发表于《物理评论快报》47卷第7期，第530页（1981年），J. A. Sauls [https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.530]

arXiv:2611.30108v1 [cond-mat.supr-con] 23 Nov 2026

超流体 ^{3}He-B中的零声孤子传播

J．A.Sauls约瑟夫·亨利实验室，普林斯顿大学，新泽西州普林斯顿，
邮编*08544*(日期：1981年5月29日)

通过将 ^{3}He-B视为由两能级“分子”（库珀对）组成的介质，推导出零声与B相集体模相互作用的非线性方程。在这个线性响应极限下，非线性方程可化简为动力学理论中的已知结果。本文结合Polturak等人的实验，讨论这些非线性方程的孤子解。

超流体^{3}He中的库珀对凝聚体与玻色凝聚双原子分子系统有许多相似之处。Leggett[1] 综述了 ^{3}He-A相和B相平衡相的这些相似性。除基态对的“分子”性质外，序参量还存在许多对应于激发束缚对态的集体模。在两个超流相中，已有若干此类模在声传播实验中被观测到。[2–4]

最近，Polturak 等人[5] 报告称，当零声频率接近集体模共振时，零声在 ^{3}He-B 中会以类孤子方式传播。这些作者指出，他们观察到的非线性效应与非线性光学系统中的效应相似。[6] 本文明确阐述了这种类比。

除众所周知的挤压（sq）模[7]（激发能为 $\hbar\omega_{\rm sq} \simeq 1.5\Delta\ (T)$）之外，在 $\hbar\omega_{\rm rsq} \simeq 1.0\Delta\ T$ [3,4]（）的 B相声传播实验中还观测到一种新的集体模。该模式的鉴定最近已得到澄清。[8–10] Koch 和 W¨olfle[8]指出，具有总角动量 $J = 2$ 的实 挤压（rsq）模由于粒子-空穴不对称性，与零声的耦合较弱。Avenel、Varoquaux 和 Ebisawa 观测到的五重塞曼劈裂[9] 证实了该模式确为 rsq 模。最近关于 rsq 模在偏离$\hbar\omega_{\rm rsq} = \left(\frac{8}{5}\right)^{1/2}\Delta\ (T)$时的温度依赖性和反常位移的解释，进一步支持了这一鉴定。[10]

就本文的目的而言，参考文献 ^{3}11 中介绍的 He-B 零声线性理论 最为高效。质量密度和动量密度的连续性方程为

$$\partial_t \delta\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{g} = 0\,, \tag{1}$$

$$\partial_t \vec{g} + \vec{\nabla}P + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\pi} = 0\,, \tag{2}$$

其中， $\delta\rho$ 和 $\vec{g}$ 分别为密度涨落和动量密度，而 $P = c^2\delta\rho$是对角
部分，即动量应力张量中在无碰撞极限下起压强作用的部分；c 为零声速。

声与序参量模的耦合通过应力张量 $\overleftrightarrow{\pi}$ 实现。准粒子碰撞产生的 $\overleftrightarrow{\pi}$ 耗散部分被忽略。

在这种情况下

$$\pi_{ij} = g'\partial_t d_{ij}^{(-)} + \kappa' d_{ij}^{(+)}\,, \tag{3}$$

其中， $d_{ij}^{(-)}$ （$d_{ij}^{(+)}$ ）与 $J = 2$ 随时间变化的序参量的虚部（实部）成正比， $g' = \frac{1}{3}n\lambda\hbar$、 $\kappa'' = \frac{8}{5}n\lambda\Delta\eta$、 n 为数密度， Δ 为BCS 能隙， λ 为量级为一的无量纲耦合常数，而$\eta \simeq (\Delta/2\epsilon_F) \times \ln(0.1\epsilon_F/\Delta) < 10^{-2}$ 为粒子-空穴不对称因子。对于{14}^{15}的纵向声，只有 $J_z = 0$ 分量与声耦合。因此，密度涨落满足

$$\left(\partial_t^2 - c^2\,\partial_z^2\right)\delta\rho = g'\,\partial_z^2\,\partial_t\delta^{(-)} + \kappa'\,\partial_z^2\,\delta^{(+)}\,, \tag{4}$$

