次领头阶下核子的夸克和胶子引力形状因子

UlaşÖzdem *卫生服务高等职业学校伊斯坦布尔艾登大学，塞法柯伊-屈屈克切克梅杰，34295伊斯坦布尔，土耳其

我们在三点QCD求和规则中计算了核子的夸克和胶子引力形状因子 A、 J 和 D，针对夸克和胶子能动张量（EMT）在 α_s 下的次领头阶计算，并在MS方案中对二者采用相同阶数。核子的能动张量也对该方法进行了检验，展示了求和规则在哪些情况下可靠以及其原因。 D 和迹形状因子 $\bar{c}$ 的受保护估计量需要反对称Borel矩，因为仅使用相等Borel质量的矩中没有任何一个受到保护。$\mathcal{O}(\alpha_s)$修正使 $A_{\rm tot}$ 降低了32–40%，使 $J_{\rm tot}$ 降低了22–27%，使 $|D_{\rm tot}|$ 降低了21–27%，这是因为两点函数的微扰份额大得多。总形状因子与格点量子色动力学在 $1 \le Q^2 \le 2.5$ 吉电子伏特²处一致。在 $Q^2 = 1.5$ 吉电子伏特²处， $A_{\rm tot} = 0.337 \pm 0.113$、$J_{\rm tot} = 0.206 \pm 0.100$ $D_{\rm tot} = -0.206 \pm 0.121$ D 和。是最可靠的结果：其关联函数主要由微扰贡献构成，并且其夸克和胶子部分与格点结果一致。在 A 和 J中，一个不随 Q^2 衰减的局部胶子凝聚项占主导，其胶子份额明显低于格点结果，这可能是因为在该阶数下，胶子能动张量仅通过胶子交换和凝聚项发生耦合。工作区域仅在 $\beta = 1$附近存在，并且在博雷尔窗口内无法分离跃迁的常数部分。各个守恒恒等式在某一点偏离了两个标准差，这与 $g_{\mu\nu}$ 结构中缺失一个有限项相符，因此 $\bar{c}$ 在含凝聚项的领先阶下给出。

arXiv:2611.30124v1 [hep-ph] 23 Nov 2026

I. 引言

夸克和胶子各组分 $a = q$、 g之间的核子态能动张量（EMT）矩阵元，可用引力形状因子（GFF） $A_a(t)$、 $B_a(t)$、$D_a(t)$和 $\bar{c}_a(t)$ [1, 2]来参数化。它们由广义部分子分布（GPDs）的第二梅林矩 [3–5], 给出（综述见参考值 [6, 7]），并参与将核子自旋 [4, 8] 和质量 [9–11] 分解为夸克和胶子贡献。对于总能动张量， $A(0) = 1$ 和 $B(0) = 0$ 由庞加莱不变性 [12]确定。 D项 [13] 不受任何守恒定律约束，它与核子内部的内力、压力和剪切力分布以及核子的力学稳定性 [14, 15]相关。能量、角动量和力的空间分布已在不同参考系 [16, 17]中得到研究。其定义和解释（包括压力的概念）仍在讨论之中 [18–20], ，近期综述见参考值 [21]。迹形状因子 $\bar{c}_a$ 也不受前向求和规则约束。它因守恒而在总能动张量中消失，描述夸克和胶子子系统之间的力 [22], ，并与迹反常以及核子质量分解 [10, 11, 23, 24]相关。

关于夸克形状因子的实验信息来自在杰弗逊实验室 [25, 26], 测量的深度虚康普顿散射（DVCS） [27] 参见综述。夸克对 D-项的贡献首次从这些数据中提取出来 [28], ，随后分析扩展到了剪切力和力学半径 [29], 另见参考值 [30, 31]。夸克形状因子和力学性质也通过广义部分子分布的全局分析 [32, 33]以及其他现象学研究 [34]获得。近阈值 J/ψ 光致产生过程已经得到测量 [35, 36],，其与胶子引力形状因子及质子质量结构的关系也在多项研究中得到探讨 [37–40]。这些过程中的反应机制也得到了考察 [41, 42]。此外，微扰量子色动力学计算了大动量转移下的胶子引力形状因子 [43], ，并将奇异夸克D-项与近阈值 ϕ-介子产生联系起来 [44]。预计未来的实验设施将大幅拓展这些测量 [45, 46]。在格上，核子引力形状因子中的夸克贡献首先得到计算 [47–49]。随后开展了动量和自旋的夸克与胶子分解 [50, 51],参见综述 [52] ，以及核子质量分解 [53], 、胶子引力形状因子 [54, 55],、压力分布 [56]和迹反常形状因子的研究 [57]。最近，在接近其物理数值的π 介子质量下，已经获得了上夸克、下夸克、奇异夸克和胶子贡献的完整味分解 [58]。形状因子还在广泛的理论方法中得到研究，包括手征有效场论 [59, 60], 、手征夸克-孤子模型 [61, 62], 、Skyrme模型及相关孤子模型 [63, 64], 、袋模型 [65], 、大-N_c 夸克模型 [17],、色散关系 [66, 67], 、全息量子色动力学 [39, 68], 、光前模型和夸克–双夸克模型 [69, 70], 、基底光前量子化 [71], 以及南部–约纳-拉西尼奥模型 [

72, 73], 法捷耶夫方程 [74] 和介子主导 [75]。本文

* ulasozdem@aydin.edu.tr

探讨了尺度反常对内部压力的作用，见参考值 [64]。对于带电粒子，电磁力会改变小t 行为 $D(t)$ [76, 77]。其他强子和系统的 GFF 也得到了研究，例如 π介子 [78]，自旋为3/2 的重子 [79, 80]，原子核 [81]，以及 Q球等模型系统 [82]。

在量子色动力学求和规则中， [83, 84]，核子的夸克引力形状因子通过结合核子分布振幅的光锥求和规则 [85, 86]，（包括味分解 [87]）获得。其他重子的引力形状因子 [80, 88–90]以及核子与其共振态之间的引力跃迁形状因子 [91, 92] 也已通过量子色动力学求和规则进行了研究。在参考值 [93]，中，胶子引力形状因子通过三点求和规则进行了分析，其中胶子能动张量通过胶子凝聚与夸克线耦合。据我们所知，这些求和规则分析并未包含微扰性的 O(α_s) 修正。在本研究中，我们应用三点QCD求和规则方法 [94, 95]，在 α_s中的次领头阶下研究核子的引力形状因子，同时考察夸克能动张量和胶子能动张量。在这一阶，胶子能动张量通过交换胶子以微扰方式与夸克线耦合。因此，在 MS方案中，两种组分均按同一阶次处理。该分析基于三个方法学要素。首先，从对双极点精确且在前向极限下受 Ward 恒等式保护的洛伦兹结构组合中提取形状因子（第二节）。其次，我们表明，仅基于相等 Borel 质量的 $\bar{c}$ 估计量没有一个能够受到能动张量守恒的保护。相反，我们利用 Borel 空间中的守恒恒等式构造了 $\bar{c}$和 D 的受保护估计量；这些恒等式要求反对称Borel矩，我们在 O(α_s) 下计算了这些矩（第二节 D）。第三，我们利用一组源自能动张量守恒和重整化群不变性的内部一致性检验，检查了 O(α_s) 三点函数（第四节）。我们在第六节 A中将所得结果与格点量子色动力学及其他方法进行了比较。

II. 形式主义

A. 能动张量与形状因子

（对称且规范不变的）能动张量的夸克和胶子部分为

$$T^q_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\,\bar{q}\big(\gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu\big)q, \qquad T^g_{\mu\nu} = -G^a_{\mu\alpha}G^{a\,\alpha}_\nu + \frac{1}{4}\,g_{\mu\nu}\,G^a_{\alpha\beta}G^{a\,\alpha\beta}, \tag{1}$$

其核子矩阵元分解为

$$\begin{aligned}\langle p'|T^a_{\mu\nu}|p\rangle = \bar{u}(p')\Big[&A_a\,\gamma_{(\mu}P_{\nu)} + B_a\,\frac{P_{(\mu}i\sigma_{\nu)\alpha}q^\alpha}{2m}\\ &+ D_a\,\frac{q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2}{4m} + \bar{c}_a\,m\,g_{\mu\nu}\Big]u(p),\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $P=(p+p')/2$、 $q=p'-p$、 $t=q^2=-Q^2$、 $X_{(\mu}Y_{\nu)}=\frac{1}{2}(X_\mu Y_\nu + X_\nu Y_\mu)$ 和 $J_a=(A_a+B_a)/2$。总能动张量的守恒意味着对于所有 t，都有 $\sum_a \bar{c}_a(t)=0$，以及 $A_{\rm tot}(0)=1$ 和 $J_{\rm tot}(0)=1/2$。

B. 关联函数

对于核子，我们采用不含导数的一般插值流，

$$\eta(x) = 2\epsilon^{abc}\Big[\big(u^{aT}Cd^b\big)\gamma_5 u^c + \beta\big(u^{aT}C\gamma_5 d^b\big)u^c\Big], \tag{3}$$

其中 $\beta=-1$ 给出 Ioffe 流。关联函数为

$$\Pi_{\mu\nu}(p,p') = i^2\int d^4x\,d^4y\;e^{ip'\cdot x - ip\cdot y}\,\langle 0|\mathcal{T}\{\eta(x)\,T_{\mu\nu}(0)\,\bar{\eta}(y)\}|0\rangle, \tag{4}$$

我们将其按含奇数个狄拉克矩阵的结构展开，

$$\begin{aligned}&S_1 = p_\mu p_\nu \not{p}, \quad S_2 = p_\mu p_\nu \not{p}', \quad S_5 = p_\mu p'_\nu \not{p}, \quad S_7 = g_{\mu\nu}\not{p},\\ &S_9 = \gamma_\mu p_\nu, \quad S_{11} = \gamma_{[p}\gamma_{p']}\gamma_{\mu]}\,p_\nu,\end{aligned} \tag{5}$$

以及它们的 $p\leftrightarrow p'$ 伴随项（S_3， S_4， S_6， S_8， S_{10}， S_{12}）和 $\mu\leftrightarrow\nu$ 对应项。对于相等 Borel 质量，$p\leftrightarrow p'$ 对称性给出 $C_3=C_2$， $C_4=C_1$， $C_6=C_5$， $C_8=C_7$， $C_{10}=C_9$。表I 列出了分解式（2）中双极点的留数。

我们对 p^2和 p'^2进行双重博雷尔变换，并采用相等的 Borel 质量 $M_1^2=M_2^2=M^2(\tau=1/M^2)$，再将强子侧归一化为 $H_i=\Pi_i\,e^{2m^2/M^2}/\lambda^2$，其中 λ^2 取自相同阶的两点求和规则。

表 I. 结构（5）中双极点留数的系数（归一化 $\lambda^2 e^{-2m^2/M^2}$ 省略）。 S_9 和 S_{10} 的系数由极点项守恒决定， $C_9 = -Q^2 J/4$。

结构	A	B	D	$\bar{c}$
S_1, S_4	0	$-1/4$	$1/4$	0
S_2, S_3	$1/2$	$1/4$	$1/4$	0
S_5, S_6	$1/4$	0	$-1/4$	0
S_7, S_8	0	0	$Q^2/4$	m^2
S_{11}, S_{12}	$1/4$	$1/4$	0	0

C. Ward 保护组合

组合 $A = 2(H_{11} + H_1 + H_5)$ 和 $J = 2H_{11}$ 对于极点是精确的，但不适用于算符乘积展开（OPE）。即使在领先阶（LO）微扰算符乘积展开中，系数 C_1 和 C_5 各自也包含在 Q^2 较小时随 $1/Q^2$ 增长、且几乎相互抵消的部分。由于在领先阶夸克能动张量就是总能动张量，因此此时必须满足 $A(0) = 1$ 和$J(0) = 1/2$，而只有这些组合

$$A = H_1 + H_2 + 2H_5, \qquad J = 2H_{11}, \qquad B = 2J - A \tag{6}$$

重现这些数值。它们对于极点是精确的（表 I），并且与前向极限下的能动张量守恒相关，因此我们在全文中都使用它们。

D. 守恒恒等式与 D 和 $\bar{c}$的估计量

极点系数给出 $C_7 = m^2\bar{c} + Q^2 D/4$。估计量 $m^2\bar{c}_W = H_7 - (Q^2/4)\ (H_1 + H_2 - 2H_5)$仅使用相等 Borel 质量，即使在完全守恒的关联函数中也违反 $\bar{c}_{\rm tot} = 0$；Borel 空间中的守恒恒等式说明了原因。 $q^\mu \Pi_{\mu\nu}$沿 $p_\nu \not{p}$和 $p'_\nu \not{p}$的分量结合 $B[p^2 f] = -\partial_{\tau_1} B[f]$和 $B[p'^2 f] = -\partial_{\tau_2} B[f]$给出（接触项在双重博雷尔变换下消失）：

$$V_1 \equiv \tfrac{1}{2}\mathcal{A}(B_1 + B_5) + \tfrac{Q^2}{2}(B_1 - B_5) - B_7 - B_9 = 0, \tag{7}$$
$$V_3 \equiv \tfrac{1}{2}\mathcal{A}(B_3 + B_5) + \tfrac{Q^2}{2}(B_5 - B_3) + B_7 - B_{10} = 0, \tag{8}$$

其中$\mathcal{A} = \partial_{\tau_1} - \partial_{\tau_2}$ 在 $\tau_1 = \tau_2$处取值。由于双极点的行为为 $e^{-m^2(\tau_1+\tau_2)}$，$\mathcal{A}$ 会将其消去，而极点给出 $V_1 = -m^2\bar{c}\,\Lambda$ 和 $V_3 = m^2\bar{c}\,\Lambda$，其中 $\Lambda = \lambda^2 e^{-m^2(\tau_1+\tau_2)}$。对于一般的守恒关联函数，相等质量估计量等于反对称导数，而 $\tau_1 = \tau_2$ 处的数据无法获取该导数。因此，仅由相等 Borel 质量构成的 $\bar{c}$ 估计量不受守恒关系保护。受保护的估计量为

$$m^2\bar{c}^{(1)} = -V_1\, n, \qquad m^2\bar{c}^{(3)} = V_3\, n, \qquad D^{(i)} = \frac{4}{Q^2}\big(H_7 - m^2\bar{c}^{(i)}\big), \tag{9}$$

其中 $n = e^{2m^2/M^2}/\lambda^2$。对于极点，它们分别给出 $\bar{c}^{(i)} = \bar{c}$ 和 $D^{(i)} = D$，并且对于每个守恒关联函数都严格给出 $\bar{c}^{(i)} = 0$；对于总能动张量，这两个估计量相一致。

对于当前分析而言，重要的是 D 式（9）的估计量完全不依赖于$g_{\mu\nu}$ 结构。代入 V_1 和 V_3 得到

$$\begin{aligned} D_a^{(1)} &= \frac{4n}{Q^2}\Big[\tfrac{1}{2}\mathcal{A}(B_1 + B_5) + \tfrac{Q^2}{2}(B_1 - B_5) - B_9\Big]_a, \\ D_a^{(3)} &= \frac{4n}{Q^2}\Big[-\tfrac{1}{2}\mathcal{A}(B_3 + B_5) - \tfrac{Q^2}{2}(B_5 - B_3) + B_{10}\Big]_a, \end{aligned} \tag{10}$$

对于每个组分 a，sinc e B_7 在 H_7 和$V_{1,3}$之间相互抵消。相比之下， $\bar{c}$的估计量直接包含 B_7 .

