arXiv:2611.30144v1 [math.MG] 23 Nov 2026

立方体的最大截面

Vu KhacKyFPT大学，越南河内

2026年11月23日

摘要

我们证明了关于任意维数和余维数下立方体最大中心截面的广为流传的猜想。极大截面恰好是若干互不相交的坐标块的对角线的乘积，且这些块的大小至多相差一。这确定了 Ball 于1989年界限中尚未解决情形下的锐利体积。在固定维数下，对数体积亏损以线性方式控制仿射截面的方向和位移，且指数最优。我们还得到了有界密度的独立实随机变量的投影密度的锐利一致界。

*2020*年数学主题分类。52A40, 52A38;26D15,60D05。关键词。立方体截面，Brascamp–Lieb 不等式，紧框架，相对熵，稳定性，投影密度。

目录

1 引言 1
2 框架、行列式熵与高斯传输 4
3 行列式余项与法向量之间的夹角 7
4 整数装填与倒数窗口 10
5 极大化框架处的体积比较 13
6 局部与全局稳定性 17
7 推论与进一步联系 20
A 三个较小的商的精确比较 27

1 引言

立方体中，经过中心的哪种 k维截面体积最大？最长的直线截面连接一对相对顶点。最大的超平面截面在两个坐标方向上取对角线，并使其余坐标方向保持自由。这两个例子都将坐标划分为若干块，并在每块中取一条对角线。在这类截面中，当各块大小之差至多为一时，体积最大。关于立方体最大截面的广为流传的猜想断言，不存在其他子空间能给出更大的体积 [28, 猜想 1]。我们证明了这一猜想，并确定了所有取等号的情形。这解决了 Ball 近四十年前研究的一般极值问题 [4, 页 252]。

设 $Q_n = [-1/2, 1/2]^n$，并设 $G_{n,\ k}$ 为 $\mathbb{R}^n$的 k维线性子空间构成的格拉斯曼流形。我们研究

$$M(n,k) = \max_{H \in G_{n,k}} |Q_n \cap H|_k, \qquad 1 \le k \le n,$$

其中 $|\cdot|_k$ 表示欧几里得 k 维体积。记 $n = qk + r$，其中 $0 \le r < k$。将坐标划分为 $k - r$ 个大小为 q 的块和 r 个大小为 $q+1$ 的块，并取它们的归一化对角向量所张成的子空间。所得截面是一个正交盒。其边长为各块大小的平方根，因此其体积为

$$W_{n,k} = q^{(k-r)/2}(q+1)^{r/2}. \tag{1.1}$$

事实上，任意此类正交盒的体积平方等于其块大小的乘积。若两个大小 b、c 满足 $c \ge b + 2$，则从较大的块移出一个坐标并加入较小的块，会使它们的乘积增加 $c - b - 1$。这解释了（1.1）中的两个连续大小。我们将这些称为平衡坐标块截面，并允许任意坐标符号和排列。它们的子空间构成一个有限族$\mathcal{B}_{n,\ k}$。

定理 1.1（立方体的最大截面）。 对于每一对整数 $n \ge k \ge 1$,

$$M(n,k) = W_{n,k}.$$

当且仅当 $H \in \mathcal{B}_{n,k}$ 时等号成立。

定理 1.1的证明，包括等号的取得及其刻画，已在 Lean 4 中验证。[1]

例如，Q_7 三维情形的极值构形边长为 $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$，体积为 $2\sqrt{3}$。此时 Ball 的连续上界为 $(7/3)^{3/2}$。差异源于三个块的尺寸必须为整数。

1.1 极值截面问题

概率论与极值问题的联系早已为人所知。设 U 在单位立方体上均匀分布，且 a是单位向量，则加权和 $a \cdot U$ 在零点处的密度等于垂直于 a的截面的体积。Pólya 于 1913年 对 sinc 函数的乘积所做的研究，是这一联系的早期实例 [30, 28]。1979年，Hensley [16] 给出了与维数无关的中心超平面截面体积上界，并猜想了紧的上界 $\sqrt{2}$。Ball 在 1986 [3]证明了这一猜想。同一时期，Vaaler [37]证明了 Good 猜想：单位立方体的每个中心截面体积都至少为一。早在 1987年，人们便开始研究高余维问题；当时 Sbai Msahli 提出了 $2^{(n-k)/2}$ 对$n \le 2k$ [34]的紧上界。1989年，Ball 处理了任意余维 [4]。他的两个上界给出

$$M(n,k) \le \min\left\{(n/k)^{k/2},\, 2^{(n-k)/2}\right\}.$$

当 k 整除 n 时，第一个界取到等号；当 $n \le 2k$ 时，第二个界取到等号。对于满足 $n > 2k$ 的不可整除数对，两个界都严格大于平衡块截面的体积。

精确的平衡公式（1.1）作为猜想 3.14 出现在 Pooley 的 2012年学位论文中 [31]。随后，Ivanov 提出了几何猜想：每个极大者都是仿射立方体 [18]。Ivanov 和 Tsiutsiurupa 推导出了极大截面的变分条件，并证明该猜想对所有平面截面都成立 [20]。Nayar 和 Tkocz 在其综述中将这一一般性陈述记为广为流传的猜想 [28,猜想 1]。新的范围

[1] 形式化证明和验证记录可在以下位置获取： https://github.com/vukhacky/max-section-cube。形式化涵盖了主定理。稳定性估计和应用在第6节和第7节中得到证明。

对于尖锐值的结果是 $k \geq 3$, $n > 2k$ 和 $k \nmid n$。这里，极大长方体必须采用两种不同的整数块大小。它与 Ball 的连续上界之间的差异可能很大。对于$t = r/k$，连续上界与 $W_{n,\ k}$ 之比的对数，等于 $k/2$ 乘以 $\log(q+t)$ 与其在 $[0,1]$ 上的弦之差。由于 $(q+1)^{-2} \leq -(\log(q+t))''\leq q^{-2}$，插值余项给出

$$\frac{kt(1-t)}{4(q+1)^2} \leq \log \frac{(n/k)^{k/2}}{W_{n,k}} \leq \frac{kt(1-t)}{4q^2}.$$

在固定 q 时，若 t 远离零和一，这两个体积的差异就会随截面维数呈指数级增长。

1.2 证明与推论

连续上界将坐标投影的总长度平方视为可以自由分配。在分块截面中，每个坐标只属于 k 个方向之一，因此重数为整数。我们需要一种体积估计，能在优化这些方向的长度之前，先反映它们之间的夹角。

将立方体约束经等距映射写到截面上，可表示为 $\mathbb{R}^k$中的带状区域。对于分块截面，每对法向量要么平行，要么正交。下面的估计衡量中间角度所带来的代价。设 K 是由宽度为 w_i 的带状区域相交而成、且具有正体积的集合，其单位法向量为 u_i，并满足正权重条件 $\sum_i a_i u_i u_i^{\mathsf{T}} = I_k$。若 θ_{ij} 是 u_i 与 u_j 之间的夹角，则

$$\sum_{i,j} a_i a_j \cos^2\theta_{ij} \sin^2\theta_{ij} \leq 20 \log \frac{\prod_i w_i^{a_i}}{|K|}.$$

右侧的对数项是几何布拉施坎普–李不等式中的亏损。Ball 的论证利用该不等式来估计体积。在 Barthe 的传输证明中，我们保留一个非负的行列式项，并用它来控制夹角。同一恒等式将一维传输耦合到一个高斯向量。格拉姆投影的对角线指定了这部分代价可以分配给每一对方向的份额。定理 3.2给出了相应的成对上界。

第二步恢复整数块大小。在体积比达到最大值时，复制或删除一行会使其长度平方落在两个相邻整数倒数之间。将一行替换为另一行的副本，会对格拉姆投影的平方元素施加装填约束。对于 $n \geq 5k$，这一约束与夹角界已经解释了连续体积界和平衡值之间的全部差异。

对于剩下的三个商 $n \geq 2k$，我们用同一组配对权重表示行长带来的熵超额和角亏损。两个类的权重通过补投影的一个子式限制其法向量之间的夹角。另一项限制来自将每个类中的一行替换为它们之和的倍数。随着新带状区域变窄，行列式以一阶速度增大，而替换操作截去两个面积关于位移呈二次变化的三角形。固定两个坐标后，留下一个维数为 $k-2$ 的截面，因此可用归纳法界定这些三角形所损失的体积。第 5节推导了这两项限制。二者结合，将这三个商化为对两个行长度平方的比较。附录 A 给出了一个适用于全部十九对重数的有限有理数验证。

以下给出两个稳定性结论。对于立方体截面，设 P_H 为到 H的正交投影，并令 $d(H,\ \mathcal{B}_{n,\ k})$表示 P_H 到平衡分块投影的最小希尔伯特–施密特距离。对于 $n > k$ 以及每个满足 $y \in H^{\perp}$的正体积仿射截面，我们证明

$$d(H, \mathcal{B}_{n,k}) + |y| \leq C_{n,k} \log \frac{W_{n,k}}{|Q_n \cap (H+y)|_k}.$$

在每个分块截面处，体积都会出现一阶损失，即使该分块并不平衡。这给出了最优指数和明确的局部常数。一个平面例子说明了为何全局常数必须依赖于维数。

极值公式还回答了一个关于集中的问题。如果独立实随机变量的密度均不超过 1，那么一个 d维投影的密度最大可以有多大？Madiman、Melbourne 和 Xu 的线性像不等式将这个问题归结为均匀随机变量 [25]。对于立方体上的均匀分布，最大密度恰好等于垂直于投影方向的中心截面体积。因此，精确常数为$W_{n,\ n-d}$而几乎达到该常数的投影，其核必定接近平衡子空间之一（推论7.3）。

另外两个推论分别运用了证明中的不同部分。角度估计控制了将法向方向移动到某个正交归一基的各个轴所需的代价。将其应用于支撑带，可得到关于凸体的定量体积不等式（推论7.5）。极性则带来了精确截面公式的另一项应用。将该公式与三维对称马勒不等式结合，可确定交叉多胞体的三维投影的最小体积（推论7.6）。

2　框架、行列式熵与高斯传输　　t

我们首先将截面表示为欧几里得空间中若干带状区域的交集。各向同性使其体积可以通过几何布拉施坎普–李不等式来处理。框架表述及其变分应用见 [19, 20]。我们的目的是保留通常的标量界会丢失的夹角信息。

选择一个对 H 的等距参数化 $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$，使得 $A^{\mathsf{T}}A = I_k$。对于每个非零行，写作 $A_i = \sqrt{c_i}\,u_i^{\mathsf{T}}$，其中 $|u_i| = 1$。于是

$$\sum_i c_i u_i u_i^{\mathsf{T}} = I_k, \qquad \sum_i c_i = k, \qquad 0 < c_i \le 1.$$

数值 c_i 是坐标投影的长度平方，通常称为行杠杆值。因此，对于 $\mathbb{R}^n$ 的标准坐标向量 ε_i，有 $c_i = |P_H\varepsilon_i|^2$。该截面与下式等距：

$$K = \{x \in \mathbb{R}^k : |u_i \cdot x| \le r_i \text{ for all nonzero rows}\}, \qquad r_i = \frac{1}{2\sqrt{c_i}}.$$

零行不施加任何约束，因此在框架和中省略。在标量熵和中，它们将以$c_i = 0$ 计入。

角缺陷为

$$\mathcal{E} = \sum_{i,j} c_i c_j (u_i \cdot u_j)^2\{1 - (u_i \cdot u_j)^2\}.$$

它非负，并且当且仅当每一对非零行方向彼此平行或正交时取零。在这种情况下，各向同性迫使不同的无向方向构成一组正交归一基。

传输论证中的雅可比矩阵是秩一矩阵的加权和。柯西–比内公式将其行列式表示为对各组基取平均。我们记录相应的概率分布，它还将提供一种在第 7.3 节选取近乎正交方向的方法。设 $a_i > 0$，$|u_i| = 1$，以及 $\sum_i a_i u_i u_i^{\mathsf{T}} = I_k$。令 $P_i = u_i u_i^{\mathsf{T}}$，并令 U 的列为 $\sqrt{a_i}u_i$。对于每个 k 元素的指标集 S，定义

$$p(S) = \det(U_S)^2.$$

柯西–比内公式和 $UU^{\mathsf T}=I_k$ 蕴含 $\sum_S p(S)=1$。只有线性无关集的概率才为正。生成恒等式

$$\sum_{|S|=k} p(S)\prod_{i\in S} t_i = \det\left(\sum_i a_i t_i P_i\right) \tag{2.1}$$

给出包含概率

$$\mathbb{P}(i\in S)=a_i,\qquad \mathbb{P}(i,j\in S)=a_i a_j\{1-(u_i\cdot u_j)^2\}\quad (i\neq j). \tag{2.2}$$

事实上，$\det(I+sX+tY)$ 在零点处的混合导数为 $\operatorname{tr}X\operatorname{tr}Y-\operatorname{tr}(XY)$。

对于有限势向量 $z=(z_i)$，令

$$J(z)=\log\det\left(\sum_i a_i e^{z_i}P_i\right)-\sum_i a_i z_i. \tag{2.3}$$

若以概率 $p(S)$ 抽取 S，记作 $Y=\sum_{i\in S} z_i$。柯西–比内公式给出 $J(z)=\log \mathbb{E}e^{Y}-\mathbb{E}Y$，由詹森不等式可知其非负。等价地，按 $e^{Y}/\mathbb{E}e^{Y}$ 对每个基重新加权，可得到概率分布 p_z，满足 $J(z)=D_{\mathrm{KL}}(p\|p_z)$。这里，$D_{\mathrm{KL}}(\nu\|\lambda)=\int \log(d\nu/d\lambda)\,d\nu$ 在 $\nu\ll\lambda$ 时为相对熵。分布 p 是一个投影行列式点过程 [24]。

2.1 一个精确的高斯传输恒等式

几何布拉施坎普–李不等式属于多线性积分不等式的一般理论，其中高斯极值化与结构分解由 [11, 22, 8] 发展。我们采用 Barthe 证明 [6] 中的递增传输，并保留其变量替换中的各项。这给出了亏损的精确分解。相对熵之所以出现，是因为它用于比较传输后的分布与标准高斯分布。Carlen 和 Cordero-Erausquin [13] 更一般地发展了熵与 Brascamp–Lieb 不等式之间的对偶性。

