_K^\perp|_K)^{1/2} \\ &+ C(A_R\lambda_{R,\max})^{1/3}\sup_{B_R}|D_K(\Lambda F_K^\perp)|^{1/3},\end{aligned} \tag{1.4}$$

其中 $A_R =$上确界 迹h^{-1} 和 $h = K^{-1}H$。
B_R

如果 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$ 和 K 是射影平坦的（即 $F_K^\perp = 0$），则由定理 1.2 可得

$$\sup_{B_{R/2}} |D_H - D_K| \leq \frac{C\sqrt{\mathrm{rank}(E)}}{R}(\frac{\lambda_{R,\max}}{\lambda_{R,\min}})^{1/2}, \tag{1.5}$$

其中我们使用了$A_R\lambda_{R,\min} \leq$rank(E)。因此我们得到

推论 1.1. 设(E,∂_E) 为具有非负*Ricci*曲率的完备非紧*K¨ahler*流形上的全纯向量丛。设 H、 K 为 E上的两个*Hermitian*度量，且$\det H=\det K$。若 H是厄米-爱因斯坦的， K是射影平坦的，并且

$$\frac{\lambda_{R,\max}}{\lambda_{R,\min}}=o(R^2), \tag{1.6}$$

那么 $D_H=D_K$。

尤其是，我们证明了射影平坦的陈联络具有预期的唯一性。推论 1.1 也可视为一项刚性结果，因为它给出了厄米-爱因斯坦联络射影平坦的充分条件。在紧致 K¨ahler 流形上，同样的刚性结论需要切尔恩数限制；而 Simpson [Si] 则研究了紧致 K¨ahler 流形中丰除子的补集上的同一问题。

从本质上说，程-丘的思想是对调和对象给出估计。容易看出，若 H 是厄米-爱因斯坦度量且 $\mathrm{tr}\,\Lambda F_H$ 为常数，则 $F_H\in A^{1,1}(M,\mathrm{End}(E))$ 是一个调和截面，因此，与定理 1.1 平行的定理应当给出对F_H的估计。然而，由于两个陈联络之差并非调和对象，从这个意义上说，程-丘的思想在此处以非标准方式运用，导致局部差估计中出现困难，右侧还会多出一些项。我们在附录中说明，这些项并不能全部消去：在 $\mathbb{C}^2$上存在两个彼此有界、行列式相同但陈联络不同的厄米-爱因斯坦度量。

尽管已有反例表明，射影平坦假设不能替换为厄米-爱因斯坦假设，但我们通过以下局部差估计，找到了预期唯一性成立的充要条件。

定理 1.3. 设(E,∂_E) 是完备 *K¨ahler* 流形(M,g) 上的全纯向量丛，满足$\mathrm{Ric}_g\geq-\kappa g$ 且 $\kappa\geq0$ 在测地球 B_R上。假设 H, K 是 E上的两个厄米度量，且行列式 $H=$行列式K。若 H是厄米-爱因斯坦度量，则有

$$\begin{aligned}\sup_{B_{R/2}}|D_H-D_K|&\leq C(A_R\lambda_{R,\max})^{1/2}\frac{1+\sqrt{\kappa}R}{R}\\&\quad+C(A_R\lambda_{R,\max})^{1/2}(\sup_{B_R}|h^{-1}[F_K,h]|+\sup_{B_R}|\Lambda F_K^{\perp}|+\sup_{B_R}|\Lambda F_K^{\perp}|_K)^{1/2}\\&\quad+C(A_R\lambda_{R,\max})^{1/3}(\sup_{B_R}|h^{-1}\Lambda D_K[F_K,h]|+\sup_{B_R}|D_K(\Lambda F_K^{\perp})|)^{1/3},\end{aligned} \tag{1.7}$$

其中 $A_R=\sup_{B_R}$上确界 迹h^{-1} 且 $h=K^{-1}H$。

推论 1.2. 设(E,∂_E) 是具有非负*Ricci*曲率的完备非紧 *K¨ahler* 流形上的全纯向量丛。假设 H, K 是 E上的两个厄米-爱因斯坦度量，且行列式 $H=$行列式K并且

$$\frac{\lambda_{R,\max}}{\lambda_{R,\min}}=o(R^2). \tag{1.8}$$

那么，当且仅当 $[F_K,h]=0$时， $D_H=D_K$。

下面我们将结果与先前工作 [Mo, WZ]进行比较。按照 [WZ], , 若两个厄米度量 H， K 满足以下条件，则称它们彼此兼容：

$$\det H=\det K,\ K^{-1}H\in L^{\infty},\ \overline{\partial}_E(K^{-1}H)\in L^2. \tag{1.9}$$

Mochizuki [Mo]证明了紧致 K¨ahler 流形上 Zariski 开子集上的稳定厄米全纯向量丛的彼此兼容的 Hermitian-Einstein度量的唯一性。其证明实质上用到了 Uhlenbeck-Yau正则性 [UY]。不借助这一深刻的预备结果，Wu-Zhang [WZ] 给出了一种更简单的替代证明，而且该证明适用于更一般的情形。在 [Mo, WZ], 中，Hermitian-Einstein联络的唯一性直接源于次调和函数的 Liouville定理。关键在于证明，在稳定性条件下，Hermitian-Einstein度量的唯一性可由 Hermitian-Einstein联络的唯一性推出。与 [Mo, WZ], 不同，本文关注的是 Hermitian-Einstein联络本身的唯一性。

下面，我们将我们的结果应用于全纯切丛。

设 g_0 是 $\mathbb{C}^n$ 上的标准度量，其 K¨ahler 形式为 ω_0，平凡联络为 ∇_{g_0}。我们得到 $\mathbb{C}^n$ 上复 Monge-Amp`ère 方程的以下 Liouville定理。

定理1.4。设 ω 是 $\mathbb{C}^n$ 上的里奇平坦 ***K¨ahler*** 形式，并且存在正函数 c_R、C_R 使得

$$c_R\omega_0|_{B_R} \le \omega|_{B_R} \le C_R\omega_0|_{B_R},\ \frac{C_R}{c_R^2} = o(R^2),\ B_R = \{z \in \mathbb{C}^n, |z| < R\}. \tag{1.10}$$