III. 算符乘积展开

A. 主导阶与凝聚项

在领先阶，夸克-能动张量关联函数包含微扰贡献，以及局域算符乘积展开中的胶子凝聚项$\langle g^2G^2\rangle$（维数为四）、四夸克凝聚（维数为六）和混合凝聚项 $m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2$（维数为八）的贡献。由于胶子能动张量仅通过胶子交换与夸克线耦合，其微扰贡献从$\mathcal{O}(\alpha_s)$阶开始，因此领先阶胶子关联函数仅由凝聚项构成。我们在双重谱表示式中采用三角形模型 $\sigma+\sigma'\le S_0$ 扣除连续谱。领先阶项和凝聚项的表达式见附录A，凝聚图示于图2。

B. $\mathcal{O}(\alpha_s)$修正

在 $\mathcal{O}(\alpha_s)$阶，夸克-能动张量关联函数的贡献来自流的夸克线之间的胶子交换、夸克-能动张量顶点的单圈修正、胶子连接到能动张量顶点的接触图，以及夸克自能。该阶的胶子能动张量关联函数通过将胶子能动张量插入交换胶子而得到。该阶的所有拓扑如图 1所示。

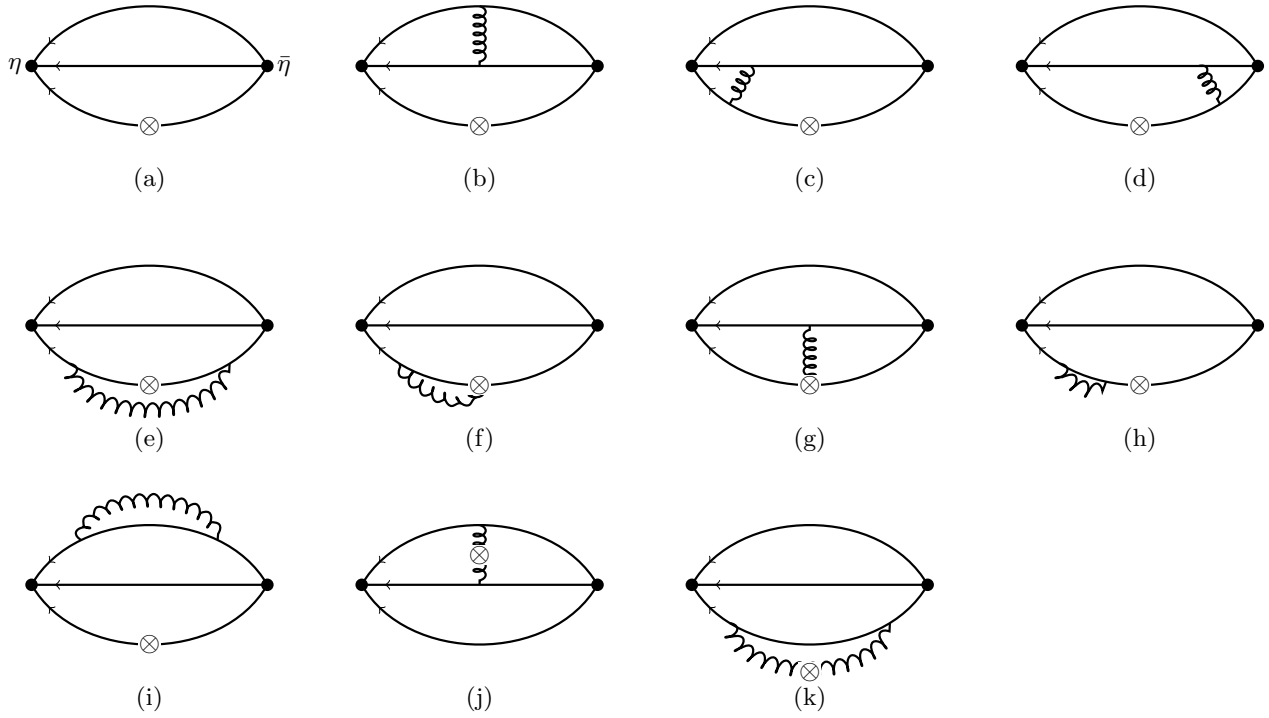

图 1. 三点函数的领先阶和$\mathcal{O}(\alpha_s)$阶图。下方夸克线承载夸克能动张量（⊗）；圆点表示插值流 η （左）和 $\bar{\eta}$ （右）。(a) 领先阶。$\mathcal{O}(\alpha_s)$阶夸克能动张量：(b) 两条旁观者线之间的胶子交换；(c)、(d) 旁观者线与活跃线之间的交换，分别位于 η 侧和 $\bar{\eta}$ 侧（每侧各有两条旁观者线）；(e) 夸克-能动张量顶点的单圈修正；(f) 接触图，能动张量顶点发出的胶子连接到活跃线（任一侧）；(g) 接触图，胶子连接到旁观者线（两条旁观者线）；(h) 活跃线的自能（任一线段）；(i) 旁观者线的自能（两条旁观者线）。$\mathcal{O}(\alpha_s)$阶胶子能动张量：(j) 胶子能动张量插入连接两条不同夸克线的胶子上（uu 和 ud 两对）；(k) 胶子能动张量插入由同一条夸克线发出并被其重新吸收的胶子上（u 或 d）。每种夸克能动张量拓扑都分别出现在 u 线和 d 线上。这些就是该阶的所有拓扑：胶子能动张量只与胶子线耦合，其三胶子顶点在$\mathcal{O}(\alpha_s)$阶不会出现。

我们按照标准 MS方案对夸克自能和能动张量进行重整化，从而确定尺度依赖分解 $A_q(\mu)$、 $A_g(\mu)$ 的含义。对于插值流的子图，我们采用保持结构的 MS 处方。在此处方中，反项是极点乘以完整的 D 维局域

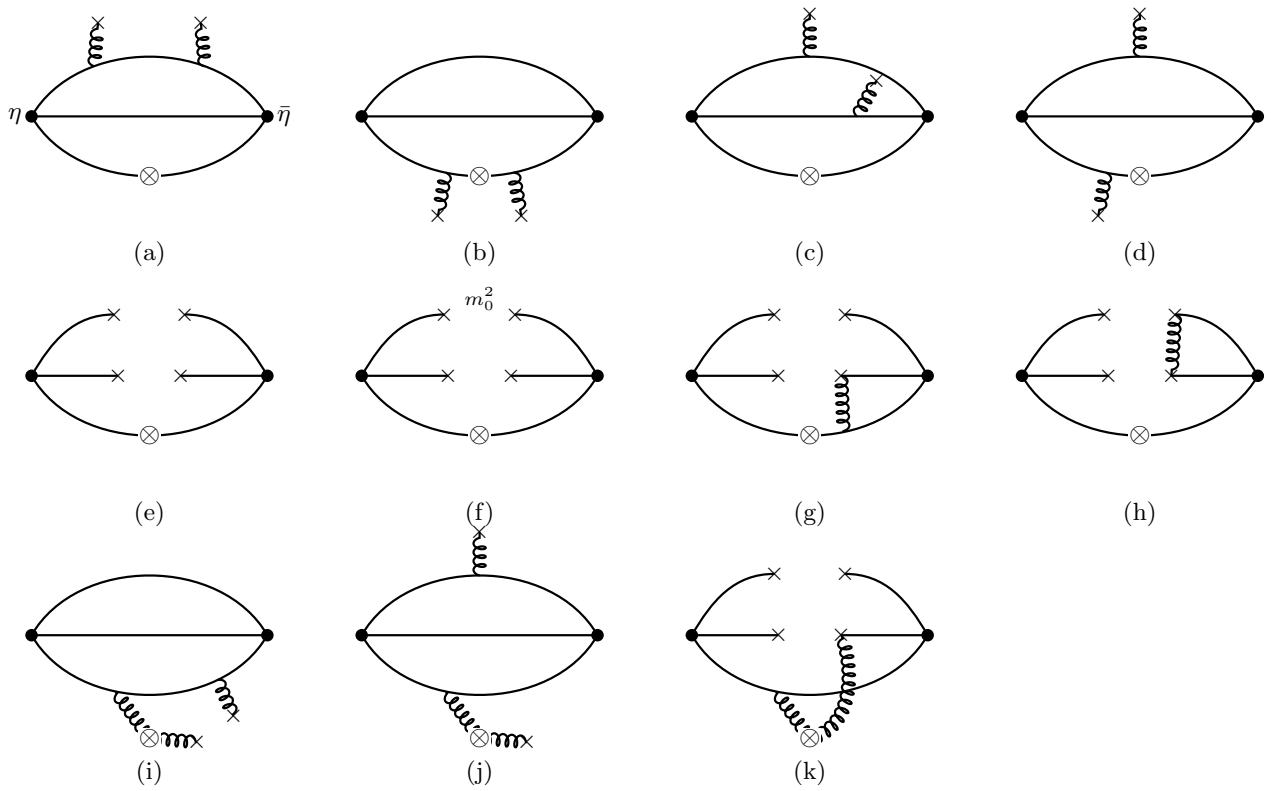

图 2. 局域算符乘积展开中的领先阶凝聚图，采用以能动张量顶点为中心的福克–施温格规范。符号 $\times$ 表示真空场，而以 $\times$ 结束的夸克线表示夸克凝聚。夸克能动张量（$\otimes$ 位于下方的活跃线上）：胶子凝聚$\langle g^2 G^2\rangle$，其中 (a) 两个胶子都位于同一条旁观者线上，(b) 一个胶子位于活跃线上的能动张量顶点一侧，另一个位于另一侧，(c) 每条旁观者线上各有一个胶子，(d) 一个胶子位于活跃线上，另一个位于一条旁观者线上；(e) 四夸克凝聚$\langle\bar{q}q\rangle^2$,，其中两条旁观者线均由凝聚取代；混合凝聚 $m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2$，来自 (f) 凝聚线非局域展开中的 m_0^2 项，(g) 夸克–胶子凝聚中的胶子被活跃线吸收，以及 (h) 两条凝聚线之间的软胶子，它源于此规范下凝聚线的相位因子。胶子能动张量（$\otimes$位于胶子线上）：硬胶子被一条夸克线吸收，而软胶子与 (i) 同一条线上的软胶子配对，或与 (j) 另一条线上的软胶子配对，或 (k) 被一条旁观者线上的夸克–胶子凝聚吸收，此时另一条旁观者线由夸克凝聚取代。在此规范下，能动张量顶点处的胶子场为零，活跃线上同一线段中的两个软胶子不产生贡献。图 (g)、(h) 和 (k) 仅对这里使用的结构中的 d夸克部分有贡献，而四夸克凝聚和混合凝聚贡献正比于 $\beta-1$。图中未显示旁观者线之间的置换。

子图结构，不进行四维费尔兹约化，并且 γ_5 通过反对易从流串中移除，这与朴素维数正规化一致。该处方与标准处方的区别在于对流进行有限重整化，这种重整化对二点和三点函数是相同的，并且在形状因子中相互抵消。第 IV 节的前向沃德检验支持这一抵消。

对发散子图进行局部减除，再以解析方式加回。对于剩余的有限积分，狄拉克代数在四维中求值。此选择的方案依赖性完全存在于发散子图中，并通过加回 D 维局域顶角函数的有限部分予以消除。我们重新计算了这些局域顶角函数，分别采用在 D 维中的狄拉克代数以及固定为四维的代数。在结构 $\mathbb{1}\,\mathbb{2}(q_\mu\gamma_\nu+q_\nu\gamma_\mu)$ 中，差值等于计算中使用的有限常数，即夸克-能动张量顶点对应的 $-2/3$，以及胶子-能动张量顶点对应的 $-8/3$；而结构 $q_\mu q_\nu \not{q}/q^2$ 不发生偏移。因此，$p_\mu p_\nu$ 扇区处于标准 MS 方案中。

我们在 $x=Q^2\tau$, $x\in\{0.5,\ 0.7,\ 1.25,\ 1.8,\ 2.4,\ 3.0,\ 3.5\}$ 的七个取值处对有限积分进行数值计算，选取参考博雷尔参数 τ_0，并利用关联函数的齐次性，

$$B(\tau,Q^2,S_0)=\lambda^{-d}\big[B(\tau_0,Q^2\lambda,S_0\lambda)+\ln\lambda\,C_\mu(\tau_0,Q^2\lambda,S_0\lambda)\big],\qquad \lambda=\tau/\tau_0, \tag{11}$$

其中，C_μ 是 $\ln\mu^2$ 的系数，d 是该结构的质量维数。我们将 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 修正插值为相对于 LO关联函数的比值，然后再乘以精确的 LO 关联函数。反对称矩

$\mathcal{A}B_i$ 的质量维数额外增加一阶，而且其领先阶部分在运动学区域的某些部分会过零。因此，我们将它们插值为相对于同一结构的对称领先阶关联函数的比值，并乘以额外因子 λ^{-1}。在分析区域内，领先阶时这两种插值都能以 $\mathcal{O}(10^{-4})$（中位数）的精度复现精确关联函数。

IV. O(αs) 关联函数的一致性检验

O(α_s) 三点函数需要通过一系列检验，这些检验源于能动张量守恒和重整化群不变性，且不使用任何外部输入。

在前向极限下，总能动张量的三点函数由两点函数确定，无论是对 A 的组合还是对 J 的组合。为此，我们利用 $S_0 = \infty$ 处七个运动学点上计算得到的 O(α_s) 三点函数与领先阶三点函数之比，并用关于 x 的二次和三次多项式将其外推至 $x \to 0$。对于总能动张量，所得数值为：A 时为 21.55–21.84，J 时为 21.27–21.48（单位为 $a = \alpha_s C_F/(4\pi)$，对应 $\beta = -1$、0 和 1）；而两点函数对应的数值为 21.51，两者相差在 1.5% 以内。单独考虑夸克能动张量时，这两个比值分别为 17.1–17.5 和 16.8–17.3，因此只有加入胶子能动张量后，这一恒等式才成立。

$\mathcal{O}(\alpha_s)$ 关联函数的能标依赖性受到重整化群不变性的约束。所有部分的 ln $\frac{\mu^2}{3}$ 的反常维数乘以 LO 关联函数 (LO LO)。在分析区域内，对于对称矩，$\leq 2.5 \times 10^{-3}$ 这一关系成立至；对于反对称矩，$\sum C_\mu =$ 系数之和必须等于流 $\leq 1.4 \times 10^{-2}$ 则成立至。两者均归一化为 $|\mathrm{LO}_u| + |\mathrm{LO}_d|$，因为在某些点上，各味道之间的反对称 LO 关联函数几乎相互抵消。

除了这些检验，能动张量守恒还提供了另一项检验。对于总能动张量，组合 $V_1 + V_3$中，B_7 相互抵消，因此该组合必须为零。在所考虑的全部七个运动学点以及 (S_0, β) 的全部 21 个取值处，该组合在数值不确定度范围内与零相符，$|V_1 + V_3|/\sigma \leq 0.34$；而夸克和胶子部分各自非零，且在 145 个147 种情形中符号相反（表II）。

由于两个估计量 $D^{(1)}$ 和 $D^{(3)}$ 均由不同的结构构成，公式（10）中的它们彼此一致，也构成了一项检验。对于总能动张量，它们在所有 ≤ 0.006 下均一致至 Q^2。我们还通过数值计算验证了 D 不依赖于 B_7：将 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 阶部分 B_7 替换为其领先阶数值的任意倍数，D 仍保持不变，精度为 4×10^{-17}。

单独的恒等式 $V_1 = 0$ 和 $V_3 = 0$ 包含 B_7，因此它们检验的是 $g_{\mu\nu}$ 扇区，该扇区携带迹形状因子 $\bar{c}$。在 O(α_s) 阶，这一扇区最难控制。夸克张量和胶子张量的迹部分在重整化下会发生混合，而它们的分离定义了 $\bar{c}_q$ 和 $\bar{c}_g$，这与迹反常的分解有关，并且依赖于方案 [23, 24]。只有它们的和为零且与方案无关。我们在一个运动学点 $x = 1.25$计算了 S_7 的 O(α_s) 阶系数；在该点，V_1 和 V_3 偏离零的幅度大小相等、符号相反，在 $\beta = 1$处的工作区域内为领先阶 S_7 系数的 3.2–3.4 倍，而数值不确定度为该系数的 1.6–1.9 倍，也就是说约为两个标准差的水平（在 $\beta = -1$ 处为 2.1–2.4σ ）。不确定度主要来自 V_1 和 V_3 中除 B_7以外的项，尤其是反对称矩；S_7 本身的影响较小。因此，我们增加了蒙特卡罗计算预算，将主导该结果的图类重新计算，预算提高了 4–16 倍。所有结果与此前数值的差异均在此前误差估计的 0.53 倍以内。由此，偏差的不确定度约减小了一半，而偏差本身仅改变了领先阶系数的 0.4 倍，远在此前的不确定度范围内，且并未趋近于零。对于 β 的全部三个取值及所有阈值 S_0，偏差与领先阶 S_7 系数之比均在 3.2 至 3.4 之间。这与存在一个正比于领先阶结构的缺失有限项相符，例如迹部分的有限重整化。我们排除了两种可能机制：局域顶角函数的迹型分量 $g_{\mu\nu}\not{q}$ 会产生一个在双重博雷尔变换下消失的接触项；以及顶角极点与外部狄拉克代数的 O(ϵ) 阶部分的乘积。不过，我们尚未确定该项的来源。可以在第二个运动学点检验这一偏差是否为领先阶系数的常数倍。然而，在其他点上，以领先阶 S_7系数为单位表示的反对称矩数值不确定度要大两到三倍。由于公式（10），这些因素均不影响 D，而 A、J 和 B 的组合中不含 S_7。另一方面，这使得我们无法在 O(α_s) 阶确定 $\bar{c}$，因此其结果是在含凝聚项的领先阶下给出的。

V. 数值分析

输入参数列于表 III中，其中数值 α_s 对应于其根据世界平均值进行的两圈演化 [96]。我们利用相同阶下 λ^2 结构的两点求和规则得到留数 $\not{q}$，阈值为 $s_0 \in \{2.1, 2.225, 2.35\}$ 吉电子伏特^2, 极点贡献至少为 50%，最高维凝聚项的贡献至多为10%。三点博雷尔窗口保持在相同 β 和s_0对应的两点窗口内，以确保各道的博雷尔变量均处于两点求和规则满足这些条件的窗口范围内

表 II. 七个运动学点处 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 关联函数的守恒检验（每个 $(S_0,\ \beta)$ 有 21 个数值）。

x	最大值 $\lvert V_1+V_3\rvert_{\rm tot}/\sigma$	异号 q/g	μ规则（反对称）
0.5	0.22	21/21	4.6×10^{-4}
0.7	0.34	19/21	1.2×10^{-3}
1.25	0.27	21/21	2.8×10^{-3}
1.8	0.31	21/21	6.8×10^{-3}
2.4	0.29	21/21	1.3×10^{-2}
3.0	0.29	21/21	1.4×10^{-2}
3.5	0.25	21/21	1.3×10^{-2}

