´-拉普拉斯算子在紧量子图上的第一条 Fuˇc´ık 曲线：对角线处的斜率与非共振

Archana Prajapati [1,*]、**Divya Goel** [1,†] [1]数学科学系，印度理工学院（BHU），瓦拉纳西 221005，印度。

arXiv:2611.30186v1 [math.AP] 23 Nov 2026

摘要

我们研究了紧连通量子图上的 p-拉普拉斯算子 Fuˇc´ık 谱 $1 < p < \infty$：在一个可能为空的顶点集合 V_D 上施加狄利克雷条件，其中移除这些顶点不会使图不连通，并在其余顶点处施加基尔霍夫条件。我们通过山路论证构造了谱的第一条非平凡曲线 $\mathfrak{C}$，并证明其具有利普希茨正则性且严格递减。当参数趋于无穷时，$\mathfrak{C}$ 在 $V_D \neq \emptyset$时趋于第一特征值；否则趋于在单个点处施加狄利克雷条件所得到的最小第一特征值。若第二特征值是单特征值，我们计算了 $\mathfrak{C}$ 在对角线处的两个单侧斜率。当且仅当第二特征函数的正部与负部具有相同的 L^p 范数时，该曲线在此处可微。在三边星形图上，对于适当的边长及任意 p，这两个范数均不相同，因此利普希茨正则性是最优的。对于 $p = 2$，可以去掉单重性假设；而对于单特征值，角点就是谱中穿过该对角线点的两个光滑分支的交点。最后，我们证明了一个非共振结果：对于 $V_D = \emptyset$，比值 $f(x, s)/|s|^{p-2}s$ 在 $+\infty$处可以任意大，但前提是其低于 $-\infty$处的阈值。

关键词： 量子图，p-拉普拉斯算子，Fuˇc´ık 谱，第二特征值，角点，非共振。

2020年数学主题分类：35R02，35A15，47J10。

1 引言

量子图是配备了微分算子（通常是作用于其边上的哈密顿量）以及适当顶点条件的度量图。过去三十年来，这一领域发展迅速，其数学结构以及在物理学、化学、工程学和生物学中的应用推动了这一发展。Linus Pauling 在量子化学中引入了这一研究领域 [37],，而现代发展则源于Kottos和Smilansky 关于量子混沌的工作 [28]，以及用图逼近薄流形的研究 [21]。关于该领域的介绍，参见 [8,29]。关于度量图上拉普拉斯算子的谱估计，包括谱隙界和瑞利型估计，参见 [30, 31]。

度量图将这类模型的结构现在量子线，很少是及其他图状结构中。基尔霍夫条件是最常见的顶点条件：它要求在每个顶点处满足连续性，并且流出通量之和为零 [8,29]；关于顶点条件的分类，参见 [27] 。

对于 $1 < p < \infty$，p-拉普拉斯算子 $\Delta_p u = (|u'|^{p-2}u')'$ 是拉普拉斯算子的非线性推广，当 $p = 2$ 时它退化为拉普拉斯算子。它出现在非牛顿流体力学、非线性弹性

*电子邮箱：matharchana3@gmail.com

†电子邮箱：divya.mat@iitbhu.ac.in

以及扭转蠕变模型中。其在区间上以及$\mathbb{R}^N$ 的有界区域上的谱理论已得到充分发展 [24, 33]。在度量图上，组合结构与顶点条件带来了额外的困难；图上 p-拉普拉斯算子的非线性特征值问题在 [17, 18]中得到研究。在区间上，特征函数通过广义三角函数$\sin_p$表示，其在 [20]中有详细研究。

Fu$\check{\text{c}}$ık 谱由 Fu$\check{\text{c}}$ık [22] 和 Dancer [14] 于20世纪70年代引入，用于描述具有非对称非线性项的问题中的共振。对于有界区域或度量图上的 p-拉普拉斯算子，在满足边界条件或顶点条件的情况下，Fu$\check{\text{c}}$ık 谱 Σ是满足下列条件的有序对集合：$(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathbb{R}^2$

$$-\Delta_p u = \lambda^+ (u^+)^{p-1} - \lambda^- (u^-)^{p-1}$$

存在非平凡解，其中 $u^\pm = \max\{\pm u, 0\}$。当 $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda$ 时，这是特征值问题，因此 Σ 包含形如 (λ, λ) 且 λ 为特征值的点。 Σ 的结构决定了具有跳跃非线性项的问题的可解性，并且已在欧几里得区域上得到广泛研究。Cuesta、de Figueiredo 和 Gossez [10] 通过山路论证，为有界区域上的 p-拉普拉斯算子构造了第一条非平凡曲线。该构造已推广到其他边界条件 [13, 36] 以及非局部算子 [25], ，而与 Σ相关的共振和非共振问题则在 [10, 12, 19]中进行了研究。对于诺伊曼问题，de Figueiredo 和 Gossez [16] 研究了 $p = 2$ 的第一条曲线，Arias、Campos 和 Gossez [4]研究了 p-拉普拉斯算子的第一条曲线（另见 [3]）。在一维空间中，其水平渐近线严格位于第一特征值之上；对于 $p = 2$，这一性质等价于一致的反最大值原理 [16]。在拉普拉斯算子的单特征值附近，Fu$\check{\text{c}}$ık 谱局部由两条穿过对角线 [23, 40]的曲线组成；穿过对角线各点的局部曲线中的最小曲线和最大曲线在 [39], 中进行了描述，而离散系统中 Fu$\check{\text{c}}$ık 曲线的单侧切线则在 [26]中进行了研究。对于 p-拉普拉斯算子，穿过对角线各点的谱曲线在 [15, 35, 38] 中得以构造。 p- 拉普拉斯算子在混合边界条件和权函数下的第一条曲线在 [34] 中进行了研究。

本文研究紧连通量子图上 p-拉普拉斯算子的 Fu$\check{\text{c}}$ık 谱。我们考虑两种顶点条件情形：

(i) 狄利克雷–基尔霍夫情形：在非空集合 $V_D \subseteq V(\Gamma)$ 上施加狄利克雷条件，在其余顶点处施加基尔霍夫条件；(ii) 诺伊曼–基尔霍夫情形： $V_D = \emptyset$，即在所有顶点处施加基尔霍夫条件。

两种情形的变分结构有所不同：在第二种情形中，$\lambda_{1,\ p} = 0$ 存在常数特征函数，且第一条非平凡曲线趋近于一个正阈值，而非平凡直线。第 3–4 节针对第一种情形撰写。第 5 节表明，其中的证明同样适用于第二种情形（命题 5.1），并讨论该情形下的渐近行为；第 6 节和第 7 节的结果则适用于这两种情形。

对于 $1 < p < \infty$，狄利克雷–基尔霍夫问题为

$$\begin{cases} -\big(|u'|^{p-2}u'\big)' = \lambda^+ (u^+)^{p-1} - \lambda^- (u^-)^{p-1} & \text{on the edges of } \Gamma, \\ u(v) = 0 & \forall\, v \in V_D, \\ \displaystyle\sum_{e \in E_v(\Gamma)} |u_e'(v)|^{p-2} u_e'(v) = 0, & v \in V(\Gamma) \setminus V_D. \end{cases} \tag{1.1}$$

其自然的变分框架是

$$X(\Gamma, V_D) = \Big\{ u \in W^{1,p}(\Gamma) : u(v) = 0 \text{ for all } v \in V_D \Big\}.$$

当 $V_D = \emptyset$时，我们得到诺伊曼–基尔霍夫问题

$$\begin{cases} -\big(|u'|^{p-2}u'\big)' = \lambda^+(u^+)^{p-1} - \lambda^-(u^-)^{p-1} & \text{on the edges of } \Gamma, \\ \displaystyle\sum_{e\in E_v(\Gamma)} |u_e'(v)|^{p-2}u_e'(v) = 0, & \forall\, v \in V(\Gamma), \end{cases} \tag{1.2}$$

在变分框架 $W^{1,\,p}(\Gamma)$ 中。本文始终假设 $\Gamma \setminus V_D$ 是连通的；见 (H) 和注 2.7。

Fu$\check{\text{c}}$ík 谱定义如下：

$$\Sigma_{p,\Gamma} = \Big\{(\lambda^+,\lambda^-) \in \mathbb{R}^2 : (1.1) \text{ admits a nontrivial solution in } X(\Gamma, V_D)\Big\},$$

$$\mathcal{F}_{p,\Gamma} = \Big\{(\lambda^+,\lambda^-) \in \mathbb{R}^2 : (1.2) \text{ admits a nontrivial solution in } W^{1,p}(\Gamma)\Big\}.$$

我们记作 $u = u^+ - u^-$，其中 $u^\pm = \max\{\pm u, 0\}$ 按逐边定义：对于 $u = (u_e)_{e\in E(\Gamma)}$，

$$u_e^+(x) = \max\{u_e(x), 0\}, \quad u_e^-(x) = \max\{-u_e(x), 0\}, \quad x \in (0,\ell_e),\ e \in E(\Gamma).$$

当 $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda$ 时，两个问题都化为边上的标准特征值问题 $-\big(|u'|^{p-2}u'\big)' = \lambda|u|^{p-2}u$。Del Pezzo 和 Rossi [17, 18] 研究了这些特征值问题，确立了其存在性、变分刻画及定性性质。

对于狄利克雷–基尔霍夫情形，第一特征值满足

$$\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) = \inf\left\{ \frac{\displaystyle\int_\Gamma |u'(x)|^p\,dx}{\displaystyle\int_\Gamma |u(x)|^p\,dx} : u \in X(\Gamma, V_D),\ u \neq 0 \right\}. \tag{1.3}$$

在 $\Gamma\setminus V_D$ 连通的假设下，它是单重的，并且存在一个在 $\Gamma \setminus V_D$ 上为正的特征函数（引理 2.8）。因此，$\Sigma_{p,\,\Gamma}$ 包含对角线上的点（λ，λ），其中 λ 为一个特征值；还包含垂直线 $\{\lambda_{1,p}(\Gamma,\ V_D)\} \times \mathbb{R}$以及水平线 $\mathbb{R} \times \{\lambda_{1,p}(\Gamma,\ V_D)\}$。该谱关于对角线对称。

在诺伊曼–基尔霍夫条件下，第一特征值为$\lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ \emptyset) = 0$，其特征函数为非零常数。因此，$\mathcal{F}_{p,\,\Gamma}$ 包含对角线上的点（λ，λ），其中 λ 是诺伊曼特征值；还包含直线 $\{0\} \times \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R} \times \{0\}$，并且关于对角线对称。

在欧几里得区域中，Fu$\check{\text{c}}$ík 谱已应用于具有跳跃非线性的方程 [14,22] 以及悬索桥动力学问题 [32]。通过建立量子图上的 Fu$\check{\text{c}}$ík 谱，我们为将这些经典结果推广到网络形区域奠定了基础。

据我们所知，本文是首次研究度量图上的 Fu$\check{\text{c}}$ík 谱。下面陈述主要结果。

对于 $b \geq 0$，令 $\alpha(b)$ 表示下文（3.14）中定义的山路值。若 $\Sigma_{p,\,\Gamma}$ 中的一点不位于直线 $\{\lambda_{1,p}(\Gamma,\ V_D)\} \times \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R} \times \{\lambda_{1,p}(\Gamma,\ V_D)\}$上，则称其为非平凡点。对于 $V_D = \emptyset$，我们置

$$\bar\lambda = \inf\left\{\int_\Gamma |u'|^p\,dx : u \in W^{1,p}(\Gamma),\ \|u\|_p = 1,\ u \text{ vanishes at some point in } \Gamma\right\} = \min_{x\in\Gamma} \lambda_{1,p}(\Gamma, \{x\}), \tag{1.4}$$

其中，$\lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ \{x\})$ 是在单点 x 处施加狄利克雷条件的第一特征值，并将该点视为$^-$顶点；$\lambda > 0$，第二个等式由式 (5.2)（第 5 节）得出。最后，

$$\Lambda = \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \quad \text{if } V_D \neq \emptyset, \qquad \Lambda = \bar\lambda \quad \text{if } V_D = \emptyset. \tag{1.5}$$

定理 1.1。设 $1 < p < \infty$，并令 $V_D \subseteq V(\Gamma)$（可为空），使得 $\Gamma \setminus V_D$ 连通。若 $V_D = \emptyset$，则对 $\Sigma_{p,\Gamma}$ 读作 $\mathcal{F}_{p,\Gamma}$。

(i) 对于每个顶点 *v1*，点 $(b + \alpha(b)\ \alpha(b))$ 是 Σ_{p}、Γ 在线 $(b,\ 0) + t\ (1,\ 1)$ 上的第一个非平凡点，$t \in \mathbb{R}$：它属于 Σ_{p}、Γ，而点 $(b+\omega,\ \omega)$ 与 λ_{1}、$_{p}(\Gamma,\ V_D) < \omega < \alpha(b)$ 不属于其中；对于 $\omega \le \lambda_{1}$、$_{p}(\Gamma,\ V_D)$，点 $(b+\omega,\ \omega)$ 不是 Σ_{p}、Γ 的非平凡点。特别地，$\alpha(0) = \lambda_{2}$、$_{p}(\Gamma,\ V_D)$。

(ii) 函数 α 在 $[0,\infty)$ 上是 *Lipschitz*连续且严格递减的，因此

$$\mathfrak{C} = \{(b + \alpha(b), \alpha(b)),\ (\alpha(b), b + \alpha(b)) : b \ge 0\}$$

is 一条关于对角线对称的 *Lipschitz*曲线，经过 $(\lambda_{2,\ p}(\Gamma,\ V_D)\lambda_{2,\ p}(\Gamma,\ V_D))$.

(iii) $\alpha(b) > \Lambda$ 对于每个 $b \ge 0$ 都成立，并且当 $b \to \infty$ 时，$\alpha(b) \to \Lambda$。如果 $V_D = \emptyset$，则 $\mathcal{F}_{p,\Gamma}$ 的每个非平凡点都位于 $(\lambda,\ \infty) \times (\lambda,\ \infty)$ 中，而 λ 是具有此性质的最大数。

第*(i)* 部分在第 3.2 小节中证明，其推论 $\alpha(0) = \lambda_{2,\ p}(\Gamma,\ V_D)$是推论 3.18。第*(ii)* 部分是命题 4.1 和 4.5，而第*(iii)* 部分是命题 4.6、5.6 和 5.5。因此，当 $V_D \neq \emptyset$ 时，第一条曲线渐近于平凡直线；与有界区域上的 Dirichlet问题相同，而对于 $V_D = \emptyset$，它与平凡直线保持距离 $\lambda > 0$ $\{0\} \times \mathbb{R}$ $\mathbb{R} \times \{0\}$；参见图 1。在满足诺伊曼条件的区间上，这个阈值是混合问题的第一特征值，且极小化函数的零点位于端点 $[4, 16]$。在图上，式 (1.4) 中的极小化函数恰好在一点处为零（引理 5.3）。该点的位置取决于 Γ的拓扑，并且不一定是对称点（命题 5.4）。

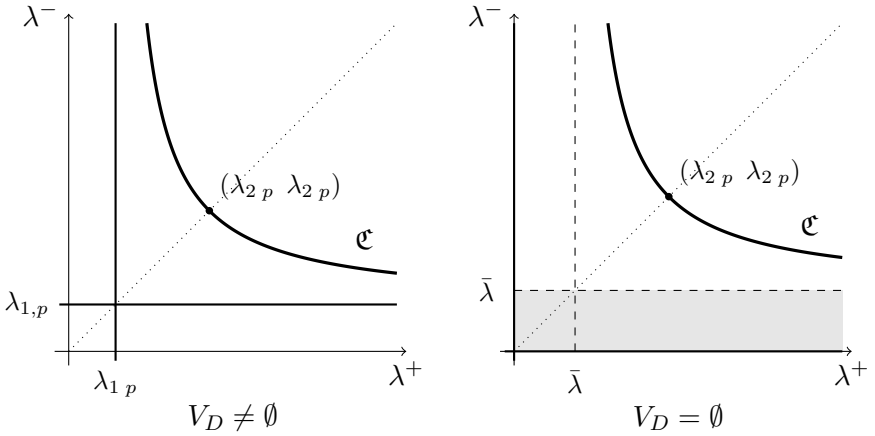

图 1：定理 1.1 的示意图。左：对于 $V_D \neq \emptyset$，第一条非平凡曲线 $\mathfrak{C}$ 渐近于经过$\lambda_{1,\ p}(\Gamma,\ V_D)$ 的平凡直线。右：对于 $V_D = \emptyset$，平凡直线经过0，而 $\mathfrak{C}$ 渐近于经过 $\lambda > 0$ 的直线（虚线）；阴影半带是定理 1.3 所述区域。

第二个结果涉及 $\mathfrak{C}$ 在对角线处的正则性。根据定理 1.1，$\mathfrak{C}$是区间 $(\Lambda,\ \infty)$ 上严格递减的对合 G 的图形，其唯一不动点为$\lambda_{2,\ p} = \lambda_{2,\ p}(\Gamma,\ V_D)$（见（6.1））；在 $\lambda^+ > \lambda^-$ 一侧，曲线为 $\lambda^- = G(\lambda^+)$，$\lambda^+ \ge \lambda_{2,\ p}$。

定理 1.2。设 $1 < p < \infty$，并设 V_D 如定理 *1.1* 中所述。

(i) 假设特征值为 $\lambda_{2,p}$ 的每个特征函数都是某个 $\phi_{2,p}$ 的倍数，且 $\|\phi_{2,p}\|_p = 1$，并令 $r = \int_\Gamma (\phi_{2,\ p}^+)^p\, dx \big/ \int_\Gamma (\phi_{2,\ p}^-)^p\, dx$。那么

$$G'(\lambda_{2,p}^+) = -\max\Big\{r, \frac{1}{r}\Big\}, \qquad G'(\lambda_{2,p}^-) = -\min\Big\{r, \frac{1}{r}\Big\},$$

且当且仅当 $r = 1$ 时，$\mathfrak{C}$ 在$(\lambda_{2,\ p}$、$\lambda_{2,\ p})$ 处可微，斜率为 -1。