那么 $\nabla_{g_0}\omega = 0$；等价地，存在一个 ***Hermitian*** 常矩阵 $A = (A_{ij})$ 使得

$$\omega = \sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}dz^i \wedge d\bar{z}^j. \tag{1.11}$$

特别地，这一结果恢复了 Riebesehl–Schulz 的经典 Liouville定理。

推论1.3 ([RS])。设 ω 为 $\mathbb{C}^n$ 上的一个 ***K¨ahler*** 形式，且存在常数 C 使得

$$\omega^n = \omega_0^n,\ C^{-1}\omega_0 \le \omega \le C\omega_0. \tag{1.12}$$

则 $\nabla_{g_0}\omega = 0$，等价地，存在一个常数厄米矩阵 $A = (A_{ij})$ 使得

$$\omega = \sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}dz^i \wedge d\bar{z}^j. \tag{1.13}$$

We 记 $\nabla_\bullet$ 为黎曼度量 $\bullet$的Levi-Civita联络。我们得到

定理1.5。设 (M, g) 为一个完备非紧里奇平坦 ***K¨ahler***流形。假设 $\tilde{g}$是一个***Chern*** 平坦厄米度量，且存在正函数 c_R、C_R 使得

$$c_Rg|_{B_R} \le \tilde{g}|_{B_R} \le C_Rg|_{B_R},\ \frac{C_R}{c_R} = o(R^2),\ B_R = \{q \in M | \operatorname{dist}_g(p, q) < R\},\ p \in M. \tag{1.14}$$

则 $\nabla_g = \nabla_{\tilde{g}}$。特别地，$g$ 是平坦的，且 $\tilde{g}$ 是 ***K¨ahler***的。

推论 1.4。设 (M, g) 为一个完备非紧里奇平坦 ***K¨ahler***流形。假设 $\tilde{g}$是一个具有零***Chern*** 全纯截面曲率的厄米度量，且存在正函数 c_R、C_R 使得

$$c_Rg|_{B_R} \le \tilde{g}|_{B_R} \le C_Rg|_{B_R},\ \frac{C_R}{c_R} = o(R^2),\ B_R = \{q \in M | \operatorname{dist}_g(p, q) < R\},\ p \in M. \tag{1.15}$$

于是 $\tilde{g}$ 是 *Ch* 陈平坦当且仅当它是 ***K¨ahler*** 流形。若这些等价条件成立，$\nabla_g = \nabla_{\tilde{g}}$.

另一个动机来自厄米几何中的一个猜想：若紧致厄米流形具有常值 Chern 全纯截面曲率 c，则当 $c \neq 0$ 时它是 K¨ahler 流形，而当 $c = 0$ 时它是 Chern 平坦的。我们关注常数为零的情形。该猜想在二维 [ADM, Bal, BG] 和三维 [CZ, QT] 中已得到证明。得益于 [Bo]，紧致 Chern 平坦流形是复李群的商，而这些复李群可能不是 K¨ahler 的。然而，推论 1.4 表明，在相对于里奇平坦 K¨ahler 度量满足增长假设的条件下，在非紧致情形中，Chern 平坦性与 K¨ahler 性等价。

2. Local difference estimates and consequences

¯设 (E, ∂_E) 是 K¨ahler 流形 (M, g) 上的全纯向量丛。对于 E 上的厄米度量 H，记其陈联络和陈曲率分别为 $D_H = \partial_H + \bar{\partial}_E$ 和 $F_H = D_H^2$。记由 D_H 和陈联络 ∇_g 诱导的联络为 ∇_H。给定另一个厄米度量 K，定义 $h = K^{-1}H$。设 $u, v \in A^0(M, E)$，则

$$\begin{aligned} H(\partial_H u, v) &= \partial H(u, v) - H(u, \overline{\partial}_E v) \\ &= \partial K(h(u), v) - K(h(u), \overline{\partial}_E v) \\ &= K((\partial_K \circ h)(u), v) \\ &= H((h^{-1} \circ \partial_K \circ h)(u), v) \\ &= H((\partial_K + h^{-1}\partial_K h)(u), v). \end{aligned} \tag{2.1}$$

因此，我们有

$$D_H - D_K = h^{-1}\partial_K h \in A^{1,0}(\operatorname{End} E). \tag{2.2}$$

由于陈曲率是 (1,1) 型的，因此

$$F_H = F_K + \bar{\partial}_E(h^{-1}\partial_K h). \tag{2.3}$$

定理 1.2 的证明. 设 $T_E = h^{-1}\partial_K h$，并取以 x 为中心的全纯正规坐标系。以下所有计算均在 x 处求值。于是成立

$$\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar{\partial}\big|T_E\big|^2 = |\nabla_H T_E|^2 + g^{\bar{j}i}\langle\nabla_{H,\frac{\partial}{\partial z^i}}\nabla_{H,\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}}T_E, T_E\rangle + g^{\bar{i}j}\langle T_E, \nabla_{H,\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}}\nabla_{H,\frac{\partial}{\partial z^i}}T_E\rangle. \tag{2.4}$$

一方面，我们推导出

$$\begin{aligned} &\nabla_{H,\frac{\partial}{\partial z^i}}\nabla_{H,\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}}T_E(\frac{\partial}{\partial z^k}) \\ &= D_{H,\frac{\partial}{\partial z^i}}\big(\nabla_{H,\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}}T_E(\frac{\partial}{\partial z^k})\big) \\ &= D_{H,\frac{\partial}{\partial z^i}}\big(F_K(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}) - F_H(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})\big) \\ &= D_{H,\frac{\partial}{\partial z^i}}\big(F_K(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})\big) - D_{H,\frac{\partial}{\partial z^k}}\big(F_H(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})\big) \\ &= D_{K,\frac{\partial}{\partial z^i}}\big(F_K(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})\big) - D_{H,\frac{\partial}{\partial z^k}}\big(F_H(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})\big) + [T_E(\frac{\partial}{\partial z^i}), F_K(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})] \\ &= D_{K,\frac{\partial}{\partial z^k}}\big(F_K(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})\big) - D_{H,\frac{\partial}{\partial z^k}}\big(F_H(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})\big) + [T_E(\frac{\partial}{\partial z^i}), F_K(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})], \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中我们使用了（2.3）和 Bianchi 恒等式。另一方面，我们有