暂且任取一个各向同性单位标架 $(a_i,\ u_i)$ 和正的半宽度 r_i。令 K 为它们的开条带交集，令 $V=|K|$，并设

$$B=\prod_i (2r_i)^{a_i}.$$

记 Φ、φ 和 γ_k 分别为标准高斯分布函数、一维密度和 k 维分布。交集内均匀随机点的坐标，在各自的完整区间上未必服从均匀分布。尽管如此，我们仍使用将每个完整区间上的均匀测度映射到标准高斯分布的映射。它们的导数恰好编码了条带宽度。定义

$$T_i(s)=\Phi^{-1}\left(\frac{s+r_i}{2r_i}\right),\qquad z_i(x)=\log T_i'(u_i\cdot x),\qquad F(x)=\sum_i a_i T_i(u_i\cdot x)u_i.$$

因此 $\varphi(T_i(s))T_i'(s)=1/(2r_i)$。

令 X 在 K 上服从均匀分布。设

$$b(X)=(\sqrt{a_i}\,T_i(u_i\cdot X))_i,\quad Q=I-U^{\mathsf T}U,\quad P(X)=|Qb(X)|^2,\quad \mu=F_{\#}\,\mathrm{Unif}(K).$$

由于 $UU^{\mathsf T}=I_k$，Q 是一个正交投影，并且 $F(X)=Ub(X)$。特别地，$P(X)=\sum_i a_i T_i(u_i\cdot X)^2-|F(X)|^2$。

引理 2.1. 令 $\delta_{\mathrm{BL}} = \log(B/V)$，则有

$$\delta_{\mathrm{BL}} = D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\gamma_k) + \mathbb{E}J(z(X)) + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}P(X). \tag{2.4}$$

存在一个将 X 与 $G \sim \gamma_k$ 耦合起来的耦合，使得

$$\mathbb{E}\sum_i a_i |T_i(u_i \cdot X) - u_i \cdot G|^2 \le 2\{\delta_{\mathrm{BL}} - \mathbb{E}J(z(X))\} \le 2\delta_{\mathrm{BL}}. \tag{2.5}$$

证明。 微分 $DF(x) = \sum_i a_i T_i'(u_i \cdot x) P_i$ 是正定的。该映射是凸集 K 上某个严格凸函数的梯度，因此是单射。在其像集上应用变量变换公式可得

$$\int_K \varphi_k(F(x)) \det DF(x)\, dx \le 1.$$

利用（2.3）和一维输运恒等式，其被积函数恰好为

$$\frac{1}{B}\exp\{J(z(x)) + P(x)/2\}. \tag{2.6}$$

指数中的两项均为非负数。

单射映射下的密度变换还给出 $d\mu/dy(F(x)) = 1/(V \det DF(x))$。因此

$$\log \frac{d\mu}{d\gamma_k}(F(x)) = \delta_{\mathrm{BL}} - J(z(x)) - P(x)/2.$$

所有项均可积。集合 K 有界；由有限的纤维体积界，其一维边缘分布具有有界密度；并且 $\int_{-r_i}^{r_i} T_i(s)^2\, ds = 2r_i$。因此，输运映射以及 $F(X)$ 具有有限的二阶矩。由（J 和 P（2.6）可知其可积性。对对数恒等式进行积分即得（2.4）。

在协方差 $\mathrm{Cov}(\gamma_k) = I_k$ 的归一化下，Talagrand 高斯输运不等式 [36]，表明

$$W_2(\mu, \gamma_k)^2 \le 2D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\gamma_k).$$

取 $F(X)$ 与 G 的二次代价耦合，使其满足此界，并将其提升到 X。其中的两个向量

$$b(X) - U^{\mathsf{T}}G = Qb(X) + U^{\mathsf{T}}(F(X) - G)$$

逐点正交。因此，它们的范数平方相加，并且

$$\mathbb{E}|b(X) - U^{\mathsf{T}}G|^2 \le \mathbb{E}P + 2D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\gamma_k) = 2\{\delta_{\mathrm{BL}} - \mathbb{E}J\}.$$

这是（2.5）。 □

这一分解尤其证明了几何 Brascamp–Lieb 界 $V \le B$。对于立方体行，$B = \prod_{c_i>0} c_i^{-c_i/2}$。熵的凹性以及 $\sum_i c_i = k$ 随即给出

$$V \le B \le (n/k)^{k/2}.$$

这 作为最终最大值比值论证中端点处使用的连续上界 .

3　T行列式余项与法向量之间的夹角

传输恒等式从下方给出了总亏损的下界，即期望行列式余项。我们需要知道哪些方向导致了这一结果。如果两行的势不同，那么当两行正交时，它们之间的相互作用应当消失。下面的不等式对此作了精确说明，并以每对方向的内积平方作为权重。其第二部分给出了势的一个有界函数，我们可以在高斯耦合下对其进行比较。

对于各向同性单位标架 (a_i, u_i)，记

$$J(z) = \log\det\left(\sum_i a_i e^{z_i} u_i u_i^{\mathsf{T}}\right) - \sum_i a_i z_i, \qquad \mathcal{V}(v) = \sum_{i<j} a_i a_j \rho_{ij}^2 (v_i - v_j)^2, \quad \rho_{ij} = u_i \cdot u_j.$$

各向同性给出恒等式

$$\mathcal{V}(v) = \sum_i a_i v_i^2 - \left\| \sum_i a_i v_i u_i u_i^{\mathsf{T}} \right\|_{\mathrm{HS}}^2 .$$

因此 $0 \le \mathcal{V}(v) \le \sum_i a_i v_i^2$。

引理 3.1（行列式余项的两两下界）。 对于每个实势向量 z，

$$J(z) \ge \sum_{i<j} a_i a_j \rho_{ij}^2 \phi(|z_i - z_j|), \qquad \phi(t) = t - 1 + e^{-t}. \tag{3.1}$$

如果每个 $z_i \ge 0$，那么

$$J(z) \ge \frac{9}{2} \mathcal{V}((e^{-z_i/3})_i). \tag{3.2}$$

证明。 对两边同时进行加性平移，不会改变式（3.1），因此不妨设 $\min_i z_i = 0$。将公共截断值从零开始逐渐提高。截断值移动时，只有高于它的坐标会发生变化，因此当截断值位于一对势之间时，该对才会对导数产生贡献。令 $z_i(t) = \min(z_i, t)$，并在有限个切换时刻之外，令

$$A_t = \{i : z_i > t\}, \qquad S_t = \sum_{i \in A_t} a_i u_i u_i^{\mathsf{T}}, \qquad X_t = e^{-t} \sum_i a_i e^{z_i(t)} u_i u_i^{\mathsf{T}}.$$

矩阵 X_t 是正定的，且满足 $X_t \preceq I_k$。对行列式求导可得

$$\frac{d}{dt} J(z(t)) = \operatorname{tr}\{S_t (X_t^{-1} - I_k)\}.$$

对于式（3.1）右侧的成对表达式，只有一个指标属于 A_t 的数对才会对导数产生贡献。由于 $\phi'(s) = 1 - e^{-s}$，该导数为

$$\sum_{i \in A_t, j \notin A_t} a_i a_j \rho_{ij}^2 (1 - e^{z_j - t}) = \operatorname{tr}\{S_t (I_k - X_t)\}.$$

它们的差非负，因为

$$X_t^{-1} - 2I_k + X_t = (I_k - X_t) X_t^{-1} (I_k - X_t) \succeq 0$$

以及 $S_t \succeq 0$。两个表达式在 $t = 0$ 处均为零。有限个切换时刻不会影响积分，因此积分到 $\max_i z_i$ 即可证明第一个断言。

为了将这个估计转移到高斯耦合，我们需要一个关于势的有界函数，其平方差受 ϕ 控制。指数运算将势的加性变化转化为尺度变化。在零点处，前两个非零项决定了尺度。

$$\phi(t) = \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{6}t^3 + O(t^4), \qquad C(1-e^{-\alpha t})^2 = C\alpha^2 t^2 - C\alpha^3 t^3 + O(t^4).$$

令两个系数相等，得到 $\alpha = 1/3$ 和 $C = 9/2$。这些局部系数给出一个全局界，因为差值在零处为零，且其导数为 $(1-e^{-t/3})^3 \geq 0$。

此外，若 $s,\ t \geq 0$，则

$$|e^{-s/3} - e^{-t/3}| \leq 1 - e^{-|s-t|/3}.$$

在 (3.1) 中逐对应用这两个不等式，得到 (3.2)。 □

3.1 来自共同高斯耦合的两个角度界

我们需要行列式估计的两个推论。第一个控制框架的总角缺陷。第二个区分权重较小的一行与几乎承载整个方向的一行。各向同性规定了每一行所涉及的角相互作用量。记 $s_{ij} = \langle u_i, u_j\rangle^2$ 和 $w_{ij} = a_i a_j s_{ij}$。沿方向 u_i 对框架恒等式取二次型，得到

$$\sum_{j\neq i} w_{ij} = a_i(1-a_i). \tag{3.3}$$

这个恒等式将传输第 i个坐标的代价分配到它与其他坐标组成的各对上。

定理 3.2 （条带交集的加权角度界）。 设 $\sum_i a_i u_i u_i^{\mathsf{T}} = I_k$，其中包含单位向量 u_i 和正权重。对任意 $r_i > 0$，令 $K = \{x :\ |\langle u_i, x\rangle| < r_i\ \forall i\}$ 和δ =对数$[\prod_i (2r_i)^{\ a_i}/|K|]$。定义

$$M_{\mathrm{G}} = \sqrt{3/5}, \qquad \mathcal{L}(A,B,s) = \frac{M_{\mathrm{G}}(1-s)}{(16-s)\{2/9 + [2/(3e)](2-A-B)\}}.$$

Then

$$\delta \geq \sum_{i<j} w_{ij}\, \mathcal{L}(a_i, a_j, s_{ij}). \tag{3.4}$$

对于带状区域宽度的所有取值，还成立

$$\mathcal{E} := \sum_{i,j} a_i a_j s_{ij}(1-s_{ij}) \leq \frac{32}{\sqrt{3/5}}\left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3e}\right)\delta \leq 20\delta.$$

对于中心任意的区间，这两个界仍然成立，其中 δ 根据它们的正体积交集计算。

证明。 使用引理 2.1 中的共同耦合。记 $T_i = T_i(\langle u_i, X\rangle)$， $G_i = \langle u_i, G\rangle$，以及$e_i = T_i - G_i$。除去一个共同常数后，行列式势函数为 $z_i = \beta_i + T_i^2/2$，其中β_i =–对数 r_i。由引理 3.1 及该耦合可得，

$$\delta \geq \mathbb{E}\sum_{i<j} w_{ij}\phi(|z_i - z_j|) + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\sum_i a_i e_i^2.$$

指标 $a_i = 1$ 根据（3.3），没有正权重配对。舍去它们非负的输运代价。对于其余指标，右侧恰好等于对所有正权重配对求和所得的w_{ij} 乘以

$$\mathbb{E}\left[\phi(|z_i - z_j|) + \frac{e_i^2}{2(1-a_i)} + \frac{e_j^2}{2(1-a_j)}\right]. \tag{3.5}$$

固定这样一对。从两个势中都减去 $\min(\beta_i,\beta_j)$，并令 $t_h=\exp[-(\beta_h-\min(\beta_i,\beta_j))/3]$，$h=i,j$。两个 t_h 都不超过 1，且其中一个等于 1。对于 $f_h(y)=t_h e^{-y^2/6}$，引理 3.1 证明中的标量不等式给出 $|f_i(T_i)-f_j(T_j)|\le\sqrt{2\phi(|z_i-z_j|)}/9$。此外 $\|f_h'\|_\infty\le t_h/\sqrt{3e}$。因此，利用三角不等式和柯西–施瓦茨不等式，可将 $\mathbb{E}(f_i(G_i)-f_j(G_j))^2$ 界定为 (3.5) 乘以

$$\frac{2}{9}+\frac{2}{3e}\left[(1-a_i)t_i^2+(1-a_j)t_j^2\right]\le\frac{2}{9}+\frac{2}{3e}(2-a_i-a_j).$$

对于相关标准高斯变量，将 $e^{-(G_i^2+G_j^2)/6}$ 对其联合分布积分，得到 $3/\sqrt{16-s_{ij}}$，而 $\mathbb{E}e^{-G_i^2/3}=\sqrt{3/5}$。因此，令 $M=\sqrt{3/5}$ 和 $D=3/\sqrt{16-s_{ij}}$，高斯平方差为 $M(t_i^2+t_j^2)-2Dt_it_j$。若 $t_i=1$，则通过配方可将此表达式下界为

$$M(t_j-D/M)^2+M-D^2/M\;\ge\;M\,\frac{1-s_{ij}}{16-s_{ij}}.$$

交换指标即可涵盖 $t_j=1$。求和即证明了 (3.4)。对于全局界，我们先对平方差求和，再估计输运误差。普通框架收缩 $\mathcal{V}(v)\le\sum_i a_i v_i^2$ 也能控制依赖于数对的振幅。记 $t_{i|j}$ 为数对 i 中方向 i 的振幅，j。我们断言

$$\sum_{i<j}w_{ij}(t_{i|j}v_i-t_{j|i}v_j)^2\le\sum_i a_i v_i^2. \tag{3.6}$$

为此，令 $b_i=r_i^{-2/3}$ 和 $v_i(x)=v_i\mathbf{1}_{[0,b_i]}(x)/\sqrt{b_i}$。于是 $t_{i|j}=\sqrt{\min(b_i,b_j)/b_i}$。特别地，

$$(t_{i|j}v_i-t_{j|i}v_j)^2=\int_0^{\min(b_i,b_j)}(v_i(x)-v_j(x))^2\,dx.$$

将每个积分延伸到 $[0,\infty)$，对所有配对求和，并在每个 x 处应用框架收缩。由此得到的上界为 $\sum_i a_i\int_0^\infty v_i(x)^2\,dx=\sum_i a_i v_i^2$。

令 $j_0=\mathbb{E}J(z)$、$h(y)=e^{-y^2/6}$，并令 $\|D(Y)\|^2=\sum_{i<j}w_{ij}\mathbb{E}[t_{i|j}h(Y_i)-t_{j|i}h(Y_j)]^2$。标量势估计给出 $\|D(T)\|^2\le 2j_0/9$。对 $v_i=h(T_i)-h(G_i)$ 逐点应用 (3.6)。耦合与 $\|h'\|_\infty^2\le 1/(3e)$ 表明，$D(T)-D(G)$ 的范数平方至多为 $2(\delta-j_0)/(3e)$。由三角不等式和柯西–施瓦茨不等式可得

$$\|D(G)\|^2\le\left(\sqrt{2j_0/9}+\sqrt{2(\delta-j_0)/(3e)}\right)^2\le\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{3e}\right)\delta.$$