表 III. 在能标 $\mu=1$ 吉电子伏特下用于数值分析的输入参数。轻夸克质量设为零。第三列中的变化用于不确定度估计。

参数	数值	变化	Ref.
m_N	0.938 吉电子伏特	–	[96]
α_s(1 吉电子伏特)	0.47	尺度变化	[96]
$\langle\bar{q}q\rangle$	$-(0.24)^3$ 吉电子伏特^3	$-(0.23)^3$, $-(0.25)^3$ 吉电子伏特^3	[97, 98]
m_0^2	0.8 吉电子伏特^2	0.6 吉电子伏特^2	[97, 98]
$\langle\alpha_s G^2/\pi\rangle$	0.012 吉电子伏特^4	$\times0.5$, $\times1.5$	[83, 98]

这些条件。利用式（A5）的两点求和规则及表 III 中的参数，得到留数在 O(α_s) 下为 $\lambda^2=(9.6\pm1.8)\times10^{-4}$ 吉电子伏特^6，即 $\lambda=0.031\pm0.003$ 吉电子伏特^3,；在包含凝聚项的领先阶下为 $\lambda^2=(5.3\pm1.2)\times10^{-4}$ 吉电子伏特^6。中心值取 $\beta\in\{0.95,1,1.05\}$ 和 s_0 的三个取值范围上的中点；不确定度则综合了半极差和胶子凝聚的变化。两点函数中的夸克凝聚贡献正比于 $\beta-1$；对于 $\beta=0.95$ 和 1.05，其变化对 λ^2 的影响至多为 3%，在此处可以忽略。对于 $\beta=1$ 和 $s_0=2.225$ 吉电子伏特，两点窗口为 $0.73\le M^2\le0.89$ 吉电子伏特^2。由于留数取决于 β 以及流（3）的归一化，因此不能直接与使用 Ioffe 流得到的数值进行比较。

我们在参考值 $Q^2_{\rm ref}=1.5$ 吉电子伏特^2, 处确定一次工作区域，并将其应用于所有 Q^2。对每种形状因子组合的关联函数应用的判据为：极点贡献 $0.5\le\Pi(S_0)/\Pi(\infty)\le1$，且四夸克比例不超过 30%；三角形连续谱取 $S_0\in[3.0,4.7]$ 吉电子伏特^2。对于 A，在其他 Q^2取值下的参考单元中，这些判据仍然满足，至少覆盖 99.5% 的单元。对于 J，u 夸克的四夸克判据在 $Q^2=2$ 和 2.5 吉电子伏特^2, 时，分别在 76% 和 69% 的单元中满足；d 夸克的极点判据在 $Q^2\neq Q^2_{\rm ref}$时，则在 93–99% 的单元中满足。我们保留这些单元，因为工作区域固定在 $Q^2_{\rm ref}$。混合参数 β 在 $[-5,5]$ 范围内以 0.05 为步长扫描。当所有组分都必须使用同一个插值流时，判据筛选出 $\beta\in\{0.95,1,1.05\}$，而 A 和 B 取 $\beta=1$，这是 A组合满足判据的唯一取值。

对 $\beta\approx1$ 的限制可从两点求和规则理解。其六维和八维贡献分别与 $(\beta-1)(7\beta+5)$ 和 $(\beta-1)(13\beta+11)$ 成正比，见 [Eq. (A5)],。在 $s_0=2.225$ 吉电子伏特处，两点求和规则仅在八维贡献（即最高维贡献）相对于微扰贡献较小的区域内存在窗口。这出现在其系数于 $\beta=1$ 和 $\beta=-11/13$ 处为零附近，即 $-1.10\le\beta\le-0.75$ 和 $0.85\le\beta\le1.30$。在包含 Ioffe 流的第一个区间内，对于 d 夸克和胶子能动张量，J 的判据不满足。在结构 S_{11} 中，d 夸克的微扰系数正比于 $(1+\beta)^2$（附录 A），并在 $\beta=-1$ 处为零。因此，d 夸克关联函数仅由凝聚贡献构成，而胶子能动张量关联函数则由其八维部分主导。在第二个区间内，四夸克和混合凝聚贡献正比于 $\beta-1$，且只有在 $|\beta-1|\le0.05$ 时，所有组分才均满足判据。因此，工作区域位于这些贡献因流的结构而受到抑制之处，收敛判据也主要因此得以满足。另一方面，四维胶子凝聚贡献并未受到抑制（表 VI）。因此，只有在 $\beta\in\{0.95,1,1.05\}$ 范围内，才能评估结果对插值流的依赖性；该依赖性已计入工作区域内的取值范围。此依赖性相当显著，在 β 的三个取值下，$J_{\rm tot}$ 和 $D_{\rm tot}$ 中心值的半极差占其在工作区域内半极差的 54–72%。例如，在 $Q^2=1.5$ 吉电子伏特处，

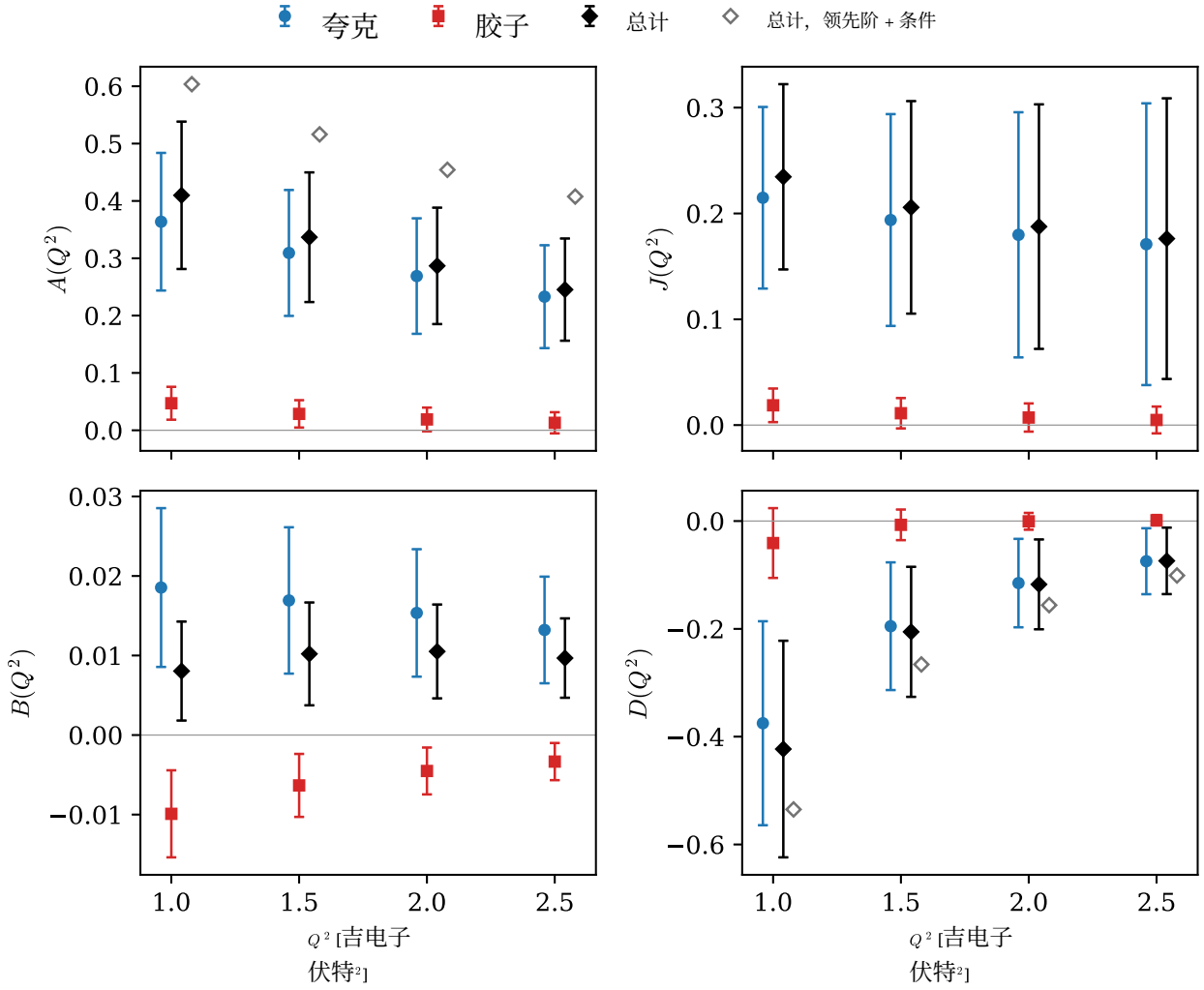

图3. 在$\mathcal{O}(\alpha_s)$、 $\mu = 1$ 吉电子伏特、MS方案下的夸克、胶子及总引力形状因子。空心符号：含凝聚项的领先阶总 A 和 D 。为便于观察，各点在水平方向上错开。

$J_{\rm tot}$ 从 0.244 变为 0.126，而 $D_{\rm tot}$ 则从 -0.147 变为 -0.285，变化发生在 $\beta = 0.95$ 与 1.05 之间。这种变化几乎完全源于四夸克和混合凝聚贡献，它们在 $\beta = 1$ 处改变符号。去掉这些贡献后，在 $Q^2 = 1$ 和 2.5 吉电子伏特处，变化幅度降至至多 0.013（ $J_{\rm tot}$ ）和 0.010（ $D_{\rm tot}$）。

每个形状因子的不确定度取以下各项贡献的平方和的平方根：工作区域内的离散范围（β、 s_0、 S_0 和 M^2），g^2G^2变化至原值的0.5倍和1.5倍所产生的变化，夸克凝聚项的变化（$\bar{q}q$ = –(0.23)^3 和 –(0.25)^3 吉电子伏特^3、 $m_0^2 = 0.6$ 吉电子伏特^2），计算O(α_s)积分时产生的四项数值贡献（统计误差、可重复性、积分预算增加时的收敛性以及插值，见附录B），以及采用 α_s的两圈演化时，能标在 $\mu^2 \in$ {0.5, 1, 2}吉电子伏特^2 之间变化所产生的影响。在能标变化的计算中，利用 $n = 2$ 矩的一级DGLAP演化，将夸克和胶子部分演化回 $\mu = 1$ 吉电子伏特。对于 D 和 $\bar{c}$，中心值取两个估计量的平均值，并将两者差值的一半计为额外的系统不确定度。核子与激发态之间的跃迁将在第七节讨论。

六、结果

在$\mathcal{O}(\alpha_s)$ 阶下获得的 A、 J 和 B 结果列于表IV中，而 D 的结果列于表V中。它们对 Q^2的依赖性如图3所示，同时还给出了包含凝聚项的领先阶分析的总 A 和 D 。

与包含凝聚项的领先阶分析相比，$\mathcal{O}(\alpha_s)$ 修正使 $A_{\rm tot}$ 降低了 0.60–0.68 倍，使$J_{\rm tot}$ 降低了 0.73–0.78 倍。在二点和三点函数中，相对微扰修正相同（在 $Q^2 = 1.5$ 吉电子伏特^{2}处为 $a\,O_1/$领先阶$_{\rm pert} \approx 1.09$–1.15），这符合前向 Ward 恒等式的要求。然而，微扰

表IV. 引力形状因子 A、 J 和 B 在$\mathcal{O}(\alpha_s)$， $\mu = 1$ 吉电子伏特，MS (Q^2 以吉电子伏特为单位²)。不确定度是工作区域展宽、凝聚态变化、数值不确定性和尺度变化的平方和开方。跃迁在第VII节中讨论。

Q^2	A_u	A_d	A_q	A_g	$A_{\rm tot}$
1.0	0.331 ± 0.113	0.032 ± 0.011	0.364 ± 0.120	0.047 ± 0.029	0.410 ± 0.129
1.5	0.286 ± 0.103	0.022 ± 0.009	0.309 ± 0.110	0.029 ± 0.024	0.337 ± 0.113
2.0	0.252 ± 0.095	0.016 ± 0.007	0.269 ± 0.101	0.019 ± 0.021	0.287 ± 0.102
2.5	0.220 ± 0.085	0.012 ± 0.006	0.233 ± 0.090	0.013 ± 0.018	0.245 ± 0.089
Q^2	J_u	J_d	J_q	J_g	$J_{\rm tot}$
1.0	0.215 ± 0.095	-0.010 ± 0.010	0.215 ± 0.086	0.019 ± 0.016	0.235 ± 0.088
1.5	0.196 ± 0.109	-0.009 ± 0.007	0.194 ± 0.100	0.011 ± 0.014	0.206 ± 0.100
2.0	0.183 ± 0.123	-0.008 ± 0.006	0.180 ± 0.116	0.007 ± 0.013	0.188 ± 0.116
2.5	0.175 ± 0.138	-0.007 ± 0.004	0.171 ± 0.133	0.005 ± 0.013	0.176 ± 0.133
Q^2	B_u	B_d	B_q	B_g	$B_{\rm tot}$
1.0	0.070 ± 0.022	-0.056 ± 0.022	0.019 ± 0.010	-0.010 ± 0.005	0.008 ± 0.006
1.5	0.057 ± 0.018	-0.044 ± 0.016	0.017 ± 0.009	-0.006 ± 0.004	0.010 ± 0.006
2.0	0.047 ± 0.015	-0.033 ± 0.012	0.015 ± 0.008	-0.005 ± 0.003	0.011 ± 0.006
2.5	0.039 ± 0.013	-0.026 ± 0.010	0.013 ± 0.007	-0.003 ± 0.002	0.010 ± 0.005

表V. D 在$\mathcal{O}(\alpha_s)$， $\mu = 1$ 吉电子伏特，$\overline{\rm MS}$，来自估计量（10）。中心值是 $D^{(1)}$ 与 $D^{(3)}$的平均值，不确定度包含二者差值的一半。

Q^2	$D_{\rm tot}$	D_q	D_g	D_u	D_d
1.0	-0.423 ± 0.201	-0.375 ± 0.189	-0.041 ± 0.065	-0.207 ± 0.160	-0.177 ± 0.056
1.5	-0.206 ± 0.121	-0.195 ± 0.118	-0.007 ± 0.028	-0.103 ± 0.100	-0.096 ± 0.032
2.0	-0.117 ± 0.083	-0.115 ± 0.082	0.000 ± 0.016	-0.059 ± 0.070	-0.058 ± 0.020
2.5	-0.074 ± 0.062	-0.075 ± 0.061	0.002 ± 0.010	-0.036 ± 0.055	-0.039 ± 0.014

部分约占其窗口内二点函数的 75%，而在工作区域内仅占三点 A_q 关联函数的 17–24%。因此，二点函数增大了 1.83 倍，三点函数增大了 1.20–1.26 倍。在 $Q^2 = 1.5$ 吉电子伏特², 处，仅向二点函数加入 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 项时得到 $A_q = 0.250$，仅向三点函数加入时得到 0.587，而同时加入时得到 0.309；作为比较，包含凝聚项的领先阶结果为 0.481。

对于 D，两个估计量在总能动张量上一致，这是守恒所要求的。 $D_{\rm tot}$ 几乎与能标（$\sigma_\mu \le 0.004$）无关，并且与方案无关，而$\mathcal{O}(\alpha_s)$修正相对于包含凝聚项的领先阶分析将 $|D_{\rm tot}|$ 降低了21–27%。 D_g 在所有 Q^2下均与零相容，其不确定度主要由估计量系统误差和尺度变化主导。 D_u 与 D_d 彼此接近。

为了解这些结果中哪些贡献决定了 Q^2 依赖性，表 VI 给出了工作区域内 O(α_s) 关联函数的组成。在 $\beta = 1$处，四夸克凝聚项和混合凝聚态没有贡献，因为它们与 $\beta - 1$成正比。因此，关联函数由领先阶及 O(α_s) 下的微扰部分，以及夸克-能动张量关联函数和胶子能动张量关联函数中的胶子凝聚贡献组成。对于 D，微扰贡献在 $Q^2 = 2$ 吉电子伏特², 之前最大，并在$Q^2 = 2.5$ 吉电子伏特²处与胶子凝聚贡献相等。对于 A 和 J，夸克-能动张量关联函数中的胶子凝聚贡献最大，其占比在整个范围内从约一半增至约三分之二。此外，它对 Q^2 的依赖远弱于微扰部分。在包含凝聚项的领先阶下，其对 A 和 J 的归一化贡献在 $Q^2 = 1$ 至 2.5 吉电子伏特², 之间约下降 15%，到 $Q^2 = 5$ 吉电子伏特², 时则约下降 35%；相比之下，微扰贡献分别下降约 2.5 倍和 6–7 倍。对于 D，胶子凝聚贡献和微扰贡献在 $Q^2 = 1$ 至 2.5 吉电子伏特²之间分别下降 3.5 倍和 6.7 倍。众所周知，三点求和规则中的局域凝聚态贡献未必会像微扰部分那样随 Q^2 增大而下降。在π介子形状因子的求和规则中，胶子凝聚贡献为常数，而夸克凝聚态贡献甚至随 Q^2增大；微扰项则渐降 [99, 100], ，这也是引入非局域凝聚的一项动机。因此，在我们的范围内， Q^2对 A 和 J 的依赖在很大程度上体现了凝聚项的特征，并没有出现形状因子预期的渐降；而 D 的依赖则由确实呈现这种渐降的贡献所主导。这限制了我们的结果对于 Q^2 依赖性、 A 和 J 的前向值所能提供的信息。

表 VI. 在 $\beta = 1$ 下，工作区域内 $A_{\rm tot}$、 $J_{\rm tot}$ 和 $D_{\rm tot}$ 的$\mathcal{O}(\alpha_s)$ 关联函数的组成：微扰贡献（领先阶和$\mathcal{O}(\alpha_s)$、夸克和胶子能动张量）所占比例，夸克-能动张量关联函数中胶子凝聚所占比例（d_4），以及胶子能动张量关联函数中胶子凝聚所占比例（g_4）。四夸克凝聚项和混合凝聚态在 $\beta = 1$ 下没有贡献。表中数值为各单元格的中位数，因此总和不一定为一。