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{H,\frac{\partial}{\partial\overline{z}^j}}\nabla_{H,\frac{\partial}{\partial z^i}}T_E(\frac{\partial}{\partial z^k})\\
&=\nabla_{H,\frac{\partial}{\partial z^i}}\nabla_{H,\frac{\partial}{\partial\overline{z}^j}}T_E(\frac{\partial}{\partial z^k})-[F_H(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\overline{z}^j}),T_E(\frac{\partial}{\partial z^k})]+T_E\big(F_\nabla(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\overline{z}^j})\frac{\partial}{\partial z^k}\big)\\
&=D_{K,\frac{\partial}{\partial z^k}}\big(F_K(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\overline{z}^j})\big)-D_{H,\frac{\partial}{\partial z^k}}\big(F_H(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\overline{z}^j})\big)+[T_E(\frac{\partial}{\partial z^i}),F_K(\frac{\partial}{\partial z^k},\frac{\partial}{\partial\overline{z}^j})]\\
&-[F_H(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\overline{z}^j}),T_E(\frac{\partial}{\partial z^k})]+T_E(F_\nabla\big(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\overline{z}^j}\big)\frac{\partial}{\partial z^k}).
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial|T_E|^2\\
&=|\nabla_HT_E|^2+\langle D_K(\sqrt{-1}\Lambda F_K)-D_H(\sqrt{-1}\Lambda F_H),T_E\rangle\\
&+g^{\bar jI}\langle[T_E(\frac{\partial}{\partial z^i}),F_K(\bullet,\frac{\partial}{\partial\overline{z}^j})],T_E\rangle+\langle T_E,D_K(\sqrt{-1}\Lambda F_K)-D_H(\sqrt{-1}\Lambda F_H)\rangle\\
&+g^{\bar ij}\langle T_E,[T_E(\frac{\partial}{\partial z^i}),F_K(\bullet,\frac{\partial}{\partial\overline{z}^j})]\rangle-\langle T_E,[\sqrt{-1}\Lambda F_H,T_E]-T_E\circ\mathrm{Ric}^{(2)}\rangle\\
&=|\nabla_HT_E|^2+2\,\mathrm{Re}\langle D_K(\sqrt{-1}\Lambda F_K)-D_H(\sqrt{-1}\Lambda F_H),T_E\rangle\\
&+2\,\mathrm{Re}\langle g^{\bar jI}[T_E(\frac{\partial}{\partial z^i}),F_K(\bullet,\frac{\partial}{\partial\overline{z}^j})],T_E\rangle-\langle T_E,[\sqrt{-1}\Lambda F_H,T_E]-T_E\circ\mathrm{Ric}^{(2)}\rangle,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

其中，$\mathrm{Ric}^{(2)}=\sqrt{-1}\Lambda F_\nabla$ 为第二 Chern-Ricci 变换。

由于 H是厄米-爱因斯坦的，且 $\det\ H=\det\ K$，因此我们有 $[\sqrt{-1}\Lambda\overline{F_H},T_E]=0$，并且

$$
\begin{aligned}
&D_K(\sqrt{-1}\Lambda F_K)-D_H(\sqrt{-1}\Lambda F_H)\\
&=D_K(\sqrt{-1}\Lambda F_K^\perp+\frac{\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}\,\Lambda F_H}{\mathrm{rank}(E)}\,\mathrm{id}_E)-D_H(\sqrt{-1}\Lambda F_H^\perp+\frac{\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}\,\Lambda F_H}{\mathrm{rank}(E)}\,\mathrm{id}_E)\\
&=D_K(\sqrt{-1}\Lambda F_K^\perp).
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

由于 $\mathrm{Ric}^{(2)}$ 与 Ricci 变换一致，由（2.7）可得

$$
\sqrt{-1}\Lambda\partial\overline{\partial}|T_E|^2\geq|\nabla_HT_E|^2-2|D_K(\Lambda F_K^\perp)||T_E|-4|F_K^\perp||T_E|^2-\kappa|T_E|^2.
\tag{2.9}
$$

由于 $\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial|T_E|^2=2|T_E|\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial|T_E|+|\nabla|T_E||^2$，Kato 不等式给出

$$
|T_E|\sqrt{-1}\Lambda\partial\overline{\partial}|T_E|\geq-\frac{\kappa}{2}|T_E|^2-2|F_K^\perp||T_E|^2-|D_K(\Lambda F_K^\perp)||T_E|.
\tag{2.10}
$$

因此在 $|T_E|\neq0$ 所在点，我们有

$$
\sqrt{-1}\Lambda\partial\overline{\partial}|T_E|\geq-(\frac{\kappa}{2}+2|F_K^\perp|)|T_E|-|D_K(\Lambda F_K^\perp)|.
\tag{2.11}
$$

令 $\psi = \frac{|T_E|}{2A_R - \operatorname{tr} h^{-1}}$，并且有

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial\psi &= \frac{\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial|T_E|}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}} + |T_E|\sqrt{-1}\Lambda\Big(\frac{\partial\bar\partial\operatorname{tr}h^{-1}}{(2A_R-\operatorname{tr}h^{-1})^2} + \frac{2\partial\operatorname{tr}h^{-1}\wedge\bar\partial\operatorname{tr}h^{-1}}{(2A_R-\operatorname{tr}h^{-1})^3}\Big)\\ &\quad + \frac{2\operatorname{Re}\langle(2A_R-\operatorname{tr}h^{-1})\partial\psi - \psi\partial\operatorname{tr}h^{-1}, \partial\operatorname{tr}h^{-1}\rangle}{(2A_R-\operatorname{tr}h^{-1})^2}\\ &= \frac{\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial|T_E|}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}} + \frac{\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial\operatorname{tr}h^{-1}}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}}\psi + \frac{\langle\nabla\psi,\nabla\operatorname{tr}h^{-1}\rangle}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