(*ii*) 设 $p=2$ E_2 $\lambda_{2\,2}$ $M_0=$ $\{\int_\Gamma u^+{}^2\,dx \;\; u\in E_2 \;\; \|u\|_2=$, 1$\}$ $\frac{1}{2}\le M_0<1$

设，为，的特征空间，并令max ( ): ，。则，

$$G'(\lambda_{2,2}^+)=-\frac{M_0}{1-M_0},\qquad G'(\lambda_{2,2}^-)=-\frac{1-M_0}{M_0},$$

且当且仅当对每个$u\in E_2$， $\mathfrak{C}$ 在$(\lambda_{2,2},\lambda_{2,2})$ 处可微。

部分*(i)* 是定理 6.3，部分*(ii)* 是定理 6.7。两者都是通过计算 α 在 $b=0$处的右导数得到的，较陡的斜率总是在 $\lambda^+>\lambda^-$一侧；见图 2。角点源于问题在 $b=0$处的对称性 $u\mapsto -u$ ：位于$\lambda_{2,p}$ 这一水平的临界点成对出现，分别为$\pm\phi_{2,p}$，它们的正部可能具有不同的权函数。在区间上，关于中点的反射将$\phi_{2,p}$ 映射到$-\phi_{2,p}$，因此 $r=1$ ，经典曲线是光滑的（推论 6.5）。在图上可以计算 r 。对于带狄利克雷端点的三边星形图，当长度合适且对每个 p时， $r<1$；当 $p=2$时，几乎对所有长度都有 $r\neq 1$（命题 6.10）。因此，定理 1.1*(ii)* 中的利普希茨正则性一般无法进一步提高。对于带狄利克雷端点的等边星形图，且$p=2$时， $\lambda_{2,2}$ 是二重的，定理 1.2*(ii)*给出了斜率 -2 和 $-1/2$ （例 6.11），尽管该图具有对称性。在对角线之外，命题 6.6 给出了 α 在每个 $b\ge 0$处差商的界。

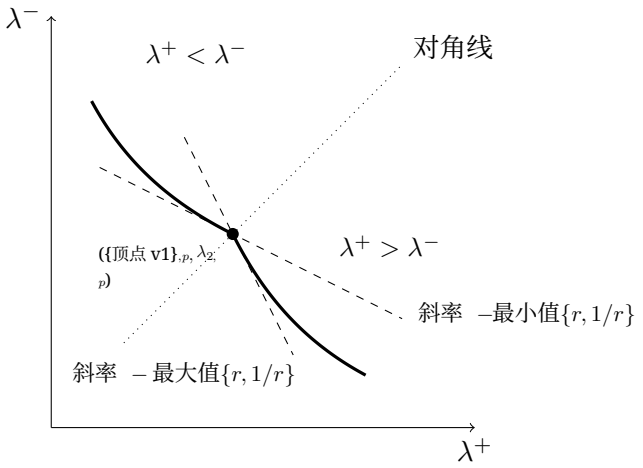

图 2：当 $r\neq 1$时，定理 1.2 在 ($\lambda_{2,\ p}$, $\lambda_{2,\ p}$) 附近的示意图，其中取 max$\{r,1/r\}=2$，即例 6.11 中的值。曲线 $\mathfrak{C}$ （实线）关于对角线（点线）反射后与自身重合；其单侧切线（虚线）的斜率为 -2 和 $-1/2$。

当 $p=2$ 和 $\lambda_{2,\ 2}$ 为单重时，定理 1.2*(i)* 也可由单特征值 $[23,40]$ 附近谱的局部描述结合定理 1.1 得出（注 6.4）。因此，在 ($\lambda_{2,\ 2}$, $\lambda_{2,\ 2}$) 附近，谱的非平凡部分是两条斜率分别为 $-r$ 和 $-1/r$ 的光滑曲线的并集，而 $\mathfrak{C}$ 是它们的下包络。因此， $\mathfrak{C}$ 的角点是两条光滑分支的交点，而非单条分支上的奇点。这与 [26]，一致：从对角线上的点离开的单条曲线，只有在特征值的代数重数大于几何重数时才会失去光滑性。对于 $p\neq 2$ ，我们不知道 $\Sigma_{p,\ \Gamma}$ 是否包含一条斜率为 – 最小值的第二条曲线，该曲线在 $\lambda^+>\lambda^-$ 一侧经过 ($\lambda_{2,\ p}$, $\lambda_{2,\ p}$)（第 6 节末）。定理 1.2 的新内容是 $p\neq 2$ 的情形，以及通过第 *(ii)* 部分涵盖的 $p=2$ 时重特征值的情形。

第三个结果是一个关于

$$-\big(|u'|^{p-2}u'\big)'=f(x,u)\ \text{ on the edges of }\Gamma,\qquad \sum_{e\in E_v(\Gamma)}|u_e'(v)|^{p-2}u_e'(v)=0\quad\forall v\in V(\Gamma),\ \ (1.6)$$

$f\colon\ \Gamma\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 L^∞-Carath´eodory 条件，并且 $F(x,\ s)=\int_0^s f(x,\ t)\,dt$。其中

定理 1.3. 设 $V_D=\emptyset$，并设 $\pi_\pm$、$\Pi_\pm$、$\theta_\pm$、$\Theta_\pm\in L^\infty(\Gamma)$ 满足：在 $x\in$ 中一致地 Γ，

$$\pi_\pm\le\liminf_{s\to\pm\infty}\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}\le\limsup_{s\to\pm\infty}\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}\le\Pi_\pm,\qquad \theta_\pm\le\liminf_{s\to\pm\infty}\frac{pF(x,s)}{|s|^p}\le\limsup_{s\to\pm\infty}\frac{pF(x,s)}{|s|^p}\le\Theta_\pm,$$

其中 $0\le\pi_+\le\Pi_+$、$0\le\pi_-\le\Pi_-\le\lambda$、$0\le\theta_+\le\Theta_+$、$0\le\theta_-\le\Theta_-\le\lambda$ 在 Γ 中几乎处处成立，并且 $\theta_\pm>0$ 在正测度集合上成立。则 (1.6) 在 $W^{1,p}(\Gamma)$ 中有一个解。

对 Π_+ 和 Θ_+ 不设上界：只要在 $-\infty$ 处低于 λ，f 的渐近商在 $+\infty$ 处可以任意大。定理 1.3 即为推论 7.4。它由 $(\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D))$ 与 $\mathfrak{C}$ 之间的非共振定理推出，该定理对每个 V_D 都成立（定理 7.1），再结合定理 1.1*(iii)* 即得。在区间上，同一个半带可由一维 Neumann结果 $[4,16]$ 得到；在图上，其宽度为 λ。

这些证明将变分方法——对 C^1 流形 $[9]$上的 C^1 泛函应用 Ekeland 原理和山路定理——与 Palais–Smale紧性条件以及 p-拉普拉斯算子的 (S_+) 性质（引理 2.5）结合起来。该方法的核心是在紧量子图上利用紧嵌入 $W^{1,\,p}(\Gamma)\hookrightarrow L^p(\Gamma)$ 和 $W^{1,\,p}(\Gamma)\hookrightarrow C(\Gamma)$（定理 2.3、2.4），为变分论证提供所需的紧性。

$\mathfrak{C}$ 的构造及其基本性质的证明遵循 Cuesta、de Figueiredo 和 Gossez $[10]$ 针对有界区域所采用的方案；对于 $V_D=\emptyset$，则遵循 $[4,16]$的一维Neumann结果。图结构在以下几个方面发挥作用。首先，第一特征函数的正性、$\lambda_{1,\,p}$ 的单重性，以及只有 $\lambda_{1,\,p}$ 具有常号特征函数这一事实（引理 2.8），都依赖于 $\Gamma\setminus V_D$ 连通这一假设；该假设取代了区域连通性的要求，比 $[18]$，的条件 $V_D\subseteq T(\Gamma)$ 更弱，而且不可省略（注 2.7）。其次，引理 4.3 中节点域的扩张需要一个位于 V_D 之外、且其外部具有正长度的边界点。第三，命题 4.6 中的收敛 $\alpha(b)\to\lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)$ 用到了 Dirichlet 顶点处的一个显式测试函数。第四，对于 $V_D=\emptyset$，$\alpha(b)$ 的极限为 $\lambda=\min_{x\in\Gamma}\lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ \{x\})$，且取得最小值的点取决于 Γ的拓扑（命题 5.4）。第五，在图上可以计算第二特征函数的权函数，因此定理 1.2 具有实际应用价值（命题 6.10，例 6.11）。命题 5.1 列出了用到 $V_D\neq\emptyset$ 的地方。第 3–4 节和第 7 节的其余论证只用到变分结构以及定理 2.3 和定理 2.4 中的紧嵌入；常规论证则作了精简陈述。

论文结构：第 2 节回顾量子图和嵌入定理的背景知识。第 3 节通过山路定理构造第一条非平凡曲线，证明平凡直线的孤立性，并建立定理 1.1，从而得到$\lambda_{2,\,p}(\Gamma,\ V_D)$的变分刻画。第 4 节分析第一条非平凡曲线：利普希茨连续性、单调性和渐近行为。第 5 节讨论诺伊曼–基尔霍夫情形以及$\mathcal{F}_{p,\,\Gamma}$：证明第 3–4 节的结果对 $V_D=\emptyset$ 成立，并确定该情形下 $\mathfrak{C}$ 的渐近行为。第 6 节研究第一条非平凡曲线在对角线处的可微性，并讨论三边星形图；第 7 节证明非共振定理及半条带推论。

2 预备知识

本节简要介绍量子图的基本概念；更多细节请参见 $[8]$ 及其中的参考文献。

图 Γ 由有限个顶点 $V(\Gamma)=\{v_i\}$ 和连接这些顶点的一组边 $E(\Gamma)=\{e_i\}$组成，记作 $(V,\ E)$。一条边和该边上的一个顶点称为关联。当 e 和 v 关联时，我们写作 $v\in e$。与 v 关联的边的集合记作

$E_v(\Gamma)$。如果 Γ 中任意两个顶点都由一条路径连接，则称图连通；等价地，如果Γ 作为拓扑空间是连通的，也称其为连通图。所有边的长度均为有限值的有限度量图称为紧致。

定义 2.1。 图 Γ是度量图，当且仅当

1. 每条边 e 都赋予一个正长度 $\ell_e \in (0,\infty)$；

2. 每条边都赋予一个坐标 $x_e \in I_e = [0,\ell_e]$，沿边的方向递增。

对于两个顶点 v_i 和 v_j，距离 $d(v_i,v_j)$ 是连接它们的路径的最小长度。更一般地，紧致度量图 Γ是一个度量测度空间，其中图上两点 x 和 y （不一定是顶点）之间的距离$d(x,y)$定义为连接它们的最短路径在 Γ 上的长度，也就是说，

$$d(x,y) = \inf\left\{\int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt : \gamma:[0,1]\to\Gamma \text{ is Lipschitz, } \gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y\right\}.$$

对于 $1\le p\le\infty$，函数 u 属于 $L^p(\Gamma)$，如果对于所有 $e\in E(\Gamma)$，都有 $u_e\in L^p(0,\ell_e)$, d

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)}^p = \sum_{e\in E(\Gamma)} \|u_e\|_{L^p(0,\ell_e)}^p < \infty.$$

根据此定义，直和分解 $L^p(\Gamma)=\bigoplus_{e\in E(\Gamma)}L^p(e)$成立。Sobole夫空间 $W^{1,p}(\Gamma)$是由 Γ 上的连续函数 u构成的空间，使得对于所有$e\in E(\Gamma)$，都有 $u_e\in W^{1,p}(I_e)$；该空间配备范数

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Gamma)}^p = \sum_{e\in E(\Gamma)} \left(\|u_e\|_{L^p(0,\ell_e)}^p + \|u_e'\|_{L^p(0,\ell_e)}^p\right) < \infty.$$

W^1的$^p(\Gamma)$ 定义中的连续性条件意味着，对于每个顶点 $v\in V(\Gamma)$，函数 u 在所有边 $e\in E_v(\Gamma)$ 上的 v 处取相同的值。以下结果在 [18] 中得到证明。

定理 2.2。 设 Γ 是一个紧连通量子图，且 $1\le p\le\infty$。则 *Sobole*夫空间 $W^{1,p}(\Gamma)$ 是一个巴拿赫空间。此外，对于 $1<p<\infty$， $W^{1,p}(\Gamma)$ 是自反的；对于 $1\le p<\infty$，它是可分的。

定理 2.3。 设 Γ 是一个紧连通量子图，且 $1<p<\infty$。则对于所有 $1\le q\le\infty$，嵌入 $W^{1,p}(\Gamma)\hookrightarrow L^q(\Gamma)$ 是紧的。

特别地，嵌入 $W^{1,p}(\Gamma)\hookrightarrow L^q(\Gamma)$ 是连续的，并且存在一个常数 $C>0$，使得

$$\|u\|_{L^q(\Gamma)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Gamma)}, \quad \text{for all } u\in W^{1,p}(\Gamma).$$

我们还有以下结果。

定理 2.4. 设 Γ是一个紧连通量子图，且 $1<p<\infty$。那么嵌入 $W^{1,\,p}(\Gamma)\hookrightarrow C(\Gamma)$ 是紧致的。

我们将以下列形式使用 p-拉普拉斯算子的（S_+）性质。

Lemm命题 2.5. 设 X 是 $W^{1,\,p}(\Gamma)$的一个闭子空间， $1<p<\infty$，并设 $u_n\rightharpoonup u$ 属于 X *wi th*

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Gamma |u_n'|^{p-2}u_n'(u_n'-u')\,dx \le 0.$$

然后 $u_n\to u$ 属于 X。

证明。 弱收敛 $u_n' \rightharpoonup u'$ 于 $L^p(\Gamma)$意味着 $\int_\Gamma |u'|^{p-2}u'(u_n' - u')\,dx \to 0$，因此

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Gamma \big(|u_n'|^{p-2}u_n' - |u'|^{p-2}u'\big)(u_n' - u')\,dx \le 0.$$

根据 H¨older 不等式，左侧的积分至少为 $\big(\|u_n'\|_p^{p-1} - \|u'\|_p^{p-1}\big)\big(\|u_n'\|_p - \|u'\|_p\big) \ge 0$，因此 $\|u_n'\|_p \to \|u'\|_p$。由 $L^p(\Gamma)$ 的一致凸性，弱收敛与范数收敛可推出 $u_n' \to u'$ 在 $L^p(\Gamma)$ 中成立。根据定理 2.3， $u_n \to u$ 在 $L^p(\Gamma)$ 中成立，因此 $u_n \to u$在 X 中成立。

□

定义 2.6。 量子图是一个度量图 Γ，它配有一个微分算子 H，该算子作用于定义在 Γ 的边上的函数，并满足给定的顶点条件。在本文中，我们考虑由下式给出的算子 H

$$H(u)(x) = -\Delta_p u(x) = -\big(|u'(x)|^{p-2}u'(x)\big)',$$

其中，导数沿 Γ 的每条边取值。

令 V_D 为 V（Γ）的一个（可能为空的）子集。我们考虑以下顶点条件：

$$\begin{cases} u \text{ is continuous on } \Gamma, \\ u(v) = 0 \quad \text{for all } v \in V_D, \\ \displaystyle\sum_{e\in E_v(\Gamma)} |u_e'(v)|^{p-2}u_e'(v) = 0, \quad \text{for all } v \in V(\Gamma)\setminus V_D, \end{cases}$$

其中，导数沿着从顶点向外的方向取值。当 $V_D \neq \emptyset$ 时，这些条件称为狄利克雷-基尔霍夫顶点条件。当 $V_D = \emptyset$ 时，它们化简为

$$\begin{cases} u \text{ is continuous on } \Gamma, \\ \displaystyle\sum_{e\in E_v(\Gamma)} |u_e'(v)|^{p-2}u_e'(v) = 0, \quad \text{for all } v \in V(\Gamma), \end{cases}$$

这些条件称为诺伊曼-基尔霍夫顶点条件。在本文中， Γ 上的积分定义为

$$\int_\Gamma u(x)\,dx = \sum_{e\in E(\Gamma)} \int_0^{\ell_e} u_e(x)\,dx.$$

设 Γ 为一个紧连通量子图，且 V_D 是 V（Γ）的非空子集。狄利克雷-基尔霍夫特征值问题如下（对于 $V_D = \emptyset$，采用相同的定义，其中 $X(\Gamma, \emptyset) = W^{1,p}(\Gamma)$）：

$$\begin{cases} -\big(|u'|^{p-2}u'\big)' = \lambda|u|^{p-2}u & \text{on the edges of } \Gamma, \\ u(v) = 0 & \forall\, v \in V_D, \\ \displaystyle\sum_{e\in E_v(\Gamma)} |u_e'(v)|^{p-2}u_e'(v) = 0, & v \in V(\Gamma)\setminus V_D. \end{cases} \tag{2.1}$$

（2.1）的弱形式为

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Gamma |u'|^{p-2}u'\phi'\,dx = \lambda\int_\Gamma |u|^{p-2}u\phi\,dx, \quad \forall\,\phi \in X(\Gamma, V_D), \\ u \in X(\Gamma, V_D). \end{cases} \tag{2.2}$$

若（2.1）或等价地其弱形式（2.2）存在非平凡解 $u \in X(\Gamma,\ V_D)$，则数 $\lambda \in \mathbb{R}$是 p-拉普拉斯算子的一个特征值。任何这样的解都称为对应于 λ的特征函数。

p-拉普拉斯算子的第一特征值由 (1.3) 给出，并且根据标准的紧性论证，存在一个与$\lambda_{1,\ p}(\Gamma,\ V_D)$相关的特征函数。当 $V_D \neq \emptyset$ 时， $W^{1,\ p}(\Gamma)$ 中的范数等价于半范数

$$\left(\int_\Gamma |u'(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(\sum_{e\in E(\Gamma)} \|u_e'\|^p_{L^p(0,\ell_e)}\right)^{1/p}.$$