以及 $J_z = 0$ 振幅 $\delta^{(\pm)} = \hat{z}_i\hat{z}_j\, d_{ij}^{(\pm)}$，满足

$$\left(\partial_t^2 + \omega_{\rm sq}^2\right)\delta^{(-)} = g\,\partial_t\delta\rho\,, \tag{5}$$

$$\left(\partial_t^2 + \omega_{\rm rsq}^2\right)\delta^{(+)} = \kappa\,\partial_t^2\delta\rho\,, \tag{6}$$

其中 $g = 1/\hbar m N(0)$、 $\kappa = 2\eta/\Delta m N(0)$ 和 $N(0)$ 是费米面处的态密度。[11,12]在 线性理论中，密度涨落与序参量涨落之间的耦合会在挤压模频率处导致共振吸收和反常色散。

描述超流体 ^{3}He 中声传播的非线性无碰撞动理学方程尚未从第一性原理出发推导出来。本文通过将 ^{3}He-B 视为由“分子”（库珀对）组成的介质来得到零声的非线性方程，其中零声的密度涨落与介质相互作用，诱导分子在不同状态之间发生跃迁。将集体模识别为激发的束缚对态[13] ，以及序参量集体模具有离散谱（根据详细计算[10] 以及对声衰减饱和现象的观测[5] 可知该谱是非谐的），提示我们采用二能级描述。该理论包含以下要素：(1) 二能级系统振幅的运动方程；(2) 对耦合密度涨落与序参量的非线性振幅的确定；(3) 要求非线性方程在 ^{3}He-B 情形下退化为已知的线性化方程。本文忽略了耦合

到 sq 模的耦合，因为参考文献 5 中报道的非线性效应发生在与 rsq 模接近共振的位置；模之间的分裂（$\sim \frac{1}{2}\Delta$）相对于典型声脉冲的谱宽较大。假设二能级系统的动力学由以下方程描述

$$i\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{\rm rsq} & i\kappa\,\partial_t\delta\rho \\ -i\kappa\,\partial_t\delta\rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

其中 u 和 v 分别是激发态（rsq）和基态 Balian-Werthamer（BW）态的振幅。对于 B 相中的纵向声，由于 $\delta\rho$仅与$J_z = 0$ 激发态的 $J = 2$ 分量以及 $J = 0$ BW 态耦合，因此可以用标量振幅来表示这些方程。诱导这两个态之间跃迁的密度涨落满足线性波动方程 [式（4），其中不包含与 sq 模的耦合],[14]，但 其中 $\delta^{(+)}$ 由下式给出

$$\delta^{(+)} = \tfrac{1}{2}\left(uv^* + vu^*\right). \qquad (8)$$

根据规范不变性以及与线性化动力学理论的一致性，必须如此确定式（4）中与密度涨落耦合的非线性振幅。具体而言，实压缩模与密度涨落的耦合正比于 $\left(\delta\hat{\ }\Delta^\dagger\hat{\ }\Delta + \hat{\ }\Delta^\dagger\delta\hat{\ }\Delta\right)$ 的自旋迹，其中 $\delta\hat{\ }\Delta$ 是随时间变化的非对角平均场，而 Δ 是基态非对角平均场。[8] 这些平均场与配对振幅成正比：$u \propto \delta\hat{\ }\Delta$ 和 $v \propto \hat{\ }\Delta$。[15] 线性理论假设基态受到小扰动，因此 $v = 1$；在这种情况下，耦合正比于 Re (u)。式（8）中的振幅 $\delta^{(+)}$ 保留了微观理论所要求的耦合的规范不变形式，并允许基态发生耗尽，这由随时间变化的 v 描述。$\delta^{(+)}$（下文记为 δ）及其他相关双线性乘积 $R = (uu^* - vv^*)$ 和 $\gamma = \frac{1}{2i}(uv^* - vu^*)$ 的方程为

$$\partial_t R = 4\kappa\,(\partial_t\delta\rho)\,\delta, \qquad (9)$$
$$\partial_t \delta = \omega_{\rm rsq}\gamma - \kappa\,(\partial_t\delta\rho)\,R, \qquad (10)$$
$$\partial_t\gamma = -\omega_{\rm rsq}\,\delta. \qquad (11)$$

方程（4）、（9）、（10）和（11）构成了零声与 rsq 模相互作用的基本非线性方程组。以平衡态 $v = 1$ 为中心进行线性化后，这些方程化为方程（4）和（6），即线性化动力学理论中的已知结果。最后需要指出的是，耦合常数 κ' 对振幅的任何依赖预计都很弱，因为 λ 表示单粒子激发所占的比例。