	$A_{\rm tot}$			$J_{\rm tot}$			$D_{\rm tot}$		
Q^2	微扰	d_4	g_4	微扰	d_4	g_4	微扰	d_4	g_4
1	0.45	0.47	0.08	0.46	0.49	0.05	0.66	0.36	−0.02
1.5	0.40	0.55	0.06	0.39	0.57	0.04	0.62	0.44	−0.06
2	0.34	0.61	0.04	0.35	0.63	0.03	0.58	0.51	−0.09
2.5	0.31	0.65	0.04	0.31	0.67	0.02	0.55	0.55	−0.10

为方便起见，我们在表 VII中给出中心值的表示式，其中 $n = 2$ 对应 A， J 和 B 以及 $n = 3$对应 D 和 $\bar{c}_q$。每个 Q^2 处的不确定度取自表 IV、V 和VIII。表示式在 $Q^2 = 1$ 吉电子伏特^2, 处归一化，不适用于外推。对工作区域内 $A_{\rm tot}$和 $D_{\rm tot}$ 各单元格的拟合表明，我们的结果无法约束 D 的正向值，而对 A 的正向值约束也很弱。

表 VII. 在 $1 \le Q^2 \le 2.5$ 吉电子伏特^2 范围内，中心值的表示式为 $F(Q^2) = F_1\,[(1 + 1/\Lambda^2)/(1 + Q^2/\Lambda^2)]^n$，其中 Q^2 和 Λ^2 的单位为吉电子伏特^2。该表示式对中心值的再现精度在其不确定度的 5% 以内，不适用于在此范围之外进行外推。

	n	F_1	Λ (吉电子伏特)
$A_{\rm tot}$	2	0.4083	2.036
A_q	2	0.3635	2.248
A_g	2	0.0473	0.837
$J_{\rm tot}$	2	0.2329	2.851
J_q	2	0.2135	3.268
J_g	2	0.0188	0.784
B_q	2	0.0188	2.693
$D_{\rm tot}$	3	−0.4211	0.942
D_q	3	−0.3739	1.043
D_u	3	−0.2067	0.956
D_d	3	−0.1757	1.121
$\bar{c}_q$ (领先阶 +凝聚项)	3	0.0243	2.688

以动量求和规则为例。我们的结果无法约束将 $A_{\rm tot}(Q^2)$ 从 $1 \le Q^2 \le 2.5$ 吉电子伏特^{2}外推至 $Q^2 = 0$ （图 4）。单极形式、偶极形式和三极形式都能同样好地描述这四个数值，分别给出 $A_{\rm tot}(0) = 0.74$、0.63 和 0.61，均小于 1。在 $1 \le Q^2 \le 2$ 吉电子伏特^2,范围内，$A_{\rm tot}$ 与格点量子色动力学（第 VI A 节）结果一致。然而，我们的 Q^2 依赖关系比格点结果更平缓，而格点$A_{\rm tot}$ 在低于 $Q^2 = 1$ 吉电子伏特^2, 的区域急剧上升，这一区域超出了我们的分析范围。导致 Q^2依赖关系较为平缓的一个可能原因是上文讨论的胶子凝聚贡献。在当前框架下，无法直接评估较小 Q^2 处的情况。在包含凝聚项的领先阶近似下，胶子部分在整个范围内表现为 $1/Q^2$ （$A_g Q^2 \approx 0.04$–0.06，对应 $0.1 \le Q^2 \le 3$ 吉电子伏特^2），而夸克部分在低于 $Q^2 \approx 0.3$ 吉电子伏特^2, 时开始转折，这表明小动量转移下局域算符乘积展开失效。

我们在包含凝聚项的领先阶（LO）下得到迹形状因子 $\bar{c}$，其中 $\bar{c}_{\rm tot} = 0$ 逐个单元成立，且 $\bar{c}_g = -\bar{c}_q$。 $\bar{c}_q$ 和 D 在这一阶的数值列于表 VIII。在较低的 Q^2下， $\bar{c}_q$ 的估计量系统误差约为其数值的一半，因此只能确定其符号和数量级。

A. 与其他测定结果的比较

在定量比较中，我们只考虑明确给出重整化尺度的结果，并根据原始文献中给出的参数化，在我们的 Q^2 取值处对这些结果进行评估。总形状因子

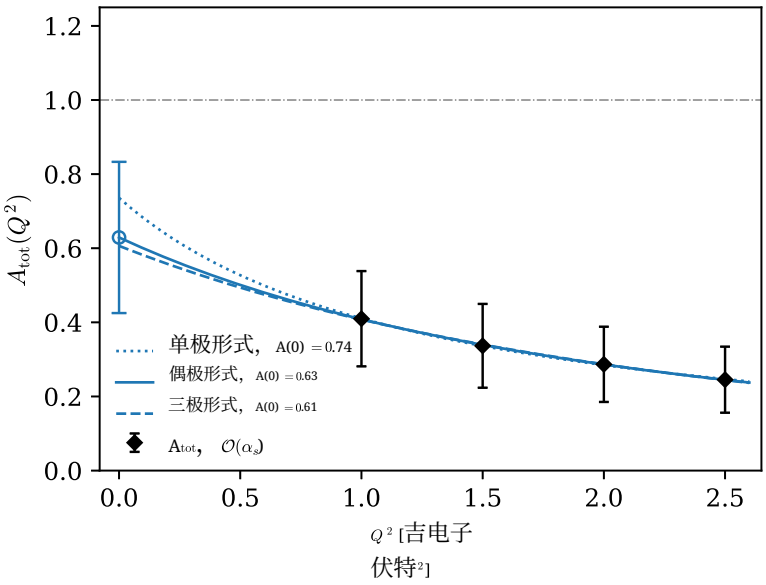

图 4. $A_{\rm tot}(Q^2)$ 在 $1 \le Q^2 \le 2.5$ 吉电子伏特^2, 下的单极形式、偶极形式和三极形式表示，外推至 $Q^2 = 0$ 仅作示意。空心圆表示偶极形式的数值及其不确定度，其中包括三种形式之间的差异。我们的结果无法约束该外推（见正文）。

表 VIII。含凝聚项的领先阶下的受保护 $\bar{c}_q$ 和 D （逐个$\bar{c}_g = -\bar{c}_q$、 $\bar{c}_{\rm tot} = 0$ 单元格）。中心值是两个估计量的平均值， $\sigma_{\rm est}$ 是它们差值的一半，并计入总不确定度。

Q^2	$\bar{c}_q$	$\sigma_{\rm est}$	D_q	$\sigma_{\rm est}$	$D_{\rm tot}$
1.0	0.0237 ± 0.0208	0.0181	-0.541 ± 0.219	0.064	-0.535 ± 0.211
1.5	0.0208 ± 0.0135	0.0106	-0.287 ± 0.142	0.025	-0.266 ± 0.138
2.0	0.0174 ± 0.0098	0.0069	-0.174 ± 0.104	0.012	-0.156 ± 0.102
2.5	0.0146 ± 0.0075	0.0048	-0.114 ± 0.082	0.007	-0.101 ± 0.081
3.0	0.0124 ± 0.0061	0.0036	-0.080 ± 0.067	0.004	-0.069 ± 0.066

与能标无关，因此直接进行比较。夸克和胶子部分则在 $\mu = 1$ 吉电子伏特处进行比较。对于在其他能标处给出的结果，我们使用 $n = 2$ 矩的一阶 DGLAP演化对夸克单态部分和胶子部分进行演化，这与我们在能标变化中采用的演化相同。参考值 [58] 中的格点量子色动力学结果是在 $\mu = 2$ 吉电子伏特、MS 方案下给出的，π介子质量约为 170 兆电子伏特，且适用于 $0 \le -t \le 2$ 吉电子伏特^2。我们采用其偶极拟合，并将参数不确定度视为相互独立，因为文献未给出它们之间的相关性；此外，我们还利用其 z-展开拟合检验拟合形式的影响。对于参考值 [71] ($\mu = 2$ 吉电子伏特)中的光前结果，我们采用总形状因子的偶极拟合；对于参考值 [87] ($\mu = 1$ 吉电子伏特，上夸克和下夸克)中的光锥求和规则结果，则采用其在 $1 \le Q^2 \le 10$ 吉电子伏特^{2}处结果的参数化。比较结果列于表 IX和 X。

总形状因子在所有 Q^2 取值下均与格点结果在 0.7σ 范围内一致；对于 A、 J 和 D ，情况皆如此，而$D_{\rm tot}$也与光前结果一致。光前的 $A_{\rm tot}$ 和 $J_{\rm tot}$ 数值较小，且随 Q^2 增大而下降得比我们的结果和格点结果更快。另一方面，我们的 $A_{\rm tot}$ 和 $J_{\rm tot}$下降得比格点结果更慢。这可能与表 VI 中的胶子凝聚贡献有关；对于 $J_{\rm tot}$，也可能与 $\beta \neq 1$ 处的四夸克贡献有关（第 V 节）。 D 的夸克部分与格点结果和光锥求和规则结果均一致，而 D 的胶子部分与格点结果相符，偏差约在 1σ以内。 A 和 J 的胶子份额则存在更大的差异，达 2.7–4.5σ；其数值分别比格点数值低 3.6–5 倍（ A_g ）和 5–9 倍（ J_g）。相应地，夸克部分高出 0.7–1.3σ，因此总值一致。一个可能的原因是，在这一阶，胶子能动张量仅通过单胶子交换和胶子凝聚与夸克线耦合，而核子在低能标下的胶子动量分数在很大程度上源于非微扰起源。我们尚未验证这一解释。光锥求和规则的 A_q 和 J_q 数值低于我们的结果和演化后的格点数值，且随 Q^2 增大而下降得更快。LO 下含凝聚项的 $\bar{c}_q$ 数值（表 VIII）为正

表 I X. 在 Q^2 (吉电子伏特^2) 处计算的 α_s 阶总引力形状因子，与格点量子色动力学结果及光前计算结果进行比较；计算采用原始文献中的参数化。$\mathcal{O}(\alpha_s)_\dagger$超出格点数据的动量范围 ($-t \leq 2$ 吉电子伏特^2)。

	Q^2	本文工作	格点量子色动力学 [58]	光前 [71]
$A_{\rm tot}$	1.0	0.410 ± 0.129	0.429 ± 0.018	0.273 ± 0.003
$A_{\rm tot}$	1.5	0.337 ± 0.113	0.312 ± 0.015	0.178 ± 0.002
$A_{\rm tot}$	2.0	0.287 ± 0.102	0.237 ± 0.012	0.125 ± 0.002
$A_{\rm tot}$	$2.5^\dagger$	0.245 ± 0.089	0.187 ± 0.010	0.093 ± 0.001
$J_{\rm tot}$	1.0	0.235 ± 0.088	0.243 ± 0.018	0.135 ± 0.002
$J_{\rm tot}$	1.5	0.206 ± 0.100	0.183 ± 0.016	0.088 ± 0.001
$J_{\rm tot}$	2.0	0.188 ± 0.116	0.143 ± 0.014	0.062 ± 0.001
$J_{\rm tot}$	$2.5^\dagger$	0.176 ± 0.133	0.115 ± 0.013	0.046 ± 0.001
$D_{\rm tot}$	1.0	-0.423 ± 0.201	-0.334 ± 0.136	-0.373 ± 0.075
$D_{\rm tot}$	1.5	-0.206 ± 0.121	-0.188 ± 0.086	-0.207 ± 0.041
$D_{\rm tot}$	2.0	-0.117 ± 0.083	-0.120 ± 0.059	-0.131 ± 0.026
$D_{\rm tot}$	$2.5^\dagger$	-0.074 ± 0.062	-0.084 ± 0.045	-0.091 ± 0.018

表 X. 夸克 ($u+d$) 和胶子部分，在 $\mu = 1$ 吉电子伏特下，采用 MS 方案。格点数值 [58] 由 $\mu = 2$ 吉电子伏特处的数值通过对 $n = 2$ 矩进行一阶 DGLAP 演化得到。 $_\dagger$与表 IX相同。

		夸克 ($u+d$)			胶子	
	Q^2	本研究	格 [58]	LCSR [87]	本研究	格 [58]
A	1.0	0.364 ± 0.120	0.256 ± 0.012	0.239 ± 0.008	0.047 ± 0.029	0.167 ± 0.012
A	1.5	0.309 ± 0.110	0.192 ± 0.010	0.151 ± 0.006	0.029 ± 0.024	0.116 ± 0.009
A	2.0	0.269 ± 0.101	0.150 ± 0.008	0.101 ± 0.004	0.019 ± 0.021	0.085 ± 0.007
A	$2.5^\dagger$	0.233 ± 0.090	0.120 ± 0.007	0.070 ± 0.003	0.013 ± 0.018	0.065 ± 0.005
J	1.0	0.215 ± 0.086	0.141 ± 0.013	0.085 ± 0.003	0.019 ± 0.016	0.100 ± 0.009
J	1.5	0.194 ± 0.100	0.109 ± 0.012	0.053 ± 0.002	0.011 ± 0.014	0.073 ± 0.007
J	2.0	0.180 ± 0.116	0.087 ± 0.011	0.035 ± 0.001	0.007 ± 0.013	0.055 ± 0.006
J	$2.5^\dagger$	0.171 ± 0.133	0.071 ± 0.010	0.024 ± 0.001	0.005 ± 0.013	0.043 ± 0.005
D	1.0	-0.375 ± 0.189	-0.215 ± 0.093	-0.376 ± 0.036	-0.041 ± 0.065	-0.108 ± 0.075
D	1.5	-0.195 ± 0.118	-0.129 ± 0.061	-0.201 ± 0.024	-0.007 ± 0.028	-0.054 ± 0.042
D	2.0	-0.115 ± 0.082	-0.086 ± 0.043	-0.120 ± 0.016	0.000 ± 0.016	-0.032 ± 0.027
D	$2.5^\dagger$	-0.075 ± 0.061	-0.062 ± 0.033	-0.077 ± 0.012	0.002 ± 0.010	-0.021 ± 0.019

并且与参考值 [87] 在 $\mu = 1$ 吉电子伏特时的数值大小相同；这些数值在 $Q^2 = 1$、1.5、2 和 2.5 吉电子伏特处分别为 0.040、0.029、0.021 和 0.016^2, 。

夸克 D项 [28] 和胶子引力形状因子 [36] 的实验提取所涉及的动量转移仅有一部分与我们的范围重叠，并且依赖于模型框架来确定 t 依赖关系。 此外，重整化尺度未予说明，因此我们不将其纳入定量比较。对于没有明确重整化尺度的模型计算，情况同样如此；第I节中已提及这些计算。

VII. 局限性

在本次提取中，核子与激发态之间的跃迁只得到部分处理。对于相等 Borel 质量和有限宽度的博雷尔窗口，它们会给归一化关联函数增加一项 $C\,e^{-\Delta/M^2}$ to $H(M^2) = F + C\,e^{-\Delta/M^2}$，而 F与 C无法分离。采用这种形式进行拟合，会将所有 M^2依赖性归因于跃迁并将其放大；在严格守恒的领先阶扇区中，这会使提取出的数值产生与其自身大小相当的偏移。跃迁贡献中随 M^2 变化的部分，包含在工作区域内的变化范围中，因为中心值和变化范围是沿着 M^2对所有单元格取值而得。在 (β, s_0, S_0) 的固定行中，沿 M^2 方向的半极差为 0.04–0.39（中位数），且在所有形状因子中至多占总变化范围的 0.73

以及 O(α_s) 阶和含凝聚项的领先阶下的味道。主要形状因子在 O(α_s) 阶下的数值列于表 XI。窗口内的常数偏移 C $e^{-\Delta/M^2}$无法确定，因此未予纳入。不相等的 Borel 质量在现行判据下不会改变这一点。每个 Borel 变量都必须位于两点窗口内，即 $0.67 \le M^2 \le 0.95$ 吉电子伏特^2„ 其中 $e^{-\Delta/M^2}$ 对于 $\Delta = m^2_{N(1440)} - m^2_N$仅在 0.17 到 0.29 之间变化。因此，无论使用一个还是两个 Borel 变量，都无法将跃迁项与常数分离；其他来源的 M^2 依赖性则会进入提取出的常数，并被放大 1.6–3.4 倍，具体取决于 Δ 及窗口宽度。确定该常数需要更宽的窗口，或有关跃迁的外部信息，例如核子与其共振态之间的引力跃迁形状因子 [91, 92]。

表 XI. 在 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 阶下，沿 M^2, $\sigma_{M^2}/\sigma_{\rm region}$ 的变化所导致的工作区域展宽比例（固定 (β, s_0, S_0) 行中的中位数 / 最大值）。

	$Q^2 = 1$	1.5	2	2.5
$A_{\rm tot}$	0.12 / 0.35	0.12 / 0.36	0.13 / 0.37	0.14 / 0.26
$J_{\rm tot}$	0.08 / 0.19	0.06 / 0.20	0.06 / 0.22	0.04 / 0.23
B_q	0.35 / 0.57	0.34 / 0.56	0.32 / 0.52	0.36 / 0.38
$D_{\rm tot}$	0.14 / 0.31	0.11 / 0.28	0.09 / 0.23	0.08 / 0.21
D_g	0.17 / 0.55	0.17 / 0.53	0.15 / 0.51	0.15 / 0.45