我们令 $X(\Gamma,\ \emptyset) = W^{1,\ p}(\Gamma)$，并且对每个 V_D，赋予 $X(\Gamma,\ V_D)$ $W^{1,\ p}(\Gamma)$ 的范数，并将其记为 $\|\cdot\|_\circ$ 在以下所有论证中， $X(\Gamma,\ V_D)$ 中的有界性均由对 $\int_\Gamma |u'|^p\,dx$ 的界以及 $\|u\|_p = 1$ 推出，因此上述等价性并非必需，论证在 $V_D = \emptyset$ 时同样适用。

根据 [18], ， $V_D \neq \emptyset$ 的下确界 (1.3) 为正，并且由一个非负特征函数取得。在全文中，我们假设

$$\Gamma \setminus V_D \ \text{ is connected.} \tag{H}$$

当 $V_D = \emptyset$ 时，假设（H）成立；更一般地，当 $V_D \subseteq T$（Γ）时，假设（H）也成立，其中 Γ 是度为一的顶点集合，因为移除这些顶点不会使图断开。这正是 [18] 中证明第一特征值单重性的条件。假设（H）还允许例如带有一个狄利克雷顶点的环。在（H）成立时，第一特征值是单重的（引理 2.8）。若不满足该条件，单重性可能失效，下一条注释将对此进行说明。

注 2.7. 若不满足 （H），第一特征值不一定是单重的。为说明这一点，设 Γ 是一个有三条边和四个顶点的星形图，即 $V(\Gamma) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$，其中 v_0 是中心顶点，且 $E(\Gamma) = \{[v_0, v_1],\ [v_0, v_2],\ [v_0, v_3]\}$，每条边的长度均为 L。设 $V_D = V(\Gamma)$，即在所有顶点处施加狄利克雷条件。

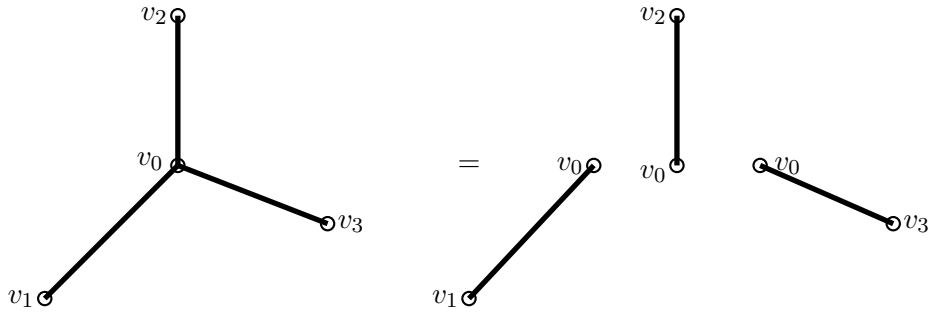

图 3：在中心顶点处施加狄利克雷条件的星形图。

在这种情况下，各条边彼此独立， p-拉普拉斯算子的第一特征值为

$$\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) = \left(\frac{\pi_p}{L}\right)^p \frac{p}{p'}, \quad where\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

（见 *[20]*）。相应的特征函数可选为

$$u_i(x) = \frac{L}{\pi_p}\sin_p\left(\frac{\pi_p}{L}x\right)\ \ on\ [v_0, v_i] = [0, L], \qquad u_i = 0\ \ elsewhere, \qquad i = 1, 2, 3,$$

且 u_1、u_2、u_3 是与 $\lambda_{1,\ p}(\Gamma$、$V_D)$相关联的线性无关的特征函数，因此第一特征值不是单重的。这种单重性失效是因为中心顶点 v_0 处的狄利克雷条件将图解耦为三个相互独立的区间（图 *3*），因此 (H)不成立。

引理 2.8。设 Γ 是一个紧连通量子图，$1 < p < \infty$，并且让 $V_D \subseteq V(\Gamma)$（可以为空）满足 (H)。记作 $\lambda_1 = \lambda_{1,\,p}(\Gamma、\ V_D)$。

(i) 令 $m \in L^\infty(\Gamma)$，并令 $u \in X(\Gamma, V_D)$、$u \geq 0$、$u \not\equiv 0$ 满足

$$\int_\Gamma |u'|^{p-2}u'\phi'\,dx = \int_\Gamma m(x)\,u^{p-1}\phi\,dx \qquad \forall\,\phi \in X(\Gamma, V_D). \tag{2.3}$$

则 $u > 0$ 在 $\Gamma \setminus V_D$ 上。

(ii) λ_1 是单重的：它有一个特征函数 $\phi_{1,p}$，满足 $\|\phi_{1,p}\|_p = 1$，并且在 $\Gamma \setminus V_D$ 上有 $\phi_{1,\,p} > 0$；与 λ_1 相关的每个特征函数都是 $\phi_{1,p}$ 的倍数。

(iii) 若 u 如 *(i)* 中所述，则

$$\int_\Gamma \big(m(x) - \lambda_1\big)\phi_{1,p}^p\,dx \leq 0. \tag{2.4}$$

特别地，不改变符号的特征函数对应于 λ_1。

证明。 *(i)* 在每条边 e 上，用 $\phi \in C_c^\infty(0, \ell_e)$ 检验 (2.3)，表明 $w_e = |u_e'|^{p-2}u_e'$ 满足 s

$$w_e' = -m\,u_e^{p-1} \in L^\infty(0, \ell_e).$$

于是 w_e 是 Lipschitz 的，$u_e \in C^1([0, \ell_e])$，并且在 (2.3) 中对支集靠近顶点 $v \notin V_D$ 的 ϕ 作分部积分，得到基尔霍夫条件 $\sum_{e \in E_v(\Gamma)} |u_e'(v)|^{p-2}u_e'(v) = 0$，其中导数取为从 v 出发的外向方向。在每条边上，

$$-(|u_e'|^{p-2}u_e')' + \|m\|_\infty u_e^{p-1} \geq 0 \quad \text{and} \quad u_e \geq 0.$$

V´azquez 的强最大值原理与边界点引理 [41,定理 5],应用于 $\beta(s) = \|m\|_\infty s^{p-1}$，对此

$$\int_0^1 (\beta(s)s)^{-1/p}\,ds = \infty,$$

表明：要么 $u_e \equiv 0$，要么 $u_e > 0$ 位于 $(0, \ell_e)$ 中，且 u_e 的外向导数在 u_e 为零的每个端点处为正。令 $Z = \{x \in \Gamma \setminus V_D :\ u(x) = 0\}$。集合 Z 在$\Gamma \setminus V_D$中是闭的。它也是开的：Z 中位于某条边内部的点落在一条满足 $u \equiv 0$ 的边上。若顶点 v属于 Z，则 $v \notin V_D$，并且 v 处基尔霍夫和的每一项均为非负。对应于带有 $u_e \not\equiv 0$ 的边的那些项为正，从而迫使 $u_e \equiv 0$ 在每条与v关联的边上成立。由 (H)，要么 $Z = \emptyset$，要么 $Z = \Gamma \setminus V_D$。后者蕴含 $u \equiv 0$，因为 V_D 是有限的。因此$u > 0$ 在 $\Gamma \setminus V_D$ 上。

(ii) 根据定理 2.3，(1.3)存在一个极小化函数。若 u 是一个极小化函数，那么 $|u|$也是。根据拉格朗日乘数法，$|u|$ 满足(2.3)，其中 $m \equiv \lambda_1$。由*(i)*可知，$|u| > 0$ 在 $\Gamma \setminus V_D$上。由于 u 连续且 $\Gamma \setminus V_D$ 连通，u 不变号。与 λ_1 对应的每个特征函数都是极小化函数（用特征函数本身测试方程即可），因此只需证明两个正的极小化函数 u, v 在 $\|u\|_p = \|v\|_p = 1$ 时必相同。我们利用$\sigma \mapsto \int_\Gamma |(\sigma^{1/p})'|^p\,dx$ 在非负函数上的凸性，这一点由 Belloni 和 Kawohl [5]指出。对于 $t \in (0,1)$，令 $w_t = \big((1-t)u^p + tv^p\big)^{1/p}$。在每条边内部，$u, v > 0$ 且当 $\theta = (1-t)u^p/w_t^p \in (0,1)$时，

$$\frac{w_t'}{w_t} = \theta\,\frac{u'}{u} + (1-\theta)\,\frac{v'}{v},$$

因此，$s \mapsto |s|^p$ 的凸性给出

$$|w_t'|^p \leq (1-t)|u'|^p + t|v'|^p \qquad \text{a.e. on } \Gamma, \tag{2.5}$$

且仅当 $u'/u = v'/v$ 时取等号。因此 $w_t \in X(\Gamma,\ V_D)$、$\|w_t\|_p = 1$ 和 $\int_\Gamma |w_t'|^p\,dx \le \lambda_1$，所以在每条边内部，(2.5) 和 $(u/v)' = 0$ 中几乎处处取等号。因此，商 u/v 在每条边上都是常数，并且这些常数在 $\Gamma \setminus V_D$ 的各个顶点处相等，其中 $u,\ v > 0$。根据 (H)，$u = cv$，且 $c = 1$。

(iii) 对于 $\varepsilon > 0$，函数 $\psi_\varepsilon = \phi_{1,p}^p/(u+\varepsilon)^{p-1}$ 属于 $X(\Gamma, V_D)$，因为 $\phi_{1,p}, u \in W^{1,p}(\Gamma) \cap C(\Gamma)$，$u + \varepsilon \ge \varepsilon$ 且 $\phi_{1,p} = 0$ 在 V_D 上成立。由 Picone 恒等式 [1]，$|\phi_{1,p}'|^p \ge |u'|^{p-2}u'\psi_\varepsilon'$ 几乎处处在 Γ 上成立。以 ψ_ε 作为 (2.3) 的测试函数，我们得到

$$\lambda_1 \int_\Gamma \phi_{1,p}^p\,dx = \int_\Gamma |\phi_{1,p}'|^p\,dx \ge \int_\Gamma m(x)\Big(\frac{u}{u+\varepsilon}\Big)^{p-1}\phi_{1,p}^p\,dx.$$

由 *(i)*，$u > 0$ 几乎处处成立，因此由控制收敛可得 (2.4)，其中 $\varepsilon \to 0$。若 $u \ge 0$ 是特征值为 λ 的特征函数，则令 $m \equiv \lambda$ 代入 (2.4) 得到 $\lambda \le \lambda_1$，而由 (1.3) 有 $\lambda \ge \lambda_1$；对于 $u \le 0$，我们将此结果应用于 $-u$。 □

全文中，$\phi_{1,p}$ 表示引理 2.8*(ii)* 中的特征函数；当 $V_D = \emptyset$ 时，它是常数 $\ell(\Gamma)^{-1/p}$。我们用 $\lambda_{2,p}(\Gamma, V_D)$ 表示大于 $\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)$ 的最小特征值，

$$\lambda_{2,p}(\Gamma, V_D) = \inf\big\{\lambda : \lambda \text{ is an eigenvalue and } \lambda > \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)\big\}. \tag{2.6}$$

推论 3.18 表明，该下确界可以达到，且等于（3.14）的极小极大值 $\alpha(0)$。

我们研究与紧致连通量子图 Γ 上的 p-拉普拉斯算子相关的非线性特征值问题，即问题 (1.1) 和 (1.2)。

定义 2.9。 如果函数 $u \in X(\Gamma, V_D)$（相应地，$u \in W^{1,p}(\Gamma)$）满足以下条件，则称其为问题 (1.1)（相应地，(1.2)）的弱解

$$\int_\Gamma |u'|^{p-2}u'\phi'\,dx = \int_\Gamma \big(\lambda^+(u^+)^{p-1} - \lambda^-(u^-)^{p-1}\big)\phi\,dx, \qquad \forall\,\phi \in X(\Gamma, V_D) \tag{2.7}$$

（相应地，$\phi \in W^{1,p}(\Gamma)$）。

与问题 (1.1) 和 (1.2) 相关的能量泛函为

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Gamma |u'|^p\,dx - \frac{\lambda^+}{p}\int_\Gamma (u^+)^p\,dx - \frac{\lambda^-}{p}\int_\Gamma (u^-)^p\,dx.$$

泛函 I 属于 C^1 类，其临界点是问题 (1.1) 和 (1.2) 的弱解。

3 第一条非平凡曲线的构造

本节通过极小极大论证构造曲线 $\mathfrak{C}$，并证明它是 $\Sigma_{p,\Gamma}$ 的第一条非平凡曲线。$\Sigma_{p,\Gamma}$ 的各点可刻画为适当限制的泛函的临界值。因此，我们得到 $\lambda_{2,p}(\Gamma, V_D)$ 的变分刻画。

3.1 极小极大值

固定 $b \in \mathbb{R}$，并考虑由下式给出的 C^1 泛函 $I_b\colon X(\Gamma, V_D) \to \mathbb{R}$

$$I_b(u) = \int_\Gamma |u'|^p\,dx - b\int_\Gamma (u^+)^p\,dx,$$

限制在流形上

$$M = \left\{u \in X(\Gamma, V_D) : J(u) = \int_\Gamma |u|^p\,dx = 1\right\}.$$

令 $\tilde{I}_b$ 表示 I_b 在 M上的限制。由于 I_b 是一个 C^1 泛函，拉格朗日乘数法表明，当且仅当存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $I_b'(u) = cJ'(u)$ 时，$u \in M$ 是 I_b 的临界点，也就是说，

$$\int_\Gamma |u'|^{p-2}u'\phi'\,dx - b\int_\Gamma (u^+)^{p-1}\phi\,dx = c\int_\Gamma |u|^{p-2}u\phi\,dx, \qquad \forall\,\phi \in X(\Gamma, V_D). \tag{3.1}$$

等价地，顶点 v1 是方程 (1.1) 的一个非平凡弱解，满足 $(\lambda^+, \lambda^-) = (b + c, c)$，因此 $(b + c, c) \in \Sigma_{p,\Gamma}$。在 (3.1) 中取 $\phi = u$，可知拉格朗日乘子 c 等于临界值 $I_b(u)$。这就证明了以下引理。

引理 3.1。对于 $b \in \mathbb{R}$，$\Sigma_{p,\Gamma}$ 与经过 $(b,0)$ 且平行于对角线的直线的交点恰好由以下形式的点组成：$\big(b + \tilde{I}_b(u)\ \ \tilde{I}_b(u)\big)$，其中 u 是 I_b 的一个临界点。

命题 *3.2*。设 $b \geq 0$。则 $\phi_{1,p}$ 是 I_b 的全局极小值点，其中 $I_b(\phi_{1,p}) = \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) - b$。对应的点在 $\Sigma_{p,\Gamma}$ 中为 $\big(\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)\ \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) - b\big)$，该点位于经过 $\big(\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)\ \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)\big)$ 的垂直线上。

证明。对于 $u \in M$、$\tilde{I}_b(u) \geq \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)\int_\Gamma |u|^p\,dx - b\int_\Gamma (u^+)^p\,dx \geq \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D) - b$，当 $u = \phi_{1,\,p}$时取等号。 □

我们证明 $-\phi_{1,\,p}$ 是约束泛函 I_b的严格局部极小值。

引理 3.3。设 Γ 是一个紧连通量子图，并设 $\psi_n \not\equiv 0$、$\psi_n \in X(\Gamma、\ V_D)$ 满足在 Γ上几乎处处有 $\psi_n \geq 0$，且 $\ell\{x \in \Gamma :\ \psi_n(x) > 0\} \to 0$。则

$$\frac{\int_\Gamma |\psi_n'|^p\,dx}{\int_\Gamma {\psi_n}^p\,dx} \to +\infty \quad as\ n \to \infty.$$

证明。令 $u_n = \psi_n/\|\psi_n\|_p$。如果 $\int_\Gamma |u_n'|^p\,dx$ 沿某个子序列有界，那么根据定理 2.3，存在一个进一步的子序列在 $L^p(\Gamma)$ 中收敛到某个满足 $\|u\|_p = 1$的 $u \geq 0$。于是，对某个 $\epsilon > 0$有 $\ell\{u > \epsilon\} = \eta > 0$，并且沿该子序列，当 n 足够大时有 $\ell\{u_n > \epsilon/2\} > \eta/2$，这与 $\ell\{\psi_n > 0\} \to 0$矛盾。 □

命题 *3.4*。设 $b \geq 0$。则 $-\phi_{1p}$ 是 I_b 的严格局部极小值，且 $I_b(-\phi_{1,\,p}) = \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)$。在 Σ_p 中与之对应的点为 $\Gamma\big(\lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D) + b,\ \ \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)\big)$，该点位于经过 $\big(\lambda_{1p}(\Gamma,\ V_D)\ \lambda_{1p}(\Gamma,\ V_D)\big)$ 的水平线上。

证明。反设存在一个序列 $u_n \in M$，满足$u_n \neq -\phi_{1,\,p}$，$u_n \to -\phi_{1,\,p}$属于 $X(\Gamma,\ V_D)$，且 $I_b(u_n) \leq \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)$。我们断言，当 n 充分大时，u_n 会改变符号。由于 $u_n \to -\phi_{1,\,p}$ 且 $\phi_{1,\,p} > 0$ 在 $\Gamma \setminus V_D$上，函数 u_n 在 n 足够大时必定对某个$x \in \Gamma$ 取负值。若 $u_n \leq 0$ 在 Γ上几乎处处成立，则

$$\tilde{I}_b(u_n) = \int_\Gamma |u_n'|^p\,dx - b\int_\Gamma (u_n^+)^p\,dx = \int_\Gamma |u_n'|^p\,dx > \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D),$$

由引理 2.8 (*ii*) 可得严格不等式，因为 $u_n \neq \pm\phi_{1,\,p}$ 和 $\pm\phi_{1,\,p}$ 是 M中 (1.3) 的唯一极小化元。这与 $I_b(u_n) \leq \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)$ 矛盾，并证明了 u_n 变号。令$t_n = \int_\Gamma |(u_n^+)'|^p\,dx / \int_\Gamma (u_n^+)^p\,dx$，我们计算得

$$\begin{aligned}\tilde{I}_b(u_n) &= t_n\int_\Gamma (u_n^+)^p\,dx + \int_\Gamma |(u_n^-)'|^p\,dx - b\int_\Gamma (u_n^+)^p\,dx \\ &\geq (t_n - b)\int_\Gamma (u_n^+)^p\,dx + \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)\int_\Gamma |(u_n^-)|^p\,dx.\end{aligned}$$