高斯配方给出同一范数的下界 $M_{\mathrm{G}}\mathcal{E}/32$，因为 $16-s_{ij}\le 16$。最后，$M_{\mathrm{G}}>77/100$ 和 $e>8/3$ 给出所述的有理常数。对于平移后的条带交集 K'，其对称差体 $(K'-K')/2$ 包含于具有相同宽度的中心交集中。根据布伦–明可夫斯基不等式，$|K'|\le|K|$，因此平移后的亏损至少为 δ。

□

注 3.3。对于宽度近乎相等的情况，可以保留稍大的系数。对与 i 相连的每一对，都使用相同的振幅 $d_i=(r_i/\max_j r_j)^{1/3}$。前述论证中的行列式估计和 Lipschitz 估计仍然表明，总高斯代价至多为 $[2/9+2/(3e)]\delta$，这是由框架收缩 $\mathcal{V}(v)\le\sum_i a_i v_i^2$ 到 $v_i=d_i[h(T_i)-h(G_i)]$ 得出的。一对的精确高斯代价为

$$M_{\mathrm{G}}(d_i-d_j)^2+2d_id_j\left(M_{\mathrm{G}}-3/\sqrt{16-s_{ij}}\right).$$

$s\mapsto 3/\sqrt{16-s}$ 的凸性保证下面的括号内表达式不小于 $(M_{\mathrm{G}}-3/4)(1-s_{ij})$。因此，也可以将 $\mathcal{E}$ 界定为

$$\frac{2/9+2/(3e)}{M_{\mathrm{G}}-3/4}\left(\frac{\max_i r_i}{\min_i r_i}\right)^{2/3}\delta.$$

推论 3.4（零亏损与可整除端点）。 正体积的平移条带的交集恰好在其不同的无向方向彼此正交，且每个平行类中的带状区域重合时，亏损为零。特别地，如果某个等距立方体截面框架满足 $V = B_{\mathrm{BL}}$，那么其不同的无向非零行方向彼此正交。如果 $n = qk$且 $V = q^{k/2}$，则其所有平行类的大小均为 q，且该截面是一个平衡坐标块截面。

证明。 定理 3.2在亏损为零时给出 $\mathcal{E} = 0$。 $\mathcal{E}$ 的每一项都非负，因此每一对非零方向要么平行，要么正交。每个平行类中的权重之和为一。其区间交集的长度至多为最短区间的长度，因而至多为它们的加权几何平均值。等号成立要求所有长度相等且区间重合；反之亦然。对各正交类取乘积，即得带状区域的结论。在可整除端点处，两个不等式$V \le B_{\mathrm{BL}} \le (n/k)^{k/2}$ 中等号成立是必要的。熵步骤中的严格凹性（包括所有 n 原始行）给出 $c_i = 1/q$ 对每一行均成立。各向同性随后强制每个正交类中恰有 q 行。坐标符号解释了可能的方向。

□

4 整数装填与倒数窗口

连续 Brascamp–Lieb 界中的损失可以直接与整数块大小进行比较。为此，极大化框架包含额外信息，因为用另一行替换一行不会增加归一化体积。由此得到的双行不等式使每个格拉姆矩阵行平方都受到严格的装填约束。

令 $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ 满足 $A^{\mathsf{T}}A = I_k$，并记 $P = AA^{\mathsf{T}}$ 和 $c_i = P_{ii} > 0$。因此， P 是一个投影， $\sum_j P_{ij}^2 = c_i$，且 $\sum_i c_i = k$。角缺陷为

$$\mathcal{E} = k - \sum_{i,j} \frac{P_{ij}^4}{c_i c_j}.$$

若框架满足以下行替换不等式，则称其满足行替换不等式

$$|c_i - c_j| \le c_i c_j - P_{ij}^2 \qquad (i \ne j). \tag{4.1}$$

每个满足 $c_i < 1$ 的体积极大化立方体截面框架都满足这些不等式。事实上，将第 i 行替换为第 j 行的副本，会从条带交集中移除一个约束，而其余约束保持不变。其框架算子为 $M = I_k - a_i a_i^{\mathsf{T}} + a_j a_j^{\mathsf{T}}$，其中 a_i表示第 i行的列向量。用 $M^{-1/2}$ 归一化后，可得到另一个具有 n行的等距映射，其~~体积~~至少为 $V\sqrt{\det M}$。由于 $c_i < 1$，该算子是正定的。由极大性可得 $\det M \le 1$，而秩二行列式公式给出

$$\det M = 1 + c_j - c_i - c_i c_j + P_{ij}^2.$$

交换 i， j 即可证明（4.1）。

引理 4.1 (格拉姆矩阵行平方的装填)。 假设 (4.1) 成立。令 $q_i = \lfloor 1/c_i \rfloor$。则

$$\boxed{\mathcal{E} \ge \sum_i (1 - q_i c_i)\big((q_i + 1)c_i - 1\big).}$$

各项均为非负数，并且当 c_i^{-1} 为整数时为零。在常见的倒数窗口 $c_i \in [1/(q+1)\ \ 1/q]$ 中，右侧可写为

$$T_q(c) = \sum_i (1 - q c_i)\big((q+1)c_i - 1\big).$$

在 下端点：含有 $q_i = q + 1$ 的表达式和含有 q 的表达式都为零 .

证明。 如果 $c_i \ge c_j$，替换不等式推出

$$P_{ij}^2 \le c_i c_j - c_i + c_j = c_j^2 + (c_i - c_j)(c_j - 1) \le c_j^2.$$

结合交换指标后得到的相同表述以及对角恒等式，可得

$$0 \le P_{ij}^2 \le \min(c_i^2, c_j^2).$$

第 i 行中的数 $Y_{ij} = P_{ij}^2$ 之和为 c_i，且均不超过 c_i^2。在 $[0, c_i^2]$ 中满足该和的数列里，将 q_i 个元素填为 c_i^2，并将余数放入另一个元素中时，它们的平方和最大。这可通过将质量从较小的正数且未填满的元素转移到较大的未填满元素来证明。因此

$$\sum_j Y_{ij}^2 \le q_i c_i^4 + (c_i - q_i c_i^2)^2.$$

Y 的对称性和算术—几何平均不等式给出

$$\sum_{i,j} \frac{Y_{ij}^2}{c_i c_j} \le \frac{1}{2} \sum_{i,j} Y_{ij}^2 (c_i^{-2} + c_j^{-2}) = \sum_i c_i^{-2} \sum_j Y_{ij}^2.$$

从 $\sum_i c_i = k$ 中减去可得

$$\mathcal{E} \ge \sum_i \{c_i - q_i c_i^2 - (1 - q_i c_i)^2\} = \sum_i (1 - q_i c_i)((q_i + 1)c_i - 1).$$

这就证明了该引理。 □

注 4.2（一个精确的非负余项）。在一个常见的倒数窗口中定义

$$\mathcal{P}_q = \sum_i \left\{ q c_i^2 + (1 - q c_i)^2 - \frac{1}{c_i^2} \sum_j P_{ij}^4 \right\}, \qquad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} P_{ij}^4 (c_i^{-1} - c_j^{-1})^2.$$

根据前面的证明，两者均非负，且以下恒等式严格成立：

$$\boxed{\mathcal{E} = T_q(c) + \mathcal{P}_q + \mathcal{H}.} \tag{4.2}$$

第一个余项衡量的是每个格拉姆矩阵行平方未能尽可能填入完整项的程度。第二个余项记录了非零格拉姆矩阵项对应的杠杆值差异。这些项合并保留；无需选择正交归一基，也无需将其分配到各个簇中。

装填估计得出了一个二次式，当行长度平方倒数为整数时，该式为零。为将这一估计转化为体积界，考虑同一区间上的熵函数 $-c\log c$。在两个端点处，对应于平衡体积的项都是精确的。减去经过这两个端点的弦后，所得熵差可由同一个二次式控制。

引理 4.3（整数熵隙的精确表达）。 设 $n = qk + r,\ 0 \le r < k$，并假设$c_i \in [1/(q+1),\ 1/q]$ 且 $\sum_i c_i = k$。令

$$B = \prod_i c_i^{-c_i/2}, \qquad W = q^{(k-r)/2}(q+1)^{r/2}, \qquad A_q = (q+1)\log(1 + 1/q) - 1.$$

Then

$$0 \le \log(B/W) \le \frac{A_q}{2} T_q(c). \tag{4.3}$$

这里，标量熵超额为 $\psi_q(c) = -c\log(qc) - (1 - qc)\log(1 + 1/q)$。

系数 A_q 在 ψ_q的逐点界中是最优的。若至少有一个杠杆值严格位于倒数窗口内部，则上界不等式是严格的。

证明。 记 $a = 1/(q+1)$与 $b = 1/q$。凹函数 $f(c) = -c\log c$在 a， b 之间的弦为

$$L_q(c) = c\log q + (1-qc)\log(1+1/q).$$

由于 $\sum_i c_i = k$ 且 $n - qk = r$,

$$\sum_i L_q(c_i) = k\log q + r\log(1+1/q) = 2\log W.$$

因此 $2\log(B/W) = \sum_i \psi_q(c_i)$，其中 $\psi_q = f - L_q \geq 0$。接下来需要界定弦上方的间隙。设 $T(c) = (c-a)(b-c)/(b-a) = (1-qc)((q+1)c-1)$。二次函数 $A_q T(c)$ 在两个端点处均为零，并且在 a 处与 ψ_q 具有相同的导数，即 A_q。因此，二次插值余项在每个 $a < c < b$ 处给出

$$\psi_q(c) - A_q T(c) = \frac{\psi_q^{(3)}(\xi)}{6}(c-a)^2(c-b) < 0 \qquad (a < \xi < b),$$

因为 $\psi_q^{(3)}(\xi) = 1/\xi^2$。比值 ψ_q/T 在 a 处趋于 A_q，从而证明了锐性。对各行求和即得结论。

□

推论 4.4 (由角亏损得到的体积比较)。 假设一个立方体截面框架满足倒数窗口和行替换不等式，并令 $\delta_{\mathrm{BL}} = \log(B/V)$。若 $E \leq C\delta_{\mathrm{BL}}$，则

$$\log(W/V) \geq \left(1 - \frac{CA_q}{2}\right)\delta_{\mathrm{BL}} + \frac{A_q}{2}(\mathcal{P}_q + \mathcal{H}).$$

特别地， $CA_q/2 < 1$ 推出 $V \leq W$，且当 $\delta_{\mathrm{BL}} > 0$时不等式严格成立。

证明。 在 $\log(W/V) = \delta_{\mathrm{BL}} - \log(B/W)$中使用 (4.3) 和 (4.2)。 □

4.1 倒数杠杆值窗口

固定 $q \geq 2$和 k。在 $k+1$ 个环境维数 $n = qk, \ldots, (q+1)k$上，最大化比值 $M(n,k)/W_{n,k}$。由连续上界和分块构造可知，端点处的比值均为 1。若目标是在固定的 n下证明不等式，为何要改变 n？ 复制一行不会改变原有的条带交集，并能在维数为 $n+1$的空间中构造一个竞争对象。删除该行，则可在维数为 $n-1$的空间中构造一个竞争对象。在区间内的最大比值处，对每一行都可以进行这两种比较。

引理 4.5。 在这样的内部最大值处，每个行长度平方都满足 $a \leq c_i \leq b$，其中 $a = 1/(q+1)$ 且 $b = 1/q$。

证明。令 $V = M(n,\ k)$。重复第 i 行会保留带体，并使框架算子的行列式乘以 $1 + c_i$。归一化后得到一个体积为 $V\sqrt{1+c_i}$ 的 $(n+1)$ 行截面。由于该比值取最大值，且 $W_{n+1,\ k}/W_{n,\ k} = \sqrt{(q+1)/q}$，因此有 $c_i \leq b < 1$。此时删除该行仍保持满秩，并会扩大带体。归一化体积至少为 $V\sqrt{1 - c_i}$，而 $W_{n-1,\ k}/W_{n,\ k} = \sqrt{q/(q+1)}$。由此得到 $c_i \geq a$。 □

对于 $q \geq 5$，无需借助较低维数中的任何信息。根据定理 3.2 ，在推论 $C = 20$ 中，我们可以取 4.4。由于

$$A_q = \int_0^1 \frac{1-t}{q+t}\,dt < \frac{1}{2q},$$

每个满足 $q \geq 5$ 的体积比极大者都满足

$$\log(W_{n,k}/V) \geq (1 - 10A_q)\,\delta_{\mathrm{BL}} \geq 0. \tag{4.4}$$

即使在 $q = 5$处，第一个系数也严格为正。因此，根据定理3.2，等号成立意味着角缺陷为零。

5 极大化框架处的体积比较

在体积比的内部最大值处，按无向方向对非零行进行分组。两个替换不等式 (4.1) 强制平行的行具有相同长度。在倒数坐标中，它们写作 $|c_i^{-1}-c_j^{-1}|\le 1-u_i,u_j^2,$，因此夹角较小的两个方向，其倒数行长平方必然近乎相等。记 m_i 为类别 i中的行数，c_i 为它们共同的行长平方，且 $a_i=m_ic_i$。分组数据满足$\sum_i a_iu_iu_i^{\mathsf T}=I_k$。类别 i 中的所有行都对应同一个宽度为 $c_i^{-1/2}$ 的带状区域。只保留其中一个不会改变交集。它对 Brascamp–Lieb乘积的贡献也不变，因为 $(c_i^{-1/2})^{a_i}=((c_i^{-1/2})^{c_i})^{m_i}$。因此，定理 3.2 可应用于类别权重 a_i 以及原始亏损 $\log(B_{\mathrm{BL}}/V)$。

权重为 1 的类根据（3.3）与其他所有类正交。其大小为 $1/c_i$ 或 q 或 $q+1$，且其杠杆值对熵差的贡献为零。每个与某个非正交的不同等价类对相邻的类都满足 $a_i<1$ 且 $m_i\le q$。

对这类定义

$$H_{q,m}(c)=\frac{\psi_q(c)}{2c(1-mc)},\qquad \psi_q(c)=-c\log(qc)-(1-qc)\log(1+1/q).$$

当 $m=q$ 时，$c=1/q$ 处的值是连续延拓 $(1-q\log(1+1/q))/2$。度数恒等式给出精确比较

$$\log(B_{\mathrm{BL}}/W_{n,k})=\tfrac12\sum_i m_i\psi_q(c_i)=\sum_{\substack{i<j\\ w_{ij}>0}} w_{ij}[H_{q,m_i}(c_i)+H_{q,m_j}(c_j)]. \tag{5.1}$$