胶子部分 A 和 J 小于格点量子色动力学中的结果（第VIA节）。在这一阶，胶子能动张量仅通过单胶子交换和胶子凝聚与夸克线耦合；要描述胶子动量分数，可能需要考虑更高阶修正。

..... Q^2 对 A 和 J 的依赖受到胶子凝聚对夸克-能动张量关联函数的贡献的影响。该贡献在这些关联函数中最大，且对 Q^2 的依赖很弱（表VI）。这是局域算符乘积展开的一个特点；超越局域近似的处理，例如采用非局域胶子凝聚 [99, 101], , 可能会改变 Q^2 这些形状因子对.....的依赖。

局域算符乘积展开也将分析范围限制在 $Q^2 \gtrsim 1$ 吉电子伏特^2, , 如上文所述的小-Q^2 行为所示。若不进行外推，就无法从我们的结果中得到前向值，而我们的结果并不能约束这种外推。

出于同样的原因，我们不提取压力和剪切分布或力学半径，因为这些量需要在小动量转移下的$D(t)$及其正向值。

在$\mathcal{O}(\alpha_s)$ 下确定 $\bar{c}$ 需要 S_7 结构。其$\mathcal{O}(\alpha_s)$ 系数已在一个运动学点上计算得出，在该点，各守恒恒等式偏离零的程度达到两个标准差（第 IV节）。因此，我们给出 $\bar{c}$ 在含凝聚项的领先阶结果。是否缺少有限项，可通过提高反对称矩的数值精度并在多个运动学点进行计算，或直接识别该项来确定。

夸克和胶子部分是在 $\mu = 1$ 吉电子伏特下定义的 MS 量。前向 Ward 恒等式支持对流子图采用保持结构的处方后产生的抵消，但我们尚未用第二种处方进行检验。

这些结果也适用于一类特定的插值流。工作区域仅在 β 接近1(第 V节）时存在，因此，在本分析中无法检验结果对流的依赖性，尤其无法与 Ioffe 流进行比较。

对于较小的量（A_d、 A_g、 B_q、 B_d、 B_g、 $B_{\rm tot}$、 D_g）以及 $D_{\rm tot}$，$\mathcal{O}(\alpha_s)$ 积分的数值不确定度相对于其他不确定度而言不可忽略。对于 D_g , 其最高可达 $\sim 50\%$；对于 $D_{\rm tot}$，则为 12–18%。这种不确定度主要由反对称矩的统计误差造成，并已计入所报告的不确定度中。

第八节：结论

核子的引力形状因子承载着有关其质量和自旋如何分解为夸克与胶子贡献，以及其内力的信息。在本研究中，我们借助三点 QCD 求和规则计算了核子的 A、 J、 B和 D 形状因子；对于夸克和胶子的能动张量，均计入了 MS 方案下 $\mu = 1$ 吉电子伏特处$\mathcal{O}(\alpha_s)$阶的微扰贡献。这些形状因子是通过洛伦兹结构的组合提取的，而这些结构受到 Ward 恒等式的保护。对于 D 和 $\bar{c}$，我们证明，仅由相等 Borel 质量构造的估计量无法受到守恒的保护。相反，我们根据 Borel 空间中的守恒恒等式构造了受保护的估计量，其中涉及反对称Borel矩

。由于 D 估计量不依赖于$g_{\mu\nu}$ 结构，因此 D 可在$\mathcal{O}(\alpha_s)$阶计算，而 $\bar{c}$仍处于包含凝聚项的领先阶。

$\mathcal{O}(\alpha_s)$ 三点函数对 A和 J 满足前向 Ward 恒等式，精度在 1.5% 以内；其尺度依赖性满足重整化群约束，并在七个运动学点满足守恒恒等式 $V_1 + V_3 = 0$ 。与包含凝聚项的领先阶分析相比，$\mathcal{O}(\alpha_s)$ 修正使 $A_{\rm tot}$ 降低至原来的 0.60– 0.68 倍，使 $J_{\rm tot}$ 降低至原来的 0.73–0.78 倍，并使 $|D_{\rm tot}|$ 降低 21–27%。在 $1 \le Q^2 \le 2$ 吉电子伏特^2, 范围内，总形状因子与格点量子色动力学结果的差异在 0.7σ以内，而 D 的夸克和胶子部分的差异约在 1σ以内。 A 和 J 的胶子部分小于格点结果，相应地，夸克部分则较大。在工作区域内，当 D 达到 $Q^2 = 2$ 吉电子伏特^{2}时，微扰贡献最大。然而，对于 A 和 J，夸克-能动张量关联函数中的胶子凝聚贡献最大，该贡献对 Q^2的依赖很弱，而我们的结果无法约束正向值。

本分析的主要局限包括：对跃迁至激发态的处理——其与 M^2 无关的部分无法在求和规则的博雷尔窗口内确定；局域算符乘积展开将范围限制在 $Q^2 \ge 1$ 吉电子伏特^2 ；胶子凝聚对 A 和 J 的贡献较大且对 Q^2 的依赖较弱；以及迹形状因子 $\bar{c}$，其在$\mathcal{O}(\alpha_s)$阶的确定需要 $g_{\mu\nu}$ 结构。关于跃迁至激发态的外部信息、超越局域近似的胶子凝聚处理，以及在$\mathcal{O}(\alpha_s)$阶对 $g_{\mu\nu}$ 结构的解析，或可克服这些局限。力学性质需要在小动量转移下的 $D(t)$，因此留待后续工作研究。我们的结果可与未来格点量子色动力学对胶子形状因子的计算，以及较大动量转移下的实验提取结果进行比较。

人工智能的使用

我们使用人工智能工具（Claude Opus 5.5）协助编写数值代码、绘制图表，并对稿件进行语言润色、提升可读性。研究问题、研究方法和物理方面的判断均由作者作出。所有分析推导均由作者完成，结果也通过作者自行编写的 Mathematica 代码独立验证。作者指导了人工智能辅助工作，并对稿件内容承担全部责任。

附录 A：算符乘积展开表达式

1. 表示式与双重博雷尔变换

在领先阶，我们将每个结构 S_i 的系数写成费曼参数形式，

$$\begin{aligned}\Pi_i(p,p') &= \sum_{k,l}\int_\Delta du\,dw\; c_{i;kl}(u,w)\,X^k\,(\ln X)^l,\\ X &= -\big(uv\,q^2 + vw\,p^2 + uw\,p'^2\big), \qquad v = 1-u-w,\end{aligned} \tag{A1}$$

其中 Δ 是单纯形 $u,w\ge 0, u+w\le 1$。系数函数取决于 β、凝聚项以及 $p\cdot p', p^2$ 和 p'^2。其中包含对数项（$l=1, k\ge 0$）和极点项（$l=0, k\le -1$），而凝聚贡献还包含形式为 $c\,X_x^{k_x}(\ln X_x)^{l_x} X_y^{k_y}(\ln X_y)^{l_y}$ 的因子化项，其中 $X_x=-p^2$ 和 $X_y=-p'^2$。

我们将双重博雷尔变换归一化为 $\hat{} B[1/(s-p^2)] = e^{-s\tau_1}$ 和 $\hat{} B[1/(s'-p'^2)] = e^{-s'\tau_2}$。经过替换 $p\cdot p' = (p^2+p'^2-q^2)/2$ 后，系数中的 p^2 和 p'^2 因子变为 $-\partial_{\tau_1}$ 和 $-\partial_{\tau_2}$。对于不依赖于 p^2 和 p'^2 的系数， X^k 的施温格表示给出（其中 $T=\tau_1+\tau_2$ 和 $Q^2=-q^2$）：

$$\hat{B}\big[c\,X^k\ln X\big] = (-1)^{k+1}k!\;T^{-k-2}\int_0^1 dw\; w^k(1-w)^{k+1}\,c(u_B,w)\,E(w), \tag{A2}$$

$$\hat{B}\big[c\,X^{-a}\big] = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^1 dw\;\frac{\lambda^{a-2}}{w^2(1-w)}\,c(u_B,w)\,E(w), \tag{A3}$$

其中 $u_B=\tau_2(1-w)/T$, $\lambda = T/[w(1-w)]$和 $E(w) = \exp\big[-Q^2\tau_1\tau_2(1-w)/(Tw)\big]$。只依赖于 p^2和 p'^2其中一个变量的项均消失。对于因子化项， $X^n\ln X \to -(-1)^n n!/\tau^{n+1} (n\ge 0)$、 $X^{-k}\to \tau^{k-1}/(k-1)!$和多项式分别对每个变量均消失。

在分析中，我们从双重谱表示式中减去连续谱，

$$\hat{B} \to \iint_{s+s' \le S_0} ds\, ds'\, \rho(s,s')\, e^{-\tau_1 s - \tau_2 s'}, \tag{A4}$$

其中 ρ 由式（A1）的被积函数在 $X = 0$ 的根处的不连续性得到。我们已将式（A2）和（A3）以及因子化项的处理规则，分别与 $S_0 = \infty$处的数值双重色散积分进行了核对，涵盖了若干结构的微扰贡献和凝聚贡献中的所有类型项。吻合程度为 10^{-6}–10^{-8} 其中系数包含 p^2 或 p'^2 （有限差分导数）， 10^{-11} 否则精度更高；对于因子化项则完全精确。

2. 两点函数

留数由流（3）的两点函数中 q 的系数得到，

$$\begin{aligned}\lambda^2 e^{-m_N^2/M^2} &= \frac{5+2\beta+5\beta^2}{512\pi^4}\int_0^{s_0} ds\, s^2 e^{-s/M^2}\Big[1 + a\Big(c_0 + 3\ln\frac{\mu^2}{s}\Big)\Big] + \frac{5+2\beta+5\beta^2}{1024\pi^4}\,\langle g^2 G^2\rangle \int_0^{s_0} ds\, e^{-s/M^2} \\ &\quad + \frac{(\beta-1)(7\beta+5)}{6}\,\langle\bar{q}q\rangle^2 - \frac{(\beta-1)(13\beta+11)}{24M^2}\, m_0^2 \langle\bar{q}q\rangle^2,\end{aligned} \tag{A5}$$

其中 $a = \alpha_s C_F/(4\pi)$ 和 $c_0 = 22.75$ 与 β 无关，这是基于我们的 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 计算得出的。

3. 微扰贡献

对于每种结构 S_i 和夸克味，LO微扰系数为

$$\Pi^{(0)}_{i,f}(p,p') = \int_\Delta du\, dw \sum_k c^{(0)}_{i,f;k}(u,w)\, X^k \ln X, \tag{A6}$$

系数函数如下所列，按 β 的幂以及 $p\cdot p'$、 p^2 和 p'^2 中的单项式进行组织。方括号仅取决于 u、 w 和 $v = 1-u-w$。

$$\begin{aligned}
c^{(0)}_{S_1,u}\big|_{\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{uv^2(v-1)(2v-1)}{16\pi^4 w}\Big] + p^2\Big[\frac{v^3(v-1)(2v-1)}{32\pi^4 w}\Big] \\
&\quad + p'^2\Big[\frac{u^2 v(v-1)(2v-1)}{32\pi^4 w}\Big]\Big\} \\
c^{(0)}_{S_1,u}\big|_{X\ln X} &= \big(\beta^2+1\big)\Big[\frac{v}{32\pi^4 w^2}\big(10u^2w - 10u^2 + 20uw^2 - 28uw + 2u + 10w^3 - 18w^2 + 3w + 1\big)\Big] + \beta \\
&\quad \Big[\frac{v}{16\pi^4 w^2}\big(10u^2w - 4u^2 + 20uw^2 - 16uw + 2u + 10w^3 - 12w^2 + 3w\big)\Big] \\
c^{(0)}_{S_1,d}\big|_{\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{p'^2\Big[\frac{uv(2v-1)}{64\pi^4 w}\Big]\Big\} \\
c^{(0)}_{S_1,d}\big|_{X\ln X} &= \big(\beta^2+1\big)\Big[\frac{v}{64\pi^4 w^2}\big(14u^2 + 28uw - 13u + 14w^2 - 13w + 2\big)\Big] + \beta\Big[\frac{v(v-1)(2v-1)}{32\pi^4 w^2}\Big] \\
c^{(0)}_{S_2,u}\big|_{\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{uv(2v-1)\big(2u^2+2uw-2u-w\big)}{32\pi^4 w}\Big] \\
&\quad + p^2\Big[-\frac{v^2(2v-1)\big(2u^2+2uw-2u-w\big)}{64\pi^4 w}\Big] \\
&\quad + p'^2\Big[-\frac{u^2(2v-1)\big(2u^2+2uw-2u-w\big)}{64\pi^4 w}\Big]\Big\} \\
c^{(0)}_{S_2,u}\big|_{X\ln X} &= \big(\beta^2+1\big)\Big[\frac{1}{64\pi^4 w^2}\Big(\\
&\quad 20u^3w - 20u^3 + 40u^2w^2 - 72u^2w + 36u^2 + 20uw^3 - 60uw^2 + 66uw - 14u - 8w^3 \\
&\quad + 23w^2 - 9w\Big)\Big] + \beta\Big[\frac{1}{32\pi^4 w^2}\Big(
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&20u^3w-8u^3+40u^2w^2-48u^2w+12u^2+20uw^3-48uw^2+30uw-4u-8w^3\\
&+11w^2-3w\Big)\Big]\\
c^{(0)}_{S_2,d}\big|_{\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{uv\,(2u+w)\,(2v-1)}{64\pi^4w}\Big]+p^2\Big[-\frac{v^2\,(2u+w)\,(2v-1)}{128\pi^4w}\Big]\\
&+p'^2\Big[-\frac{u^2\,(2v-1)\,(2u+w-2)}{128\pi^4w}\Big]\Big\}\\
c^{(0)}_{S_2,d}\big|_{X\ln X} &= \big(\beta^2+1\big)\Big[\frac{1}{128\pi^4w^2}\big(28u^3+72u^2w-30u^2+52uw^2-46uw+6u+8w^3-11w^2+3w\big)\Big]+\beta\\
&\Big[\frac{1}{64\pi^4w^2}\big(4u^3+24u^2w-6u^2+28uw^2-22uw+2u+8w^3-11w^2+3w\big)\Big]\\
c^{(0)}_{S_5,u}\big|_{\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{uv}{64\pi^4w}\big(8u^3+16u^2w-12u^2+8uw^2-16uw+4u-4w^2+3w\big)\Big]\\
&+p^2\Big[\frac{v^2}{128\pi^4w}\big(8u^3+16u^2w-12u^2+8uw^2-16uw+4u-4w^2+3w\big)\Big]\\
&+p'^2\Big[\frac{u^2}{128\pi^4w}\big(8u^3+16u^2w-12u^2+8uw^2-16uw+4u-4w^2+3w\big)\Big]\Big\}\\
c^{(0)}_{S_5,u}\big|_{X\ln X} &= \big(\beta^2+1\big)\Big[\frac{1}{128\pi^4w^2}\Big(\\
&40u^3w-40u^3+80u^2w^2-144u^2w+48u^2+40uw^3-120uw^2+96uw-4u\\
&-16w^3+37w^2-11w-4\Big)\Big]+\beta\Big[\frac{1}{64\pi^4w^2}\Big(\\
&40u^3w-16u^3+80u^2w^2-96u^2w+24u^2+40uw^3-96uw^2+60uw-8u-16w^3\\
&+25w^2-9w\Big)\Big]\\
c^{(0)}_{S_5,d}\big|_{\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{uv\,(1-2v)\,(2u+w-2)}{128\pi^4w}\Big]+p^2\Big[-\frac{v^2\,(1-2v)\,(2u+w)}{256\pi^4w}\Big]\\
&+p'^2\Big[-\frac{u}{256\pi^4w}\big(4u^3+6u^2w-2u^2+2uw^2-uw-4u-2w+2\big)\Big]\Big\}\\
c^{(0)}_{S_5,d}\big|_{X\ln X} &= \big(\beta^2+1\big)\\
&\Big[\frac{1}{256\pi^4w^2}\big(56u^3+96u^2w-108u^2+32uw^2-118uw+60u-8w^3-15w^2+31w-8\big)\Big]+\beta\\
&\Big[\frac{1}{128\pi^4w^2}\big(8u^3-12u^2-16uw^2+2uw+4u-8w^3+9w^2-w\big)\Big]\\
c^{(0)}_{S_7,u}\big|_{X\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{uv\,(2v-1)}{32\pi^4w}\Big]+p^2\Big[\frac{v^2\,(2v-1)}{64\pi^4w}\Big]+p'^2\Big[\frac{u^2\,(2v-1)}{64\pi^4w}\Big]\Big\}\\
c^{(0)}_{S_7,u}\big|_{X^2\ln X} &= \big(\beta^2+1\big)\Big[\frac{1}{128\pi^4uw^2}\big(-8u^2w+10u^2-8uw^2+15uw-2u+4w-1\big)\Big]+\beta\\
&\Big[-\frac{8uw-4u+8w^2-9w+2}{64\pi^4w^2}\Big]\\
c^{(0)}_{S_7,d}\big|_{X\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{v\,(u-1)}{64\pi^4w}\Big]+p^2\Big[\frac{v^2}{128\pi^4w}\Big]+p'^2\Big[\frac{u^2}{128\pi^4w}\Big]\Big\}\\
c^{(0)}_{S_7,d}\big|_{X^2\ln X} &= \big(\beta^2+1\big)\Big[-\frac{14u^2+11uw-13u-8w+2}{256\pi^4uw^2}\Big]+\beta\Big[-\frac{2u-w-1}{128\pi^4w^2}\Big]\\
c^{(0)}_{S_9,u}\big|_{\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{(p\cdot p')^2\Big[\frac{uv\,(2v-1)\,\big(2u^2+2uw-2u-w\big)}{64\pi^4w}\Big]\\
&+(p\cdot p')\,p^2\Big[\frac{v^2\,(2v-1)\,\big(4u^2+4uw-2u-w\big)}{128\pi^4w}\Big]\\
&+(p\cdot p')\,p'^2\Big[\frac{u^2\,(2v-1)\,\big(4u^2+4uw-6u-3w+2\big)}{128\pi^4w}\Big]+(p^2)^2\Big[\frac{v^3\,(1-v)\,(2v-1)}{128\pi^4w}\Big]\\
&+p^2\,p'^2\Big[\frac{uv\,(2v-1)\,\big(2u^2+2uw-2u-w+1\big)}{128\pi^4w}\Big]+(p'^2)^2\Big[-\frac{u^3\,(u-1)\,(2v-1)}{128\pi^4w}\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c^{(0)}_{S_9,u}\big|_{X\ln X} &= \big(\beta^2+1\big)\Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{1}{128\pi^4w^2}\Big(\\
&\quad -24u^3w+32u^3-48u^2w^2+102u^2w-48u^2-24uw^3+78uw^2-80uw+16u\\
&\quad +8w^3-23w^2+9w\Big)\Big]\\
&\quad +p^2\Big[-\frac{v}{128\pi^4w^2}\left(12u^2w-16u^2+24uw^2-43uw+8u+12w^3-27w^2+10w\right)\Big]\\
&\quad +p'^2\Big[\frac{u}{128\pi^4w^2}\left(12u^2w-16u^2+12uw^2-31uw+24u-8w^2+21w-8\right)\Big]\Big\}+\beta\Big\{\\
&\quad (p\cdot p')\Big[\frac{1}{64\pi^4w^2}\Big(\\
&\quad -24u^3w+8u^3-48u^2w^2+54u^2w-12u^2-24uw^3+54uw^2-32uw+4u+8w^3\\
&\quad -11w^2+3w\Big)\Big]\\
&\quad +p^2\Big[-\frac{v}{64\pi^4w^2}\left(12u^2w-4u^2+24uw^2-19uw+2u+12w^3-15w^2+4w\right)\Big]\\
&\quad +p'^2\Big[\frac{u}{64\pi^4w^2}\left(12u^2w-4u^2+12uw^2-19uw+6u-8w^2+9w-2\right)\Big]\Big\}\\
c^{(0)}_{S_9,u}\big|_{X^2\ln X} &= \big(\beta^2+1\big)\Big[\frac{8uw-28u+8w^2-33w+14}{256\pi^4w^2}\Big]+\beta\Big[\frac{8uw-4u+8w^2-9w+2}{128\pi^4w^2}\Big]\\
c^{(0)}_{S_9,d}\big|_{\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{(p\cdot p')^2\Big[-\frac{uv\,(2v-1)\left(2u^2+2uw-2u-w\right)}{128\pi^4w}\Big]\\
&\quad +(p\cdot p')\,p^2\Big[-\frac{v^2\,(2v-1)\left(4u^2+4uw-2u-w\right)}{256\pi^4w}\Big]\\
&\quad +(p\cdot p')\,p'^2\Big[-\frac{u^2\,(2v-1)\left(4u^2+4uw-6u-3w+2\right)}{256\pi^4w}\Big]\\
&\quad +(p^2)^2\Big[-\frac{v^3\,(1-v)\,(2v-1)}{256\pi^4w}\Big]+p^2\,p'^2\Big[-\frac{uv\,(2v-1)\left(2u^2+2uw-2u-w+1\right)}{256\pi^4w}\Big]\\
&\quad +(p'^2)^2\Big[\frac{u^3\,(u-1)\,(2v-1)}{256\pi^4w}\Big]\Big\}\\
c^{(0)}_{S_9,d}\big|_{X\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{1}{256\pi^4w^2}\Big(\\
&\quad 32u^3w-4u^3+64u^2w^2-56u^2w+6u^2+32uw^3-60uw^2+28uw-2u-8w^3\\
&\quad +11w^2-3w\Big)\Big]+p^2\Big[\frac{v}{256\pi^4w^2}\left(16u^2w-2u^2+32uw^2-20uw+u+16w^3-18w^2+4w\right)\Big]\\
&\quad +p'^2\Big[-\frac{u\,(2u-1)\left(8uw-u+8w^2-5w+1\right)}{256\pi^4w^2}\Big]\Big\}\\
c^{(0)}_{S_9,d}\big|_{X^2\ln X} &= \big(\beta^2+1\big)\Big[\frac{(2v-1)\,(12w+11)}{512\pi^4w^2}\Big]+\beta\Big[\frac{(2v-1)\,(12w-1)}{256\pi^4w^2}\Big]\\
c^{(0)}_{S_{11},u}\big|_{\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{uv\,(2v-1)}{64\pi^4}\Big]+p^2\Big[\frac{v^2\,(2v-1)}{128\pi^4}\Big]+p'^2\Big[\frac{u^2\,(2v-1)}{128\pi^4}\Big]\Big\}\\
c^{(0)}_{S_{11},u}\big|_{X\ln X} &= \big(\beta^2+1\big)\Big[-\frac{8uw-18u+8w^2-23w+9}{128\pi^4w}\Big]+\beta\Big[-\frac{8uw-6u+8w^2-11w+3}{64\pi^4w}\Big]\\
c^{(0)}_{S_{11},d}\big|_{\ln X} &= (\beta+1)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{uv\,(2v-1)}{128\pi^4}\Big]+p^2\Big[-\frac{v^2\,(2v-1)}{256\pi^4}\Big]+p'^2\Big[-\frac{u^2\,(2v-1)}{256\pi^4}\Big]\Big\}\\
c^{(0)}_{S_{11},d}\big|_{X\ln X} &= (\beta+1)^2\Big[\frac{8uw-6u+8w^2-11w+3}{256\pi^4w}\Big]
\end{aligned}
$$