由于 $u_n \in M$ 和 $u_n = u_n^+ - u_n^-$,

$$\tilde{I}_b(u_n) \le \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) = \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \int_\Gamma (u_n^+)^p \, dx + \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \int_\Gamma |(u_n^-)|^p \, dx.$$

结合这两个不等式并利用 $\int_\Gamma (u_n^+)^p \, dx > 0$, 我们推出

$$\big(\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) - t_n + b\big) \int_\Gamma (u_n^+)^p \, dx \ge 0,$$

因此

$$t_n - b \le \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D). \tag{3.2}$$

最后, $u_n \to -\phi_{1,\,p}$ 在 Γ 上一致成立（定理 2.4）, 且 $\phi_{1,\,p} > 0$ 在 $\Gamma \setminus V_D$上成立, 被移除的集合是有限的, 因此 $\ell\{x : \ u_n(x) \ > 0\} \to 0$ 并且根据引理 3.3, $t_n \to \infty$ 当 $n \to \infty$时成立, 这与˜(3.2)矛盾。因此, $-\phi_{1,\,p}$ 是 I_b的严格局部极小值。 □

为了寻找另一个临界点, 我们对一个 C^1 流形上的 C^1 泛函应用山路定理 [9, 定理 2.1], , 其中 Palais–Smale 条件按范数 (3.3) 理解。空间 $X(\Gamma, \ V_D)$ 一致凸, 符合定理要求。我们验证限制在 M上的 I_b 满足 Palais–Smale 条件及几何假设。 I_b 在 $u \in M$ 处的限制 I_b 的导数范数为˜

$$\|\tilde{I}_b'(u)\|_* = \min\big\{\|I_b'(u) - cJ'(u)\|_{(X(\Gamma,V_D))'} : c \in \mathbb{R}\big\}, \tag{3.3}$$

其中 $\|\cdot\|_{(X(\Gamma,V_D))'}$ 表示 $X(\Gamma, V_D)$ 的对偶空间上的范数。

定义 3.5。 </style}泛函 被称为满足 Palais–Smale 条件 ($P.S.$**)** 于 M˜, 如果每个满足 $I_b($ $u_n)$ 有界的序列 $u_n \in M$, 且 $\|I_b'(u_n)\|_* \to 0$, 都具有一个收敛子列。

对于 $p > 1$, 映射 $u \mapsto \int_\Gamma |u|^p \, dx$ 在 $X(\Gamma, V_D)$ 上属于 C^1 类, 其导数为 $p \int_\Gamma |u|^{p-2} u \cdot dx$, 并且在 M 上非零。因此, M 是 $X(\Gamma, V_D)$ 的一个完备 C^1 子流形, 并且对于 $u \in M$, 切空间为

$$T_u M = \Big\{\phi \in X(\Gamma, V_D) : \int_\Gamma |u|^{p-2} u \, \phi \, dx = 0\Big\}.$$

˜在 (3.3) 中定义的数 $\|I_b'(u)\|_*$ 是 $I_b'($

˜ ˜ u u) 在 $T_u M$ 上的限制的范数, 并且当且仅当 $\|I_b'(u)\|_* = 0$ 时, 它是 I_b 的临界点。根据拉格朗日乘数法, 这等价于˜ ˜ 求解带有对 ($b + I_b(u)$ $I_b(u)$) 的 (1.1)。相对于 $\|\cdot\|_*$, Palais–Smale 序列和 Palais–Smale 条件的含义如定义 3.5 所述。

引理 3.6. 泛函 I_b 在 M 上满足$(P.S.)$ 条件。

˜**证明**。 设 $u_n \in M$ 满足 $|I_b(u_n)| \le K$ 和 $\|I_b'(u_n)\|_* \to 0$, 并令 c_n 对每个 u_n 都在 (3.3) 中取到最小值。由于 $\|u_n\|_p = 1$ 且

$$\int_\Gamma |u_n'|^p \, dx \le K + |b|,$$

序列 (u_n) 在 $X(\Gamma, V_D)$ 中有界。此外, 用 u_n 检验 $I_b'(u_n) - c_n J'(u_n)$, 可知 (c_n) 有界。由定理 2.3, 取一个子序列后, 我们有 $u_n \ \to u_0$ 在 $X(\Gamma, V_D)$, 中, 且 $u_n \to u_0$ 在 $L^p(\Gamma)$ 中。现在, 用 $u_n - u_0$ 检验 $I_b'(u_n) - c_n J'(u_n)$, 并利用 H¨older 不等式, 我们得到

$$\int_\Gamma (u_n^+)^{p-1} |u_n - u_0| \, dx + \int_\Gamma |u_n|^{p-1} |u_n - u_0| \, dx \le 2\|u_n - u_0\|_p \to 0.$$

因此, $\int_\Gamma |u_n'|^{p-2} u_n' (u_n' - u_0') \, dx \ \to 0$。由引理 2.5 可得, $u_n \ \to u_0$ 属于 $X(\Gamma, \ V_D)$。

□

设 $c_e > 0$ 满足：对于 $w \in X(\Gamma,\ V_D)$，有 $\|w\|_p \le c_e\|w\|$ （定理 2.3）；对于 $x \in M$ 和 $r > 0$，令 $B_r(x) = \{u \in M :\ \|u - x\| < r\}$。

引理 3.7. 设 $x \in M$, $0 < r \le 1/(2c_e)$ 和 $u, v \in B_r(x)$，并令 $z_t = (1-t)u + tv$ *for* $t \in [0,1]$。那么 $w_t = z_t/\|z_t\|_p$ 是 M 中从 u 到 v的一条路径，并且

$$\|w_t - x\| \le C_0 r, \qquad C_0 = 2\big(1 + c_e\|x\|\big), \qquad t \in [0,1]. \tag{3.4}$$

因此，M 的开子集的道路连通分支是开集。

证明。由凸性 $\|z_t - x\| < r$ $\|u\|_p = \|v\|_p = \|x\|_p = 1$ $\big|\,\|z_t\|_p - 1\,\big| \le$，且由于，我们 $\|z_t - x\|_p \le c_e r \le \frac{1}{2}$ w_t M t 有。因此 定义良好，属于，并连续依赖于，且

$$\|w_t - x\| = \frac{\|z_t - x + (1 - \|z_t\|_p)x\|}{\|z_t\|_p} \le 2\big(r + c_e r\|x\|\big) = C_0 r.$$

若 $U \subseteq M$是开集且 $x \in U$，取满足 $B_\rho(x) \subseteq U$且 $r = \min\{\rho/C_0, 1/(2c_e)\}$的 $\rho > 0$；则 $B_r(x)$中的每个点都可由 x 通过 $B_{C_0 r}(x) \subseteq U$中的一条路径连接起来，最后一个断言由此得证。□

我们将使用 M 上临界点理论的以下三个事实。流形上的变形引理 $\{\psi = 1\}$ in [42, 引理 5.15] 要求 $\psi \in C^2$，而 $u \mapsto \int_\Gamma |u|^p\,dx$ 仅对 $p \ge 2$属于C^2 类，并且没有给出位移的界，而第 6 节中会用到这一点。因此，我们通过 [42, 引理 2.3] 推导出第一个事实，该事实针对巴拿赫空间上的 C^1 泛函，并经过 I_b 的零次齐次延拓。第二和第三个事实由第一个事实推导得到。

引理 3.8（定量变形引理）。设 $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \le 1$ 以及 $S \subseteq M$。置$K = (3 + |b| + |c|)^{1/p}$ 并且 $C_* = 2(1 + c_e K)$，并令 $0 < \delta \le 1/(16c_e)$ 满足

$$\|\tilde I_b'(u)\|_* \ge \frac{10\,\varepsilon}{\delta} \qquad \textit{for all } u \in M \textit{ with } \operatorname{dist}(u,S) \le 2C_*\delta \textit{ and } |\tilde I_b(u) - c| \le 2\varepsilon. \tag{3.5}$$

于是存在一个连续映射 $\eta :\ [0,1] \times M \to M$，使得

$$\begin{aligned}
&\eta(0,u) = u, \qquad \eta(t,u) = u \quad \textit{if } |\tilde I_b(u) - c| > 2\varepsilon \textit{ or } \operatorname{dist}(u,S) > 2\delta,\\
&\|\eta(t,u) - u\| \le C_*\delta, \qquad t \mapsto \tilde I_b(\eta(t,u)) \quad \textit{is non-increasing},\\
&\eta\big(1, \{\tilde I_b \le c + \varepsilon\} \cap S\big) \subseteq \{\tilde I_b \le c - \varepsilon\}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

证明。对于 $u \ne 0$，定义 $R(u) = I_b(u)/J(u)$。于是 $R \in C^1(X(\Gamma,\ V_D) \setminus \{0\})$，并且

$$R(tu) = R(u), \qquad R'(tu) = t^{-1}R'(u) \quad \text{for all } t > 0.$$

由于 $R = I_b$在 M上，对每个 $u \in M$，都有 $R'(u) = I_b'(u) - I_b(u)J'(u)$，因此由 (3.3) 可得 $\|R'(u)\| \ge \|I_b'(u)\|_*$。选取 $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$，使得 $\chi = 0$ 在 $(-\infty,\ 4^{-p}]$ 上，且 $\chi = 1$ 在 $[2^{-p}, \infty$上。定义 $\varphi :\ X(\Gamma,\ V_D) \to \mathbb{R}$，如下：

$$\varphi(u) = \begin{cases} \chi(J(u))R(u), & u \ne 0,\\ 0, & u = 0. \end{cases}$$

于是 $\varphi \in C^1(X(\Gamma,\ V_D)\ \mathbb{R})$，且 $\varphi = R$ 在 $W = \{u$ 上：$\|u\|_p > 1/2\}$。我们验证 [42, 引理 2.3] 关于 φ、S、c、ε、δ 的假设。令 $w \in X(\Gamma,\ V_D)$ 满足 $\operatorname{dist}(w,\ S) \le 2\delta$，且 $|\varphi(w) - c| \le 2\varepsilon$，并选取满足 $\|w - s\| \le 3\delta$ 的 $s \in S$。于是 $\big|\,\|w\|_p - 1\,\big| \le \|w - s\|_p \le 3c_e\delta \le \frac{3}{16}$，因此 $w \in W$，而$\tilde{\ }\hat{\ }$ $w = w/\|w\|_p \in M$ 满足 $I_b(\hat{\ }w) = R(w) = \varphi(w) \le c + 2$。因此

$$\|\hat w\|^p = \tilde I_b(\hat w) + b\int_\Gamma (\hat w^+)^p\,dx + 1 \le K^p,$$

使得 $\|\hat{w}-w\| = \big|\|w\|_p - 1\big|\,\|\hat{w}\| \le 3c_eK\delta$，且 $\operatorname{dist}(\hat{w},\ S) \le 3\delta + 3c_eK\delta \le 2C_*\delta$。根据 (3.5),

$$\|\varphi'(w)\| = \|R'(w)\| = \|w\|_p^{-1}\|R'(\hat{w})\| \ge \frac{16}{19}\cdot\frac{10\,\varepsilon}{\delta} > \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

设 $\tilde{\eta} \in C([0,1]\times X(\Gamma,V_D)\ X(\Gamma,V_D))$ 是由 [42, 引理 2.3], 给出的映射，它满足 es

$$\begin{aligned}
&\tilde{\eta}(t,u) = u \quad \text{if } t=0,\ |\varphi(u)-c| > 2\varepsilon \text{ or } \operatorname{dist}(u,S) > 2\delta,\\
&\tilde{\eta}(1,\{\varphi \le c+\varepsilon\}\cap S) \subseteq \{\varphi \le c-\varepsilon\},\\
&\|\tilde{\eta}(t,u)-u\| \le \delta,
\end{aligned}$$

并且 $t\mapsto\varphi(\tilde{\eta}(t,u))$ 是非增的。对于 $u\in M$，我们有 $\|\tilde{\eta}(t,u)\|_p \ge 1 - c_e\delta \ge \frac{15}{16}$，并令 t

$$\eta(t,u) = \frac{\tilde{\eta}(t,u)}{\|\tilde{\eta}(t,u)\|_p} \in M.$$

˜于是 η 连续，$\tilde{\eta}(t,u)\in W$，且 $I_b(\eta(t,u)) = \varphi(\tilde{\eta}(t,u))$。这给出了 (3.6) 中第一、第四和
˜ ˜第五个性质。若 $\eta(t,u)\neq u$，则 $I_b(\eta(t,u)) \le I_b(u) \le c+2\varepsilon$，因此 $\|\eta(t,u)\| \le K$ 如上所述。因此，

$$\|\eta(t,u)-u\| \le \|\tilde{\eta}(t,u)-u\| + \big|\|\tilde{\eta}(t,u)\|_p - 1\big|\|\eta(t,u)\| \le \delta + c_eK\delta \le C_*\delta. \qquad \square$$

˜**引理 3.9**。设 $[a,a']\subset\mathbb{R}$ 不包含 I_0的临界值。那么存在 $\varepsilon>0$ 和 $\beta>0$，使得 $[a-2\varepsilon, a'+2\varepsilon]$ 不包含临界值，并且

$$\|\tilde{I}_0'(u)\|_* \ge \beta \qquad \textit{for all } u\in M \textit{ with } a-2\varepsilon \le \tilde{I}_0(u) \le a'+2\varepsilon.$$

˜**证明**。I_0 在紧致区间内的临界值集合是闭集。事实上，若 $c_n\to c$ 是
˜ ˜临界值，且对应的临界点为 $u_n\in M$，那么 $I_0(u_n) = c_n$ 有界，且 $\|I_0'(u_n)\|_* = 0$，因此 (u_n) 是一个 Palais–Smale 序列，而引理 3.6 给出一个收敛到临界点的子序列，其能级为 c。因此，临界值集合的补集是开集，且包含紧致集合 $[a,a']$，所以对某个 $\varepsilon>0$，它包含 $[a-2\varepsilon, a'+2\varepsilon]$。若对于这个 ε不存在 $\beta>0$，则存在 $u_n\in M$，使得 $I_0(u_n)$ $\in [a-2\varepsilon,a'+2\varepsilon]$ 且 $\|I_0'(u_n)\|_*\to 0$; 取˜一个子序列，使得 $I_0(u_n)\to c$，引理 3.6 将给出一个能级为$c\in[a-2\varepsilon,a'+2\varepsilon]$的临界点，矛盾。 $\square$

˜ ˜**引理 3.10.** 设 $[a,a']$ 不包含 I_0的临界值。那么，对每个满足 $I_0(u)\le a'$的 $u\in M$，存在一条连续路径 $\gamma\colon [0,1]\to M$，使得

$$\gamma(0) = u, \qquad \tilde{I}_0(\gamma(1)) \le a, \qquad t\mapsto \tilde{I}_0(\gamma(t)) \textit{ non-increasing.}$$

˜ ˜特别地，$\gamma[0,1]\subseteq\{I_0\le I_0(u)\}$。

˜证明。我们不妨设 $I_0(u) > a$。令 ε 和 β 如引理 3.9 所述。取一个满足 $N \ge (a'-a)/(2\varepsilon)$ 的整数 N，使其足够大，从而 $(a'-a)/(2N) \le 1$ 且 $10(a'-a)/(2N\beta) \le 1/(16c_e)$，并将 ε 替换为 $(a'-a)/(2N)$ $\le\varepsilon$；于是区间 $[a-2\varepsilon,a'+2\varepsilon]$ 缩小，因此引理 3.9 的结论仍然成立，且 β 保持不变。令 $\delta = 10\varepsilon/\beta$ 和 $S = M$。于是，对满足 $[c-2\varepsilon,c+2\varepsilon]\subseteq[a-2\varepsilon,a'+2\varepsilon]$的每个层级 c，在 $b=0$ 下，(3.5) 成立。对于 ˜$j = 1,\dots,N$，令 $c_j = a' - (2j-1)\varepsilon$，使得每个带状区域 $|I_0-c_j|\le 2\varepsilon$ 都包含于 $[a-2\varepsilon,a'+2\varepsilon]$，且引理 3.8 在 $c=c_j$ 处适用，从而得到一个变形 η_j。由于 $c_1+\varepsilon = a'$ 且 $c_j+\varepsilon = c_{j-1}-\varepsilon$ 对于 $j\ge 2$,

$$\eta_N(1,\cdot)\circ\cdots\circ\eta_1(1,\cdot) \text{ maps } \{\tilde{I}_0\le a'\} \text{ into } \{\tilde{I}_0 \le a'-2N\varepsilon\} = \{\tilde{I}_0\le a\}.$$

取 $u_0 = u$顶点 v1 和 $u_j = \eta_j(1,\ u_{j-1})$，并在 $[(j-1)/N,\ j/N]$ 上通过 $\gamma(t) = \eta_j(Nt-j+1,\ u_{j-1})$ 定义 γ。˜ ˜ ˜于是，γ 是连续的，$\gamma(0) = u$，$I_0(\gamma(1)) = I_0(u_N) \le a$，并且根据 (3.6)，$I_0$ 沿每一段均不递增，因此沿 γ 也不递增。 $\square$

引理 3.11。 设 $\delta_0 > 0$ 满足

$$\tilde{I}_b(u) > \tilde{I}_b(-\phi_{1,p}), \quad \forall u \in B_{\delta_0}(-\phi_{1,p}) \setminus \{-\phi_{1,p}\},$$

与引理 *3.7* 中的 $B_{\delta_0}(-\phi_{1,p})$ 相同。那么，对于任意 $0 < \delta < \delta_0$,

$$\inf\{\tilde{I}_b(u) : u \in M, ||u - (-\phi_{1,p})|| = \delta\} > \tilde{I}_b(-\phi_{1,p}). \tag{3.7}$$