应用 (2.3) 得到

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial\operatorname{tr}h^{-1} &= -\sqrt{-1}\Lambda\bar\partial\partial\langle h^{-1},\mathrm{id}_E\rangle_K\\ &= \sqrt{-1}\Lambda\bar\partial\langle T_E, h^{-1}\rangle_K\\ &= \langle\sqrt{-1}\Lambda\bar\partial_E T_E, h^{-1}\rangle_K + \sqrt{-1}\Lambda\langle T_E, T_E h^{-1}\rangle_K\\ &= -\langle\sqrt{-1}\Lambda F_K^{\perp}, h^{-1}\rangle_K + |T_E h^{-\frac12}|^2_{K,g},\end{aligned} \tag{2.13}$$

这里用到了厄米－爱因斯坦条件和 $\det H = \det K$。因此，(2.11)、(2.12) 和 (2.13) 表明，在 $|T_E|\neq 0$ 所在的点，有

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial\psi \geq -\Big(&\frac{\kappa}{2} + 2|F_K^{\perp}| + \frac{\langle\sqrt{-1}\Lambda F_K^{\perp}, h^{-1}\rangle_K}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}} - \frac{|T_E h^{-\frac12}|^2_{K,g}}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}}\Big)\psi\\ &- \frac{|D_K(\Lambda F_K^{\perp})|}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}} + \frac{\langle\nabla\psi,\nabla\operatorname{tr}h^{-1}\rangle}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

注意到

$$-\frac{\langle\sqrt{-1}\Lambda F_K^{\perp}, h^{-1}\rangle_K}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}} \geq \frac{-\operatorname{tr}h^{-1}}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}}|\Lambda F_K^{\perp}|_K \geq -|\Lambda F_K^{\perp}|_K. \tag{2.15}$$

因此，在 $|T_E|\neq 0$ 所在的点，(2.14) 给出

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial\psi \geq -\Big(&\frac{\kappa}{2} + 2|F_K^{\perp}| + |\Lambda F_K^{\perp}|_K - \frac{|T_E h^{-\frac12}|^2_{K,g}}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}}\Big)\psi\\ &- \frac{|D_K(\Lambda F_K^{\perp})|}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}} + \frac{\langle\nabla\psi,\nabla\operatorname{tr}h^{-1}\rangle}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

现在我们在 B_R 上引入辅助函数:

$$F = (R^2-\rho^2)\psi = \frac{|T_E|}{2A_R-\operatorname{tr}h^{-1}}(R^2-\rho^2),\ \rho = \operatorname{dist}(x,\bullet). \tag{2.17}$$

我们不妨假设 T_E 不恒为零，于是 F 在某点$x_0\in B_R$处取得正的最大值。如果 x_0 位于 x的割迹上，则可使用 Calabi 支撑函数技巧 [Ca] 来论证下面的推导。以下所有计算均在 x_0处进行。我们有

$$\frac{\nabla\psi}{\psi} = \frac{\nabla\rho^2}{R^2-\rho^2},\ \frac{\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial\psi}{\psi} - \frac{\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial\rho^2}{R^2-\rho^2} - \frac{\langle\nabla\psi,\nabla\rho^2\rangle}{\psi(R^2-\rho^2)} \leq 0, \tag{2.18}$$

因此

$$0 \geq \frac{\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial\psi}{\psi} - \frac{\sqrt{-1}\Lambda\partial\bar\partial\rho^2}{R^2-\rho^2} - \frac{|\nabla\rho^2|^2}{(R^2-\rho^2)^2}. \tag{2.19}$$

由（2.16）、（2.18）和（2.19）可得

$$
\begin{aligned}
0 \geq & -(\frac{\kappa}{2}+2|F_K^{\perp}|+|\Lambda F_K^{\perp}|_K)+\frac{|T_E h^{-\frac{1}{2}}|_{K,g}^2}{2A_R-\operatorname{tr} h^{-1}} \\
& -\frac{|D_K(\Lambda F_K^{\perp})|}{(2A_R-\operatorname{tr} h^{-1})\psi}+\frac{\langle \nabla\rho^2, \nabla \operatorname{tr} h^{-1}\rangle}{(2A_R-\operatorname{tr} h^{-1})(R^2-\rho^2)} \\
& -\frac{\sqrt{-1}\Lambda\partial\overline{\partial}\rho^2}{R^2-\rho^2}-\frac{|\nabla\rho^2|^2}{(R^2-\rho^2)^2}.
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

根据 e 拉普拉斯比较 $\sqrt{-1}\Lambda\partial\overline{\partial}\rho^2 \leq C(1+\sqrt{\kappa}R)$ 和 $|\nabla\rho^2|^2 \leq 4R^2$，可得

$$
\begin{aligned}
\frac{|T_E h^{-\frac{1}{2}}|_{K,g}^2}{2A_R-\operatorname{tr} h^{-1}} \leq & \frac{\kappa}{2}+2|F_K^{\perp}|+|\Lambda F_K^{\perp}|_K+\frac{|D_K(\Lambda F_K^{\perp})|}{|T_E|} \\
& +\frac{C(1+\sqrt{\kappa}R)}{R^2-\rho^2}+\frac{4R^2}{(R^2-\rho^2)^2}-\frac{\langle \nabla\rho^2, \nabla \operatorname{tr} h^{-1}\rangle}{(2A_R-\operatorname{tr} h^{-1})(R^2-\rho^2)}.
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

对于右端的最后一项，我们注意到

$$
\begin{aligned}
|\langle \nabla\rho^2, \nabla \operatorname{tr} h^{-1}\rangle| &\leq \sqrt{2}|\nabla\rho^2||\partial \operatorname{tr} h^{-1}| \\
&= \sqrt{2}|\nabla\rho^2||\operatorname{tr}(T_E\circ h^{-1})| \\
&= \sqrt{2}|\nabla\rho^2||\langle T_E\circ h^{-1/2}, h^{-1/2}\rangle_K| \\
&\leq \sqrt{2}|\nabla\rho^2||h^{-\frac{1}{2}}|_K||T_E\circ h^{-1/2}|_{K,g} \\
&= \sqrt{2\operatorname{tr} h^{-1}}|\nabla\rho^2||T_E\circ h^{-1/2}|_{K,g},
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