4. 夸克能动张量关联函数中的胶子凝聚

胶子凝聚对夸克能动张量关联函数的贡献在表示式（A1）中包含对数项和极点项，以及因子化项，

$$\begin{aligned}\Pi_{i,f}^{(d_4)}(p,p') = &\int_\Delta du\,dw \sum_{k,l} c_{i,f;kl}^{(d_4)}(u,w)\, X^k (\ln X)^l \\ &+ \sum c_{i,f}^{(d_4)}\, X_x^{k_x} (\ln X_x)^{l_x} X_y^{k_y} (\ln X_y)^{l_y},\end{aligned} \tag{A7}$$

其中有 $X_x = -p^2$ 和 $X_y = -p'^2$。下标用于标示相应的函数。

$$\begin{aligned}
c_{S_1,u}^{(d_4)}\big|_{X^{-1}} = {}&(\beta^2+1)\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle v}{1152\pi^4 w^2}\Big(\\
&32u^4+96u^3w-46u^3+131u^2w^2-113u^2w+14u^2+102uw^3-95uw^2+26uw \\
&+35w^4-28w^3+8w^2\Big)\Big]+\beta\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle v}{384\pi^4 w^2}\Big(\\
&8u^4+24u^3w-12u^3+48u^2w^2-30u^2w+4u^2+56uw^3-39uw^2+7uw+24w^4 \\
&-21w^3+4w^2\Big)\Big] \\
c_{S_1,d}^{(d_4)}\big|_{X^{-1}} = {}&(\beta^2+1)\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle v}{1536\pi^4 w^2}\Big(\\
&16u^4+48u^3w-28u^3+86u^2w^2-52u^2w+12u^2+92uw^3-57uw^2+7uw+38w^4 \\
&-33w^3+2w^2\Big)\Big]+\beta\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle v}{2304\pi^4 w^2}\Big(\\
&32u^4+96u^3w-52u^3+62u^2w^2-92u^2w+20u^2-36uw^3-5uw^2+11uw-34w^4 \\
&+35w^3-10w^2\Big)\Big] \\
c_{S_2,u}^{(d_4)}\big|_{X^{-1}} = {}&(\beta^2+1)\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{2304\pi^4 w^2}\Big(\\
&64u^5+192u^4w-164u^4+262u^3w^2-406u^3w+136u^3+204u^2w^3-442u^2w^2 \\
&+241u^2w-36u^2+70uw^4-254uw^3+169uw^2-27uw-54w^4+45w^3-9w^2\Big)\Big]+\beta \\
&\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{768\pi^4 w^2}\Big(\\
&16u^5+48u^4w-40u^4+96u^3w^2-100u^3w+32u^3+112u^2w^3-146u^2w^2+59u^2w \\
&-8u^2+48uw^4-104uw^3+53uw^2-7uw-18w^4+15w^3-3w^2\Big)\Big] \\
c_{S_2,d}^{(d_4)}\big|_{X^{-1}} = {}&(\beta^2+1)\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle}{3072\pi^4 w^2}\Big(\\
&32u^5+96u^4w-72u^4+172u^3w^2-144u^3w+48u^3+184u^2w^3-158u^2w^2 \\
&+53u^2w-8u^2+76uw^4-92uw^3+27uw^2-5uw-6w^4+5w^3-w^2\Big)\Big]+\beta\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle}{4608\pi^4 w^2}\Big(\\
&64u^5+192u^4w-152u^4+124u^3w^2-304u^3w+112u^3-72u^2w^3-70u^2w^2 \\
&+121u^2w-24u^2-68uw^4+100uw^3-17uw^2-9uw+18w^4-15w^3+3w^2\Big)\Big] \\
c_{S_5,u}^{(d_4)}\big|_{X^{-1}} = {}&(\beta^2+1)\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{4608\pi^4 w^2}\Big(\\
&128u^5+384u^4w-312u^4+524u^3w^2-772u^3w+240u^3+408u^2w^3-780u^2w^2 \\
&+491u^2w-56u^2+140uw^4-392uw^3+307uw^2-103uw-72w^4+69w^3-15w^2\Big)\Big]+\beta \\
&\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{1536\pi^4 w^2}\Big(32u^5+96u^4w-80u^4+192u^3w^2-200u^3w+64u^3+224u^2w^3-316u^2w^2
\end{aligned}$$

$$+ 131u^2w - 16u^2 + 96uw^4 - 244uw^3 + 143uw^2 - 27uw - 48w^4 + 55w^3 - 13w^2\Big)\Big]$$

$$c^{(d_4)}_{S_5,d}\big|_{X^{-1}} = \big(\beta^2+1\big)\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle}{6144\pi^4w^2}\Big($$
$$64u^5 + 192u^4w - 176u^4 + 344u^3w^2 - 368u^3w + 160u^3 + 368u^2w^3 - 500u^2w^2$$
$$+ 185u^2w - 48u^2 + 152uw^4 - 380uw^3 + 189uw^2 - 9uw - 72w^4 + 93w^3 - 23w^2\Big)\Big] + \beta$$
$$\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle}{9216\pi^4w^2}\Big(128u^5 + 384u^4w - 336u^4 + 248u^3w^2 - 688u^3w + 288u^3 - 144u^2w^3 - 132u^2w^2$$
$$+ 317u^2w - 80u^2 - 136uw^4 + 292uw^3 - 95uw^2 - 13uw + 72w^4 - 87w^3 + 21w^2\Big)\Big]$$

$$c^{(d_4)}_{S_7,u}\big|_{\ln X} = \big(\beta^2+1\big)\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle}{2304\pi^4uw^2}\Big($$
$$32u^4 + 64u^3w - 46u^3 + 67u^2w^2 - 42u^2w + 14u^2 + 35uw^3 - 4uw^2 - 4uw + 6w^3 - 3w^2\Big)\Big]$$
$$+ \beta$$
$$\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle}{768\pi^4uw^2}\left(8u^4 + 16u^3w - 12u^3 + 32u^2w^2 - 12u^2w + 4u^2 + 24uw^3 - 15uw^2 - 2w^3 + w^2\right)\Big]$$

$$c^{(d_4)}_{S_7,d}\big|_{\ln X} = \big(\beta^2+1\big)\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{3072\pi^4uw^2}\Big($$
$$16u^4 + 32u^3w - 28u^3 + 54u^2w^2 - 36u^2w + 12u^2 + 38uw^3 - 43uw^2 + 8uw - 10w^3 + 5w^2\Big)\Big]$$
$$+ \beta\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{4608\pi^4uw^2}\Big($$
$$32u^4 + 64u^3w - 52u^3 - 2u^2w^2 - 60u^2w + 20u^2 - 34uw^3 + 17uw^2 + 8uw + 6w^3 - 3w^2\Big)\Big]$$

$$c^{(d_4)}_{S_9,u}\big|_{\ln X} = \big(\beta^2+1\big)\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{9216\pi^4uvw^2}\Big($$
$$128u^5 + 384u^4w - 320u^4 + 524u^3w^2 - 900u^3w + 256u^3 + 408u^2w^3 - 1048u^2w^2$$
$$+ 686u^2w - 64u^2 + 140uw^4 - 576uw^3 + 570uw^2 - 170uw - 108w^4 + 153w^3 - 45w^2\Big)\Big] + \beta$$
$$\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{3072\pi^4uvw^2}\Big(32u^5 + 96u^4w - 80u^4 + 192u^3w^2 - 228u^3w + 64u^3 + 224u^2w^3 - 360u^2w^2$$
$$+ 174u^2w - 16u^2 + 96uw^4 - 248uw^3 + 182uw^2 - 42uw - 36w^4 + 51w^3 - 15w^2\Big)\Big]$$

$$c^{(d_4)}_{S_9,u}\big|_{\ln X_x \ln X_y} = \big(\beta^2+1\big)\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{512\pi^4}\Big] + \beta\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{512\pi^4}\Big]$$

$$c^{(d_4)}_{S_9,d}\big|_{\ln X} = \big(\beta^2+1\big)\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle}{12288\pi^4uvw^2}\Big($$
$$64u^5 + 192u^4w - 160u^4 + 344u^3w^2 - 348u^3w + 128u^3 + 368u^2w^3 - 448u^2w^2$$
$$+ 170u^2w - 32u^2 + 152uw^4 - 272uw^3 + 130uw^2 - 14uw - 12w^4 + 17w^3 - 5w^2\Big)\Big] + \beta$$
$$\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle}{18432\pi^4uvw^2}\Big($$
$$128u^5 + 384u^4w - 320u^4 + 248u^3w^2 - 684u^3w + 256u^3 - 144u^2w^3 - 208u^2w^2$$
$$+ 338u^2w - 64u^2 - 136uw^4 + 192uw^3 - 6uw^2 - 38uw + 36w^4 - 51w^3 + 15w^2\Big)\Big]$$

$$c^{(d_4)}_{S_9,d}\big|_{\ln X_x \ln X_y} = (1-\beta)^2\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle}{6144\pi^4}\Big]$$

$$c^{(d_4)}_{S_{11},u}\big|_{X^{-1}} = \big(\beta^2+1\big)\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle(2v-1)}{3072\pi^4w}\left(20u^2 + 20uw - 20u + 21w^2 - 7w\right)\Big] + \beta$$
$$\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle(2v-1)\left(4u^2 + 4uw - 4u + 3w^2 - w\right)}{768\pi^4w}\Big]$$

$$c^{(d_4)}_{S_{11},d}\big|_{X^{-1}} = \left(\beta^2+1\right)\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle\,(2v-1)\left(20u^2+20uw-20u-3w^2+w\right)}{6144\pi^4 w}\Big] + \beta\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle\,(2v-1)\left(12u^2+12uw-12u+3w^2-w\right)}{3072\pi^4 w}\Big]$$

5. 四夸克与混合凝聚态

四夸克凝聚和混合凝聚的贡献仅由因子化项构成,

$$\Pi^{(d_6,d_8)}_{i,f}(p,p') = \sum c^{(d_6,d_8)}_{i,f}\, X_x^{k_x} X_y^{k_y}. \tag{A8}$$