证明。 论证与 [10], 相同，为完整起见，我们将其列出。反设存在一个 $\delta \in (0, \delta_0)$，使得 (3.7) 中等号成立。于是存在一个序列 $u_n \in M$，满足 $||u_n - (-\phi_{1,p})|| = \delta$ 且 $\tilde{I}_b(u_n) \leq \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) + 1/2n^2$。考虑

$$M_\eta = \{u \in M : \delta - \eta \leq ||u - (-\phi_{1,p})|| \leq \delta + \eta\},$$

其中选择 $\eta > 0$ 使得 $0 < \delta - \eta < \delta + \eta < \delta_0$。根据反证假设以及 $\tilde{I}_b(u) > I_b(-\phi_{1,p})$，我们有 $\inf\{I_b(u) : u \in M_\eta\} = \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)$。将 Ekeland 变分原理应用于 M_η 上的 I_b，对每个 $n \in \mathbb{N}$，可得某个 $w_n \in M_\eta$，使得

$$\tilde{I}_b(w_n) \leq \tilde{I}_b(u_n), \tag{3.8}$$

$$||w_n - u_n|| \leq 1/n, \tag{3.9}$$

$$\tilde{I}_b(w_n) \leq \tilde{I}_b(u) + \frac{1}{n}||u - w_n||, \quad \forall u \in M_\eta. \tag{3.10}$$

我们证明，对于 M 上的 I_b， w_n 是一个（*P.S.*）序列。根据定义 3.5，若 $I_b(w_n)$ 有界（由 (3.8) 可知），且 $||I_b'(w_n)||_* \to 0$，则引理 3.6 给出一个子序列 $w_{n_k} \to w$，使其在 $X(\Gamma, V_D)$ 中强收敛。我们断言 $||I_b'(w_n)||_* \to 0$。固定 $n > 1/\eta$，并取一个与 M 在 w_n 处相切的 $\phi \in X(\Gamma, V_D)$，即满足

$$\int_\Gamma |w_n|^{p-2} w_n \phi \, dx = 0, \tag{3.11}$$

并对每个 $t \in \mathbb{R}$ 考虑,

$$u_t = \frac{w_n + t\phi}{||w_n + t\phi||_p}.$$

这里， u_t 通过除以 $w_n + t\phi$ 的 p-范数进行归一化。对于充分小的 $|t|$, $u_t \in M_\eta$。事实上

$$\lim_{t \to 0} ||u_t - (-\phi_{1,p})|| = ||w_n - (-\phi_{1,p})||.$$

由 (3.9),

$$\begin{aligned} ||w_n - (-\phi_{1,p})|| &\leq ||w_n - u_n|| + ||u_n - (-\phi_{1,p})|| \\ &\leq \frac{1}{n} + \delta < \eta + \delta, \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} ||w_n - (-\phi_{1,p})|| &\geq ||(-\phi_{1,p}) - (u_n)|| - ||u_n - w_n|| \\ &\geq \delta - \frac{1}{n} > \delta - \eta. \end{aligned}$$

在 (3.10) 中用 u_t 替换 u，并记 $\beta(t) = ||w_n + t\phi||_p$，则对 $t > 0$，我们得到

$$\frac{I_b(w_n) - I_b(w_n + t\phi)}{t} \leq \frac{1}{t}\left(\frac{1}{\beta(t)^p} - 1\right) I_b(w_n + t\phi) + \frac{1}{nt}\frac{1}{\beta(t)}\|w_n(1 - \beta(t)) + t\phi\|. \tag{3.12}$$

(3.12) 右端的第一项含有 $(\beta(t)^p-1)/t$，它等于 $\beta(t)^p$ 在 $t=0$ 附近的导数。利用 (3.11)，

$$\frac{d}{dt}\beta(t)^p\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int_\Gamma |w_n+t\phi|^p\,dx\right)\Big|_{t=0} = p\int_\Gamma |w_n|^{p-2}w_n\phi\,dx = 0.$$

因此，当 $t\to 0$ 时 $(\beta(t)^p-1)/t\to 0$。类似地，(3.12) 右端第二项涉及 $(1-\beta(t))/t$，由 (3.11) 可知，当 $t\to 0$ 时该项也趋于零点。在 (3.12) 中令 $t\to 0$，并以 $-\phi$ 代替 ϕ 重复上述论证，我们得到

$$\left|\langle I_b'(w_n),\phi\rangle\right| \le \frac{1}{n}||\phi||, \tag{3.13}$$

对所有在 w_n 处切向于 M 的 $\phi\in X(\Gamma,V_D)$。对 $X(\Gamma,V_D)$ 中任意的 ϕ，选取 a_n，使得 $\phi-a_nw_n$ 满足 (3.11)，即 $a_n=\int_\Gamma |w_n|^{p-2}w_n\phi\,dx$。在 (3.13) 中以 $\phi-a_nw_n$ 替换 ϕ，我们推出

$$\left|\langle I_b'(w_n),\phi\rangle - \langle I_b'(w_n),w_n\rangle\int_\Gamma |w_n|^{p-2}w_n\phi\,dx\right| \le \frac{1}{n}||\phi-a_nw_n||$$

由 $c_n=\langle I_b'(w_n)\ w_n\rangle$ 与 $\|a_nw_n\|\le K\|\phi\|$，对某个 $\delta_n\to 0$，我们得到

$$\left|\langle I_b'(w_n),\phi\rangle - c_n\int_\Gamma |w_n|^{p-2}w_n\phi\,dx\right| \le \delta_n||\phi||.$$

~~~~因此 $||I'_b(w_n)||_*\to 0$，从而 w_n 是 I_b 在 M上的一个（$P.S.$）序列。由 M上的 I_b 满足（$P.S.$）条件~~，可知存在一个子序列 $w_{n_k}\to w$ 在 $X(\Gamma,V_D)$ 中强收敛。于是 $w\in M$ 满足 ~~$\|w-(-\phi_{1,p})\|=\delta$ 且 $I_b(w)=\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)$，这与 $I_b(u)>I_b(-\phi_{1,p})$ 矛盾。□

~~现在，山路定理的一个版本给出了 I_b的另一个临界点。

命题 3.12。设 $b\ge 0$。则集合

$$\mathbb{P}=\{P\in C([-1,1],M): P(-1)=-\phi_{1,p},\ P(1)=\phi_{1,p}\}$$

非空，且

$$\alpha(b)=\inf_{P\in\mathbb{P}}\max_{u\in P[-1,+1]}\tilde{I}_b(u) \tag{3.14}$$

~~~~~~是 I_b. 的一个临界值。此外，$\alpha(b)>$最大值$\{I_b(-\phi_{1,p})\ I_b(\phi_{1,p})\}=\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)$。

证明。为证明 $\mathbb{P}$ 非空，取 $\psi\in X(\Gamma,V_D)$ 使得 $\psi\notin span(\phi_{1,p})$，并考虑经过 ψ 和$\phi_{1,p}$的路径

$$P(t)=\frac{t\phi_{1,p}+(1-|t|)\psi}{\|t\phi_{1,p}+(1-|t|)\psi\|_p}\qquad t\in[-1,1],$$

由于 $t\phi_{1,\ p}+(1-|t|)\psi\ne 0$，因此其定义良好。由命题 3.4 和引理 3.11，存在$\delta\in(0,\ 2\|\phi_{1,\ p}\|)$，使得

$$\inf\{\tilde{I}_b(u): u\in M,\|u+\phi_{1,p}\|=\delta\}>\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)=\max\{\tilde{I}_b(-\phi_{1,p}),\tilde{I}_b(\phi_{1,p})\}.$$

由引理 3.6 可知 $(P.S)$ 条件成立，而由上面的不等式可知山路几何成立。因此，$\alpha(b)$ 是 I_b 的一个临界值。由于 $\mathbb{P}$ 中的每条路径都与球面 $\{\|u+\phi_{1,p}\|=\delta\}$ 相交，上面的不等式还给出 $\tilde{\alpha(b)}>\tilde{\max}\{I_b(-\phi_{1,\ p})\ I_b(\phi_{1,\ p})\}=\lambda_{1,\ p}(\Gamma,\ V_D)$。□

根据式 (3.14) 中定义的临界值 $\alpha(b)$，我们证明了以下结果。

命题 3.13。对于每个 $b\ge 0$，点 $(b+\alpha(b)\ \alpha(b))$（其中 $\alpha(b)>\lambda_{1,\ p}(\Gamma,V_D)$ 由极小极大公式 (3.14) 定义）属于 $\Sigma_{p,\ \Gamma}$。

由于$\Sigma_{p,\ \Gamma}$ 关于对角线具有对称性，因此在命题 3.13中得到的整条曲线为

$$\mathfrak{C}=\{(b+\alpha(b),\alpha(b)),(\alpha(b),b+\alpha(b)): b\ge 0\}. \tag{3.15}$$

3.2 平凡直线的孤立性与顶点 v1 的极小性

我们首先证明，直线 $\mathbb{R}\times\{\lambda_{1,p}(\Gamma,\ V_D)\}$ 和 $\{\lambda_{1,p}(\Gamma,\ V_D)\}\times\mathbb{R}$ 在 $\Sigma_{p,\ \Gamma}$中是孤立的。˜随后，我们记录泛函 I_b 的一些拓扑性质以及若干辅助引理。本节的主要目的是说明，在 (3.15) 中定义的 $\mathfrak{C}$ 各点是 $b\geq 0$的第一个非平凡点，它们位于 $\Sigma_{p,\ \Gamma}$ 与直线 $(b,\ 0)+c(1,\ 1)$ 的交集中，且满足 $c\in\mathbb{R}$。

命题 *3.14.* 直线 $\mathbb{R}\times\{\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)\}$ 和 $\{\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)\}\times\mathbb{R}$ 在 $\Sigma_{p,\Gamma}$ 中是孤立的，也就是说，不存在序列 $(\lambda_n^+,\lambda_n^-)\in\Sigma_{p,\Gamma}$，满足 $\lambda_n^+,\lambda_n^->\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)$，使得 $(\lambda_n^+,\lambda_n^-)\to(\lambda^+,\lambda^-)$，且 $\lambda^+=\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)$ 或 $\lambda^-=\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)$。

证明。反设存在序列 $(\lambda_n^+,\lambda_n^-)\in\Sigma_{p,\Gamma}$，满足 $\lambda_n^+,\lambda_n^->\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)$，且 $(\lambda_n^+,\lambda_n^-)\to(\lambda^+,\lambda^-)$，其中 $\lambda^+=\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)$ 或 $\lambda^-=\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)$。令 $u_n\in X(\Gamma,V_D)$ 为一个解

$$-\left(|u_n'|^{p-2}u_n'\right)'=\lambda_n^+(u_n^+)^{p-1}-\lambda_n^-(u_n^-)^{p-1}\quad\text{on the edges of }\Gamma,\tag{3.16}$$

通过 $\|u_n\|_p=1$ 归一化。于是

$$\int_\Gamma|u_n'|^p\,dx=\lambda_n^+\int_\Gamma(u_n^+)^p\,dx+\lambda_n^-\int_\Gamma(u_n^-)^p\,dx\leq\lambda_n^++\lambda_n^-$$

这意味着 $\{u_n\}$ 在 $X(\Gamma,V_D)$ 中有界，并且经过取一个子序列，$u_{n_k}\rightharpoonup u$ 在 $X(\Gamma,V_D)$ 中弱收敛，且 $u_{n_k}\to u$ 在 $L^p(\Gamma)$ 中强收敛。用 $u_{n_k}-u$ 检验 u_{n_k} 的方程，并对零阶项使用 H¨öl der 不等式，可得 $\limsup_k\int_\Gamma|u_{n_k}'|^{p-2}u_{n_k}'(u_{n_k}'-u')\,dx\leq 0$，因此根据引理 2.5，$u_{n_k}\to u$ 属于 $X(\Gamma,V_D)$。取极限后，弱形式表明 u 满足

$$-\left(|u'|^{p-2}u'\right)'=\lambda^+(u^+)^{p-1}-\lambda^-(u^-)^{p-1}\quad\text{on the edges of }\Gamma.\tag{3.17}$$

由于 $\lambda_n^\pm>\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)$，函数 u_n 变号：例如，若 $u_n\geq 0$，则 u_n 是特征值为 $\lambda_n^+>\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)$ 的非负特征函数，这与引理 2.8*(iii)* 矛盾；$u_n\leq 0$ 的情形同理。设 $\lambda^+=\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)$；$\lambda^-=\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)$ 的情形是对称的。将 (3.17) 乘以 u^+ 并在 Γ 上积分，得到

$$\int_\Gamma|(u^+)'|^p\,dx=\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)\int_\Gamma(u^+)^p\,dx.\tag{3.18}$$

若 $u^+\not\equiv 0$，则 $u^+/\|u^+\|_p$ 取得下确界 (1.3)，因此是与 $\lambda_{1、\ p}(\Gamma,\ V_D)$ 相关联的特征函数。根据引理 2.8(ii)，$u^+>0$ 在 $\Gamma\setminus V_D$ 上成立，因此 $u^-=0$ 且 $u=\phi_{1、\ p}$。若 $u^+\equiv 0$，则 $-u$ 是特征值为 λ^- 的非负特征函数，因此 $\lambda^-=\lambda_{1、\ p}(\Gamma,\ V_D)$，并且根据引理 2.8，$u=-\phi_{1、\ p}$。于是，在 $X(\Gamma,\ V_D)$ 中，$u_{n_k}\to\phi_{1、\ p}$ 或 $u_{n_k}\to-\phi_{1、\ p}$；并且根据定理 2.4，在 Γ 上一致成立。由于 ϕ_1 在 $\Gamma\setminus V_D$ 上成立，且 V_D 有限，$\ell\{x\in\Gamma:$ 当 $\delta\to 0$ 时，$\phi_1、\ _p(x)<\delta\}\to 0$，因此

$$\text{either }\ell\{x\in\Gamma:u_{n_k}(x)<0\}\to 0\quad\text{or}\quad\ell\{x\in\Gamma:u_{n_k}(x)>0\}\to 0.\tag{3.19}$$

另一方面，将（3.16）乘以顶点 v1 并积分，得到

$$\int_\Gamma|(u_n^+)'|^p\,dx=\lambda_n^+\int_\Gamma(u_n^+)^p\,dx.\tag{3.20}$$

固定 $q\in(p,\ \infty)$，并令 $K>0$ 满足$\|u\|_q\leq K\|u\|_{W^{1,\ p}(\Gamma)}$（定理 2.3）。由 Hölder 不等式和（3.20），

$$\int_\Gamma(u_n^+)^p\,dx\leq\left(\ell\{x\in\Gamma:u_n(x)>0\}\right)^{1-\frac{p}{q}}\|u_n^+\|_q^p$$

$$\leq \big(\ell\{x\in\Gamma : u_n(x)>0\}\big)^{1-\frac{p}{q}} K^p\,(1+\lambda_n^+)\int_\Gamma (u_n^+)^p\,dx,$$

其中（3.20）以如下形式使用：$\|u_n^+\|^p_{W^{1,\,p}(\Gamma)} = (1+\lambda_n^+)\int_\Gamma (u_n^+)^p\,dx$。由于 $u_n^+ \not\equiv 0$，

$$(1+\lambda_n^+)^{-1}K^{-p} \leq \big(\ell\{x\in\Gamma : u_n(x)>0\}\big)^{1-\frac{p}{q}},$$

同理

$$(1+\lambda_n^-)^{-1}K^{-p} \leq \big(\ell\{x\in\Gamma : u_n(x)<0\}\big)^{1-\frac{p}{q}}.$$

序列 $\lambda_n^\pm$ 有界，因此这两个不等式与 (3.19) 矛盾。这证明了平凡直线在$\Sigma_{p,\Gamma}$中是孤立的。

□

引理 3.15。 集合 $\Sigma_{p,\Gamma}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中是闭集。

证明。 设 $(\lambda_n^+,\lambda_n^-)\in\Sigma_{p,\Gamma}$ 收敛到 (λ^+,λ^-)，并设 u_n 是满足$\|u_n\|_p=1$的 (1.1) 的解。用 u_n 测试 (2.7) 得到 $\int_\Gamma |u_n'|^p\,dx \leq |\lambda_n^+|+|\lambda_n^-|$，因此 (u_n) 在 $X(\Gamma,V_D)$ 中有界。取一个子序列，$u_n \rightharpoonup u$ 在 $X(\Gamma,V_D)$ 中且 $u_n\to u$ 在 $L^p(\Gamma)$ 中，因此 $\|u\|_p=1$。用u_n-u 测试 (2.7)，并使用与引理 3.6 的证明中相同的 (S_+) 性质，我们得到 $u_n\to u$ 在 $X(\Gamma,V_D)$ 中，并令 (2.7) 中的参数取极限，得到 u 是满足 (λ^+,λ^-) 的 (1.1) 的非平凡解。

□

引理 3.16。 设 $\mathcal{U}\subseteq M$ 为开集。则 $\mathcal{U}$ 的每个连通分支 $\mathcal{U}'$ 都是开且弧连通的，并且 $\partial\mathcal{U}'\cap\mathcal{U}=\emptyset$。

证明。 根据引理 3.7，对于 $u\in M$ 和 $\rho>0$，包含 u 的 $B_\rho(u)$ 的道路分支是 u 的一个开道路连通邻域。因此 M 是局部道路连通的，$\mathcal{U}$ 的连通分支是开的，并且与其道路分支重合；由于道路连通的豪斯多夫空间是弧连通的，它们也是弧连通的。若 $u_0\in\partial\mathcal{U}'\cap\mathcal{U}$，则设 $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ 是 u_0 的一个开道路连通邻域。于是 $\mathcal{V}$ 与 $\mathcal{U}'$ 相交，因此 $\mathcal{U}'\cup\mathcal{V}$ 是连通的且 $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}'$。从而 $u_0\in\mathcal{U}'$，这是不可能的，因为 $\mathcal{U}'$ 是开集且 $u_0\in\partial\mathcal{U}'$。 □