然后

$$
\begin{aligned}
-\frac{\langle \nabla\rho^2, \nabla \operatorname{tr} h^{-1}\rangle}{(2A_R-\operatorname{tr} h^{-1})(R^2-\rho^2)} &\leq \frac{\sqrt{2\operatorname{tr} h^{-1}}|T_E\circ h^{-1/2}|_{K,g}|\nabla\rho^2|}{(2A_R-\operatorname{tr} h^{-1})(R^2-\rho^2)} \\
&\leq \frac{|T_E\circ h^{-1/2}|_{K,g}^2}{2(2A_R-\operatorname{tr} h^{-1})}+\frac{\operatorname{tr} h^{-1}|\nabla\rho^2|^2}{(2A_R-\operatorname{tr} h^{-1})(R^2-\rho^2)^2} \\
&\leq \frac{|T_E\circ h^{-1/2}|_{K,g}^2}{2(2A_R-\operatorname{tr} h^{-1})}+\frac{4R^2}{(R^2-\rho^2)^2}.
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

因此，(2.21) 和 (2.23) 推出

$$
\begin{aligned}
\frac{|T_E\circ h^{-1/2}|_{K,g}^2}{2A_R-\operatorname{tr} h^{-1}} \leq & \kappa+4|F_K^{\perp}|+2|\Lambda F_K^{\perp}|_K+\frac{2|D_K(\Lambda F_K^{\perp})|}{|T_E|} \\
& +\frac{C(1+\sqrt{\kappa}R)}{R^2-\rho^2}+\frac{16R^2}{(R^2-\rho^2)^2}.
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

对于左端的这一项，我们注意到

$$
|T_E|^2 = |h^{\frac{1}{2}}\circ T_E\circ h^{-\frac{1}{2}}|_{K,g}^2 \leq \lambda_{R,\max}|T_E\circ h^{-\frac{1}{2}}|_{K,g}^2, \tag{2.25}
$$

然后

$$
\frac{|T_E\circ h^{-1/2}|_{K,g}^2}{2A_R-\operatorname{tr} h^{-1}} \geq \frac{|T_E|^2}{(2A_R-\operatorname{tr} h^{-1})\lambda_{R,\max}} \geq \frac{|T_E|^2}{2A_R\lambda_{R,\max}}. \tag{2.26}
$$

将 (2.24) 乘以 $(R^2-\rho^2)^2$ 并利用 (2.26)，得到

$$\begin{aligned}(R^2-\rho^2)^2\frac{|T_E|^2}{2A_R\lambda_{R,\max}} &\le \kappa R^4 + C(1+\sqrt{\kappa}R)R^2 + 16R^2 \\ &\quad + R^4(4|F_K^\perp| + 2|\Lambda F_K^\perp|_K) + 2R^4\frac{|D_K(\Lambda F_K^\perp)|}{|T_E|} \\ &\le CR^2(1+\sqrt{\kappa}R)^2 \\ &\quad + R^4(4|F_K^\perp| + 2|\Lambda F_K^\perp|_K) + 2R^4\frac{|D_K(\Lambda F_K^\perp)|}{|T_E|}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

对 B_R 上的曲率项取上确界，得到

$$\begin{aligned}(R^2-\rho^2)^3|T_E|^3 &\le CA_R\lambda_{R,\max}R^2(1+\sqrt{\kappa}R)^2(R^2-\rho^2)|T_E| \\ &\quad + CA_R\lambda_{R,\max}R^4(\sup_{B_R}|F_K^\perp| + \sup_{B_R}|\Lambda F_K^\perp|_K)(R^2-\rho^2)|T_E| \\ &\quad + CA_R\lambda_{R,\max}R^6\sup_{B_R}|D_K(\Lambda F_K^\perp)|.\end{aligned} \tag{2.28}$$

根据杨氏不等式，有

$$\begin{aligned}(R^2-\rho^2)^3|T_E|^3 &\le C(A_R\lambda_{R,\max})^{3/2}R^3(1+\sqrt{\kappa}R)^3 \\ &\quad + C(A_R\lambda_{R,\max})^{3/2}R^6(\sup_{B_R}|F_K^\perp| + \sup_{B_R}|\Lambda F_K^\perp|_K)^{3/2} \\ &\quad + CA_R\lambda_{R,\max}R^6\sup_{B_R}|D_K(\Lambda F_K^\perp)|.\end{aligned} \tag{2.29}$$

对其开立方，得到

$$\begin{aligned}(R^2-\rho^2(x_0))|T_E(x_0)| &\le C(A_R\lambda_{R,\max})^{1/2}R(1+\sqrt{\kappa}R) \\ &\quad + C(A_R\lambda_{R,\max})^{1/2}R^2(\sup_{B_R}|F_K^\perp| + \sup_{B_R}|\Lambda F_K^\perp|_K)^{1/2} \\ &\quad + C(A_R\lambda_{R,\max})^{1/3}R^2\sup_{B_R}|D_K(\Lambda F_K^\perp)|^{1/3}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

最后由 (2.30) 可得结论，且

$$\begin{aligned}\sup_{B_{R/2}}|T_E| &= \sup_{B_{R/2}}\frac{2A_R - \operatorname{tr}h^{-1}}{R^2-\rho^2}F \\ &\le \frac{CA_R}{R^2}\frac{R^2-\rho^2(x_0)}{2A_R - \operatorname{tr}h^{-1}(x_0)}|T_E|(x_0) \\ &\le \frac{C}{R^2}(R^2-\rho^2(x_0))|T_E(x_0)|.\end{aligned} \tag{2.31}$$

□

Pr定理 1.3 的证明。 我们采用定理 1.2 证明中的记号。注意

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\Lambda\partial_K[F_K,h](\frac{\partial}{\partial z^k}) &= g^{\bar{j}i}(\iota_{\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}}\iota_{\frac{\partial}{\partial z^i}}\partial_K[F_K,h])(\frac{\partial}{\partial z^k})\\ &= g^{\bar{j}i}\partial_K[F_K,h](\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j},\frac{\partial}{\partial z^k})\\ &= -g^{\bar{j}i}\partial_K[F_K,h](\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^k},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}).\end{aligned}\tag{2.32}$$