它们都与 $\beta-1$ 成正比，并在 $\beta=1$ 处消失。

$$\begin{aligned}
c^{(d_6)}_{S_2,u}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= \Big[-\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{2}\Big] + \beta^2\Big[\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{2}\Big]\\
c^{(d_6)}_{S_2,d}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big[\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{12}\Big]\\
c^{(d_6)}_{S_5,u}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= \Big[-\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big] + \beta^2\Big[\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\\
c^{(d_6)}_{S_5,d}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big[\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{24}\Big]\\
c^{(d_6)}_{S_9,u}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= \Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\Big\} + \beta^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\Big\}\\
c^{(d_6)}_{S_9,d}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{24}\Big]\Big\}\\
c^{(d_6)}_{S_{11},u}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= \Big[-\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big] + \beta^2\Big[\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\\
c^{(d_6)}_{S_{11},d}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big[-\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{24}\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c^{(d_8)}_{S_1,u}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-1}} &= \Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{2}\Big] + \beta^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{2}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_1,d}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{12}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_2,u}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-2}} &= \Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big] + \beta^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_2,u}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-1}} &= \Big[\frac{3m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big] + \beta^2\Big[-\frac{3m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_2,u}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-2}} &= \Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{2}\Big]\Big\} + \beta^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{2}\Big]\Big\}\\
c^{(d_8)}_{S_2,d}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-2}} &= (1-\beta)^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{48}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_2,d}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big[-\frac{19m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{144}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_2,d}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-2}} &= (1-\beta)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{7m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{72}\Big]\Big\}\\
c^{(d_8)}_{S_5,u}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-2}} &= \Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big] + \beta^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_5,u}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-1}} &= \Big[\frac{5m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big] + \beta^2\Big[-\frac{5m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_5,u}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-2}} &= \Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\Big\} + \beta^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c^{(d_8)}_{S_5,d}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-2}} &= (1-\beta)^2\Big[-\frac{5m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{288}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_5,d}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big[-\frac{25m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{288}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_5,d}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-2}} &= (1-\beta)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{7m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{144}\Big]\Big\}\\
c^{(d_8)}_{S_7,u}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= \Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]+\beta^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_7,d}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{24}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_7,d}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{72}\Big]\Big\}\\
c^{(d_8)}_{S_9,u}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= \Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]+\beta^2\Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_9,u}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-2}} &= \Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]+p'^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]\Big\}+\beta^2\Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]\\
&\quad +p'^2\Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]\Big\}\\
c^{(d_8)}_{S_9,u}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-1}} &= \Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{3m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]+p^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]\Big\}+\beta^2\Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{3m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]\\
&\quad +p^2\Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]\Big\}\\
c^{(d_8)}_{S_9,u}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-2}} &= \Big\{(p\cdot p')^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\Big\}+\beta^2\Big\{(p\cdot p')^2\Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\Big\}\\
c^{(d_8)}_{S_9,d}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big[\frac{7m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{288}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_9,d}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-2}} &= (1-\beta)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{5m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{288}\Big]+p'^2\Big[\frac{7m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{288}\Big]\Big\}\\
c^{(d_8)}_{S_9,d}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{19m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{288}\Big]+p^2\Big[\frac{7m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{288}\Big]\Big\}\\
c^{(d_8)}_{S_9,d}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-2}} &= (1-\beta)^2\Big\{(p\cdot p')^2\Big[\frac{7m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{144}\Big]\Big\}\\
c^{(d_8)}_{S_{11},u}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-2}} &= \Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]+\beta^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_{11},u}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-1}} &= \Big[\frac{3m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]+\beta^2\Big[-\frac{3m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{8}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_{11},u}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-2}} &= \Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\Big\}+\beta^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{4}\Big]\Big\}\\
c^{(d_8)}_{S_{11},d}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-2}} &= (1-\beta)^2\Big[\frac{5m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{288}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_{11},d}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big[\frac{19m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{288}\Big]\\
c^{(d_8)}_{S_{11},d}\big|_{X_x^{-2}X_y^{-2}} &= (1-\beta)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[\frac{7m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{144}\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

6. 胶子能动张量关联函数

在领先阶，胶子能动张量关联函数仅由凝聚项构成。胶子凝聚（四维）部分为

$$
\Pi_i^{(g_4)}(p,p') = -\frac{1}{Q^2}\int_\Delta du\,dw\ \sum_k c_{i;k}^{(g_4)}(u,w)\,X^k\ln X, \tag{A9}
$$

而八维部分为 $\Pi^{(g_8)_i} = -(1/Q^2)\sum c^{(g_8)_i} X_x^{k_x} X_y^{k_y}$，它与 $\beta-1$ 成正比。系数是对连接到 u 夸克线和 d 夸克线的各项求和得到的。

$$
\begin{aligned}
c_{S_1}^{(g_4)}\big|_{\ln X} &= (\beta^2+1) \\
&\Big[-\frac{5\langle g^2G^2\rangle v}{1152\pi^4 uw^2}\left(16u^3w+4u^3+32u^2w^2-3u^2w-u^2+14uw^3-11uw^2-2w^4-2w^3+w^2\right)\Big] \\
&+\beta \\
&\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle v}{576\pi^4 uw^2}\left(16u^3w+4u^3+32u^2w^2-3u^2w-u^2+14uw^3-11uw^2-2w^4-2w^3+w^2\right)\Big] \\
c_{S_2}^{(g_4)}\big|_{\ln X} &= (\beta^2+1)\Big[-\frac{5\langle g^2G^2\rangle}{1152\pi^4 w^2}\Big(\\
&16u^3w+4u^3+32u^2w^2-21u^2w-7u^2+14uw^3-38uw^2+6uw+3u-2w^4 \\
&-11w^3+7w^2\Big)\Big]+\beta\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{576\pi^4 w^2}\Big(\\
&16u^3w+4u^3+32u^2w^2-21u^2w-7u^2+14uw^3-38uw^2+6uw+3u-2w^4 \\
&-11w^3+7w^2\Big)\Big] \\
c_{S_5}^{(g_4)}\big|_{\ln X} &= (\beta^2+1)\Big[-\frac{5\langle g^2G^2\rangle}{2304\pi^4 w^2}\Big(\\
&32u^3w+8u^3+64u^2w^2-30u^2w-10u^2+28uw^3-58uw^2+4uw+2u-4w^4 \\
&-16w^3+17w^2\Big)\Big]+\beta\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{1152\pi^4 w^2}\Big(\\
&32u^3w+8u^3+64u^2w^2-30u^2w-10u^2+28uw^3-58uw^2+4uw+2u-4w^4 \\
&-16w^3+17w^2\Big)\Big] \\
c_{S_7}^{(g_4)}\big|_{X\ln X} &= (\beta^2+1)\Big[\frac{5\langle g^2G^2\rangle}{2304\pi^4 uw}\left(16u^2+16uw-7u-2w^2+7w-2\right)\Big]+\beta \\
&\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle}{1152\pi^4 uw}\left(16u^2+16uw-7u-2w^2+7w-2\right)\Big] \\
c_{S_9}^{(g_4)}\big|_{X\ln X} &= (\beta^2+1) \\
&\Big[-\frac{5\langle g^2G^2\rangle}{4608\pi^4 uvw}\left(32u^3+64u^2w-52u^2+28uw^2-92uw+34u-4w^3-36w^2+48w-11\right)\Big] \\
&+\beta \\
&\Big[-\frac{\langle g^2G^2\rangle}{2304\pi^4 uvw}\left(32u^3+64u^2w-52u^2+28uw^2-92uw+34u-4w^3-36w^2+48w-11\right)\Big] \\
c_{S_{11}}^{(g_4)}\big|_{\ln X} &= (\beta^2+1)\Big[\frac{5\langle g^2G^2\rangle\,(3u+3w-2)}{768\pi^4}\Big]+\beta\Big[\frac{\langle g^2G^2\rangle\,(3u+3w-2)}{384\pi^4}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{S_2}^{(g_8)}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{36}\Big] \\
c_{S_5}^{(g_8)}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big[\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{72}\Big] \\
c_{S_9}^{(g_8)}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big\{(p\cdot p')\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{72}\Big]\Big\} \\
c_{S_{11}}^{(g_8)}\big|_{X_x^{-1}X_y^{-1}} &= (1-\beta)^2\Big[-\frac{m_0^2\langle\bar{q}q\rangle^2}{72}\Big]
\end{aligned}
$$

系数的归一化对应于 $\lambda^2 e^{-m^2(\tau_1+\tau_2)}$ 乘以强子侧表I 中的极点系数。

7. $\mathcal{O}(\alpha_s)$减除项

$\mathcal{O}$（α_s）贡献通过数值计算得到，故未在此列出。发散子图在局部进行减除，并使用其 D维MS 有限部分加回。对于局域EMT顶角函数，与将狄拉克代数固定在四维时的结果相比，其有限部分分别相差 $-2/3$ （夸克能动张量）和 $-8/3$（胶子能动张量），单位为 $\alpha_s C_F/(4\pi)$乘以领先阶顶角，且处于结构$_{1\,2}$（$q_\mu\gamma_\nu + q_\nu\gamma_\mu$）中。在结构 $q_\mu q_\nu \not{q}/q^2$中不存在差异，而与$g_{\mu\nu}\not{q}$ 成正比的迹型分量产生一个在双重博雷尔变换下消失的接触项。插值流的子图按照第III节所述的保持结构的处方进行减除。

数值表$\mathcal{O}(\alpha_s)$ 贡献可向作者索取。作为参考，表 XII给出了在工作区域内某一点处，夸克能动张量和胶子能动张量的$\mathcal{O}(\alpha_s)$ 贡献与领先阶微扰贡献之比，针对的是 A, J 和 D 的受保护组合。

表XII. 在 $\beta = 1$, $M^2 = 0.80$ 吉电子伏特^2,$S_0 = 4.0$ ^{2} $\mu = 1$ α_s 1 $= 0.47$ 吉电子伏特和 GeV 处，夸克能动张量（$u+d$）和胶子能动张量的 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 贡献与领先阶微扰贡献之比 r_q 和 r_g，针对受保护组合 $A = H_1 + H_2 + 2H_5$, $J = 2H_{11}$ 和 $D = \frac{1}{2}($ $D^{(1)} + D^{(3)})$。该点位于全部三个形状因子的工作区域内。

	A		J		D	
Q^2 (吉电子伏特 ^{2})	r_q	r_g	r_q	r_g	r_q	r_g
1	1.025	0.189	1.027	0.178	0.837	0.373
1.5	1.087	0.161	1.080	0.156	0.911	0.369
2	1.112	0.136	1.113	0.128	0.911	0.347
2.5	1.146	0.113	1.143	0.107	0.970	0.299

附录B：$\mathcal{O}(\alpha_s)$ 积分的数值不确定性

数值不确定度由四部分构成。(i) 每个部分的统计误差：将所有运动学点的偏移保持一致，并对各部分的误差平方求和后开方。对称产生过程和反对称产生过程是独立运行的。(ii) 可重复性：根据每个运动学点的独立重复测量进行估算，在夸克或胶子贡献内部一致地应用，并在不同味道之间按平方和开方合并。对于反对称矩，能标为 $|\mathrm{LO}_u| + |\mathrm{LO}_d|$。(iii) 随积分预算增加的收敛性：通过在$x = 1.25$ 进行专项审查来估算，审查时使用两倍预算（对于收敛最慢的两个部分则使用四倍预算）。对于反对称矩，采用相应对称类别的相对收敛性（这是一项假设）。(iv) x中的插值误差：通过以单调插值替代三次插值来估算。其对形状因子的影响约为 10^{-5}。

[1] I. Y. Kobzarev、L. B. Okun'，费米子的引力相互作用，Zh. Eksp. Teor. Fiz. 43 (1962) 1904–1909. [2] H. Pagels，粒子的能动量结构形状因子，Phys. Rev. 144 1966 1250 1260 doi:10.1103/ ( ) – . . [3] D. PhysRev.144.1250
Müller、D. Robaschik、B. Geyer、F. M. Dittes、J. Hořejši，量子色动力学光锥算符的波函数、演化方程和演化核，Fortsch. Phys. 42 (1994) 101–141. arXiv:hep-ph/9812448, doi:10.1002/prop.2190420202. [4] X.-D. Ji，核子自旋的规范不变分解，Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 610–613. arXiv:hep-ph/9603249,doi:10.1103/PhysRevLett.78.610 .
[5] A. V. Radyushkin，深度虚康普顿散射的标度极限，Phys. Lett. B 380 1996 417 425 arXiv: ( ) – . , . [6] K. Goeke、hep-ph/9604317 doi:10.1016/0370-2693(96)00528-X
M. V. Polyakov、M. Vanderhaeghen，硬独占反应与强子结构，Prog. Part. Nucl. Phys. 47 (2001) 401–515. arXiv:hep-ph/0106012, doi:10.1016/S0146-6410(01)00158-2. [7] M. Diehl，广义部分子分布，Phys. Rept. 388 2003 41 277 arXiv:hep-ph/0307382 doi:10.1016/j. ( ) – . , . [8] E. Leader、physrep.2003.08.002
C. Lorcé，角动量争议：究竟是怎么回事？这重要吗？，Phys. Rept. 541 (3) (2014) 163–248. arXiv:1309.4235, doi:10.1016/j.physrep.2014.02.010. [9] X.-D. Ji，核子质量结构的量子色动力学分析，Phys. Rev. Lett. 74 1995 1071 1074 arXiv:hep-ph/ ( ) – . , 9410274
doi:10.1103/PhysRevLett.74.1071.

[10] C. Lorcé, 《强子质量分解》, Eur. Phys. J. C 78 2 2018 120 arXiv:1706.05853 doi:10.1140/epjc/ ( ) ( ) . , .[11] A. s10052-018-5561-2
Metz, B. Pasquini, S. Rodini, 《重新审视质子质量分解》, 《物理评论D》 102 2020 114042 arXiv: ( ) . , 2006.11171
doi:10.1103/PhysRevD.102.114042. [12] P. Lowdon, K. Y.-J. Chiu, S. J. Brodsky, 《能动张量矩阵元的严格约束》, Phys. Lett. B 774 (2017) 1–6. arXiv:1707.06313, doi:10.1016/j.physletb.2017.09.050. [13] M. V. Polyakov, C. Weiss, 《π介子和核子中的偏斜分布与双分布》, 《物理评论D》 60 1999 114017 arXiv: ( ) . , . [14] M. V. hep-ph/9902451 doi:10.1103/PhysRevD.60.114017
Polyakov, 《广义部分子分布与核子和原子核内部的强力》, Phys. Lett. B 555 (2003) 57–62. arXiv:hep-ph/0210165, doi:10.1016/S0370-2693(03)00036-4. [15] M. V. Polyakov, P. Schweitzer, 《强子内部的力：压力、表面张力、力学半径及其他》, Int. J. Mod. Phys. A 33 (26) (2018) 1830025. arXiv:1805.06596, doi:10.1142/S0217751X18300259. [16] A. Freese, G. A. Miller, 《光前中的强子内力》, 《物理评论D》103 (2021) 094023. arXiv:2102.01683, doi:10.1103/PhysRevD.103.094023 .[17] C. Lorcé, P. Schweitzer, K. Tezgin, 《大Nc夸克模型中核子的二维能动张量分布：从超相对论极限到非相对论极限》, 《物理评论D》 106 1 2022 014012 arXiv:2202.01192 doi:10.1103/PhysRevD. ( ) ( ) . , .[18] X. Ji, 106.014012
Y. Liu, 《强子的动量流引力多极矩》, 《物理评论D》 106 3 2022 034028 arXiv: ( ) ( ) . , 2110.14781
doi:10.1103/PhysRevD.106.034028. [19] A. Freese, G. A. Miller, 《质子内部真实的经验压力》, 《物理评论D》 104 1 2021 014024 arXiv: ( ) ( ) . , 2104.03213
doi:10.1103/PhysRevD.104.014024. [20] C. Lorcé, P. Schweitzer, 《强子内部的压力：批评、猜想及其他》, Acta Phys. Polon. B 56 (3) (2025) 3–A17. arXiv:2501.04622, doi:10.5506/aphyspolb.56.3-a17. [21] V. D. Burkert, L. Elouadrhiri, F. X. Girod, C. Lorcé, P. Schweitzer, P. E. Shanahan, 《专题综述：质子的引力形状因子》, Rev. Mod. Phys. 95 (4) (2023) 041002. arXiv:2303.08347, doi:10.1103/RevModPhys.95.041002. [22] M. V. Polyakov, H.-D. Son, 《基于瞬子的核子引力形状因子：夸克与胶子子系统间的力》, JHEP 09 (2018) 156. arXiv:1808.00155, doi:10.1007/JHEP09(2018)156. [23] Y. Hatta, A. Rajan, K. Tanaka, 《夸克和胶子对量子色动力学迹反常的贡献》, JHEP 12 (2018) 008. arXiv:1810.05116, doi:10.1007/JHEP12(2018)008. [24] K. Tanaka, 《迹反常约束下NNLO量子色动力学的扭度四引力形状因子》, JHEP 03 (2023) 013. arXiv:2212.09417, doi:10.1007/JHEP03(2023)013. [25] H. S. Jo 等, 《质子独占光子电产生的截面与广义部分子分布》, Phys. Rev. Lett. 115 (21) (2015) 212003. arXiv:1504.02009, doi:10.1103/PhysRevLett.115.212003. [26] P. Chatagnon 等, 《利用 CLAS12 实验测量近阈值 J/ψ 光产生截面》, Phys. Rev. C 113 (6) (2026) 065203. arXiv:2602.22128, doi:10.1103/lqv1-kf2n. [27] K. Kumericki, S. Liuti, H. Moutarde, 《广义部分子分布现象学与深度虚康普顿散射拟合：迈入高精度时代》, Eur. Phys. J. A 52 (6) (2016) 157. arXiv:1602.02763, doi:10.1140/epja/i2016-16157-3. [28] V. D. Burkert, L. Elouadrhiri, F. X. Girod, 《质子内部的压力分布》, Nature 557 (7705) (2018) 396–399. doi:10.1038/s41586-018-0060-z.[29] V. D. Burkert, L. Elouadrhiri, F. X. Girod, 《确定质子内部的剪切力》（4 2021）。 arXiv:2104.02031。[30] K. Kumerički, 《质子内部压力的可测性》, Nature 570 7759 2019 1 2 doi:10.1038/ ( ) ( ) E –E . .[31] s41586-019-1211-6
H. Dutrieux, C. Lorcé, H. Moutarde, P. Sznajder, A. Trawiński, J. Wagner, 《基于深度虚康普顿散射对质子力学性质的现象学评估》, Eur. Phys. J. C 81 (4) (2021) 300. arXiv:2101.03855, doi:10.1140/epjc/s10052-021-09069-w .[32] H. Hashamipour, M. Goharipour, K. Azizi, S. V. Goloskokov, 《零偏斜度下的广义部分子分布》, 《物理评论D》107 (9) (2023) 096005. arXiv:2211.09522, doi:10.1103/PhysRevD.107.096005. [33] M. Goharipour, H. Hashamipour, F. Irani, K. Azizi, 《JLab 数据对零偏斜度下广义部分子分布确定的影响及来自跃迁形状因子的新见解 $N \to \Delta$ 109 7 2024 074042 arXiv:2403.19384 doi: 》, 《物理评论 10.1103/PhysRevD.109.074042
D》 ( ) ( ) . , . [34] O. V. Selyugin, O. V. Teryaev, 《核子的广义部分子分布与引力形状因子（夸克和胶子贡献）》, Phys. Atom. Nucl. 87 (4) (2024) 518–522. arXiv:2311.12988, doi:10.1134/S1063778824700492. [35] S. Adhikari 等, 《在整个近阈值运动学区域测量 J/ψ 光产生截面》, Phys. Rev. C 108 (2) (2023) 025201. arXiv:2304.03845, doi:10.1103/PhysRevC.108.025201. [36] B. Duran 等, 《确定质子的胶子引力形状因子》, Nature 615 (7954) (2023) 813–816. arXiv:2207.05212, doi:10.1038/s41586-023-05730-4. [37] D. E. Kharzeev, 《质子的质量半径》, 《物理评论D》 104 5 2021 054015 arXiv:2102.00110 doi:10.1103/ ( ) ( ) . , . [38] Y. PhysRevD.104.054015
Hatta, D.-L. Yang, 《全息 J/ψ 近阈值产生与质子质量问题》, 《物理评论D》98 (7) (2018) 074003. arXiv:1808.02163, doi:10.1103/PhysRevD.98.074003. [39] K. A. Mamo, I. Zahed, 《全息量子色动力学中的近阈值 J/ψ： A 和 D 引力形状因子》, 《物理评论D》106 (8) (2022) 086004. arXiv:2204.08857, doi:10.1103/PhysRevD.106.086004. [40] Y. Guo, X. Ji, Y. Liu, J. Yang, 《更新的近阈值重夸克偶素产生分析：探测质子胶子引力形状因子》, 《物理评论D》108 (3) (2023) 034003. arXiv:2305.06992, doi:10.1103/PhysRevD.108.