因此，行列式亏损与非整数杠杆值的熵增益是权重相同的和。若每个正权重项都满足严格不等式，就会迫使整个截面的体积小于平衡目标。

5.1 两个坐标及其纤维

固定 $k\ge 2$ 和 $q\ge 2$。选择一个内部环境维数 $qk<n<(q+1)k$，使体积比 $M(n,\ k)/W_{n,\ k}$ 在此窗口的所有内部维数中最大。分块构造给出的体积比至少为一，而两个端点处的体积比均为一。因此，引理 4.5适用。选择此维数下的一个极大截面，其体积为 $V=M(n,\ k)\ge W_{n,\ k}$。由格拉斯曼流形的紧致性以及体积的连续性（后者可由立方体的径向函数推出），这样的截面必定存在。

我们需要对两类行之间的夹角施加两个限制。一个限制来自格拉姆矩阵，另一个则利用截面上两个坐标服从均匀分布这一性质。

对于两个不同且不正交的类，设 $m,\ l$ 为它们的重数，$c,\ d$ 为两类中单个行的长度平方。调整各行的方向，使两个单位法向量的内积为 $\rho=\sqrt{s}\ge 0$。分组后的框架具有格拉姆投影 $U^{\mathsf T}U$，其中 U的列为 $\sqrt{a_i}u_i$。由 $I-U^{\mathsf T}U$ 对应主子式的正性可得

$$s\le\frac{(1-mc)(1-ld)}{mlcd}. \tag{5.2}$$

接下来，我们给出这两个坐标的联合密度上界。记 $R=R_q(m,\ l)=q^{-1}(1+1/q)^{q-(m+l)/2}$。对于下述估计，当 $k>2$ 时，假设维数为 $k-2$ 时的平衡上界对所有至少为 2 的环境维数均成立（$k-2$）。若 X 在带体上服从均匀分布，令 $Z_i=2\sqrt{c}\,u_i\cdot X$，且 $Z_j=2\sqrt{d}\,u_j\cdot X$。那么

$$\text{joint density of }(Z_i,Z_j)\ \le\frac{R}{4\sqrt{cd}\sqrt{1-s}}\quad\text{on }[-1,1]^2. \tag{5.3}$$

事实上，令 F 为这两个行泛函的公共核。在 F 上，两个选定类中的 $m+l$ 行均为零。其余各行在 F 上定义了一个等距映射，因为原框架是等距映射。因此，将一个纤维平移到 F，即可将其等距地对应到 Q_N 的一个维数为 $k-2$ 的仿射截面，其中 $N=n-m-l$。根据布伦–明可夫斯基不等式，其体积不超过同一方向上的中心截面体积。对于 $k>2$，维数为 $k-2$ 时的上界给出纤维体积至多为 $W_{N,\,k-2}$。为说明该纤维仍处于归纳法的适用范围内，记 $n=qk+r$。由于这两个类中每一类至多有 q 行，

$$N-q(k-2)=r+(q-m)+(q-l)\geq r.$$

因此，去掉这两类仍能保持环境维数与截面维数之比的下界 q。当 $k=3$ 时，这个界就是弦的直径界 $W_{N,\,1}=\sqrt{N}\,Q_N$。

我们将这个界与 V 进行比较。对于每个正整数 b，

$$b\leq q(1+1/q)^{b-q}.$$

事实上，连续比值 $(j+1)/j$ 递减，并且在 $b=q$，$q+1$ 处取等号。将不等式对定义 $W^2_{N,\,k-2}$ 的 $k-2$ 个块大小相乘，再除以 $W^2_{n,\,k}=q^k(1+1/q)^{n-qk}$。由此得到 $W_{N,\,k-2}/V\leq W_{N,\,k-2}/W_{n,\,k}\leq R$。对于 $k=2$，非空纤维是一个点。这里$n=2q+1$，因此其零维体积除以 V 至多为 $1/\sqrt{q(q+1)}\leq 1/q\leq R$。

余面积雅可比 $4\sqrt{cd}\sqrt{1-s}$ 证明了 (5.3) 在两种情况下均成立。

投影界可能无法限制夹角。例如，当 $q=3$、$(m,\ l)=(1,\ 2)$ 且 $c=d=2/7$ 时，其右侧为 $15/8$。现在我们利用极大性来说明，为什么两个不同的行方向不可能任意接近。

引理 5.1（双行替换）。在一个极大截面中，取两个不同且不正交的类，它们满足密度界 （5.3）。设 $u=\sqrt{1-\rho^2},\quad h=(c+d)/2,\quad g=\sqrt{cd}$，以及$L=h+g\rho-g^2u^2$。那么对于每个 $0\leq t\leq 1/2$，

$$\left[1-h+g\rho+L\{(1-t)^{-2}-1\}\right]\left(1-\frac{Rt^2}{gu}\right)_+^2\leq 1. \tag{5.4}$$

特别地，记 $\tau=(1-\rho)/u=\tan(\frac{1}{2}\arccos\,\rho)$，

$$\frac{L^2}{2R\{1-Lgu/(2R)\}^2}\leq\tau+\frac{cd}{8}u^3. \tag{5.5}$$

证明。从这两个类中各取一行 v 和一行 w，并调整方向使得 $v\cdot w=g\rho$。将两行都替换为 $(v+w)/(2(1-t))$，其余各行保持不变。新的约束恰好保留旧截面中满足 $|Z_i+Z_j|\leq 2(1-t)$ 的点。图 1 展示了坐标正方形中的补集。其面积为 $4t^2$。乘以密度界 $R/(4gu)$ 可知，体积损失比例至多为 $Rt^2/(gu)$。

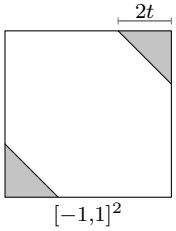


图 1：双行替换从坐标正方形中移除了两个阴影三角形。每个三角形的两条直角边长度均为 $2t$。

We 接下来对替换框架进行归一化。归一化之前，它的框架算子为

$$I-p_-p_-^{\mathsf{T}}+\{(1-t)^{-2}-1\}p_+p_+^{\mathsf{T}},\qquad p_\pm=(v\pm w)/\sqrt{2}.$$

它是正定的，因为 $|p_-|^2 = h - g\rho \le 1/2$。 $p_\pm$ 的长度平方为 $h \pm g\rho$，其格拉姆行列式为 g^2u^2。因此，秩二行列式公式给出了（5.4）中的第一个因子。归一化会使体积乘以其平方根。新的截面不可能比原截面有更大的体积，由此证明了（5.4）。

当 $t = 0$时，合并这些行会造成 $h - g\rho$ 的行列式损失。为了确定带状区域应缩减多少，令 $\kappa = R/(gu)$。对于 $\kappa t^2 < 1$，不等式 (5.4) 变为

$$h - g\rho \ge L\{(1-t)^{-2} - 1\} - \{(1-\kappa t^2)^{-2} - 1\}.$$

行列式增益和面积惩罚的首项分别为 $2Lt$ 和 $2\kappa t^2$。两者之差在 $t = L/(2\kappa) = Lgu/(2R)$ 处最大，我们现在将其用于精确界。这里 $L \ge h - g^2 > 0$、 $L \le 2h \le 1$ 和 $g \le 1/q \le R$。因此 $t \le 1/2$ 且 $Rt^2/(gu) = Lt/2$。此外

$$(1 - Lt/2)^{-2} - 1 \le \frac{Lt}{1 - Lt} \le \frac{Lt}{1-t}$$

因为 $(1 - Lt/2)^2 \ge 1 - Lt$。现在对 (5.4) 重新整理，得到

$$h - g\rho \ge L\{(1-t)^{-2} - 1\} - \frac{Lt}{1-t} = \frac{Lt}{(1-t)^2}.$$

最后，行替换 (4.1) 得到 $|c - d| \le g^2u^2$。因此，合并损失中由行长度不等造成的部分满足

$$h - g = \frac{(c-d)^2}{4(h+g)} \le \frac{g^3u^4}{8}.$$

使用 $h - g\rho = g(1-\rho) + (h-g)$ 并除以 gu，得到 (5.5)。 □

值得记录一下间距的尺度。如果 $\rho \ge 1/2$，那么 $L = h + g(\rho - gu^2) \ge h$，因为$g \le 1/2$。此外， $u = (1+\rho)\tau \le 2\tau$，并且 $cd \le 1/4$。因此，(5.5) 得出 $h^2/(2R) \le \tau + cd\,u^3/8 \le 3\tau/2$。当 $\rho < 1/2$时，同样的结论可由 $\tau > 1/\sqrt{3}$ 和 $h^2/R \le 1/q \le 1/2$得到。无论哪种情况，

$$\tan(\theta/2) \ge \frac{h^2}{3R}.$$

对于固定的 q，无论截面维数如何，这都能使两个类彼此分离。在进行定量比较时，我们保留更强的界 (5.5)。

命题 *5.2*。设 $q \in \{2, 3, 4\}$ 且 $1 \le m, l \le q$。假设 $c, d \in [1/(q+1)\ 1/q]$ 和$s = \cos^2\theta$ 对于 $0 < \theta < \pi/2$成立。若这些参数满足 *(5.2)* 和 *(5.5)*，其中 g, h, L, R 如上所述，则

$$\mathcal{L}(mc, ld, s) > H_{q,m}(c) + H_{q,l}(d) + \frac{1}{4000}.$$

在选定的最大值点处，每一对不同的非正交类都满足这些假设。附录A 通过对有理数界进行有限比较来证明该命题。

定理 5.3。 对于每个 $n \ge 2k$、 $M(n, k) = W_{n,k}$，等号恰好在平衡坐标块截面中成立。

证明。 我们对 k 使用强归纳法，同时证明所有 $n \ge 2k$ 的上界。唯一用到的低维结果是 (5.3) 中纤维的上界。直线截面的长度至多为 $\sqrt{n}$，即立方体的直径，且当且仅当它是空间对角线时取等号。现在令 $k \ge 2$ 并固定一个商 $q \ge 2$。在此范围内的一个内部极大值点处，$V \ge W_{n,k}$。若 $q \ge 5$，则 (4.4) 给出反向不等式，并推出 $\delta_{\mathrm{BL}} = 0$。因此，由推论 3.4，所有不同等价类都彼此正交。

对于 $q = 2$，3、4归纳假设在 5.3) 给出 ($k > 2$ 时的结论，而上文的点纤维论证则给出 $k = 2$ 时的结论。若两个不同等价类不正交，则定理 3.2、命题 5.2 和 (5.1) 将推出

$$\log(B_{\mathrm{BL}}/V) > \log(B_{\mathrm{BL}}/W_{n,k}),$$

与 $V \geq W_{n,\,k}$ 相反。因此，在所有情况下，这些类都彼此正交。由各向同性可知，每类的总权重为一。通过行替换可知，其各行长度相等，因此倒数窗口迫使其大小为 q 或 $q+1$。这表明该截面是一个平衡块截面，其体积为$W_{n,\,k}$。

因此，窗口中的最大比值为一。对于窗口中的每个 n ，平衡构造都能达到这一比值，从而证明整个窗口上的上界。现在，取一个体积为 $W_{n,\,k}$ 且维数处于内部的任意截面。其比值为一，因此它也在整个窗口上实现了比值的最大值。同样的论证可确定其带符号坐标块。在可整除端点处，分类由推论3.4得出。

□

5.2 经典余维范围内的等号

记 $Q_n = [-1/2, 1/2]^n$。下面的论证给出经典范围 $k \leq n \leq 2k$ 内的等号分类。它仅额外用到两个分析结果：适用于一般非负可积一维函数的经典几何布拉施坎普–李不等式，以及 Ball 标量积分不等式的严格形式：

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right|^p dt \leq \sqrt{\frac{2}{p}} \qquad (p \geq 2), \quad \text{with equality if and only if } p = 2. \tag{5.6}$$

Ball 证明了标量不等式 [3]。其严格形式在 [1]中有明确表述。我们使用标准的几何布拉施坎普–李不等式 [6], ，但不对其多维等号情形进行分类。

命题 5.4. 设 $k \leq n \leq 2k$，并令 $d = n - k$。一个 k 维线性子空间$H \subset \mathbb{R}^n$ 满足

$$\mathrm{vol}_k(Q_n \cap H) = 2^{d/2}$$

当且仅当，在对环境坐标作带符号置换后， H 由 d 个两两不相交的双坐标对角向量和 $k-d$ 个互不相同的坐标向量张成。等价地，其行类由 d 个二元组和 $k-d$ 个单元组组成。

证明。 $d = 0$ 的情形显然。设 $1 \leq d \leq k$ ，且该截面达到 $2^{d/2}$。我们首先证明，坐标向量在 $H^\perp$ 上的投影长度平方满足

$$b_i := |P_{H^\perp} \varepsilon_i|^2 \leq \tfrac{1}{2}.$$

将坐标 i 删除，即正交投影到坐标超平面 $\varepsilon_i^\perp$上。在 H 上，该投影的体积雅可比平方为 $\det(I_H - (P_H\varepsilon_i)(P_H\varepsilon_i)^{\mathsf{T}}) = 1 - |P_H\varepsilon_i|^2 = b_i$。当 $b_i > 0$ 时，像截面包含于 Q_{n-1} 的一个 k 维截面中，因此 Ball 余维界给出

$$\sqrt{b_i}\, 2^{d/2} \leq M(n-1, k) \leq 2^{(d-1)/2}.$$

这证明了该断言，包括端点 $n - 1 = k$。

选取一个等距映射 $U : \mathbb{R}^d \to H^\perp$ ，其行是 w_i。那么 $|w_i|^2 = b_i$, $\sum_i b_i = d$，相应的原始杠杆值为 $c_i = 1 - b_i$。我们将利用 Ball 的标量界中的等号，证明每个正的 b_i 都等于 $1/2$。

省略满足 $b_i = 0$的指标，并对其余指标设 $v_i = w_i/\sqrt{b_i}$。于是 $\sum_i b_i v_i v_i^{\mathsf{T}} = I_d$。令 $\operatorname{sinc}(s) = \sin(s)/s$，并在零点取其连续值。由几何布拉施坎普–李不等式可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i:b_i>0} |\operatorname{sinc}(\pi\sqrt{b_i}\, v_i \cdot t)|\, dt \le \prod_{i:b_i>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |\operatorname{sinc}(\pi\sqrt{b_i}\, s)|^{1/b_i}\, ds \right)^{b_i} \le \prod_{i:b_i>0} (\sqrt{2})^{b_i} = 2^{d/2}.$$

最后一步是 (5.6)，其中 $p = 1/b_i$，并作一维变量代换。特别地，$U^{\mathsf{T}}X$的特征函数（其中 X 在 Q_n上均匀分布）可积。因此，傅里叶反演在零点处给出

$$\operatorname{vol}_k(Q_n \cap H) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_i \operatorname{sinc}(\pi w_i \cdot t)\, dt.$$

这里，余面积公式给出的截面体积密度在零点处与连续的傅里叶密度一致，因为根据布伦定理，其 $1/k$ 次幂在投影立方体的内部是凹函数，因此在零点处连续。由此，前面的积分上界适用于实际的中心截面，而不仅仅适用于几乎处处定义的密度。