由 Bianchi 恒等式可得

$$\begin{aligned}&\partial_K[F_K,h](\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^k},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j})\\ &= (\nabla_{K,\frac{\partial}{\partial z^i}}[F_K,h])(\frac{\partial}{\partial z^k},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}) - (\nabla_{K,\frac{\partial}{\partial z^k}}[F_K,h])(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j})\\ &= [\nabla_{K,\frac{\partial}{\partial z^i}}F_K(\frac{\partial}{\partial z^k},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}) - \nabla_{K,\frac{\partial}{\partial z^k}}F_K(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}),h]\\ &+ [F_K(\frac{\partial}{\partial z^k},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}),D_{K,\frac{\partial}{\partial z^i}}h] - [F_K(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}),D_{K,\frac{\partial}{\partial z^k}}h]\\ &= [F_K(\frac{\partial}{\partial z^k},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}),hT_E(\frac{\partial}{\partial z^i})] - [F_K\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}\right),hT_E\left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right)]\\ &= [F_K(\frac{\partial}{\partial z^k},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}),h]T_E(\frac{\partial}{\partial z^i}) + h[F_K(\frac{\partial}{\partial z^k},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}),T_E(\frac{\partial}{\partial z^i})]\\ &- [F_K(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}),h]T_E(\frac{\partial}{\partial z^k}) - h[F_K(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}),T_E(\frac{\partial}{\partial z^k})].\end{aligned}\tag{2.33}$$

因此

$$\begin{aligned}-\sqrt{-1}\Lambda\partial_K[F_K,h] &= g^{\bar{j}i}[F_K(\bullet,\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}),h]T_E(\frac{\partial}{\partial z^i}) + g^{\bar{j}i}h[F_K(\bullet,\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}),T_E(\frac{\partial}{\partial z^i})]\\ &- [\sqrt{-1}\Lambda F_K,h]T_E - h[\sqrt{-1}\Lambda F_K,T_E],\end{aligned}\tag{2.34}$$

等价地,

$$\begin{aligned}g^{\bar{j}i}[F_K(\bullet,\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}),T_E(\frac{\partial}{\partial z^i})] &= -h^{-1}\sqrt{-1}\Lambda\partial_K[F_K,h] - g^{\bar{j}i}h^{-1}[F_K(\bullet,\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}),h]T_E(\frac{\partial}{\partial z^i})\\ &+ h^{-1}[\sqrt{-1}\Lambda F_K,h]T_E + [\sqrt{-1}\Lambda F_K,T_E].\end{aligned}\tag{2.35}$$

容易看出 $\Lambda F_K^{*H} = -h^{-1}\circ\Lambda F_K\circ h$，因此

$$\begin{aligned}|h^{-1}[\Lambda F_K,h]|^2 &= |-\Lambda F_K^{*H} - \Lambda F_K|^2\\ &= 2|\Lambda F_K^{\perp}|^2 - 2|\Lambda F_K^{\perp}|_K^2\\ &\le 2|\Lambda F_K^{\perp}|^2.\end{aligned}\tag{2.36}$$

由 (2.35) 和 (2.36) 可得

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re} g^{i\bar{j}}\langle[T_E(\partial_i),F_K^{\perp}(\bullet,\bar{\partial}_j)],T_E\rangle &\ge -C|h^{-1}\Lambda\partial_K[F_K,h]||T_E|\\ &- C|h^{-1}[F_K,h]||T_E|^2 - C|\Lambda F_K^{\perp}||T_E|^2.\end{aligned}\tag{2.37}$$

由于 H是厄米-爱因斯坦的，且 $\det H = \det K$，我们有

$$\langle D_H(\sqrt{-1}\Lambda F_H),T_E\rangle = 0,\tag{2.38}$$

$$\mathrm{Re}\langle D_K(\sqrt{-1}\Lambda F_K), T_E\rangle \geq -|D_K(\Lambda F_K^{\perp})||T_E|. \tag{2.39}$$

结合 (2.7)、(2.37)、(2.38) 和 (2.39)，我们得到

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\Lambda\partial\overline{\partial}|T_E|^2 \geq\ & |\nabla_H T_E|^2 - \kappa|T_E|^2 - 2|D_K(\Lambda F_K^{\perp})||T_E| \\ & - C|h^{-1}\Lambda D_K[F_K,h]||T_E| - C|h^{-1}[F_K,h]||T_E|^2 - C|\Lambda F_K^{\perp}||T_E|^2.\end{aligned} \tag{2.40}$$

应用 Kato 不等式可知，在 $|T_E|>0$所在的点处，有

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\Lambda\partial\overline{\partial}|T_E| \geq & -(\frac{\kappa}{2} + C|h^{-1}[F_K,h]| + C|\Lambda F_K^{\perp}|)|T_E| \\ & - |D_K(\Lambda F_K^{\perp})| - C|h^{-1}\Lambda D_K[F_K,h]|.\end{aligned} \tag{2.41}$$

沿用定理 1.2 证明中的相同论证，证明即告完成。 □

3. Applications on holomorphic tangent bundles

设 M 为一个复维数为 n 且具有复结构 J的复流形。在存在 J的情况下，切丛 TM是一个复向量丛。由于 $J^2=-\mathrm{id}$，我们有

$$TM\otimes\mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M, \tag{3.1}$$

其中 $T^{1,0}M$和 $T^{0,1}M$分别是特征值 $\sqrt{-1}$和 $-\sqrt{-1}$对应的特征子空间。事实上，对于任意 $p\in M$，我们都可以找到向量 $\{e_i, Je_i\}_{i=1}^n$构成 T_pM的一组基，于是 $T^{1,0}_pM$（分别为 $T^{0,1}_pM$）由 $\{e_i-\sqrt{-1}Je_i\}_{i=1}^n$（分别由 $\{e_i+\sqrt{-1}Je_i\}_{i=1}^n$）生成。我们通常通过以下方式将 TM与 $T^{1,0}M$等同起来

$$e_i \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i - \sqrt{-1}Je_i),\ Je_i \leftrightarrow \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(e_i-\sqrt{-1}Je_i),\ i=1,...,n. \tag{3.2}$$