在关于自感应透明的论文中，McCall 和 Hahn[6] 分析了光脉冲在由二能级原子构成的介质中的传播。在

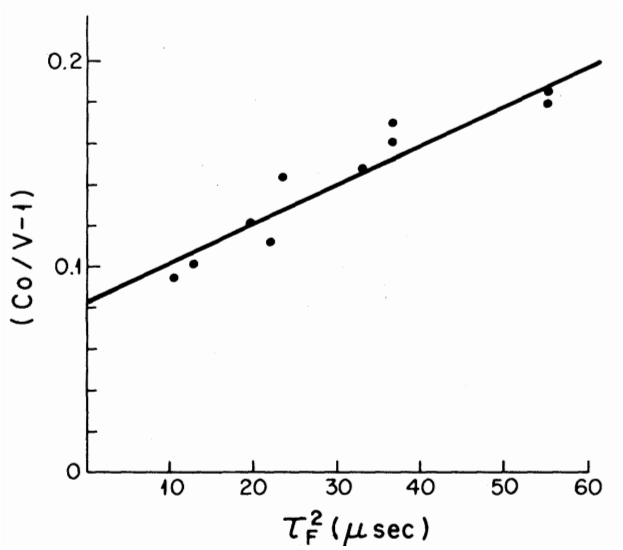


图 1. 参考文献5中，在非线性开始出现与第一个阶跃之间区域内的脉冲速度数据的最佳拟合。斜率为 1.9×10^{-3}，截距为0。083。注意，c_0 是未受扰动的零声速。

高功率下，辐射脉冲可能以孤子的形式传播（与二能级介质共振），且能量损耗很低。大振幅脉冲所表现出的低衰减（自感应透明），即使低振幅脉冲会被熄灭，也是由于辐射受激发射回脉冲的后沿所致。孤子传播的许多典型特征最近已在 ^{3}He-B 中的零声实验中观测到。具体而言，实验报告了脉冲形状和速度随功率变化，以及脉冲散射而不发生形变。[5]

这些非线性效应包含在零声与 rsq 模相互作用的自感应透明方程中。这些方程通过考察频率为 ω、波矢为$k = \omega/c$ 的声脉冲的演化而得到，这些声脉冲受到缓慢变化的包络和相移调制。具体而言，假设

$$\delta\rho(z,t) = A(z,t)\,\cos\zeta, \qquad (12)$$
$$\delta(z,t) = D(z,t)\,\cos\zeta + E(z,t)\,\sin\zeta, \qquad (13)$$

其中 $\zeta(z,t) = kz - \omega t + \Phi(z,t)$。$A$、$\Phi$、$D$ 和 E 是在尺度ω^{-1} 和 k^{-1}上缓慢变化的函数。由于 $R(z,t)$表示两个态的相对布居数，我们预期 R 会在包络函数的尺度上变化，前提是该态的寿命与脉冲宽度相当或更长。自感应透明方程是通过忽略缓慢变化函数的高阶导数以及基频的高次谐波得到的；此外，通过先从方程（10）中消去 γ，可得到关于 D 和 E的方程。

所得方程为

$$(\partial_t + c\partial_z)A = -\frac{\kappa'}{2c^2}\,[2c\partial_z D + \omega E]\,, \tag{14}$$

$$A\,(\partial_t + c\partial_z)\Phi = +\frac{\kappa'}{2c^2}\,[2c\partial_z E - \omega D]\,, \tag{15}$$

$$\partial_t D = \left[\Delta\omega - \partial_t\Phi - \tfrac{3}{2}\kappa^2 A^2\,\omega\right] E\,,$$

$$\partial_t E = \left[\partial_t\Phi - \Delta\omega + \tfrac{1}{2}\kappa^2 A^2\,\omega\right] D\,, \tag{16}$$

$$-\kappa^2 AD\,\partial_t A + \kappa\,R\,\partial_t A\,,$$

$$+\kappa^2 AE\,\partial_t A - \tfrac{1}{2}\,\kappa\,R\,\omega\,A, \tag{17}$$

$$\partial_t R = 2\kappa\,[D\,\partial_t A + E\omega A]\,, \tag{18}$$

其中 $\Delta\omega = \omega - \omega_{\rm rsq}$ 是偏离精确共振的量。

当 $\tilde{\Phi}$ $\tilde{}$为常数时，这些方程可大幅简化。对 $A = \kappa\,\omega\,A$、 $E = 2E$和 $\alpha = \kappa\kappa'\,\omega^2/4c^2$重新缩放后，精确共振情况下的一组相容方程为