˜在下一个引理中，我们将在形如以下的集合中确定 I_b 的临界点

$$\mathcal{U}=\{u\in M : \tilde{I}_b(u)<r\}.$$

˜**引理 3.17**。 $\mathcal{U}$ 的每个连通分支都包含 I_b 的一个临界点。

˜**证明**。设 $\mathcal{U}_1$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个连通分支，并令 $h=\inf\{I_b(u): u\in\mathcal{U}_1\}$，其中 $\mathcal{U}_1$ 表示 $\mathcal{U}_1$ 的闭包。我们断言，这个下确界在某个满足 $\tilde{I}_b(\bar{u})=h<r$ 的 $\bar{u}\in\mathcal{U}_1$ 处取到，并且 $\bar{u}\in\mathcal{U}$。若如此，则要么 $\bar{u}\in\mathcal{U}_1$，此时 $\bar{u}$ 是 I_b 的临界点；要么$\bar{u}\in\partial\mathcal{U}_1$，而这由引理 3.16 可知不可能。

为证明 h 能取到，取满足 $\tilde{I}_b(u_n)\leq h+\frac{1}{2n^2}$ 的 $\{u_n\}\subset\mathcal{U}_1$ 为极小化序列。˜对 $\mathcal{U}_1$ 上的 I_b 应用 Ekeland 变分原理，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们都可以找到 $w_n\in\mathcal{U}_1$ 使得

$$\tilde{I}_b(w_n)\leq\tilde{I}_b(u_n), \tag{3.21}$$

$$\|w_n-u_n\|\leq 1/n, \tag{3.22}$$

$$\tilde{I}_b(w_n)\leq\tilde{I}_b(u)+\frac{1}{n}\|u-w_n\|,\quad \forall\, u\in\overline{\mathcal{U}_1}. \tag{3.23}$$

˜˜我们证明，$\{w_n\}$ 是 M上的（$P.S.$）序列。由（3.21）可知，序列 $I_b(w_n)$ 有界；一旦已知 $\|I_b'(w_n)\|_*\to 0$，定义 3.5 即可适用，而引理 3.6 给出一个子序列 $w_{n_k}\to w$ 在 $X(\Gamma,V_D)$ 中强收敛。为验证 $\|I_b'(w_n)\|_*\to 0$，固定 n，并令 $\phi\in X(\Gamma,V_D)$ 在 w_n处与 M 相切，即

$$\int_\Gamma |w_n|^{p-2}w_n\,\phi\,dx=0,$$

并定义

$$u_t = \frac{w_n + t\phi}{\|w_n + t\phi\|_p}.$$

由 (3.21) 以及极小化性质可知，当顶点 v1 足够大时，

$$\tilde{I}_b(w_n) \le \tilde{I}_b(u_n) \le h + \frac{1}{2n^2} < r. \tag{3.24}$$

因此顶点 v1：如果顶点 v3，那么引理 3.16 将迫使顶点 v4(顶点 v5) 顶点 v6，这与 (3.24) 矛盾。因此，当顶点 v9 足够小时，我们可以在 (3.23) 中用顶点 v7 代替顶点 v8，从而得到

$$\tilde{I}_b(w_n) \le \tilde{I}_b(u_t) + \frac{1}{n}\|u_t - w_n\|.$$

引理 3.11 的证明中的计算现表明，顶点 v1 是一个（顶点 v2）序列。由 (3.22) 可知，顶点 v3 随后具有一个收敛子列，下确界顶点 v4 可以取到，结论得证。

□

定理 1.1(i) 的证明。我们首先证明，当顶点 v5、顶点 v6(顶点 v7、顶点 v8) 时，(顶点 v1、顶点 v2) 不是顶点 v3、顶点 v4 的非平凡点。设顶点 v9 是方程 (1.1) 的一个非平凡解，且 (顶点 v10、顶点 v11) 顶点 v12(顶点 v13、顶点 v14)。如果顶点 v15，那么顶点 v16 是一个特征值为顶点 v17 的非负特征函数，而引理 2.8(iii) 给出顶点 v18、顶点 v19(顶点 v20、顶点 v21)。如果顶点 v22，那么同理有顶点 v23、顶点 v24(顶点 v25、顶点 v26)。如果顶点 v27 改变符号，则用顶点 v28 检验 (2.7) 得到顶点 v29(顶点 v30)顶点 v31(顶点 v32)顶点 v33，因此顶点 v34、顶点 v35(顶点 v36、顶点 v37)。在所有情况下，该点都位于一条平凡直线上。

反设存在 ω，满足 $\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) < \omega < \alpha(b)$，使得 $(b+\omega, \omega) \in \Sigma_{p,\Gamma}$。由于直线 $\mathbb{R} \times \{\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)\}$ 和 $\{\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)\} \times \mathbb{R}$ 在 $\Sigma_{p,\Gamma}$ 中是孤立的，且 $\Sigma_{p,\Gamma}$ 是闭集（命题 3.14 和引理 3.15），我们可以选取这样的 ω 使其极小。˜因此，ω 是 I_b 的临界值，且 $\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) < \omega < \alpha(b)$，并且在˜区间 $(\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)\ \omega)$ 中不存在临界值。一条沿着该路径从 $-\phi_{1,p}$ 到 $\phi_{1,p}$ 且满足 $I_b \le \omega$ 的路径，将与 $\alpha(b)$ 的定义矛盾（见 (3.14)）。

˜令 $u \in M$ 为 I_b 在水平 ω 处的一个临界点，因此 u 满足

$$\begin{cases} -\big(|u'|^{p-2}u'\big)' = (b+\omega)(u^+)^{p-1} - \omega(u^-)^{p-1} & \text{on the edges of } \Gamma, \\ u(v) = 0 & \forall\, v \in V_D, \\ \displaystyle\sum_{e \in E_v(\Gamma)} |u_e'(v)|^{p-2}u_e'(v) = 0, & v \in V(\Gamma) \setminus V_D. \end{cases} \tag{3.25}$$

(3.25) 的弱形式为

$$\int_\Gamma |u'|^{p-2}u'\phi'\,dx = (b+\omega)\int_\Gamma (u^+)^{p-1}\phi\,dx - \omega\int_\Gamma (u^-)^{p-1}\phi\,dx, \quad \forall\,\phi \in X(\Gamma, V_D). \tag{3.26}$$

依次令 $\phi = u^+$ 和 $\phi = u^-$，(3.26) 变为

$$\int_\Gamma |(u^+)'|^p\,dx = (b+\omega)\int_\Gamma (u^+)^p\,dx, \qquad \int_\Gamma |(u^-)'|^p\,dx = \omega\int_\Gamma (u^-)^p\,dx, \tag{3.27}$$

分别。因此

$$\tilde{I}_b(u) = \omega,$$

$$\tilde{I}_b\Big(\frac{u^+}{\|u^+\|_p}\Big) = \frac{\int_\Gamma |(u^+)'|^p\,dx - b\int_\Gamma (u^+)^p\,dx}{\|u^+\|_p^p} = \frac{\omega\int_\Gamma (u^+)^p\,dx}{\|u^+\|_p^p} = \omega,$$

$$\tilde{I}_b\left(\frac{-u^-}{\|u^-\|_p}\right)=\frac{\int_\Gamma|(-u^-)'|^p\,dx}{\|u^-\|_p^p}=\frac{\omega\int_\Gamma(u^-)^p\,dx}{\|u^-\|_p^p}=\omega,$$

$$\tilde{I}_b\left(\frac{u^-}{\|u^-\|_p}\right)=\frac{\int_\Gamma|(u^-)'|^p\,dx-b\int_\Gamma(u^-)^p\,dx}{\|u^-\|_p^p}=\frac{(\omega-b)\int_\Gamma(u^-)^p\,dx}{\|u^-\|_p^p}=\omega-b.$$

我们有四个特殊点，因此在 M中考虑三条路径：从 u到 $\frac{u^+}{\|u^+\|_p}$的 $\gamma_1(t)$、从 $\frac{u^+}{\|u^+\|_p}$ 到 $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$的$\gamma_2(t)$，以及从$\frac{-u^-}{\|u^-\|_p}$ 到u的 $\gamma_3(t)$，定义如下 ——

$$\gamma_1(t)=\frac{tu+(1-t)u^+}{\|tu+(1-t)u^+\|_p},\quad \gamma_2(t)=\frac{tu^++(1-t)u^-}{\|tu^++(1-t)u^-\|_p},\quad \gamma_3(t)=\frac{-tu^-+(1-t)u}{\|-tu^-+(1-t)u\|_p}.$$

利用 $tu+(1-t)u^+=u^+-tu^-$ 和 $-tu^-+(1-t)u=(1-t)u^+-u^-$，结合 (3.27)，我们对所有 $t\in[0,1]$ 计算得：

$$\begin{aligned}\tilde{I}_b\left(\frac{tu+(1-t)u^+}{\|tu+(1-t)u^+\|_p}\right)&=\frac{\int_\Gamma|(u^+-tu^-)'|^p\,dx-b\int_\Gamma(u^+)^p\,dx}{\|u^+-tu^-\|_p^p}\\&=\frac{\omega\int_\Gamma(u^+-tu^-)^p\,dx}{\|u^+-tu^-\|_p^p}=\omega.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_b\left(\frac{tu^++(1-t)u^-}{\|tu^++(1-t)u^-\|_p}\right)&=\frac{\omega\left(\int_\Gamma(tu^++(1-t)u^-)^p\,dx\right)-b(1-t)^p\int_\Gamma(u^-)^p\,dx}{\|tu^++(1-t)u^-\|_p^p}\\&=\omega-\frac{b(1-t)^p\int_\Gamma(u^-)^p\,dx}{\|tu^++(1-t)u^-\|_p^p}\le\omega.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_b\left(\frac{-tu^-+(1-t)u}{\|-tu^-+(1-t)u\|_p}\right)&=\frac{\int_\Gamma|((1-t)u^+-u^-)'|^p\,dx-b(1-t)^p\int_\Gamma(u^+)^p\,dx}{\|(1-t)u^+-u^-\|_p^p}\\&=\frac{\omega\int_\Gamma((1-t)u^+-u^-)^p\,dx}{\|(1-t)u^+-u^-\|_p^p}=\omega.\end{aligned}$$

沿 $\gamma_1(t)$ 从 u 到 $\frac{u^+}{\|u^+\|_p}$，再沿 $\gamma_2(t)$ 从 $\frac{u^+}{\|u^+\|_p}$ 到 $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$，我们到达 $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$，它位于第 $\omega-b$ 层，同时整个过程中始终处于不高于 ω 的层级。令 $\mathcal{U}=\{\psi\in M:\ I_b(\psi)<\omega-b\}$。于是 $\phi_1,_p\in\mathcal{U}$，因为 $I_b(\phi_1,_p)=\lambda_1,_p(\Gamma,V_D)-b<\omega-b$，并且只要 $\lambda_1,_p(\Gamma,V_D)$ 就有 $-\phi_1,_p\in\mathcal{U}$。由 ω 的选取，I_b 在 $\mathcal{U}$ 中的临界点为 $\phi_1,_p$；若 $\omega-b>\lambda_1,_p(\Gamma,V_D)$，则还有 $-\phi_1,_p$，其中 $\lambda_1,_p(\Gamma,V_D)$。设 $v\in\mathcal{U}$ 是函数值为 $c<\omega-b\le\omega$ 的一个临界点。若 $v\ge0$，则 v 是特征值为 $b+c$ 的非负特征函数，因此由引理 2.8 得 $v=\phi_1,_p$。若 $v\le0$，则 $-v$ 是特征值为 c 的非负特征函数，因此 $v=-\phi_1,_p$。若 v 变号，对 v^- 进行测试可得 $c\ge\lambda_1,_p(\Gamma,V_D)$，而 $c=\lambda_1,_p(\Gamma,V_D)$ 将使 $v^-/\|v^-\|_p$ 成为在非空开集 $\{v>0\}$ 上消失的第一特征函数，这与引理 2.8(ii) 矛盾。剩下的情况是 $\lambda_1,_p(\Gamma,V_D)<c<\omega$，这与 ω 的选取矛盾。

回忆一下，$\tilde{I}_b\left(\frac{u^-}{\|u^-\|_p}\right)=\omega-b$。函数 $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$ 不变号，并且在一个具有正测度的集合上为零，因此它不是 I_b 的临界点（根据引理 2.8，恒号的临界点是 $\pm\phi_1,_p$，且在 $\Gamma\setminus V_D$上不为零）。令 $v=\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$。由于 $\|\tilde{I}_b'(v)\|_*>0$，存在 $\varphi\in T_vM$，使得 $\langle I_b'(v)\ \varphi\rangle<0$，并且 $\xi(t)=(v+t\varphi)/\|v+t\varphi\|_p$ 是 M 中的一条 C^1 路径，其中 $\xi(0)=v$ 且 $\frac{d}{dt}\tilde{I}_b(\xi(t))\big|_{t=0}=\langle I_b'(v)\ \varphi\rangle<0$，因为 $t\mapsto\|v+t\varphi\|_p$ 的导数在 $t=0$处为零。因此，对于足够小的 $t>0$，$\xi([0,t])$将 v 连接到点 $\psi=\xi(t)$，并且沿着 $\xi([0,t])$有 $I_b(\psi)<\omega-b$、和 $I_b\le\omega-b$。根据引理 3.17，包含 ψ的 $\mathcal{U}$的连通分支

包含 $\phi_{1,\ p}$ 或 $-\phi_{1,\ p}$；如果 $\omega - b \le \lambda_{1,\ p}(\Gamma,\ V_D)$，则只能出现第一种情形，因为此时$-\phi_{1,\ p} \notin \mathcal{U}$。假设它包含 $\phi_{1,\ p}$。于是存在一条路径 $\gamma_4(t)$，从 $\frac{u^-}{\|u^-\|_p}$ 通往 $\phi_{1,\ p}$，并沿着~满足 $I_b \le \omega - b$。将 $\gamma_1(t)$、$\gamma_2(t)$ 和 $\gamma_4(t)$ 首尾相接，得到 M 中的一条路径，该路径从 u 通往 $\phi_{1,}$ 且各点的层级至多为 $_p$。

考虑对称路径 $-\gamma_4(t)$，从 $\frac{-u^-}{\|u^-\|_p}$ 到 $-\phi_{1,\ p}$。对于任意 $u \in M$, $\left|\tilde{I}_b(u) - \tilde{I}_b(-u)\right| \le b$。因此

$$\tilde{I}_b(-\gamma_4(t)) \le \tilde{I}_b(\gamma_4(t)) + b \le \omega - b + b = \omega, \quad \forall\, t \in [0,1].$$

连接 $\gamma_3(t)$ 和 $-\gamma_4(t)$，便得到一条从 u 到 $-\phi_{1,\ p}$ 的路径。总而言之，这是一条位于 M 中、从 $-\phi_{1,\ p}$ 到 $\phi_{1,\ p}$ 的路径 $\gamma(t)$，其中对所有 $t \in [0,1]$，$I_b(\gamma(t)) \le \omega$，这便是所需的矛盾。

反之，如果该连通分支包含 $-\phi_{1,\ p}$，令 γ_4 为一条从 $\frac{u}{\|u^-\|_p}$ 到 $-\phi_{1,\ p}$ 的路径，沿着该路径 $I_b \le \omega - b$。那么 $-\gamma_4$ 将 $\frac{-u}{\|u^-\|_p}$ 与 $\phi_{1,\ p}$ 连接起来，且 $I_b \le \omega$；逆向遍历 $\gamma_4, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_3$，再经过 $-\gamma_4$，便得到一条从 $-\phi_{1,\ p}$ 到 $\phi_{1,\ p}$ 的路径，沿着该路径 $I_b \le \omega$，同样导出矛盾。

□

下面的结果直接由定理 1.1 得出，它给出了问题 (1.1) 的第二特征值$\lambda_{2,\ p}(\Gamma,\ V_D)$ 的变分刻画。

推论 3.18。 (2.6) 中的下确界可以达到，并且有

$$\lambda_{2,p}(\Gamma, V_D) = \alpha(0) = \inf_{P \in \mathbb{P}} \max_{u \in P[-1,+1]} \int_\Gamma |u'|^p \, dx.$$

其中，$\mathbb{P}$表示连接 $-\phi_{1、\ p}$ 和 $\phi_{1、p}$的所有连续路径所构成的族。

证明。根据命题 3.13，$b = 0$，$(\alpha(0)\ \alpha(0)) \in \Sigma_{p,\Gamma}$，因此 $\alpha(0)$ 是一个特征值，并且$\alpha(0) > \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)$ 以及 $\lambda_{2,p}(\Gamma, V_D) \le \alpha(0)$。根据定理 1.1，$b = 0$，$(\omega, \omega) \notin \Sigma_{p,\Gamma}$对于 $\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) < \omega < \alpha(0)$，也就是说，在 $(\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)\ \alpha(0))$ 中不存在特征值。因此$\lambda_{2,p}(\Gamma, V_D) = \alpha(0)$，且 (2.6) 中的下确界可以达到。由于 $\tilde{I}_0(u) = \int_\Gamma |u'|^p \, dx$ 在 M 上，

$$\alpha(0) = \inf_{P \in \mathbb{P}} \max_{u \in P[-1,+1]} I_0(u) = \inf_{P \in \mathbb{P}} \max_{u \in P[-1,+1]} \int_\Gamma |u'|^p \, dx.$$

□

4 第一条非平凡曲线的性质

本节将证明，第一条非平凡曲线 $\mathfrak{c}$ 是 Lipschitz连续的、严格递减的，并且在紧连通量子图上呈现特定的渐近行为。

命题4.1。 由映射 $\mathfrak{c}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ 给出的$\mathfrak{c}(b) = (b + \alpha(b) - \alpha(b)$ 所描述的第一条非平凡曲线是 *Lipschitz*连续的。

证明。 设 $0 \le b < b'$。在 M上，我们有 $0 \le \tilde{I}_b - \tilde{I}_{b'} = (b' - b) \int_\Gamma (u^+)^p \, dx \le b' - b$。因此，对于任意 $P \in \mathbb{P}$，$\max_P I_{b'} \le \max_P I_b \le \max_P I_{b'} + b' - b$，由（3.14）可得 $0 \le \alpha(b) - \alpha(b') \le b' - b$。于是$\alpha$是非递增且 1-Lipschitz 的，并且 $\|\mathfrak{c}(b) - \mathfrak{c}(b')\| \le |b - b'| + 2|\alpha(b) - \alpha(b')| \le 3|b - b'|$。