容易看出，$T^{1,0}M$是一个转移函数为全纯的复向量丛。一方面，通过恒等式（3.2），复向量丛 TM 被赋予了一个全纯结构 ∂_{TM}，该结构来自 $T^{1,0}M$的全纯结构。另一方面，给定 M上的厄米度量 g，我们可以在 TM上赋予一个厄米度量

$$H_g = g - \sqrt{-1}\omega_g,\ \omega_g(\bullet,\bullet) = g(J(\bullet),\bullet). \tag{3.3}$$

总之，TM具有全纯结构 ∂_{TM}和 H_g。已知，当且仅当 $D_{H_g}=\nabla_g$时，g是K¨ahler，其中 D_{H_g}是 TM上的陈联络。

定理1.4的证明。 根据假设，我们有

$$\log c_R \leq f \triangleq \frac{1}{n}\log\frac{\omega^n}{\omega_0^n} \leq \log C_R. \tag{3.4}$$

由于 ω 和 ω_0 是里奇平坦的，我们有 $\partial\overline{\partial}f=0$，因此 f 关于 g_0是调和的。不等式 $c_R\omega_0|_{B_R}\leq\omega|_{B_R}$ 给出了 $c_R\leq B$，其中常数 B 与 R无关。因此，

$$\frac{C_R}{c_R} \leq \frac{BC_R}{c_R^2} = o(R^2). \tag{3.5}$$

特别地，当 R 较大时，$0\leq\log\frac{C_R}{c_R}\leq 2\log R$。于是定理 1.1 意味着

$$\sup_{B_{R/2}}|df|_{g_0} \leq \frac{C}{R}\log R = o(1). \tag{3.6}$$

由此可知，对于某个常数 a 和 $\omega^n = e^{an}\omega_0^n$，有 $f = a$。令 g 为与 ω 对应的厄米度量，则容易看出

$$\det H_g = \det H_{e^a g_0}. \tag{3.7}$$

设 $B_R^g = \{z \in \mathbb{C}^n | \text{dist}_g(0, z) < R\}$，则可得

$$B^g_{\sqrt{c_R}R} \subset B_R,\ \sqrt{c_R}R \geq \sqrt{\frac{c_R^2 R^2}{C_R}} \to \infty. \tag{3.8}$$

因此（$\mathbb{C}^n$, g）是完备的，并且有

$$c_R\omega_0|_{B^g_{\sqrt{c_R}R}} \leq \omega|_{B^g_{\sqrt{c_R}R}} \leq C_R\omega_0|_{B^g_{\sqrt{c_R}R}},\ \frac{C_R}{c_R} = o(c_R R^2). \tag{3.9}$$

因此，推论 1.1 适用，从而得到 $D_{H_g} = D_{H_{g_0}}$，进而有 $\nabla_g = \nabla_{g_0}$。由于 ∇_g 是关于 g 的Levi-Civita联络，我们有

$$\nabla_{g_0}\omega = \nabla_g\omega = 0. \tag{3.10}$$

□

定理1.5的证明。 设 ω 和 $\tilde{\omega}$ 分别是 g 和 $\tilde{g}$ 的基本形式。与定理1.4的证明一样，我们有 $\frac{1}{n}\log\frac{\tilde{\omega}^n}{\omega^n} = a$，其中 a 为某个常数，从而

$$\det H_{e^a g} = \det H_{\tilde{g}}. \tag{3.11}$$

因此，推论 1.1 适用，从而得到 $D_{H_g} = D_{H_{\tilde{g}}}$，进而有 $\nabla_g = \nabla_{\tilde{g}}$。 □

Appendix: a counterexample

本节给出一个具体例子，说明在具有非负Ricci曲率的完备非紧致K¨ahler流形上，两个彼此有界且行列式相同的厄米-爱因斯坦度量可能具有不同的陈联络。

令 $E = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ 为 $\mathbb{C}^2$ 上的平凡全纯向量丛，并赋予标准的K¨ahler度量。对于常数 $a > 0$，我们考虑

$$H_a = \frac{a + |z|^2}{a}\,\mathrm{id}_E - \frac{2a + |z|^2}{a(a + |z|^2)}\overline{z}z^T, \tag{3.12}$$

其中 $z = (z^1, z^2)^T$。对于 $z \neq 0$ 和 $P = \frac{zz^T}{|z|^2}$，我们有

$$H_a = \frac{a}{a + |z|^2}P + \frac{a + |z|^2}{a}(\mathrm{id}_E - P). \tag{3.13}$$

作为一个Hermitian矩阵函数，很容易看出它的特征值为

$$\frac{a}{a + |z|^2},\ \frac{a + |z|^2}{a}, \tag{3.14}$$

以及特征向量 z、$z^\perp$，其中 $z^\perp$ 与 z 正交。此外，对于任意正常数 $a \neq b$，我们有

$$\min\{\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\}H_a \leq H_b \leq \max\{\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\}H_a. \tag{3.15}$$

因此， H_a、 H_b 是两个彼此有界的厄米度量，并且 $\det H_a = \det H_b$。令 $(e_1,\ e_2)$ 为 E 的标准整体标架，并令 $\partial_{H_a}(e_1,\ e_2) = (e_1,\ e_2)A_{H_a}$，则有

$$A_{H_a} = \overline{H}_a^{-1}\partial\overline{H}_a,\ F_{H_a} = \overline{\partial}A_{H_a}. \tag{3.16}$$