$$(\partial_t + c\partial_z)\,\tilde{A} = -\alpha\,\tilde{E}\,, \tag{19}$$

$$\partial_t\,\tilde{E} = -\tilde{A}\,R\,, \tag{20}$$

$$\partial_t\,R = \tilde{A}\,\tilde{E}\,. \tag{21}$$

通过如下变换，这些方程可进一步简化[16, 17] $\tilde{A} = \partial_t\,\sigma$、 $\tilde{E} = \sin\sigma$和 $R = -\cos\sigma$；此时

$$(\partial_t^2 + c\,\partial_z\partial_t)\,\sigma = -\,\alpha\,\sin\sigma\,. \tag{22}$$

行波脉冲解， $\sigma(z,\ t) = \sigma(z - vt)$，满足

$$\sigma'' - \alpha_v\,\sin\sigma = 0\,, \tag{23}$$

其中 $\alpha_v = \alpha/v(c-v)$。标准的单孤子解，或“2π脉冲”，

$$\tilde{A}(z - vt) = 2\,\alpha_v^{1/2}\,v\,\mathrm{sech}\,[\alpha_v^{1/2}\,(z - vt)]\,, \tag{24}$$

其时间积分面积为 2π。定义τ_p为脉冲在时间上的宽度度量，即$[2\alpha_v^{1/2}\,v]\,\tau_p = 2\pi$ (τ_p 与半高全宽的关系为 $\tau_F = 0.84\tau_p$)，则脉冲速度和 τ_p 之间的关系为

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{1 + \alpha\,(\tau_p/\pi)^2}\,. \tag{25}$$

脉冲速度可由已知的耦合常数 κ和 κ'、声速以及声频计算得出。Calder 等人对群速度色散的测量[18]给出了通过实验确定的粒子-空穴不对称因子数值，[8] $\eta_{\rm exp} = 4.1\times10^{-3}$。通过使用 $\alpha = \frac{4}{15}\,\lambda\,(\eta\omega v_F/c)^2$，$c/v_F = 11$对于$P$ =24 bar、[19] $\omega/2\pi = 100$ MHz 和 $\lambda \simeq 1$，则$\alpha\,(\tau_p/\pi)^2 = 2.1\times10^{-3}\,\tau_F^2$，其中 τ_F的测量单位为μ-sec。脉冲速度从 $v/c = 0.98$对于 $\tau_F = 3\,\mu$-sec 到 $v/c = 0.90$ 对于 $\tau_F = 7\,\mu$-sec 不等，与参考文献5中报道的速度定性一致。

参考文献中也报告了脉冲压缩和速度随振幅增大而增加的现象，这些都是孤子的特征。5。然而，在速度与振幅的关系中观察到的两个“阶跃”并非单个 2π 脉冲的特征，而可能是与其他孤子相互作用所致。假设参考文献 5图 3 中，非线性行为开始后直至第一个阶跃的数据，对应于单个 2π 脉冲的速度，那么(c/v) $-\,1$ 对 τ_F^2作图应得到一条通过原点的直线。最小二乘拟合所得斜率（图 1）为 1.9×10^{-3}，与理论值 2.1×10^{-3}相符。非零截距表明，方程（）中的声速c应解释为受到邻近 sq 模微弱色散影响后的零声速。根据这种解释，截距意味着未受扰动的声速 c_0存在 $c/c_0 = 0.92$的色散修正，这与 Calder 等人对 [18] 处 sq 模色散的测量结果 $\omega = \omega_{\rm rsq}$一致。

忽略了各模的阻尼。利用 Koch 和 Wolfe 的结果，rsq 模的宽度可与正常态准粒子寿命相关联， $\tau_{\rm N}\,T^2 = 0.3\,\mu$秒·毫开尔文^2，。[8] 对于 $T/T_c = 0.4$ ，rsq 模的寿命为$\gamma^{-1}{}_{\rm rsq} \simeq 30\,\mu$秒，这明显长于典型的脉冲宽度。因此，有限寿命对脉冲速度的影响应可忽略。最后，我们指出，方程[17] （22）的多孤子解与参考文献5 中的观测尤其相关，因为双孤子解描述了无畸变的孤子散射。