如果某个 $0 < b_i < 1/2$，相应的标量不等式就是严格不等式，而其正指数b_i 会使乘积上界也成为严格不等式。这与假设的等号矛盾。因此，每个 b_i 要么为 0，要么为 $1/2$；每个 c_i 要么为 1，要么为 $1/2$。由于 $\sum b_i = d$，c_i 个量中恰有 $2d$ 个等于 $1/2$。

对于原框架，薄片布拉施坎普–李乘积现在为

$$B = \prod_i c_i^{-c_i/2} = 2^{(2d)/4} = 2^{d/2} = \operatorname{vol}_k(Q_n \cap H).$$

推论 3.4 意味着任意两个行方向要么平行，要么正交。各向同性使得每个平行类中原始行长度平方之和等于一。由于每个长度平方要么是 1，要么是 $1/2$，因此每个类要么是长度平方为 1 的单元素类，要么是两个长度平方均为 $1/2$ 的双元素类。这些类的方向构成一个正交归一基，从而证明了所断言的形式。反过来，这些块子空间具有 d 边长 $\sqrt{2}$ 和 $k-d$ 边长 1，因此它们的截面体积为 $2^{d/2}$。 □

定理 1.1 的证明。 定理 5.3 给出了 $n \ge 2k$ 时的结果。如果 $k \le n < 2k$，Ball 余维界 [4] 给出 $M(n,\ k) \le 2^{(n-k)/2}$。这里 $q = 1$ 和 $r = n - k$，所以这正是$W_{n,\ k}$。选取 r 个互不相交的坐标对和 $k - r$ 个单元素坐标块即可达到该值。这就证明了完整的值公式。命题 5.4 给出了这一范围内恰好所有所声称的极大者，从而完成了等号分类。 □

6 局部与全局稳定性

Melbourne 和 Roberto [26] 以及 Chasapis、Nayar 和 Tkocz [14]研究了定量超平面切片问题。对于任意截面维数，我们采用直接的面计算。等号分类确定了一个有限族最大化子空间。现在我们考察，当截面偏离这一族时，体积会如何减小。在坐标块截面处，最初的损失来自其各个面的移动。这种损失与位移呈线性关系；而欧几里得体积元的变化仅为二次的。这一论证也适用于不平衡坐标划分，尽管它们未必能实现全局最大体积。

设$\mathcal{P} = (I_1, \dots, I_k)$是 $[n]$ 的一个划分，将其分成非空集合，其中 $m_j = |I_j|$，并记

$$b_j = m_j^{-1/2} \mathbf{1}_{I_j}, \qquad B = \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_k\}, \qquad V_B = \prod_{j=1}^{k} \sqrt{m_j}.$$

在各处插入坐标符号不会改变证明。令 $m_- = \min_j m_j$和 $m_+ = \max_j m_j$。对于维数相同的两个子空间，使用投影距离

$$d(H, B) = \|P_H - P_B\|_{\mathrm{HS}}.$$

情形 $n = k$ 没有横向方向，因此本节假设 $n > k$ 。

定理 6.1 （局部线性损失与一阶变分）。 设

$$c_{\mathcal{P}} = \frac{\sqrt{m_-}}{15(m_+ - 1)}, \qquad r_{\mathcal{P}} = \min\left\{c_{\mathcal{P}}, \frac{1}{4k\sqrt{km_+}}\right\}.$$

将 $A\colon\ B \to B^\perp$ 视为基 $b_j(b_j)$下的 $n \times k$ 矩阵，并令 $D = \mathrm{diag}(\sqrt{m_1}, \ldots, \sqrt{m_k})$。对于行由 t_i组成的矩阵 T ，定义

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E} \max_{i \in I_j} \left(t_{ij} + \sum_{\ell \neq j} t_{i\ell} U_\ell \right),$$

其中 U_ℓ 是在 $[-1, 1]$上独立均匀分布的随机变量。若 H 是 A 和$\|A\|_{\mathrm{HS}} \le r_{\mathcal{P}}$的图像，则

$$\log \frac{V_B}{|Q_n \cap H|_k} \ge \frac{c_{\mathcal{P}}}{2} \|A\|_{\mathrm{HS}} \ge \frac{c_{\mathcal{P}}}{2\sqrt{2}}\, d(H, B).$$

只要 $d(H, B) \le r_{\mathcal{P}}$，这一结论同样成立。此外，当 $A \to 0$ 时，一致地有

$$\log \frac{V_B}{|Q_n \cap H|_k} = \mathcal{F}(AD) + O_{n,k}(\|A\|_{\mathrm{HS}}^2), \qquad d(H, B) = \sqrt{2}\|A\|_{\mathrm{HS}} + O(\|A\|_{\mathrm{HS}}^3), \tag{6.1}$$

and

$$\mathcal{F}(AD) \ge \frac{\sqrt{m_-}}{6(m_+ - 1)} \|A\|_{\mathrm{HS}}.$$

因此，每个坐标块截面都是严格的局部体积最大值；而在局部估计中，用对数体积损失的幂来估计距离时，指数 *1* 是最优的。

证明。 用 a_i 表示 A的行，并令 $T = AD$。由于 $A(B) \subseteq B^\perp$, $\sum_{i \in I_j} a_i = 0$。我们重新缩放块方向，使未扰动的截面变为 $[-1, 1]^k$。这样便将欧几里得体积元的变化与各个面处被移除的体积区分开来。代换 $x = Dy/2$ 将截面表示为

$$K_T = \{y : |y_j + t_i \cdot y| \le 1 \text{ for every } i \in I_j\}.$$

在每个块内取平均，得到 $K_T \subseteq [-1, 1]^k$，而图的体积元给出 es

$$\frac{|Q_n \cap H|_k}{V_B} = \sqrt{\det(I + A^* A)}\, \frac{|K_T|}{2^k}. \tag{6.2}$$

令 $t = \|A\|_{\mathrm{HS}}$, $\tau = \max_i \|t_i\|_1 \le \sqrt{km_+ t},$ 且 $r = 1 - 2\tau$。首先假设 $\tau \le 1/(4k)$。对于 $z \in [-1, 1]^{k-1}$，令

$$f_i(z) = t_{ij} + \sum_{\ell \neq j} t_{i\ell} z_\ell, \qquad d_j(z) = \max_{i \in I_j} \frac{f_i(z)}{1 + t_{ij}}.$$

分母均为正数， $\sum_{i \in I_j} f_i(z) = 0$，以及 $0 \le d_j(z) \le \tau/(1 - \tau) \le 2\tau$。在正 j-面上，排除厚度为 $d_j(z)$；在负面上则为 $d_j(-z)$。这些完整的

面条带覆盖了所有违反条件的部分，而它们在 $[-r,r]$ 中对其他坐标的限制除边界外互不相交。因此，当 $q_T = 1 - |K_T|/2^k$ 时，

$$r^{k-1}\sum_{j}\mathbb{E}d_j(rU) \le q_T \le \sum_{j}\mathbb{E}d_j(U).$$

这两个估计具有相同的线性项。事实上， $|f_i| \le \tau$，因此将 $1 + t_{ij}$ 替换为 1 至多使每个最大值改变 $2\tau^2$，而将 rU 替换为 U 至多使其改变 $2\tau^2$。由于 $r^{k-1} = 1 + O_k(\tau)$ 且 $0 \le \max_i f_i(U) \le \tau$，可得 $q_T = \mathrm{F}(T) + O_k(\tau^2)$。此外， $q_T \le k\tau/(1-\tau) \le 1/3$。因此，在（6.2）中取对数即可证明（6.1）中的第一个展开式。

同一下方面估计给出了显式损失。对于 $m_j \ge 2$，零和实向量满足 $\max_i w_i \ge \sum_i |w_i|/[2(m_j-1)]$。对于非零仿射形式 $Z = a + s\sum b_\ell U_\ell$, $0 \le s \le 1$，矩界 $\mathbb{E}Z^4 \le 3(\mathbb{E}Z^2)^2$ 以及霍尔德不等式给出

$$\mathbb{E}|Z| \ge \frac{(\mathbb{E}Z^2)^{3/2}}{(\mathbb{E}Z^4)^{1/2}} \ge \sqrt{\mathbb{E}Z^2/3} \ge \frac{s}{3}\sqrt{a^2 + \sum b_\ell^2}.$$

大小为一的块具有零行。对其他块求和，并利用 $d_j \ge \max_i f_i/(1+\tau)$，得到

$$q_T \ge \frac{r^k}{6(1+\tau)(m_+ - 1)}\|T\|_{\mathrm{HS}} \ge c_{\mathcal{P}} t, \qquad \mathcal{F}(T) \ge \frac{\|T\|_{\mathrm{HS}}}{6(m_+ - 1)}.$$

这里 $r^k \ge 1 - 2k\tau \ge 1/2$、 $1 + \tau \le 5/4$ 和 $\|AD\|_{\mathrm{HS}} \ge \sqrt{m_-}\, t$。若 $t \le r_{\mathcal{P}}$，则 $t \le c_{\mathcal{P}}$ 和 $\sqrt{\det(I + A^* A)} \le e^{t^2/2}$。因此

$$\log \frac{V_B}{|Q_n \cap H|_k} \ge -\frac{t^2}{2} - \log(1 - c_{\mathcal{P}} t) \ge \frac{c_{\mathcal{P}}}{2} t.$$

对于 A 的奇异值 s_ℓ， $d(H,\ B)^2 = 2\sum_\ell s_\ell^2/(1+s_\ell^2)$。由此得到 $d \le \sqrt{2}t$ 和均匀距离展开。反之， $d < \sqrt{2}$ 给出图表示以及 $t^2 \le d^2/(2 - d^2)$。由于 $r_{\mathcal{P}} < 1$， $d \le r_{\mathcal{P}}$ 意味着 $t \le r_{\mathcal{P}}$。最后，沿着 $A = sA_0$ 且固定 $A_0 \ne 0$ 和 $s \downarrow 0$ 时，$\mathcal{F}$ 的正齐次性使距离和正体积损失在一阶近似下都呈线性。这证明了所声称的最优性。

□

令 $\mathcal{B}_{n,\ k}$ 为带符号的平衡坐标块子空间的有限族。定义

$$d(H, \mathcal{B}_{n,k}) = \min_{B \in \mathcal{B}_{n,k}} d(H, B), \qquad \Delta(H) = \log \frac{W_{n,k}}{|Q_n \cap H|_k}.$$

推论 6.2（固定维数下的全局稳定性）。对于每个 $n > k \ge 1$，都存在 $C_{n,\ k} < \infty$使得

$$d(H, \mathcal{B}_{n,k}) \le C_{n,k}\Delta(H) \qquad (H \in G_{n,k}).$$

指数 *1* 是最优的。

证明。对于平衡划分，常数 $c = c_{\mathcal{P}}$ 和 $r = r_{\mathcal{P}}$ 仅取决于 n， k。当$d(H,\ \mathcal{B}_{n,\ k}) \le r$时，对最近的平衡截面应用定理6.1 。在其补紧集上，截面体积的连续性和定理1.1给出

$$\mu_{n,k} := \min_{d(H, \mathcal{B}_{n,k}) \ge r} \Delta(H) > 0,$$

前提是该集合非空。由于 $d \le \sqrt{2k}$，可以取

$$C_{n,k} = \max\left\{\frac{2\sqrt{2}}{c}, \frac{\sqrt{2k}}{\mu_{n,k}}\right\},$$

当补集为空时省略第二项。直接验证连续性时，可用等距行局部表示截面 v_i。其径向函数为 $(2\max_i |v_i\cdot\theta|)^{-1}$。各向同性将 $\max_i |v_i\cdot\theta|$ 的下界限制为 $1/\sqrt{n}$，因此径向体积公式适用控制收敛。定理 6.1 给出了最优性，因为对于足够小的 s，所选的平衡截面仍是有限族中的最近点。

□

局部定理独立于全局极值公式。只有全局推论使用等号分类。紧致性为每一对固定的维数给出一个常数。

6.1 稳定性常数对维数的依赖

不平衡坐标划分对均匀分布的全局稳定性构成障碍。根据定理 6.1，它们是严格局部极大值；其体积趋近全局最大值的速度可能快于其子空间趋近平衡族的速度。

固定 $q\ge 2$，令 $n=2q$和 $k=2$，并将坐标划分为 I_1, I_2个大小为 $q-1, q+1$的块。令 H 为在每个块上取常数的向量所组成的子空间。则

$$|Q_{2q}\cap H|_2=\sqrt{q^2-1},\qquad W_{2q,2}=q,\qquad \Delta(H)=-\frac{1}{2}\log(1-q^{-2}).$$

它到平衡族的距离恰好为

$$d(H,\mathcal{B}_{2q,2})^2=\frac{4}{q+1}. \tag{6.3}$$

事实上，考虑一个平衡划分 J_1, J_2，其中两个块的大小均为 q，并令 $t=|I_1\cap J_1|$。坐标符号无法使块重叠超过其基数。当所有符号均为正时，

$$\operatorname{tr}(P_H P_B)=\frac{t^2+(q-1-t)^2}{q(q-1)}+\frac{(q-t)^2+(1+t)^2}{q(q+1)}.$$

该表达式是凸的，适用于 $0\le t\le q-1$。其最大值在某个端点处取得，且等于 $2q/(q+1)$。两个端点都对应实际的划分。由于两个投影的秩均为二， $d^2=4-2\operatorname{tr}(P_H P_B)$，从而证明了（6.3）。

由此可得

$$\frac{d(H,\mathcal{B}_{2q,2})}{\Delta(H)}\sim 4q^{3/2},\qquad \frac{d(H,\mathcal{B}_{2q,2})^2}{\Delta(H)}\sim 8q\qquad (q\to\infty).$$

由此可知，对于所有环境维数和截面维数，不存在一个绝对常数能使 $d\le C\Delta$ 或 $d^2\le C\Delta$ 成立。取 $k=2$时便已出现这一障碍，因此将距离按 $\sqrt{k}$归一化也无法消除它。特别地，每个全局线性系数都满足 $C_{2q,\ 2}\ge(4+o(1))q^{3/2}$。这个例子尚未确定关于 q 的最优依赖关系，也未解决在商固定时常数是否可以与 k 无关。

7 推论与进一步联系

7.1 仿射截面与投影密度

等号情形为仿射截面提供了更多信息。当体积接近可能的最大值时，方向以及相对于原点的位移都由亏损的一阶项决定。对于 $y\in H^\perp$，令 $V(H,\ y)=|Q_n\cap(H+y)|_k$。