直接计算可得

$$A_{H_a} = \sum_{i=1}^{2}\frac{\overline{z}^i dz^i}{a+|z|^2}\,\mathrm{id}_E - \frac{2a+|z|^2}{(a+|z|^2)^2}dz\overline{z}^T - \sum_{i=1}^{2}\frac{\overline{z}^i dz^i}{(a+|z|^2)^2}z\overline{z}^T, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} F_{H_a} = {} & \big(-\sum_{i=1}^{2}\frac{dz^i\wedge d\overline{z}^i}{a+|z|^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\frac{\overline{z}^i z^j dz^i\wedge d\overline{z}^j}{(a+|z|^2)^2}\big)\,\mathrm{id}_E \\ & + \frac{2a+|z|^2}{(a+|z|^2)^2}dz\wedge d\overline{z}^T - \sum_{i=1}^{2}\frac{(3a+|z|^2)z^i}{(a+|z|^2)^3}(dz\wedge d\overline{z}^i)\overline{z}^T \\ & + \sum_{i=1}^{2}\frac{dz^i\wedge d\overline{z}^i}{(a+|z|^2)^2}z\overline{z}^T - \sum_{i,j=1}^{2}\frac{2\overline{z}^i z^j dz^i\wedge d\overline{z}^j}{(a+|z|^2)^3}z\overline{z}^T + \sum_{i=1}^{2}\frac{z\overline{z}^i dz^i\wedge d\overline{z}^T}{(a+|z|^2)^2}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

因此 $\sqrt{-1}\Lambda\overline{F_{H_a}} = 0$， H_a， H_b 都是厄米-爱因斯坦的，但 $D_{H_a} \neq D_{H_b}$。

AI declaration

ChatGPT 仅用于在附录中找出一个反例并纠正排版错误。

Acknowledgements

感谢李超就本文主题进行的有益讨论。

References

[ADM] Vestislav Apostolov、Johann Davidov 和 Oleg Mu˘skarov，《紧致自对偶厄米曲面》。《美国数学学会汇刊》348（1996），第 8 期，3051–3063。[Bal] Andrew Balas，《具有常全纯截面曲率的紧致厄米流形》。《数学杂志》189（1985），第 2 期，193–210。[BG] Andrew Balas 和 Paul Gauduchon，《紧致复曲面上具有常非正（厄米）全纯截面曲率的任意厄米度量都是 K¨ahler》。《数学杂志》190（1985），第 1 期，39–43。[Ban] Shigetoshi Bando，《非紧 K¨ahler 流形上的爱因斯坦-厄米度量》。载于《爱因斯坦度量与杨-米尔斯联络》（三田，1990），27–33，《纯粹与应用数学讲义》145，Dekker，纽约，1993。[Bo] William M Boothby，《具有零曲率的厄米流形》。《密歇根数学杂志》5（1958），229–233。[Ca] Eugenio Calabi，《E. Hopf 极大值原理的推广及其在黎曼几何中的应用》。《杜克数学杂志》25（1958），45–56。[CZ] Shuwen Chen 和 Fangyang Zheng，《具有常全纯截面曲率的厄米三维流形》。“arXiv：2609.39282，2026。[CY] Shiu Yuen Cheng 和丘成桐，《黎曼流形上的微分方程及其几何应用》。《纯粹与应用数学通讯》28（1975），第 3 期，333–354。[Do1] Simon Kirwan Donaldson，《复代数曲面上的反自对偶杨-米尔斯联络与稳定向量丛》。《伦敦数学会会刊》50（1985），第 1 期，1–26。

[Do2] Simon Kirwan Donaldson, 《无穷行列式、稳定丛与曲率》。《杜克数学杂志》54（1987），第 1 期，231–247。[MR] Vikram Bhagvandas Mehta 和 Annamalai Ramanathan, 《稳定层的限制与基本群的表示》。《数学发明》77（1984），第 1 期，163–172。[Mo] Takuro Mochizuki, 《解析稳定丛的小林–欣钦对应》。《美国数学学会汇刊》373（2020），第 1 期，551–596。[MS] Ovidiu Munteanu 和 Natasa Sesum, 《具有正谱的完备流形上的泊松方程及其应用》。《数学进展》223（2010），第 1 期，198–219。[NS] Mudumbai Seshachalu Narasimhan 和 Conjeeveram Srirangachari Seshadri, 《紧黎曼曲面上的稳定向量丛与酉向量丛》。《数学年刊》82（1965），540–567。[Ni] Lei Ni, 《完备非紧 K¨ahler 流形上全纯向量丛的泊松方程与厄米-爱因斯坦度量》。《印第安纳大学数学杂志》51（2002），第 3 期，679–704。[NR] Lei Ni 和任怀宇, 《完备 K¨ahler 流形上向量丛的厄米-爱因斯坦度量》。《美国数学学会汇刊》353（2001），第 2 期，441–456。[QT] Xiangsen Qin 和 Yuanhong Tian, 《Chern 全纯截面曲率：典范丰性、刚性与平坦性反例》。“ arXiv：2609.25762v7，2026。[RS] Dieter Riebesehl 和 Friedmar Schulz, 《复 Monge–Amp`ère 方程的先验估计与 Liouville 定理》。《数学杂志》186（1984），第 1 期，57–66。[Si] Carlos Tschudi Simpson, 《利用 Yang–Mills 理论构造 Hodge结构变形及其在一致化中的应用》。《美国数学学会杂志》1（1988），第 4 期，867–918。[UY] Karen Keskulla Uhlenbeck 和丘成桐, 《关于稳定向量丛上厄米-杨-米尔斯联络的存在性》。《数学前沿：1985》（纽约，1985）。《纯粹与应用数学通讯》39（1986），第 S 期，增刊，S257–S293。[WZ] 吴迪 和 XI ZHANG, 《非紧流形上的 Hermitian–Einstein方程》。《伦敦数学会会刊》133（2026），第 3 期，论文编号 e70216，共 37 页。[Ya] 丘成桐, 《完备黎曼流形上的调和函数》。《纯粹与应用数学通讯》28（1975），201–228。[Zh] 张俊生, 《某些完备非紧 K¨ahler 流形上的厄米-杨-米尔斯联络》。《数学年刊》390（2024），第 3 期，4535–4575。

Chenghong He, School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science andTechnology, Nanjing 210094, People's Republic of China
Email address: Hech@njust.edu.cnDi Wu, School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, People's Republic of China
Email address: wudi@njust.edu.cnXi Zhang, School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technol-ogy, Nanjing 210094, People's Republic of China
Email address: mathzx@njust.edu.cn