感谢 P. W. Anderson、K. DeConde、W. P. Halperin、J. W. Serene 和 D. L. Stein 富有启发性的讨论，尤其感谢 P. G. N. deVegvar 和 D. M. Lee 就参考文献 5 中的实验所进行的讨论。本研究得到了美国国家科学基金会 DMR-802063 合同的支持。

---

[1] A. J. Leggett，双原子分子与库珀对，载于《凝聚态理论的现代趋势》，A. Pekalski 和 J. A. Przystawa 编（施普林格，柏林、海德堡，1980）。[2]J. C. Wheatley，载于《低温物理学进展》，第 VIIA 卷，D. F. Brewer 编（North Holland，阿姆斯特丹，1978）。

[3] R. W. Giannetta、A. Ahonen、E. Polturak、J. Saunders、E. K. Zeise、R. C. Richardson 和 D. M. Lee，在超流体 ^{3}*He-B* 中观测到新的声衰减峰，《物理评论快报》**45**, 262（1980）。[4] D. B. Mast、B. K. Sarma、J. R. Owers-Bradley、I. D. Calder、J. B. Ketterson 和 W. P. Halperin，高频声传播的测量

^{3}He-B, 《物理评论快报》45，266（1980）。[5] E. Polturak、P. G. N. deVegvar、E. K. Zeise 和 D. M. Lee, 《超流体 ^{3}He 中零声的类孤子传播》, 《物理评论快报》46，1588（1981）。[6] S. L. McCall 和 E. L. Hahn, 《自感透明》, 《物理评论》183，457（1969）。[7] P. W¨olfle，载于《低温物理学进展》第VIIa卷，D. F. Brewer 编（North Holland，阿姆斯特丹，1978）。[8] V. E. Koch 和 P. W¨olfle, 《新序参量集体模与超流体 ^{3}He 中声波的耦合》, 《物理评论快报》46，486（1981）。[9] O. Avenel、E. Varoquaux 和 H. Ebisawa, 《He-B 中新声衰减峰的场致分裂》, 《物理评论快报》45，1952（1980）。[10] J. A. Sauls 和 J. W. Serene, 《序参量模与零声的耦合》, 《物理评论B辑》23，4798（1981）。[11] P. W¨olfle, 《超流体 ^{3}He 的 A相和B相的超声性质》, 《物理学杂志会议录》C6，1278（1978）。[12] rsq 模的耦合可参见参考文献 8。[13] 这一识别在……中得到了明确证明

P. C. Mar- tin 在《超导性》中关于超导体中类似模式的论述，R. D. Parks 编（Dekker，纽约，1969），第1卷，第384页。[14]似乎没有必要修改方程（4）的左侧。参考文献5报告的非线性行为仅在声波频率接近集体模共振时才会出现。[15] 准确地说， $\delta\hat{\Delta} = (i\sigma^{\mu}\sigma^{2})\, d_{\mu\nu}\hat{p}^{\nu}$，其中 $d_{\mu\nu} = u\Delta \times (\hat{\varepsilon}_{\mu}\hat{\varepsilon}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu})$，且 $\hat{\Delta} = (i\sigma^{\mu}\sigma^{2})\ A_{\mu\nu}\hat{p}^{\nu}$，其中 $A_{\mu\nu} = v\Delta\, \delta_{\mu\nu}$。在线性理论中， $v = 1$；还需注意，B W态的相位振荡已被消去，转而用密度涨落表示。[16] G. L. Lamb, 《共振介质中的超短光脉冲传播的解析描述》, 《现代物理评论》43，99（1971）。[17] P. J. Caudrey、J. D. Gibbon、J. C. Eilbeck 和 R. K. Bullough, 《自感应透明和正弦-戈登方程的精确多孤子解》, 《物理评论快报》30，237（1973）。[18] I. D. Calder、D. B. Mast、B. K. Sarma、J. R. Owens-Bradley、J. B. Ketterson 和 W. J. Halperin, 《 ^{3}He-B中集体模的群速度光谱学》, 《物理评论快报》45，1866（1980）。[19] J. C. Wheatley, 《超流 ^{3}He的实验性质》, 《现代物理评论》47，415（1975）。