034003.[41] M.-L. Du、V. Baru、F.-K. Guo、C. Hanhart、U.-G. Meißner、A. Nefediev、I. Strakovsky，解码近阈值 J/ψ 80 11 2020 1053 arXiv:2009.08345 doi:10.1140/epjc/ 光生机制，《欧洲 s10052-020-08620-5 物理学杂志C》（）（）。，。[42] D. Winney等，近阈值J/ ψ 108 5 2023 054018 arXiv: 光生动力学，《物 2305.01449 理评论D》（）（）。，doi:10.1103/PhysRevD.108.054018。[43] X.-B. Tong、J.-P. Ma、F. Yuan，大动量转移下的胶子引力形状因子，《物理快报B》823（2021）136751。arXiv:2101.02395、doi:10.1016/j.physletb.2021.136751。[44] Y. Hatta、M. Strikman，ϕ介子近阈值轻子产生与奇异夸克 D项，《物理快报B》817（2021）136295。arXiv:2102.12631、doi:10.1016/j.physletb.2021.136295。[45] R. Abdul Khalek等，电子-离子对撞机的科学需求与探测器概念：EIC黄色报告，《核物理A》1026（2022）122447。arXiv:2103.05419、doi:10.1016/j.nuclphysa.2022.122447。[46] A. Accardi等，杰弗逊实验室22 GeV电子在高光度前沿的强相互作用物理，《欧洲物理学杂志A》60（9）（2024）173。arXiv:2306.09360、doi:10.1140/epja/s10050-024-01282-x。[47] N. Mathur、S. J. Dong、K. F. Liu、L. Mankiewicz、N. C. Mukhopadhyay，来自格点量子色动力学的夸克轨道角动量，《物理评论D》62（2000）114504。arXiv:hep-ph/9912289、doi:10.1103/PhysRevD.62.114504。[48] P. Hagler、J. W. Negele、D. B. Renner、W. Schroers、T. Lippert、K. Schilling，格点量子色动力学中核子广义部分子分布的矩，《物理评论D》 68 2003 034505 arXiv:hep-lat/0304018 doi:10.1103/PhysRevD.68. （）。，。[49] 034505 P. Hagler等，来自完整格点量子色动力学的核子广义部分子分布，《物理评论D》77（2008）094502。arXiv:0705.4295、doi:10.1103/PhysRevD.77.094502。[50] Y.-B. Yang、M. Gong、J. Liang、H.-W. Lin、K.-F. Liu、D. Pefkou、P. Shanahan，来自格点量子色动力学、物理π介子质量下的非微扰重整化胶子动量分数，《物理评论D》98（7）（2018）074506。arXiv:1805.00531、doi:10.1103/PhysRevD.98.074506 。[51] C. Alexandrou、S. Bacchio、M. Constantinou、J. Finkenrath、K. Hadjiyiannakou、K. Jansen、G. Koutsou、H. Panagopoulos、G. Spanoudes，利用物理π介子质量下的格点量子色动力学模拟完整分解质子的自旋和动量分数，《物理评论D》 101 9 2020 094513 arXiv:2003.08486 doi:10.1103/PhysRevD.101. （）（）。，。 094513 [52] K.-F. Liu，质子自旋分解的格点计算现状，AAPPS Bull. 32 1 2022 8 arXiv:2112. （）（）。，。 08416 doi:10.1007/s43673-022-00037-4 [53] Y.-B. Yang、J. Liang、Y.-J. Bi、Y. Chen、T. Draper、K.-F. Liu、Z. Liu，基于 QCD 能量 - 动量张量的质子质量分解，《物理评论快报》121（21）（2018）212001。arXiv:1808.08677、doi:10.1103/PhysRevLett.121.212001。[54] P. E. Shanahan、W. Detmold，来自格点量子色动力学的核子和π介子胶子引力形状因子，《物理评论D》99（1）（2019）014511。arXiv:1810.04626、doi:10.1103/PhysRevD.99.014511。[55] D. A. Pefkou、D. C. Hackett、P. E. Shanahan，不同自旋强子的胶子引力结构，《物理评论D》105（5）（2022）054509。arXiv:2107.10368、doi:10.1103/PhysRevD.105.054509。[56] P. E. Shanahan、W. Detmold，质子内部的压力分布与剪切力，《物理评论快报》122（7）（2019）072003。arXiv:1810.07589、doi:10.1103/PhysRevLett.122.072003。[57] B. Wang、F. He、G. Wang、T. Draper、J. Liang、K.-F. Liu、Y.-B. Yang，来自格点量子色动力学的迹反常形状因子，《物理评论D》109（9）（2024）094504。arXiv:2401.05496、doi:10.1103/PhysRevD.109.094504。[58] D. C. Hackett、D. A. Pefkou、P. E. Shanahan，来自格点量子色动力学的质子引力形状因子，《物理评论快报》132（25）（2024）251904。arXiv:2310.08484、doi:10.1103/PhysRevLett.132.251904。[59] A. V. Belitsky、X. Ji，核子引力形状因子的手征结构，《物理快报B》 538 2002 289 297 arXiv: （）–。，。 hep-ph/0203276 doi:10.1016/S0370-2693(02)02025-7 [60] H. Alharazin、D. Djukanovic、J. Gegelia、M. V. Polyakov，外部引力场存在下核子和π介子的手征理论，《物理评论D》102（7）（2020）076023。arXiv:2006.05890、doi:10.1103/PhysRevD.102.076023。[61] K. Goeke、J. Grabis、J. Ossmann、M. V. Polyakov、P. Schweitzer、A. Silva、D. Urbano，手征夸克-孤子模型中的核子能动量张量形状因子，《物理评论D》75（2007）094021。arXiv:hep-ph/0702030、doi:10.1103/PhysRevD.75.094021 。[62] H.-Y. Won、H.-C. Kim、J.-Y. Kim，核子和重子八重态的力学结构：扭度-2情形，《高能物理杂志》05（2024）173。arXiv:2310.04670、doi:10.1007/JHEP05(2024)173。[63] C. Cebulla、K. Goeke、J. Ossmann、P. Schweitzer，Skyrme模型中的核子能动量张量形状因子，《核物理A》794（2007）87–114。arXiv:hep-ph/0703025、doi:10.1016/j.nuclphysa.2007.08.004。[64] M. Tanaka、D. Fujii、M. Kawaguchi，基于尺度不变手征微扰理论的Skyrme模型中核子的引力形状因子，《物理评论D》112（5）（2025）054048。arXiv:2507.21220、doi:10.1103/gzj5-7bln。[65] M. J. Neubelt、A. Sampino、J. Hudson、K. Tezgin、P. Schweitzer，袋模型中的能动量张量与D项，《物理评论D》101（3）（2020）034013。arXiv:1911.08906、doi:10.1103/PhysRevD.101.034013。[66] B. Pasquini、M. V. Polyakov、M. Vanderhaeghen，深度虚康普顿散射中D项形状因子的色散评估，《物理快报B》739（2014）133–138。arXiv:1407.5960、doi:10.1016/j.physletb.2014.10.047。[67] X.-H. Cao、F.-K. Guo、Q.-Z. Li、D.-L. Yao，核子引力形状因子的色散确定，《自然通讯》16（2025）6979。arXiv:2411.13398、doi:10.1038/s41467-025-62278-9。[68] Z. Abidin、C. E. Carlson，全息学中的核子电磁与引力形状因子，《物理评论D》79（2009）115003。arXiv:0903.4818、doi:10.1103/PhysRevD.79.115003。

[69] D. Chakrabarti、C. Mondal、A. Mukherjee、S. Nair、X. Zhao，光前夸克-双夸克模型中的质子引力形状因子与力学性质，《物理评论D》

102 2020 113011 arXiv:2010.04215 doi:10.1103/ （ ） 。 ， 。
PhysRevD.102.113011
[70] P. Choudhary 、 B. Gurjar 、 D. Chakrabarti 、 A. Mukherjee，质子的引力形状因子与力学性质：二维和三维分布之间的联系，《物理评论D》106（7）（2022）076004。 arXiv:2206.12206、
doi:10.1103/PhysRevD.106.076004 。[71] S. Nair、C. Mondal、S. Xu、X. Zhao、J. P. Vary，光前质子引力结构与质量分解，《物理评论D》112（11）（2025）114001。 arXiv:2506.07554、 doi:10.1103/79fs-5ghd。[72] A. Freese、I. C. Cloët，来自质子广义部分子分布的夸克自旋与轨道角动量，《物理评论C》103（4）（2021）045204。 arXiv:2005.10286、 doi:10.1103/PhysRevC.103.045204。[73] Y. Qiu、Z. Liu、C. Zhang，NJL夸克–双夸克模型中的重子八重态引力形状因子与味依赖性（11 2026）。 arXiv:2611.01948。[74] Z. Q. Yao、Y. Z. Xu、D. Binosi、Z. F. Cui、M. Ding、K. Raya、C. D. Roberts、J. Rodríguez-Quintero、S. M. Schmidt，核子引力形状因子，《欧洲物理学杂志A》61（5）（2025）92。 arXiv:2409.15547、 doi:10.1140/epja/s10050-025-01557-x。[75] W. Broniowski、E. Ruiz Arriola，介子主导方法中的核子引力形状因子与力学性质，《物理评论D》112（5）（2025）054028。 arXiv:2503.09297、 doi:10.1103/ylml-mrlh。[76] M. Varma、P. Schweitzer，长程力对D项及能动量结构的影响，《物理评论D》102（1）（2020）014047。 arXiv:2006.06602、 doi:10.1103/PhysRevD.102.014047。[77] A. Metz、B. Pasquini、S. Rodini，电子的引力形状因子D(t)，《物理快报B》820（2021）136501。 arXiv:2104.04207、 doi:10.1016/j.physletb.2021.136501。[78] D. C. Hackett、P. R. Oare、D. A. Pefkou、P. E. Shanahan，来自格点量子色动力学的π介子引力形状因子，《物理评论D》108（11）（2023）114504。 arXiv:2307.11707 、 doi:10.1103/PhysRevD.108.114504。[79] J.-Y. Kim 、 B.-D. Sun，自旋为

3 2, 81 1 2021 85 arXiv: /的重子引力
2011.00292
形状因子，《欧洲物理学杂志C》（ ） （ ） 。 ， doi:10.1140/epjc/s10052-021-08852-z。[80] Z. Dehghan、K. Azizi、U. Özdem，通过QCD求和规则研究 Δ 重子的引力形状因子，《物理评论D》108（9）（2023）094037。 arXiv:2307.14880、 doi:10.1103/PhysRevD.108.094037。[81] A. Garcia Martin-Caro、M. Huidobro、Y. Hatta，Skyrme模型中的原子核引力形状因子，《物理评论D》108（3）（2023）034014。 arXiv:2304.05994、 doi:10.1103/PhysRevD.108.034014。[82] M. Mai、P. Schweitzer，Q球的能动量张量、稳定性与D项，《物理评论D》86（2012）076001。 arXiv:1206.2632、 doi:10.1103/PhysRevD.86.076001。[83] M. A. Shifman、A. I. Vainshtein、V. I. Zakharov，QCD与共振物理：理论基础，《核物理B》147（1979）385–447。 doi:10.1016/0550-3213(79)90022-1。[84] B. L. Ioffe，量子色动力学中的重子质量计算，《核物理B》188（1981）317–341, [勘误：《核物理B》191，591–592（1981）]。 doi:10.1016/0550-3213(81)90259-5。[85] I. V. Anikin，主导阶光锥求和规则中的引力形状因子，《物理评论D》99（9）（2019）094026。 arXiv:1902.00094、 doi:10.1103/PhysRevD.99.094026。[86] K. Azizi、U. Özdem，光锥QCD中的核子能动量张量形状因子，《欧洲物理学杂志C》80（2）（2020）104。 arXiv:1908.06143、 doi:10.1140/epjc/s10052-020-7676-5。[87] Z. Dehghan、F. Almaksusi、K. Azizi，利用味分解引力形状因子研究质子的力学性质，《高能物理杂志》06（2025）025。 arXiv:2502.16689、 doi:10.1007/JHEP06(2025)025。[88] U. Özdem、K. Azizi，光锥QCD中的超子引力形状因子，《物理评论D》101（11）（2020）114026。 arXiv:2003.12588、 doi:10.1103/PhysRevD.101.114026。[89] K. Azizi、U. Özdem，QCD中的N(1535)引力形状因子，《核物理A》1015（2021）122296。 arXiv:2012.06895、
doi:10.1016/j.nuclphysa.2021.122296 。[90] Z. Dehghan、K. Azizi，引力形状因子给出的Ω^-重子力学性质，《物理评论D》112（5）（2025）054014。 arXiv:2507.14840、 doi:10.1103/x6f5-cbcc。[91] U. Özdem、K. Azizi， N（1535）的引力跃迁形状因子 $\to N$，《物理评论D》101（5）（2020）054031。 arXiv:1912.06375、 doi:10.1103/PhysRevD.101.054031。[92] U. Özdem、K. Azizi，N $\to \Delta$ 通过QCD光锥求和规则得到的引力跃迁形状因子，《高能物理杂志》03（2023）048。 arXiv:2212.07290、 doi:10.1007/JHEP03(2023)048。[93] Z. Asmaee、K. Azizi，QCD中质子的光子和胶子引力形状因子（8 2026）。 arXiv:2608.23788。[94] B. L. Ioffe、A. V. Smilga，非微扰QCD中中等动量转移下的介子宽度与形状因子，《核物理B》216（1983）373–407。 doi:10.1016/0550-3213(83)90291-2。[95] V. A. Nesterenko、A. V. Radyushkin，QCD中的求和规则与π介子形状因子，《物理快报B》

115 1982 410 doi: （ ） 。 。
10.1016/0370-2693(82)90528-7
[96] S. Navas等，《粒子物理学评论》，《物理评论D》110（3）（2024）030001。 doi:10.1103/PhysRevD.110.030001。[97] V. M. Belyaev、B. L. Ioffe，利用QCD求和规则确定重子及重子共振质量。1. 非奇异重子，《苏联物理学JETP》56（1982）493–501。[98] B. L. Ioffe，低能QCD，《粒子与原子核物理进展》

56 2006 232 277 arXiv:hep-ph/0502148 doi:10.1016/j. （ ） –。 ，
ppnp.2005.05.001
。[99] A. P. Bakulev 、 A. V. Radyushkin，π 介子形状因子的非局域凝聚与 QCD 求和规则，《物理快报 B 》 271 （ 1991 ） 223–230。 doi:10.1016/0370-2693(91)91304-E。[100] A. P. Bakulev、A. V. Pimikov、N. G. Stefanis，含非局域凝聚的QCD求和规则与类空π介子形状因子，《物理评论D》79（2009）093010。 arXiv:0904.2304、 doi:10.1103/PhysRevD.79.093010。

[101] S. V. Mikhailov, A. V. Radyushkin, 《含非局域凝聚的π介子波函数与QCD求和规则》, 《物理评论D》45 (1992) 1754–1759。doi:10.1103/PhysRevD.45.1754。