□

对于开集 $\mathcal{U} \subseteq \Gamma$，我们定义

$$X_{\mathcal{U}} = \{u \in X(\Gamma, V_D) : u = 0 \text{ on } \Gamma \setminus \mathcal{U}\}, \qquad \lambda_{1,p}(\mathcal{U}) = \inf\Big\{ \frac{\int_\Gamma |u'|^p \, dx}{\int_\Gamma |u|^p \, dx} : u \in X_{\mathcal{U}},\ u \not\equiv 0 \Big\}. \tag{4.1}$$

根据定理 2.3，将其应用于 $X(\Gamma,\ V_D)$ 的闭子空间 $X_{\mathcal{U}}$ 顶点 v1，可知下确界可以取得，且极小化函数可以取为非负函数。

引理 4.2。 设 $\mathcal{U}_1$、 $\mathcal{U}_2$ 是 Γ 的两个开子集，其中 $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$、 $\mathcal{U}_2 \setminus V_D$ 连通，且 $\ell(\mathcal{U}_2 \setminus \mathcal{U}_1) > 0$。于是 $\lambda_{1,\,p}(\mathcal{U}_1) > \lambda_{1,\,p}(\mathcal{U}_2)$。

证明。 根据第一特征值 $\lambda_{1,p}$ 的定义，不等式 $\lambda_{1,p}(\mathcal{U}_1) \geq \lambda_{1,p}(\mathcal{U}_2)$ 成立。反设等号成立，即 $\lambda_{1,p}(\mathcal{U}_1) = \lambda_{1,p}(\mathcal{U}_2)$。设 $\phi_{1,p}$ 表示在 $\mathcal{U}_1$ 外延拓为零的非负归一化极小化函数 $\lambda_{1,p}(\mathcal{U}_1)$。于是

$$\int_{\mathcal{U}_2} |\phi'_{1,p}|^p \, dx = \lambda_{1,p}(\mathcal{U}_1) \int_{\mathcal{U}_2} |\phi_{1,p}|^p \, dx = \lambda_{1,p}(\mathcal{U}_2) \int_{\mathcal{U}_2} |\phi_{1,p}|^p \, dx,$$

这意味着 $\phi_{1,p}$ 达到 $\lambda_{1,p}(\mathcal{U}_2)$，并满足 $\int_\Gamma |\phi'_{1,p}|^{p-2}\phi'_{1,p}\phi' \, dx = \lambda_{1,p}(\mathcal{U}_2)\int_\Gamma \phi_1^{p-1}{}_{,p}\, \phi \, dx$，对所有 $\phi \in X_{\mathcal{U}_2}$ 均成立。将引理 2.8*(i)* 的证明应用于 $\mathcal{U}_2 \setminus V_D$ （在 $\mathcal{U}_2 \setminus V_D$ 中的 Γ 的顶点处满足基尔霍夫条件），可得在 $\mathcal{U}_2 \setminus V_D$ 上有 $\phi_{1,p} > 0$。这与在正长度集合 $\mathcal{U}_2 \setminus \mathcal{U}_1$ 上的 $\phi_{1,p} = 0$ 矛盾。因此，不等式是严格的。 □

引理 4.3。 设 $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathfrak{C}$，且 $\lambda^+(x)$ 和 $\lambda^-(x)$ 是满足条件的 L^∞ 函数 g

$$\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \leq \lambda^+(x) \leq \lambda^+, \qquad \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \leq \lambda^-(x) \leq \lambda^- \quad a.e.\ in\ \Gamma. \tag{4.2}$$

进一步假设

$$\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) < \lambda^+(x) \quad and \quad \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) < \lambda^-(x) \quad on\ subsets\ of\ positive\ measure. \tag{4.3}$$

那么，任意非平凡解 u的

$$\begin{cases} -\big(|u'|^{p-2}u'\big)' = \lambda^+(x)(u^+)^{p-1} - \lambda^-(x)(u^-)^{p-1} & on\ the\ edges\ of\ \Gamma, \\ u(v) = 0 & \forall\, v \in V_D, \\ \displaystyle\sum_{e \in E_v(\Gamma)} |u'_e(v)|^{p-2}u'_e(v) = 0, & v \in V(\Gamma) \setminus V_D. \end{cases} \tag{4.4}$$

在 Γ中变号，而且

$$\lambda^+(x) = \lambda^+ \ \ a.e.\ on\ \{x \in \Gamma : u(x) > 0\} \quad and \quad \lambda^-(x) = \lambda^- \ \ a.e.\ on\ \{x \in \Gamma : u(x) < 0\}.$$

证明。 设 u 是方程（4.4）的一个非平凡解。如有必要，将 u 替换为 $-u$，我们可以假设点（λ^+, λ^-） $\in \mathfrak{C}$ 满足 $\lambda^+ \geq \lambda^-$。我们首先证明 u 在 Γ中变号。反设并非如此。此时有两种情况:

(i) $u \geq 0$ 在 Γ 上几乎处处成立; (ii) $u \leq 0$ 在 Γ 上几乎处处成立。

在情形 (i) 中，顶点 v1 满足

$$\begin{cases} -\big(|u'|^{p-2}u'\big)' = \lambda^+(x)|u|^{p-2}u & \text{on the edges of } \Gamma, \\ u(v) = 0 & \forall\, v \in V_D, \\ \displaystyle\sum_{e \in E_v(\Gamma)} |u'_e(v)|^{p-2}u'_e(v) = 0, & v \in V(\Gamma) \setminus V_D. \end{cases}$$

根据引理 2.8*(iii)*，有 $m = \lambda^+(x)$， $\int_\Gamma(\lambda^+(x) - \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D))\phi_1^p{}_{,\,p}\, dx \leq 0$。这是不可能的：根据 (4.3)， $\lambda^+(x) \geq \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)$ 几乎处处成立，而 $\lambda^+(x) > \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)$ 在一个正测度集合上成立，并且 $\phi_{1,\,p} > 0$ 几乎处处成立。情形 (ii) 类似。因此， u 变号。现在反设以下两种情况之一成立

$$\ell\{x \in \Gamma : \lambda^+(x) < \lambda^+,\ u(x) > 0\} > 0 \tag{4.5}$$

or

$$\ell\{x \in \Gamma : \lambda^-(x) < \lambda^-,\ u(x) < 0\} > 0. \tag{4.6}$$

假设 (4.5) 成立（(4.6) 的论证类似）。令 $b = \lambda^+ - \lambda^- \geq 0$，使得 $\lambda^- = \alpha(b)$ 如 (3.14) 中所定义。我们构造一条路径 $P \in \mathbb{P}$，使得

$$\max_{u \in P[-1,+1]} \tilde{I}_b(u) < \lambda^-, \tag{4.7}$$

这与将{顶点 v1}(b)定义为极小极大值相矛盾。该路径由一个变号函数 $w \in X(\Gamma, V_D)$构造，且该函数满足

$$\frac{\int_\Gamma |(w^+)'|^p\,dx}{\int_\Gamma (w^+)^p\,dx} < \lambda^+ \quad \text{and} \quad \frac{\int_\Gamma |(w^-)'|^p\,dx}{\int_\Gamma (w^-)^p\,dx} < \lambda^-. \tag{4.8}$$

为求 w，令 $\mathcal{U}_1$ 为 $\{x \in \Gamma : u(x) > 0\}$ 的一个连通分支，且满足

$$\ell\{x \in \mathcal{U}_1 : \lambda^+(x) < \lambda^+\} > 0,$$

由 (4.5) 可知这是可能的。令 $\mathcal{U}_2$ 为 $\{x \in \Gamma: u(x) < 0\}$的任意一个连通分支。由于 u变号，该连通分支非空。我们声称

$$\lambda_{1,p}(\mathcal{U}_1) < \lambda^+ \quad \text{and} \quad \lambda_{1,p}(\mathcal{U}_2) \leq \lambda^-, \tag{4.9}$$

其中$\lambda_{1,p}(\mathcal{U}_i)$由 (4.1) 定义。函数 $u\chi_{\mathcal{U}_i}$ 属于 $X_{\mathcal{U}_i}$，因为 $u = 0$ 在 $\partial\mathcal{U}_i$上。用 $u\chi_{\mathcal{U}_i}$ 测试 (4.4)，并利用 (4.2)，可得

$$\int_{\mathcal{U}_1} |u'|^p\,dx = \int_{\mathcal{U}_1} \lambda^+(x) u^p\,dx < \lambda^+ \int_{\mathcal{U}_1} u^p\,dx,$$

该不等式为严格不等式，因为 $\lambda^+(x)$在 $\mathcal{U}_1$ 的一个正测度子集上 $< \lambda^+$，其中$u > 0$，由此得到$\lambda_{1,p}(\mathcal{U}_1) < \lambda^+$。(4.9) 中的第二个不等式可类似得到，其中 $\leq$，因为我们只知道 $\lambda^-(x)$在 $\mathcal{U}_2$上 $\leq \lambda^-$。现在我们将 $\mathcal{U}_1$ 和 $\mathcal{U}_2$ 稍作扩展，得到两个互不相交的开集 $\tilde{\mathcal{U}}_1$ 和 $\tilde{\mathcal{U}}_2$，使其满足

$$\lambda_{1,p}(\tilde{\mathcal{U}}_1) < \lambda^+ \quad \text{and} \quad \lambda_{1,p}(\tilde{\mathcal{U}}_2) < \lambda^-.$$

对于顶点 v1，定义 $\mathcal{U}_1(\xi) = \{x \in \mathcal{U}_1 : \ d(x, \mathcal{U}_1^c) > \xi\}$。于是$\lambda_{1,p}(\mathcal{U}_1(\xi)) \geq \lambda_{1,p}(\mathcal{U}_1)$。反过来，设 $\psi \geq 0$ 是 $\lambda_{1,p}(\mathcal{U}_1)$ 的一个极小化函数，并且对于 $\delta > 0$，令 $\psi_\delta = (\psi - \delta)^+$。由于 ψ 在 Γ上一致连续，且在 $\Gamma \setminus \mathcal{U}_1$上为零，因此存在 $\xi_\delta > 0$，使得 $\psi < \delta$在 $\{x$上成立：$\ d(x, \mathcal{U}_1^c) \leq \xi_\delta\}$，所以对于 $\xi \leq \xi_\delta$，$\psi_\delta \in X_{\mathcal{U}_1(\xi)}$，并且当 $\delta \to 0$ 时，$\psi_\delta \to \psi$ 属于 $W^{1,p}(\Gamma)$。因此，当$\xi \to 0$时，$\lambda_{1,p}(\mathcal{U}_1(\xi)) \to \lambda_{1,p}(\mathcal{U}_1)$，且存在 $\xi_0 > 0$，使得

$$\lambda_{1,p}(\mathcal{U}_1(\xi)) < \lambda^+, \quad \text{for all } 0 \leq \xi \leq \xi_0. \tag{4.10}$$

我们断言存在一点 $x_0 \in \partial\mathcal{U}_2 \setminus V_D$，使得 $B(x_0, r) \setminus \mathcal{U}_2$ 对每个 $r > 0$ 都具有正长度。否则，每个 $x \in \partial\mathcal{U}_2 \setminus V_D$ 都有一个球 $B(x, r_x)$，满足 $\ell(B(x, r_x) \setminus \mathcal{U}_2) = 0$。于是开集 $B(x, r_x) \setminus \overline{\mathcal{U}_2}$ 为空，因此 $\mathcal{U}_2 \setminus V_D$ 在 $\Gamma \setminus V_D$ 中既是开集也是闭集。由 (H)，$\mathcal{U}_2 \setminus V_D = \Gamma \setminus V_D$，并且 $\mathcal{U}_2 = \Gamma$，因为 V_D 是有限的。但是 $\mathcal{U}_1$ 是开集，与 $\mathcal{U}_2$ 不相交，因此也与 $\mathcal{U}_2$ 不相交，这与 $\mathcal{U}_1 \neq \emptyset$ 矛盾。固定这样一个 x_0，并选取足够小的 $0 < \xi < \xi_0$，使得 $B(x_0, \xi/2) \cap V_D = \emptyset$。$\Gamma$ 中的球是连通的：$B(x_0, \xi/2)$ 中的每一点都可沿最短路径连接到 x_0。此外，$x_0 \notin \mathcal{U}_1$，因为 $\mathcal{U}_1$ 是开集且与 $\mathcal{U}_2$ 不相交，所以 $d(x_0, \mathcal{U}_1(\xi)) \geq \xi$。令

$$\tilde{\mathcal{U}}_1 = \mathcal{U}_1(\xi), \qquad \tilde{\mathcal{U}}_2 = \mathcal{U}_2 \cup B(x_0, \xi/2),$$

我们有 $\tilde{\mathcal{U}_1} \cap \tilde{\mathcal{U}_2} = \emptyset$，因为 $d(x_0,\ \mathcal{U}_1(\xi)) \geq \xi > \xi/2$，并且由 (4.10) 得 $\lambda_{1,\ p}(\tilde{\mathcal{U}_1}) < \lambda^+$。集合 $\tilde{\mathcal{U}_2}$ 是开且连通的，与 V_D 不相交（回忆一下 $u = 0$ 在 V_D 上），并且根据 x_0 的选取，$\ell(\mathcal{U}_2 \setminus \mathcal{U}_2) > 0$，因此由引理 4.2 和 (4.9) 可得 $\lambda_{1,\ p}(\mathcal{U}_2) < \lambda^-$。

定义 $w = w_1 - w_2$，其中 w_i 是 $\mathcal{U}_i$ 外部的零延拓，来自与相关的 $\lambda_{1,\ p}(\mathcal{U}_i)$ 的特征函数。于是 w 满足（4.8）。对于这个 w，

$$\tilde{I}_b\left(\frac{w}{\|w\|_p}\right) < (\lambda^+ - b)\frac{\int_\Gamma (w^+)^p\,dx}{\|w\|_p^p} + \lambda^-\frac{\int_\Gamma (w^-)^p\,dx}{\|w\|_p^p} = \lambda^-,$$

and

$$\tilde{I}_b\left(\frac{w^+}{\|w^+\|_p}\right) = \frac{\int_\Gamma |(w^+)'|^p\,dx}{\|w^+\|_p^p} - b\frac{\int_\Gamma (w^+)^p\,dx}{\|w^+\|_p^p} < \lambda^+ - b = \lambda^-.$$

类似地，$\tilde{I}_b(w^-/\|w^-\|_p) < \lambda^- - b$。令 $\nu = \lambda^- = \lambda^+ - b$。函数 $w^+ = w_1$ 和 $w^- = w_2$ 满足

$$\int_\Gamma |(w^+)'|^p\,dx < \lambda^+\int_\Gamma (w^+)^p\,dx, \qquad \int_\Gamma |(w^-)'|^p\,dx < \lambda^-\int_\Gamma (w^-)^p\,dx.$$

令 $a_\pm = \int_\Gamma (w^\pm)^p\,dx$。对于 $t \in [0,1]$，这些不等式和 $\lambda^+ - b = \lambda^- = \nu$ 给出

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_b\Big(\frac{w^+ - tw^-}{\|w^+ - tw^-\|_p}\Big) &< \frac{(\lambda^+ - b)a_+ + t^p\lambda^- a_-}{a_+ + t^p a_-} = \nu,\\
\tilde{I}_b\Big(\frac{tw^+ + (1-t)w^-}{\|tw^+ + (1-t)w^-\|_p}\Big) &< \frac{t^p(\lambda^+ - b)a_+ + (1-t)^p(\lambda^- - b)a_-}{t^p a_+ + (1-t)^p a_-} \leq \nu,\\
\tilde{I}_b\Big(\frac{(1-t)w^+ - w^-}{\|(1-t)w^+ - w^-\|_p}\Big) &< \frac{(1-t)^p(\lambda^+ - b)a_+ + \lambda^- a_-}{(1-t)^p a_+ + a_-} = \nu.
\end{aligned}$$

这三条路径分别连接 $\frac{w}{\|w\|_p}$ 与 $\frac{w^+}{\|w^+\|_p}$、$\frac{w^+}{\|w^+\|_p}$ 与 $\frac{w^-}{\|w^-\|_p}$ 以及 $\frac{-w^-}{\|w^-\|_p}$ 与 $\frac{w}{\|w\|_p}$，并且 $\tilde{I}_b < \nu$ 沿着每条路径成立。令 $\mathcal{O} = \{I_b < \nu - b\}$。由于 $\nu = \alpha(b)$，定理 1.1 证明中的论证表明，I_b 在 $\mathcal{O}$ 中的唯一临界点是 $\phi_{1,\ p}$ 以及可能的 $-\phi_{1,\ p}$，因此根据引理 3.17，包含 $\frac{w}{\|w^-\|_p}$ 的 $\mathcal{O}$ 连通分支包含 $\phi_{1,\ p}$ 或 $-\phi_{1,\ p}$。令 γ_4 为该连通分支中从 $\frac{w^-}{\|w^-\|_p}$ 到该点的一条路径。由于 $\tilde{I}_b(-v) \leq \tilde{I}_b(v) + b$ 在 M 上成立，我们有 $\tilde{I}_b < \nu$ 沿着 $-\gamma_4$ 成立。如果 γ_4 终点为 $\phi_{1,\ p}$，则我们沿着 $-\gamma_4$ 从 $-\phi_{1,\ p}$ 前往 $\frac{-w^-}{\|w^-\|_p}$，然后沿着上面的三条路径前往 $\frac{w}{\|w\|_p}$、$\frac{w^+}{\|w^+\|_p}$、$\frac{w^-}{\|w^-\|_p}$，再沿着 γ_4 前往 $\phi_{1,\ p}$。如果 γ_4 终点为 $-\phi_{1,\ p}$，则我们沿着 γ_4 从 $-\phi_{1,\ p}$ 前往 $\frac{w}{\|w^-\|_p}$，然后前往 $\frac{w^+}{\|w^+\|_p}$、$\frac{w}{\|w\|_p}$、$\frac{-w^-}{\|w^-\|_p}$，再沿着 $-\gamma_4$ 前往 $\phi_{1,\ p}$。在两种情况下，我们都得到一条 $P \in \tilde{\mathbb{P}}$，沿着该路径 $I_b < \nu$。由于 $P[-1,1]$ 是紧致的，（4.7）成立，这就得到了所需的矛盾。 □

推论 4.4. 设 $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathfrak{C}$，且令 $\lambda^+(x)$、$\lambda^-(x)$ 为定义在 Γ 上满足 (4.2) 和 (4.3) 的 L^∞ 函数。若 $\lambda^+(x) < \lambda^+$ 在 Γ 上几乎处处成立，或 $\lambda^-(x) < \lambda^-$ 在 Γ 上几乎处处成立，则 (4.4) 只有平凡解。

证明。 这由引理 4.3 得出。 □

命题 4.5. 由映射 $\mathfrak{C} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ 描述的第一条非平凡曲线满足以下性质：

$$\mathfrak{C}(b) = (b + \alpha(b),\, \alpha(b))$$

严格递减，即 $b < b'$ 推出 $b + \alpha(b) < b' + \alpha(b')$ 且 $\alpha(b) > \alpha(b')$.