定理 7.1（仿射稳定性）。对于 $1 \le k < n$, $V(H, y) \le W_{n,k}$。当且仅当H 是平衡坐标块子空间且 $y = 0$时，等号成立。更准确地说，存在有限的 $C'_{n,k}$，使得每个正体积截面都满足

$$d(H, \mathcal{B}_{n,k}) + |y| \le C'_{n,k} \log \frac{W_{n,k}}{V(H, y)}.$$

指数 *1* 分别对于方向和位移而言都是最优的。

证明。位于 y 和 $-y$ 处的截面的中点和包含于中心截面中。这两个截面互为反射，因此由布伦–明可夫斯基不等式得到 $V(H, y) \le V(H, 0) \le W_{n,k}$。令 $\Delta = \log(W_{n,k}/V(H, y))$，并选取最近的平衡子空间 B。由推论 6.2 得到 $d(H, B) \le C_{n,k}\Delta$。

首先考虑 B 本身的平移。对于大小为 m_j 的块 I_j，令 ϵ_i 表示其坐标符号。给定 $z \in B^\perp$，记 $\omega_j(z)$ 为 $\epsilon_i z_i$ 在 I_j 上的最大值与最小值之差。该块上的对角参数属于 m_j 个单位区间的交集。其允许长度为 $(1 - \omega_j(z))_+$，其中 $a_+ = \max(a, 0)$。由于块参数彼此独立，因此得到精确的剖面

$$\frac{V(B, z)}{W_{n,k}} = \prod_{j=1}^{k} (1 - \omega_j(z))_+ \le \exp\left(-\frac{2|z|}{\sqrt{m_+}}\right), \qquad m_+ = \lceil n/k \rceil. \tag{7.1}$$

事实上，每个块内的带符号坐标均值为零。将它们的取值范围中点减去，并利用均值使平方偏差和最小，可知它们的平方和至多为 $m_j \omega_j(z)^2/4$。因此 $\sum_j \omega_j(z) \ge 2|z|/\sqrt{m_+}$。

为将估计转移到 H，将每个主平面旋转相应的主角。所得正交映射 O 具有 $OB = H$，且 $\|O - I\|_{\mathrm{op}} = 2\sin(\theta_{\max}/2) \le d(H, B)$。令 $t = 1 + \sqrt{n}\|O - I\|_{\mathrm{op}}$。$Q_n$ 中的每个点的欧几里得范数至多为 $\sqrt{n}/2$，因此$O^{\mathsf{T}} Q_n \subseteq t Q_n$。取 $z = O^{\mathsf{T}} y$，旋转后再进行伸缩，得到

$$V(H, y) \le t^k V(B, z/t), \qquad |y| \le \tfrac{1}{2} t \sqrt{m_+}\,(\Delta + k \log t).$$

现在 $t \le 1 + 2\sqrt{n}$，并且 $\log t \le \sqrt{n}\, d(H, B)$。关于 $d(H, B)$ 的界证明了该定理，包括等号情形。为说明平移情形的锐性，在一个大小至少为二的块中选取两个坐标 i, j；这样的块确实存在，因为 $n > k$。对于 $y = t(\epsilon_i e_i - \epsilon_j e_j)$，$0 < t < 1/2$，(7.1) 给出$V(B, y)/W_{n,k} = 1 - 2t$，而 $|y| = \sqrt{2}t$。为说明方向上的锐性，取 $y = 0$，并对 B作一个非零的图扰动。根据定理 6.1，距离和亏损在一阶上都是线性的；由于平衡族是有限的，对于足够小的扰动，B 仍然是最近的。 □

推论 7.2 (尖锐边缘密度和最小熵)。令 U 在 Q_n上均匀分布，令$E \in G_{n,d}$ 满足 $1 \le d < n$，并设 $k = n - d$。f_E 的密度 $P_E U$ 满足

$$\|f_E\|_\infty = f_E(0) \le W_{n,k}, \qquad h_\infty(P_E U) = -\log \|f_E\|_\infty \ge -\log W_{n,k}.$$

两个不等式都是尖锐的，且当且仅当 $E^\perp \in \mathcal{B}_{n,k}$时取等号。在纤维体积代表元中，对于每个 $y \in E$ 满足 $f_E(y) > 0$时，

$$d(E^\perp, \mathcal{B}_{n,k}) + |y| \le C'_{n,k} \log \frac{W_{n,k}}{f_E(y)}.$$

特别地，对所有勒贝格可测的 $A \subset E$，$\mathbb{P}(P_E U \in A) \le W_{n,k} |A|_d$，且最优常数在 E 上均匀。

证明。 由福比尼定理可得代表元 $f_E(y) = V(E^\perp, y)$。根据布伦–明可夫斯基定理，它的 $1/k$ 次幂在投影立方体的内部是凹函数。因此它在零点连续，并在此处取得最大值。结论由仿射定理得出。对密度积分即可得到可测集估计。当 $E^\perp$ 平衡时，对半径趋于零的球上的密度取平均，即可证明其最优性。 □

对于一个极值方向，(7.1)给出了 E上的完整密度。其因子分解体现了各坐标块之间的独立性。

对于一维投影，极值方向取决于所优化的熵。设 v 是一个单位向量。根据推论7.2，当且仅当 $v \cdot U$ 的最小熵在 v 恰有两个非零坐标且它们的绝对值相等时达到最小。Eskenazis–Nayar–Tkocz 猜想讨论的是同一投影的微分熵。当 n的 v 所有坐标的绝对值都相等时，其微分熵恰好达到最大值 [21]。

7.2 有界乘积密度的投影

立方体截面还支配着一个坐标分布可以变化的极值问题。Rogozin 证明，独立实随机变量 [32] 的和可以与均匀区间进行比较。对于任意秩的投影，Rudelson 和 Vershynin 根据秩和坐标密度界给出了密度上界 [33]。Livshyts、Paouris 和 Pivovarov 为这类乘积测度取得了 Ball 估计中的两个常数 [23, 定理 1.1]。Madiman、Melbourne 和 Xu 的线性像比较 [25, 定理 1.4] 使我们能够代入精确的截面体积。

推论 7.3 （有界乘积测度的尖锐密度界）。 设 $1 \le d < n$、$k = n - d$ 和 $L > 0$。设 $X =$（X_1、……、 X_n）具有相互独立的实值坐标，且其密度均不超过 L。对于每个 $E \in G_{n,\,d}$，

$$\|f_{P_E X}\|_\infty \le L^d |Q_n \cap E^\perp|_k \le L^d W_{n,k}.$$

第一个界对每个 E 都可由区间长度为 $1/L$ 的独立均匀分布取到。在所有这类分布及所有 E 上，最优常数为 $L^d W_{n,\,k}$，而达到此上确界的方向恰好是满足 $E^\perp \in B_{n,\,k}$ 的方向。更一般地，

$$d(E^\perp, \mathcal{B}_{n,k}) \le C_{n,k} \log \frac{L^d W_{n,k}}{\|f_{P_E X}\|_\infty}.$$

证明。 通过缩放，不妨设 $L = 1$。记 $L_i = \|f_{X_i}\|_\infty$。线性像比较给出的界表明， $P_E X$ 的最大密度不超过 $P_E Z$ 的最大密度，其中 Z_i 相互独立，且均匀分布于长度为 $1/L_i$ 的中心对称区间上。每个区间的长度都至少为一。

将这些区间中的任意一个以其中心为基准缩短，只会提高最大密度。为说明这一点，先考虑半径为 ε 、以零为中心的球在 E中的概率。固定一个坐标为 t时，条件概率与由其余区间及条件 $|P_E x| \le \varepsilon$所截出的凸集的截面体积成正比。该集合中心对称，因此根据布伦–明可夫斯基不等式，当 $t \ge 0$ 时，其截面体积是偶函数且单调不增。因此，该体积在以零为中心的区间上的平均值，会随着区间缩短而单调不减。将每个区间缩短至长度为一，再除以球的体积，并令 $\varepsilon \downarrow 0$。根据与立方体相同的纤维论证，投影盒的密度在零点连续，且在零点取得最大值。这就证明了第一个界。所有区间长度均为一的均匀坐标可取到该界。定理1.1 给出了第二个界及其极值方向。将推论6.2 应用于 $E^\perp$ 即可得到稳定性估计。

□

特别地，对于任意半径 $r>0$ 和中心 $y\in E$，

$$\mathbb{P}\{|P_E X - y| \le r\} \le |B_2^d|\, r^d L^d W_{n,n-d},$$

其中 B_2^d 是欧几里得单位球。当 $r\downarrow 0$ 时，该系数是最佳的；取均匀坐标和平衡核即可达到此界。相较于两个经典密度界，只有在不可整除范围 $n>2k$, $k\nmid n$ 内，改进才是严格的。例如，对于 $\mathbb{R}^7$ 中满足 $L=1$ 的四维投影，最优界为 $2\sqrt{3}$，即引言中三维盒子的体积。

7.3 通过正交归一基进行逼近

角缺陷还可以控制整族法向量到某个正交归一基的距离。从行列式律中抽取的基，其正交性误差的期望已经很小。它的极分解因子给出了所需的正交方向。

定理 7.4。 设 $\sum_i a_i u_i u_i^{\mathsf T} = I_k$ 是一个各向同性单位标架。对于正交归一基$v=(v_1,\dots,v_k)$，令

$$D(v) = \sum_{i} a_i \left(1 - \sum_{j=1}^{k} |\langle u_i, v_j\rangle|^4\right).$$

Then

$$\frac{1}{2}\mathcal{E} \le \min_{v} D(v) \le (1+\sqrt{2})^2 \mathcal{E}.$$

特别地，对于任意正的带宽，都存在一个基，使得 $D(v)\le 20(1+\sqrt{2})^2\delta_{\mathrm{BL}}$。

证明。 在配备希尔伯特–施密特内积的实对称矩阵希尔伯特空间上，考虑算子 $TA=\sum_i a_i\langle A, P_i\rangle P_i$，其中 $P_i = u_i u_i^{\mathsf T}$。根据柯西–施瓦茨不等式和各向同性，我们有 $0\preceq T\preceq I$：

$$\langle TA, A\rangle = \sum_i a_i (u_i^{\mathsf T} A u_i)^2 \le \sum_i a_i u_i^{\mathsf T} A^2 u_i = \|A\|_{\mathrm{HS}}^2.$$

迹恒等式为 $\operatorname{tr} T = k$ 和 $\operatorname{tr}(T-T^2)=\mathcal{E}$。事实上，$P_i, P_j$ 的内积平方为 s_{ij}^2，且 $\sum_{i,j} a_i a_j s_{ij} = k$。对于 $Q_j = v_j v_j^{\mathsf T}$，令 Π_v 表示到它们张成空间上的正交投影。于是 $D(v) = k - \operatorname{tr}(T\Pi_v)$，因此

$$2D(v) = \mathcal{E} + \|T - \Pi_v\|_{\mathrm{HS}}^2.$$

这证明了下界。

从柯西–比内公式律（2.1）中取一个基 S，并构造方阵 A_S，其列向量按索引顺序排列，且为该基中的单位方向。根据双索引包含公式（2.2），

$$\mathbb{E}\|A_S^{\mathsf T} A_S - I\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{i\neq j} a_i a_j (1-s_{ij}) s_{ij} = \mathcal{E}.$$

令 v_j、 $j\in S$ 为 A_S 的正交极分解因子的列。由于对每个奇异值都有 $(\sigma-1)^2 \le (\sigma^2-1)^2$，且 $\|P_j - Q_j\|_{\mathrm{HS}}^2 \le 2|u_j - v_j|^2$，

$$\mathbb{E}\sum_{j\in S} \|P_j - Q_j\|_{\mathrm{HS}}^2 \le 2\mathcal{E}.$$

使用半范数 $|A|_T^2 = \langle A,\ (I-T)A\rangle$。单指标包含公式给出 $\mathbb{E}\sum_{j\in S}|P_j|_T^2 = \operatorname{tr}(T-T^2) = \mathcal{E}$，且 $|A|_T \le \|A\|_{\mathrm{HS}}$。因此，均方三角不等式给出

$$(\mathbb{E} D(v))^{1/2} = \left(\mathbb{E}\sum_{j\in S} |Q_j|_T^2\right)^{1/2} \le (1+\sqrt{2})\sqrt{\mathcal{E}}.$$

So均方 实现了至多这个平均值。带状区域的结论由定理 3.2得出。 □

这有一种直接运输解释。将质量 $a_i|\langle u_i,\ v_j\rangle|^2$ 从 u_i 所对应的无向直线运至 v_j 所对应的直线。每个源点发送质量 a_i，而各向同性使每个目标点的质量为一。若代价等于两条直线夹角的正弦平方，则总代价恰为$D(v)$。因此，该定理控制着向权重相等的正交轴进行的运输。

前面的两个定理还给出了一般凸体的宽度不等式，其中方向族可以是连续的。对于凸体 C，令 $w_C(u) = \max_{x\in C} u\cdot x - \min_{x\in C} u\cdot x$ 表示其在方向 u上的投影长度。

推论 7.5（凸体的宽度）。设 $C\subset\mathbb{R}^k$ 是一个具有内点的紧凸体，μ 是单位球面上的博雷尔测度，且 $\int uu^{\mathsf{T}}\,d\mu(u) = I_k$。令

$$\delta_\mu(C) = \int \log w_C(u)\,d\mu(u) - \log|C|, \qquad \mathcal{E}(\mu) = \iint \langle u,v\rangle^2(1-\langle u,v\rangle^2)\,d\mu(u)d\mu(v).$$

则 $E(\mu) \le 20\delta_\mu(C)$。由 μ 诱导的无向直线上的测度可以输运为正交归一基的每条轴上的单位质量，其总正弦平方代价至多为 $(1+\sqrt{2})^2E(\mu)$。每个这样的输运代价至少为 $E(\mu)/4$。等号 $\delta_\mu(C) = 0$ 成立，当且仅当 C 是一个正交盒，且 μ 集中在其各条轴上。

证明。使用定理中的算子 $TA = \int A, P_uP_u\,d\mu(u)$。E$(\mu)$ 和每个$D(v)$ 都由 T 决定。将 Carathéodory 定理应用于球面上的连续映射$u\mapsto(P_u\otimes P_u, \log w_C(u))$，可得到一个质量相同的有限正测度，并且具有相同的 T 和对数宽度积分。由于 $T(I) = I$，它是各向同性的。对于每个选定的方向，取 C的两个极端投影之间的支撑带。它们的交集包含 C，其对数宽度乘积等于 $\int\log w_C\,d\mu$。因此，其亏损至多为 $\delta_\mu(C)$。定理 3.2 中的平移带界现在给出 E(μ) $\le 20\delta_\mu(C)$。定理 7.4 对该有限测度给出了一个基，使 $D(v)$满足所需的界；由于二者具有相同的 T，因此对 μ 也成立。将每个质量的 $|u,v_j|^2$ 部分输送到轴 j，即可得到所断言的输运。对于任意目标基，输运代价至少是 $1-\max_j|u,v_j|^2$ 的积分。由于对 $0\le t\le 1$有 $1-t^2\le 2(1-t)$，该积分至少为 $D(v)/2$。迹恒等式给出 $D(v)\ge E(\mu)/2$，从而得到下界。当亏损为零时，对于极小化基，$D(v) = 0$，因此 μ 集中在这些轴上，每条直线的质量为一。相应宽度的乘积就是该基下外接盒的体积。它与$|C|$ 相等，迫使 C 等于该外接盒。逆命题由取其宽度立即得到。

□

输运下界中的系数 $1/4$ 是最优的。在平面中，对由两个旋转了 θ 和 $-\theta$、$0<\theta<\pi/8$ 的正交归一基产生的四条直线分别赋予质量 $1/2$。它们的缺陷为 $1\,2\sin^2(4\theta)$。将其输运到未旋转的坐标轴的代价为 $2\sin^2\theta$，其与缺陷之比在 $\theta\downarrow 0$时趋于 $1/4$。

作为推论 7.5的一个具体实例，假设 $C = -C$ 的最大体积椭球是欧几里得单位球。John 分解给出单位接触方向和正权重，使得 $\sum_i a_iu_iu_i^{\mathsf{T}} = I_k$。在 $\pm u_i$ 处的切超平面支撑 C，因此 $w_C(u_i) = 2$。Ball 体积比不等式在此归一化下给出 $|C|\le 2^k$ [5]。该推论表明，对于每个这样的分解，都可以将相应的接触直线上的质量输运到某个正交归一基的坐标轴，代价至多为

$$20(1+\sqrt{2})^2\log\frac{2^k}{|C|}.$$

这里的输运代价是夹角正弦平方之和，并且规定每条目标轴上的质量为 1。它直接通过体积亏损控制接触方向。偶各向同性测度到支撑在正交轴上的测度之间的输运距离，也出现在 [9] 中关于 L_p zonoids 及其极体的体积稳定性估计里。关于在相同椭球归一化下涉及平均宽度和 ℓ-范数的稳定性估计，参见 Böröczky、Fodor 和 Hug [10]。

7.4 交叉多胞体的最小投影

若 A i 作为具有行向量 v_i的 H 的等距参数化，截面表示为 b y

$$K = \{x \in \mathbb{R}^k : |v_i \cdot x| \le 1/2 \ \forall i\}.$$

其极体为

$$K^\circ = \operatorname{conv}\{\pm 2v_i : 1 \le i \le n\}.$$

等价地，在 H与 $\mathbb{R}^k$之间的等距映射下，$(Q_n \cap H)^\circ$是 $P_H(2B_1^n)$，其中 B_1^n是单位交叉多胞体。这就是 Schneider [35]所描述的截面—投影对偶性。平衡极值构形只有 k 种无向行方向，其极体是一个交叉多胞体，其正交方向和顶点半径 $2/\sqrt{m_j}$ 对应块大小m_j。Ivanov 猜想，相同的平衡子空间使 k维投影的体积达到最小，并证明了平面情形 B_1^n。体积乘积精确刻画了这两个极值问题之间的关系。

推论 7.6（三维最小投影）。 对每个 $n \ge 3$,

$$\min_{H \in G_{n,3}} |P_H B_1^n|_3 = \frac{4}{3W_{n,3}}.$$

极小化者恰好是平衡坐标块子空间。更一般地，对于满足对称马勒界 $|K|_k|K^\circ|_k \ge 4^k/k!$ 对所有中心k截面 K 成立的每个维数 k ，最小值等于 $2^k/(k!\ W_{n,\ k})$，且等号分类相同。

证明。 取 $K = Q_n \cap H$ 在 H 中的极体。由于 $K^\circ = 2P_H B_1^n$，所述体积乘积下界给出

$$|P_H B_1^n|_k \ge \frac{2^k}{k!\,|K|_k} \ge \frac{2^k}{k!\,W_{n,k}}.$$

对于平衡子空间，其截面是一个体积为 $W_{n,\ k}$ 的长方体。边长为 s_1、……、 s_k 的长方体，其极体的轴向半径为 $2/s_i$，因此体积乘积为 $4^k/k!$ 因此两个不等式均取等号。反过来，所示下界中的等号成立意味着 $|K|_k = W_{n,\ k}$，而定理 1.1 刻画了 H。在三维情形中，体积乘积下界即为 Iriyeh 和 Shibata 的定理 [17]。 □

只要满足所述体积乘积假设，同样的计算便可推广稳定性结论。对于 $k < n$,

$$d(H, \mathcal{B}_{n,k}) \le C_{n,k} \log \frac{k!\,W_{n,k}\,|P_H B_1^n|_k}{2^k},$$

根据推论 6.2。因此，仅有体积乘积下界就足以推出投影结论及其等号情形。在更高维数中，此处所用的假设明确是关于立方体截面的体积乘积不等式。最近的一篇预印本声称，该不等式对所有关于原点中心对称的凸体均成立 [29, 定理 1。1]。

7.5 开放问题

问题 1. 稳定性常数如何依赖于维数? 设$q = \lfloor n/k \rfloor$。是否存在一个绝对常数 A ，使得对于每个满足 $q \ge 2$ 的 $n > k$ 以及每个$H \in G_{n,\ k}$,

$$d(H, \mathcal{B}_{n,k}) \le A(q+1)^{3/2}\Delta(H)?$$

第 6.1 节中的平面例子要求指数 $3/2$。该估计对每个带符号坐标块截面都成立，其中 $A = 4$。为此，取一个大小为 a的最小块和一个大小为 $b \ge a+2$的最大块，并将后者中的一个坐标移到前者中，同时

保持其符号不变。若 H' 是所得空间，则对数体积的增量和移动的距离分别为

$$G = \tfrac{1}{2}\log\frac{(a+1)(b-1)}{ab}, \qquad d(H,H')^2 = \frac{2(a+b)}{(a+1)b}.$$

该距离可通过对旧的和新的归一化块指示向量取内积平方得到。对于固定的 a，距离随 b 增大而减小，而 G 增大。在 $b = a+2$ 处，比值 $d(H,\,H')/G$ 为

$$\frac{4}{\sqrt{a+2}\,[-\log(1-(a+1)^{-2})]} \le 4(a+1)^{3/2}.$$

由于 $a \le q$，连续的转移会得到一个平衡划分，其总距离至多为 $4(q+1)^{3/2}\Delta(H)$。问题在于，任意截面是否都满足同阶的界。

问题 2. 下一个最大的局部极大值是什么？ 固定 $k \ge 3$ 并令 $n = qk$。对于所有充分大的 q（取决于 k），在 $\mathcal{B}_{qk,\,k}$ 之外的每个局部极大点的体积是否至多为

$$q^{(k-2)/2}\sqrt{q^2-1}\,?$$

根据定理 6.1，在两个平衡块之间移动一个坐标，会得到体积恰好等于此值的严格局部极大值。根据引言中的整数乘积比较，在非平衡块截面中，这是可能达到的最大值。其他形状的局部极大值确实存在。例如，在环境维数至少为四时，垂直于主对角线的超平面是一个严格局部极大值 [2]。

所提出的界对 $k = 2$ 和 $q \ge 8$ 成立。下面给出一个简短论证，利用 Ivanov 和 Tsiutsiurupa [20] 的平面变分条件。设一个局部极大化的多边形面积为 $V \ge \sqrt{q^2-1}$。删除坐标 i 后的面积雅可比为 $\sqrt{1-c_i}$，其中 $c_i = |P_H e_i|^2$。因此 $\sqrt{1-c_i}\,V \le W_{2q-1,\,2} = \sqrt{q(q-1)}$，且 $c_i \ge 1/(q+1)$。该多边形是圆内接的，并且根据所引述的变分条件，每一行都支撑着一条边。因此，每条边所在直线到原点的距离至多为 $\sqrt{q+1/2}$。若有 $2f$ 条边，且外接圆半径为 R，则最小圆心角至多为 π/f，所以 $R\cos(\pi/(2f)) \le \sqrt{q+1/2}$。将中心与各边构成的三角形面积相加，并利用正弦函数的凹性，可得对于 $f \ge 3$，

$$V \le fR^2\sin(\pi/f) \le \tfrac{1}{2}(q+1)f\tan(\pi/(2f)) \le \tfrac{\sqrt{3}}{2}(q+1) < \sqrt{q^2-1}.$$

倒数第二个不等式成立，是因为 $\tan t/t$ 在 $(0,\ \pi/2)$ 上递增。因此 $f = 2$。中心对称圆内接四边形是矩形。由于每一行都支撑一条边，其各行构成两个正交类，且每一类内的长度恒定。各向同性进而给出边长 $\sqrt{j}$，$\sqrt{2q-j}$，其中 j 为某个整数。因此，低于 q 的最大面积为 $\sqrt{q^2-1}$。

问题 3：仅凭角度估计能否得到紧体积界？ 设 C_{ang} 为使下式对定理 $\mathcal{E} \le C_{\mathrm{ang}}\delta$ 中的任意各向同性标架及所有中心化带状区域都成立的最小常数 3.2，其中 δ 是它们的 Brascamp–Lieb 缺陷。是否有

$$C_{\mathrm{ang}} < \frac{2}{3\log(3/2)-1}\,?$$

定理 3.2 给出 $C_{\mathrm{ang}} \le 20$。建议的阈值约为 9.24，具有特定作用。系数 $A_q = (q+1)\log(1+1/q) - 1$ 随 q 递减。因此，$C_{\mathrm{ang}}A_2/2 < 1$ 将使推论 4.4 适用于每个 $q \ge 2$，从而无需进行十九次有限次比较即可得到主定理。

一个下界来自与 Q_{k+1} 主对角线垂直的截面。其投影坐标向量的长度平方为 $k/(k+1)$，归一化后的两两内积为 $-1/k$。因此 $\mathcal{E} = (k-1)/k$，且 Brascamp–Lieb 乘积为 $(1+1/k)^{k/2}$。截面体积趋于 $\sqrt{6/\pi}$ [16]。取比值得到 $C_{\mathrm{ang}} \ge 2/\log(\pi e/6)$，约为 5.67。

问题 4。对于有限的 p，最大化子空间是否仍然存在？ 固定 $k \geq 2$ 和 $n > 2k$，满足 $k \nmid n$，并令 B_p^n 表示 ℓ_p^n 的单位球。是否存在有限的 $p_0(n,k) > 2$，使得对于每个 $p \geq p_0(n,k)$，

$$\max_{H \in G_{n,k}} |B_p^n \cap H|_k = |B_p^k|_k \, W_{n,k}^{1-2/p},$$

等号恰在 $H \in \mathcal{B}_n$ 时成立，k？每个平衡子空间都能达到所提出的值，因为大小为 m 的块上的归一化对角线 ℓ_p 范数为 $m^{1/p-1/2}$。当 $k \mid n$ 时，Barthe 界给出了尖锐值（见 [28, 定理 17]）。在余维一的情形下，Eskenazis、Nayar 和 Tkocz 证明了对 $p > 10^{15}$ 的结论保持成立，且这一结果对 n [15]均匀成立。Brazitikos 和 Eskenazis 最近的一篇预印本给出了该情形下尖锐的无维数依赖阈值，约为 26.265 [12]。

立方体定理已经确定了每个极大化子的位置 H_p。事实上，$n^{-1/p} B_\infty^n \subset B_p^n \subset B_\infty^n = 2Q_n$。将 H_p 与一个平衡子空间比较，得到 $\Delta(H_p) \leq k\log(n)/p$，因此推论 6.2将其到 $\mathcal{B}_n$ 的距离 k 界定为至多 $C_n,\ _k k\log(n)/p$。即使对于 $(n,\ k) = (5,\ 2)$，剩下的问题仍是：这个不断缩小的邻域内是否存在一个平面，其面积大于平衡平面的面积，或与之相等。Meyer 和 Pajor 对截面的比较 [27]，以及 Barthe、Guédon、Mendelson 和 Naor 对 B_p^n 上的均匀分布所作的概率表示 [7]，为这个局部问题提供了两种研究途径。

A 三个较小的商的精确比较

我们证明命题5.2。对于给定的一对类，我们知道其夹角的两个性质。补投影根据类权重给出了其余弦的界。即使仅凭类权重无法提供任何信息，两行替换也能排除较小的夹角。我们利用这两个限制，将角度代价与熵超额进行比较。只有行长度平方 $c,\ d$ 被细分。固定这些长度的界后，由单调性可知，所有足够大的夹角都满足所需的比较，而只需一个不等式便足以排除所有较小的夹角。

A.1 熵超额的上界

成对比较中唯一的超越函数项，是熵超额 $\psi_q(c)$，即其弦上方的部分。它的二阶导数为 $-1/c$。我们先对这一曲率作界定，再进行两次积分，同时保留两个端点值。设 $a = 1/(q+1)$、$b = 1/q$、$z = 1 - qc \in [0,a]$，以及 $T(c) = (1-qc)((q+1)c - 1)$。那么

$$\psi_q(c) \leq T(c) C_q(z), \qquad C_q(z) = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{a+z}{3} + \frac{a^2 + az + z^2}{6(1-a)}\right).$$

确实，

$$-\psi_q''(c) = \frac{q}{1-z} = q\left(1 + z + \frac{z^2}{1-z}\right) \leq q\left(1 + z + \frac{z^2}{1-a}\right).$$

设 $P(c)$ 在右侧具有负的二阶导数，并在 a 处 b 消失。由于 $dz/dc = -q$，对这三个单项式进行两次积分可得

$$2qP(c) = z(a-z) + \frac{a^2 z - z^3}{3} + \frac{a^3 z - z^4}{6(1-a)}.$$

将 $z(a-z) = (1-a)T(c)$ 提取公因式可得 $P(c) = T(c)C_q(z)$。现在，$P - \psi_q$ 为凹函数，并在两个端点处均消失，从而证明了该界。

特别地，对于 $1 \leq j \leq q$ 和 $c \in [c_-, c_+] \subset [a,b]$，

$$H_{q,j}(c) \leq \frac{1}{2} C_q (1 - qc_-) \frac{1 - qc_-}{1 - jc_-} \left(q + 1 - \frac{1}{c_+}\right).$$

对于 $j=q$，中间因子恒等于 1，包括其连续延拓到端点时的取值。这可通过将熵界除以 $2c(1-jc)$ 得出。因子 $C_q(1-qc)$ 和 $(1-qc)/(1-jc)$ 非负，且关于 c 单调不增，而 $q+1-1/c$ 非负且单调递增。

将这个最后的上界记为 $H^{+}_{q,\,j}(c_{-},\ c_{+})$。它只对端点进行有理运算。这就是保留曲率的二阶界的原因。

A.2 矩形上的两个检验

固定整数 $1\le m\le l\le q$，并假设实际的长度平方 $c,\ d$ 位于 $[x,X]\times[y,Y]\subseteq[a,b]^2$ 中。需要超过的量以及角度估计中分母的一个上界分别为：

$$S=H^{+}_{q,m}(x,X)+H^{+}_{q,l}(y,Y)+\frac{1}{4000},\qquad K=\frac{2}{9}+\Gamma(2-mx-ly),\qquad \Gamma=\tfrac{1}{4}.$$

这里 $\Gamma\ge 2/(3e)$ 由 $e>1+1+1/2+1/6=8/3$。记 $v=\sin^2\theta$。定理 3.2中的公式给出

$$\mathcal{L}(mc,ld,1-v)\ge\sqrt{3/5}\,\frac{v}{(15+v)K}.$$

所需标量比较的两边均非负。因此，所需上界成立的一个充分条件是

$$3v^2>5\{SK(15+v)\}^2. \tag{A.1}$$

一旦这在某个 v 处成立，就会在所有更大的 v 处成立，因为 $v/(15+v)$ 是递增的

。补投影。 根据（5.2），该矩形中的每个可行角度都满足

$$v\ge v_0=\max\left\{0,1-\frac{(1-mx)(1-ly)}{mlxy}\right\}.$$

事实上，每个因子 $(1-jc)/(jc)$ 都随 c递减。若在 A.1处满足（ v_0），则整个矩形上的比较也就得证。

例如，取 $q=m=l=4$，并考虑整个正方形 $[1/5,1/4]^2$。类权重至少为 $4/5$，因此投影给出 $v_0=15/16$。这里 $K=29/90$，曲率界给出$S=139/1200+1/4000<1/8$。根据 $\sqrt{3/5}>3/4$，角度代价至少为 $\sqrt{3/5}/(17K)>1/8$。因此，一个不等式就能解决整个重数类型的问题。

两行替换。 将锐角参数化为 $t=\tan(\theta/2)$，于是

$$u(t)=\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \rho(t)=\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

函数 u 在 $[0,1]$上递增。选取 $T\in[0,1]$，使得任何不满足（A.1）的角度都满足$t\le T$。总可以取 $T=1$。如下所述，用二分法求得更小的值，可以得到更有效的检验。令 $U=u(T)$。为了使用几何不等式（5.5），我们需要 g和 L 的下界，以及 R的上界。对于任意满足 $t\le T$的角度，我们可以取

$$g_{-}=\min(x,y),\qquad L_{-}=\frac{x+y}{2}+g_{-}\rho(T)-XYU^2.$$

要得到 R 的上界，令 $2q-m-l=2j+i,\ i\in\{0,1\}$。由算术—几何平均不等式可得

$$R\le R_{+}=b(1+b)^j(1+b/2)^i.$$

特别是 $g_{-}\le g,\ \ L_{-}\le L$，以及 $L_{-}>0$，由于$(x+y)/2\ge a>b^2$。记 $\eta=L_{-}g_{-}/(2R_{+})$，使得 $0\le\eta\le 1/2$。由（5.5），利用 $u(t)=t(1+\rho(t))\le 2t$，我们得到

$$\frac{L_{-}^2}{2R_{+}}\le t(1+XYU^2/4)(1-\eta u(t))^2.$$

因子 $t(1-\eta u(t))^2$ 在 $[0,1]$ 上递增。事实上，$tu'(t) = u(t)\rho(t)$，并且 $u + 2u\rho \le 2$ 由于$2u\rho = \sin(2\theta) \le 1$。因此，它的导数为 $(1-\eta u)[1-\eta(u+2tu')] \ge 0$。由此可得，唯一的严格不等式

$$L_{-}^{2} > 2R_{+}T(1 + XYU^{2}/4)(1-\eta U)^{2} \tag{A.2}$$

排除了所有可能不满足条件的夹角（A.1）。这证明只要第二项测试通过，矩形上的比较关系就成立。

A.3 有限验证

相同的递归方法适用于全部十九组重数对。初始时，矩形为 $[a,b]^2$.

1. 在A.1处进行测试。若成立，则接受该矩形。 v_0

2. 否则，从 $T = 1$开始。若A.1在 $v = 1$处成立，则在变量 $[0,1]$ 上二分十次t。若测试在中点处 $u\,(t)^{\,2}$, 成立，则保留下半区间，否则保留上半区间。令 T 为最终区间的上端点。下端点不满足测试条件，而上端点满足。

3. 如果（A.2）成立，则接受该矩形。否则，在中点处将其较长边二分（若两边等长，则取第一条边），并对两个半矩形执行相同步骤。

表 1 记录了覆盖中的终端矩形。深度表示对矩形连续进行二分的次数，初始正方形的深度为零。每次二分都将一个闭矩形表示为

表 1：由补投影和对每个商进行双行替换所认证的矩形。

q	对 $(m,\ l)$	投影	替换	最大深度
2	3	2606	531	18
3	6	49	93	8
4	10	28	100	6

作为其两个闭子集的并。从初始正方形开始，任意一对 $(c,\ d)$ 因此都属于某个终端矩形，即使其中一个坐标是分割点也是如此。每个终端矩形都会通过上述两个检验之一。相应的不等式对该矩形上的所有可行角度都成立。递归过程仅使用整数与有理数运算。随附文件 `verify_pairs.py` 重现了该表，并报告了每个重数对的计数。补充材料中的另一种实现还对角度进行细分，并直接在三维盒上检验相同的不等式。这证明了命题 5.2。

人工智能使用声明

我主导了这项研究，首先针对每个截面维数k在范围 $n \ge c(k)$ 内寻求证明。我的策略是降低阈值 $c(k)$，直到该范围与 Ball 界所覆盖的经典范围 $n \le 2k$相交。在证明中，阈值为 qk。固定两个坐标会使截面维数减少二，并使纤维保持在归纳法适用的范围内。

我与 OpenAI ChatGPT 合作研究了第 2 节和第 3 节中的高斯耦合与角度估计，以及第 4 节和第 5节中的整数装填与行变分。它的贡献包括引理 5.1 中的双行比较，以及附录A中有理数验证的设计与实现。我还借助它完善了第 6 节和第 7节中的稳定性估计与应用，包括第 7.5节中的块传递与平面比较，并用它协助起草稿件、检查论证和参考文献。我对数学内容及参考文献的准确性负全部责任。

参考文献

[1] Faruk Abi-Khuzam，某些矩积分的不等式与渐近性，《不等式与应用杂志》2017（2017），257。 https://doi.org/10.1186/s13660-017-1532-7。[2] Gergely Ambrus 和 Barnabás Gárgyán，立方体的非对角临界中心截面，《数学进展》441（2024），文章编号 109524。 https://doi.org/10.1016/j.aim.2024.109524。[3] Keith Ball， $\mathbb{R}^n$ 中的立方体截面，《美国数学会会刊》97（1986年），第 3 期，465–473。 https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1986-0840631-0。[4] ,立方体截面的体积及相关问题，几何分析专题研讨会（1987–88）（Joram Lindenstrauss 和 Vitali D. Milman 编），《数学讲义》，第 1376 卷，施普林格，柏林，1989年，第 251–260 页。 https://doi.org/10.1007/BFb0090058。[5] ，体积比与反等周不等式，《伦敦数学会杂志》（第 2 辑）44（1991），第 2 期，351–359。 https://doi.org/10.1112/jlms/s2-44.2.351。[6] Franck Barthe，关于 Brascamp–Lieb 不等式的一种逆形式，《数学发明》134（1998），第 2 期，335–361。 https://doi.org/10.1007/s002220050267。[7] Franck Barthe、Olivier Guédon、Shahar Mendelson 和 Assaf Naor，关于 ℓ_p^n-球几何的一种概率方法，《概率年刊》33（2005），第 2 期，480–513。 https://doi.org/10.1214/009117904000000874。[8] Jonathan Bennett、Anthony Carbery、Michael Christ 和 Terence Tao，Brascamp–Lieb 不等式：有限性、结构与极值函数，《几何与泛函分析》17（2008），第 5 期，1343–1415。 https://doi.org/10.1007/s00039-007-0619-6。[9] K. J. Böröczky、F. Fodor 和 D. Hug，偶各向同性测度的 L_p zonoid 的强化体积不等式，《美国数学会汇刊》371（2019），第 1 期，505–548。 https://doi.org/10.1090/tran/7299。[10] ,关于关于原点对称的凸体的平均宽度与 ℓ-范数的强化不等式，《数学年刊》393（2025），271–316。 https://doi.org/10.1007/s00208-025-03228-0。[11] Herm Jan Brascamp 和 Elliott H. Lieb，杨氏不等式的最佳常数、其逆命题及推广到多于三个函数的情形，《数学进展》20（1976），第 2 期，151–173。 https://doi.org/10.1016/0001-8708(76)90184-5。[12] Silouanos Brazitikos 和 Alexandros Eskenazis，立方体最大截面的无维数依赖阈值，预印本（2026）。 https://arxiv.org/abs/2611.07619。[13] Eric A. Carlen 和 Dario Cordero-Erausquin，熵的次可加性及其与 Brascamp–Lieb 型不等式的关系，《几何与泛函分析》19（2009），第 2 期，373–405。 https://doi.org/10.1007/s00039-009-0001-y。[14] Giorgos Chasapis、Piotr Nayar 和 Tomasz Tkocz，立方体球截面再探：稳定性、 ℓ_1中的平面截面，《概率年刊》50（2022），第 6 期，2344–2372。 https://doi.org/10.1214/22-AOP1584。[15] Alexandros Eskenazis、Piotr Nayar 和 Tomasz Tkocz， ℓ_p中的立方体截面问题的韧性，《杜克数学杂志》173（2024），第 17 期，3377–3412。 https://doi.org/10.1215/00127094-2024-0004。

[16] Douglas Hensley, 《立方体切片：概率中的应用（用概率方法估计中心立方体切片的测度）》, 美国数学会会刊 73 (1979), no. 1, 95–100. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1979-0512066-8.[17] Hiroshi Iriyeh 和 Masataka Shibata, 《三维情形体积乘积的对称马勒猜想》, 《杜克数学杂志》169 (2020), no. 6, 1077– 1134. https://doi.org/10.1215/00127094-2019-0072.[18] Grigory Ivanov, 《交叉多胞体投影的体积》, 《离散数学》344 (2021), no. 5, 112312. https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112312.[19] ,《紧框架与相关几何问题》, 《加拿大数学通报》64 (2021), no. 4, 942–963. https://doi.org/10.4153/S000843952000096X.[20] Grigory Ivanov 和 Igor Tsiutsiurupa, 《立方体截面的体积》, 《度量空间中的分析与几何》9 (2021), no. 1, 1–18. https://doi.org/10.1515/agms-2020-0103.[21] Vu Khac Ky, 《关于立方体投影熵最大化的 Eskenazis–Nayar–Tkocz 猜想的一个证明》, arXiv:2611.18798 (2026). https://arxiv.org/abs/2611.18798.[22] Elliott H. Lieb, 《高斯核只有高斯极大化函数》, Inventiones Mathemati- cae 102 (1990), 179–208. https://doi.org/10.1007/BF01233426.[23] Galyna Livshyts、Grigoris Paouris 和 Peter Pivovarov, 《乘积测度边缘密度的尖锐界》, 《以色列数学杂志》216 (2016), no. 2, 877–889.https://doi.org/10.1007/s11856-016-1431-5.[24] Russell Lyons, 《行列式概率测度》, 高等科学研究所数学出版物 98 (2003), 167–212. https://doi.org/10.1007/s10240-003-0016-0.[25] Mokshay Madiman、James Melbourne 和 Peng Xu, 《局部紧群上的 Rogozin卷积不等式》, 预印本, arXiv:1705.00642 (2017). https://arxiv.org/abs/1705.00642.[26] James Melbourne 和 Cyril Roberto, 《Ball立方体切片的定量形式及最小熵功率不等式的等号情形》, 美国数学会会刊 150 (2022), no. 8, 3595–3611. https://doi.org/10.1090/proc/15944.[27] Mathieu Meyer 和 Alain Pajor, 《单位球的截面》, 《泛函分析杂志》80 (1988), no. 1, 109–123. https://doi.org/10.1016/0022-1236(88)90068-7.[28] Piotr Nayar 和 Tomasz Tkocz, 《某些凸体的极值截面与投影：综述》, 《调和分析与凸性》（Alexander Koldobsky 和 Alexander Volberg 编）, 《分析与几何进展》第9卷，De Gruyter，柏林，2023年，第343–390页。 https://doi.org/10.1515/9783110775389-008.[29] OpenAI, 《对称马勒猜想及其等号情形》, 预印本，2026年9月22日。 https://github.com/openai/math/tree/main/preprints/The-symmetric-Mahler-conjecture-and-its-equality-cases-September-22-2026.[30] G. Pólya, 《特定积分的计算》, 《数学年刊》74 (1913), no. 2, 204–212.[31] Benjamin C. Pooley, 《立方体截面体积的上界及其他问题》, 数学硕士学位论文，华威大学，2012年3月。 https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/bpooley/pooleymmathproject2012.pdf.

[32] B. A. Rogozin, 《有界密度卷积最大值的估计》, 概率论及其应用 32 (1987), no. 1, 48–56. https://doi.org/10.1137/1132004.[33] Mark Rudelson 和 Roman Vershynin, 《高维分布线性像的小球概率》, 国际数学研究通知 2015 (2015), no. 19, 9594–9617. https://doi.org/10.1093/imrn/rnu243.[34] Sidi Driss Sbai Msahli, 《立方体及其他单位球的向量截面》, 博士论文, 里尔弗兰德尔阿图瓦科学技术大学, 1987年。 https://pepite-depot.univ-lille.fr/LIBRE/Th_Num/1987/55376-1987-23.pdf.[35] Rolf Schneider, 《凸体: 布伦–明可夫斯基理论》, 第2版, 增订版, 数学及其应用百科全书第151卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2014年。 https://doi.org/10.1017/CBO9781139003858.[36] MichelTalagrand, 《高斯及其他乘积测度的运输成本》, 几何与泛函分析 6 (1996), no. 3, 587–600. https://doi.org/10.1007/BF02249265.[37] Jeffrey D. Vaaler, 《一个应用于线性形式的几何不等式》, 太平洋数学杂志 83 (1979), no. 2, 543–553. https://doi.org/10.2140/pjm.1979.83.543。