证明。设 $b < b'$。若 $b + \alpha(b) \geq b' + \alpha(b')$，则 $\alpha(b) > \alpha(b')$；将推论 4.4 应用于 $(\lambda^+, \lambda^-) = (b + \alpha(b)\ \alpha(b))$，其中常数 $\lambda^+(x) = b' + \alpha(b')$ 以及 $\lambda^-(x) = \alpha(b')$，可知 (1.1) 在 $(b' + \alpha(b')\ \alpha(b'))$ 处没有非平凡解。这与命题 3.13 矛盾。若 $\alpha(b) \leq \alpha(b')$，则 $b + \alpha(b) < b' + \alpha(b')$；在 $(b' + \alpha(b')\ \alpha(b'))$ 处应用同样的论证即可得到矛盾。 □

函数 $\alpha(b)$ 是连续的、严格递减的，并且 $\alpha(b) > \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)$，因此其在 $b \to \infty$处的极限存在。下面的命题确定了这一极限。

命题 4.6。令 $V_D \neq \emptyset$。当 $b \to \infty$ 时，$\alpha(b)$ 的极限等于 $\lambda_{1,\,p}(\Gamma, V_D)$。

证明。反设存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$\max_{u \in P[-1,+1]} \tilde{I}_b(u) \geq \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) + \epsilon, \quad \text{for all } P \in \mathbb{P} \text{ and all } b \geq 0.$$

选择 $\phi \in X(\Gamma, V_D)$，使得不存在满足 $\phi(x) \leq r\phi_{1,p}$ 在 Γ 中几乎处处成立的 $r \in \mathbb{R}$。这样的 ϕ存在，因为 $V_D \neq \emptyset$：固定 $v \in V_D$，取一条与 v关联的边 e，一个数 $\theta \in (1 - \frac{1}{p}, 1)$，并令 $\phi \geq 0$ 为 $X(\Gamma, V_D)$ 中的一个函数，该函数在 v 的某个邻域内等于 $d(x,v)^\theta$，并在 e 之外为零。于是 $\phi \in W^{1,p}(\Gamma)$，因为 $p(\theta - 1) > -1$；另一方面，$\phi_{1,p}$ 在 e 上为 C^1，且 $\phi_{1,p}(v) = 0$，因此 $\phi_{1,p}(x)$ 在 v附近为 $\leq C\, d(x,v)$，并且 $\phi/\phi_{1,p} \geq d(x,v)^{\theta-1}/C$ 在 v附近无界。考虑由下式定义的路径 $P \in \mathbb{P}$

$$P(t) = \frac{t\phi_{1,p} + (1 - |t|)\phi}{\|t\phi_{1,p} + (1 - |t|)\phi\|_p}, \quad t \in [-1, +1].$$

˜集合 $P[-1,+1]$ 是紧致的，因此 I_b 在 $P[-1,+1]$ 上的最大值可在某个 $t_b \in [-1,+1]$处取得。令 $w_{t_b} = t_b\phi_{1,p} + (1 - |t_b|)\phi$，得到

$$\int_\Gamma |w'_{t_b}|^p \, dx - b \int_\Gamma (w^+_{t_b})^p \, dx \geq (\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) + \epsilon) \int_\Gamma |t_b\phi_{1,p} + (1 - |t_b|)\phi|^p \, dx \tag{4.11}$$

对所有 $b \geq 0$均成立。由于 $b \to +\infty$，取一个子序列后，不妨设 $t_b \to \bar{t} \in [-1,+1]$。由于$w_{t_b}$在 $X(\Gamma, V_D)$中有界，且界与 t无关，令 $b \to +\infty$ 趋于无穷可得 $\int_\Gamma (w^+_{t_b})^p \, dx \to 0$。由于$w_{t_b} \to w_{\bar{t}}$ 在 $X(\Gamma, V_D)$中，我们得到

$$\int_\Gamma \big((\bar{t}\phi_{1,p} + (1 - |\bar{t}|)\phi)^+\big)^p \, dx = 0,$$

˜根据 ϕ的选取，这只有在 $t = -1$时才可能。因此 $t_b \to -1$，在 (4.11) 中取极限可得

$$\int_\Gamma |\phi'_{1,p}|^p \, dx \geq (\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) + \epsilon) \int_\Gamma |\phi_{1,p}|^p \, dx,$$

$$\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \int_\Gamma |\phi_{1,p}|^p \, dx \geq (\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) + \epsilon) \int_\Gamma |\phi_{1,p}|^p \, dx,$$

矛盾。 □

5 诺伊曼–基尔霍夫顶点条件

在本节中，我们研究如下特征值问题：在图的每条边上，p-拉普拉斯算子 $\big(|u'|^{p-2}u'\big)'$ 作为微分算子，并在所有顶点 $v \in V(\Gamma)$ [27]处满足纯诺伊曼–基尔霍夫顶点条件。具体而言，我们考虑问题

$$\begin{cases} -\big(|u'|^{p-2}u'\big)' = \lambda |u|^{p-2}u & \text{on the edges of } \Gamma, \\ \displaystyle\sum_{e \in E_v(\Gamma)} |u'_e(v)|^{p-2}u'_e(v) = 0, & \text{for all vertices } v \in V(\Gamma). \end{cases} \tag{5.1}$$

设 Γ 为一个紧连通量子图，且 $p \in (1, \infty)$。若存在一个非平凡函数 $u \in W^{1,p}(\Gamma)$，使得实数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 称为 Γ 上的 p-拉普拉斯算子的诺伊曼特征值，则有

$$\int_\Gamma |u'(x)|^{p-2}u'(x)\,\phi'(x)\,dx = \lambda \int_\Gamma |u(x)|^{p-2}u(x)\,\phi(x)\,dx$$

对所有 $\phi \in W^{1,p}(\Gamma)$ 均成立。于是，u 称为对应于 λ 的特征函数。方程 (5.1) 的第一特征值 $\lambda_{1,p}(\Gamma,\emptyset) = 0$ 是单重的，其特征空间为 $\mathbb{R}$（见 [17]）。因此，对应于 $\lambda_{1,p}(\Gamma,\emptyset)$ 的所有特征函数在 Γ 上均具有固定符号；而高阶特征值则不具备这一性质（引理 2.8(iii)）。此外，$\mathcal{F}_{p,\Gamma}$ 包含点 (0, 0) 和 $(\lambda_{2,p}(\Gamma,\emptyset)\lambda_{2,p}(\Gamma,\emptyset))$（其中$\lambda_{2,p}(\Gamma,\emptyset)$表示方程 (5.1) 的第二特征值），以及两条直线 $\{0\}\times\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}\times\{0\}$。$\widetilde{\mathcal{F}}_{p,\Gamma}$ 的非平凡部分记为 $\mathcal{F}_{p,\Gamma}$，并定义为

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{p,\Gamma} = \mathcal{F}_{p,\Gamma} \setminus \big((\{0\}\times\mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}\times\{0\})\big),$$

$\widetilde{\mathcal{F}}_{p,\Gamma}$ 根据命题 5.5，该集合包含于 $(\lambda,\infty)\times(\lambda,\infty)$ 中，其中 $\lambda > 0$ 在 (1.4) 中定义。

对于 $V_D = \emptyset$，我们使用第 3 节中的泛函 I_b、流形 M、类 $\mathbb{P}$ 以及极小极大值 $\alpha(b)$，其中 $X(\Gamma,\emptyset) = W^{1,p}(\Gamma)$ 和 $\phi_{1,p} = \ell(\Gamma)^{-1/p}$，而 $\ell(\Gamma)$ 是 Γ 的总长度。根据引理 3.1，I_b 的临界值对应于直线 $(b, 0) + t(1, 1)$ 上的 $\mathcal{F}_{p,\Gamma}$ 各点。第 3–4 节的证明是针对 $V_D \neq \emptyset$ 撰写的，但它们仅在少数地方使用了狄利克雷集，正如下述结果所示。

命题 5.1。设 $V_D = \emptyset$，使得 $X(\Gamma,\emptyset) = W^{1,p}(\Gamma)$，$\lambda_{1,p}(\Gamma,\emptyset) = 0$ 且 $\phi_{1,p} = \ell(\Gamma)^{-1/p}$。那么，定理 *1.1(i)–(ii)* 以及第 *3–4* 节中除命题 *4.6* 外的所有结果，在将 $\Sigma_{p,\Gamma}$ 替换为 $\mathcal{F}_{p,\Gamma}$ 后仍然成立。

证明。证明中只通过以下三个事实使用狄利克雷集，而这三点对 $V_D = \emptyset$ 也成立。

(a) $\lambda_{1,p}$ 的单重性、$\phi_{1,p}$ 在 $\Gamma \setminus V_D$ 上的正性，以及符号恒定的特征函数属于 $\lambda_{1,p}$ 这一事实。这些性质用于命题 3.4 和命题 3.14、定理 1.1 的证明以及引理 4.2 和引理 4.3 中；其中始终通过引理 2.8 使用，而该引理已对满足 (H) 的每个 V_D 证明，包括 $V_D = \emptyset$。(b) 有界性。在引理 3.3、引理 3.6、引理 3.11、引理 3.15、引理 3.17 和命题 3.14 中，$X(\Gamma, V_D)$ 中的有界性由 $\int_\Gamma |u'|^p\,dx$ 上的一个界结合 $\|u\|_p = 1$ 推得，而 $\|u\|_p = 1$ 给出了 $W^{1,p}(\Gamma)$ 中的一个界，并未使用庞加莱不等式。正因如此，命题 3.14 的证明使用了完整的 $W^{1,p}$ 范数。(c) $\lambda_{1,p}$ 的正性。它仅用于命题 4.6；本文不主张该命题，而以命题 5.6 取代之。

其余要素，即 C^1 M 的结构、$W^{1,p}(\Gamma)$ 在 [9, 定理 2.1], 中所要求的（S_+）性质、Ekeland 原理以及定理 2.3 和定理 2.4 的紧嵌入，都不依赖于 V_D。在引理 4.3 中，集合 $X_{\mathcal{U}}$ 定义为$X(\Gamma,\emptyset) = W^{1,p}(\Gamma)$，而要求 $x_0 \notin V_D$ 是空缺的。

□

根据推论 3.18 和命题 5.1，第一条非平凡曲线 $\mathfrak{C}$ 经过点 $(\lambda_{2,p}(\Gamma,\emptyset)\lambda_{2,p}(\Gamma,\emptyset))$，其中 $\lambda_{2,p}(\Gamma,\emptyset)$ 是（5.1）中大于 0 的最小特征值，而 $\lambda_{2,p}(\Gamma,\emptyset)$ 具有如下变分刻画：

$$\lambda_{2,p}(\Gamma,\emptyset) = \inf_{P\in\mathbb{P}} \max_{u\in P([-1,+1])} \int_\Gamma |u'|^p\,dx,$$

其中 $\mathbb{P}$ 如上所述。

狄利克雷—基尔霍夫 Fu˘c´ık 谱 $\Sigma_{p,\Gamma}$ 与诺伊曼 Fu˘c´ık 谱 $\mathcal{F}_{p,\Gamma}$ 之间的一个主要区别，涉及第一条非平凡曲线 $\mathcal{C}$的渐近行为，而该行为由式 (1.4) 中定义的数 $\bar{\lambda}$ 决定。由 $W^{1,p}(\Gamma)$ 到$C(\Gamma)$的紧嵌入（定理 2.4），式 (1.4) 中可容许函数的集合是弱闭的，且下确界¯ ¯可以取到。此外， $\lambda > 0$: 若 $\lambda = 0$，则极小化函数 u满足 $u' = 0$，因此 u是某处取零值的常数，即 $u \equiv 0$，这与 $\|u\|_p = 1$矛盾。对于 $x \in \Gamma$ ，我们令 $\lambda(x) = \lambda_{1,p}(\Gamma, \{x\})$，即在 $X(\Gamma, \{x\}) = \{u \in W^{1,p}(\Gamma)$ 上取下确界： $u(x) = 0\}$ ；若 x 位于一条边的内部，我们先将其插入为一个度为二的顶点，这不会改变问题，因为度为二顶点处的基尔霍夫条件就是 u'的连续性，然后在该处施加狄利克雷条件。式 (1.4) 中的可容许集合是 $x \in \Gamma$ 上的 $X(\Gamma, \{x\})$ 的单位球面的并，因此$\bar{\lambda} = \inf_{x\in\Gamma} \lambda(x)$；若式 (1.4) 中的极小化函数 u 在 x_0处取零值，则 $\lambda(x_0) \le \int_\Gamma |u'|^p \, dx = \bar{\lambda}$。因此

$$\bar{\lambda} = \min_{x\in\Gamma} \lambda(x), \tag{5.2}$$

且每个极小化函数在 (1.4) 中的零点处都能达到该最小值。

¯下面的例子说明了 λ 的变分定义，并展示了如何在具体情形中计算它。

例 5.2. 设 $\Gamma = [0, L]$ 是一条边，两端均满足基尔霍夫条件，即诺伊曼条件。一个在 x_0 处为零的函数可分解为其在 $[0, x_0]$ 和 $[x_0, L]$上的限制函数，因此，这类函数在 (1.4) 中的下确界为 最小值$\{\mu(x_0)\ \mu(L - x_0)\}$，其中 $\mu(t)$ 是长度为 t 的区间上的第一特征值，该区间一端满足诺伊曼条件，另一端满足狄利克雷条件。通过关于诺伊曼端点作偶反射， $\mu(t)$是长度为 $2t$的区间上的第一狄利克雷特征值，即在注 2.7 的归一化下， $\mu(t) = \frac{p}{p'}\left(\frac{\pi_p}{2t}\right)^p$。由于 μ 递减，

$$\bar{\lambda} = \mu(L) = \frac{p}{p'}\Big(\frac{\pi_p}{2L}\Big)^p,$$

恰好在 x_0 为端点时取得，例如由 $u(x) = \sin_p\big(\pi_p(L - x)/(2L)\big)$ 当$x_0 = L$时。对于 $p = 2$，$\bar{\lambda} = \pi^2/(4L^2)$。具有两条长度分别为 L_1、 L_2 的边的路径图是长度为 $L_1 + L_2$的区间，因为度为二的顶点处的基尔霍夫条件是传输条件 *[6,*例 *2.2]*。

我们转而讨论 $\alpha(b)$的渐近行为。

引理 5.3. 设 $p > 1$ ，并设 u 是(1.4)中的极小化函数。则 u 在 Γ中不改变符号，且 u 在 Γ中恰好于一点处为零。

证明. 设 u 是(1.4)的极小化函数。我们首先证明，若 u 在某个 $x_0 \in \Gamma$处为零，则

$$\int_\Gamma |u'|^{p-2}u'\phi' \, dx = \bar{\lambda} \int_\Gamma |u|^{p-2}u\phi \, dx \tag{5.3}$$

对所有 $\phi \in W_{x_0} = \{\phi \in W^{1,p}(\Gamma)$: $\phi(x_0) = 0\}$。由于 u 在 x_0 处为零，且是(1.4)的极小化函数，

$$\bar{\lambda} = \inf\left\{\int_\Gamma |u'|^p \, dx : \, u \in W_{x_0} \text{ and } \|u\|_p = 1\right\},$$

且该下确界在 u处取得。根据拉格朗日乘数法，存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$\int_\Gamma |u'|^{p-2}u'\phi' \, dx = \lambda \int_\Gamma |u|^{p-2}u\phi \, dx, \quad \text{for all } \phi \in W_{x_0}.$$

¯取 $\phi = u$可得 $\lambda = \lambda$，于是（5.3）成立。接下来我们证明， u 在 Γ中恰好只有一个零点。反设 u 在 Γ中的两个不同点 x_1 和 x_2 处为零。

函数 $w = |u|$ 也是（1.4）中的极小化函数，并且在 x_1 和 x_2处为零。因此， w 满足（5.3），即

$$\int_\Gamma |w'|^{p-2} w' \phi' \, dx = \bar{\lambda} \int_\Gamma |w|^{p-2} w \phi \, dx, \tag{5.4}$$

对所有顶点 v1，类似地，对所有 $\phi \in W_{x_2}$ 均成立。令 $\chi(x) = \min\{1, d(x, x_2)/d(x_1, x_2)\}$，于是 $\chi \in W^{1,p}(\Gamma)$， $\chi(x_1) = 1$ 且 $\chi(x_2) = 0$。每个 $\phi \in W^{1,p}(\Gamma)$ 都是 $\phi - \phi(x_1)\chi \in W_{x_1}$ 与 $\phi(x_1)\chi \in W_{x_2}$ 之和，因此对于所有 $\phi \in W^{1,p}(\Gamma)$， w 均满足 (5.4)。取 $\phi \equiv 1$，(5.4) 化为

$$\bar{\lambda} \int_\Gamma |w|^{p-2} w \, dx = 0.$$

由于 $\lambda > 0$ 且 $w \geq 0$，这迫使 $w \equiv 0$，与 $\|w\|_p = 1$ 矛盾。接下来需要验证极小化函数 u 的符号恒定。举例来说，假设 $u^+ \not\equiv 0$ 且 $u(x_0) = 0$。那么 $u^+(x) = \max(u(x), 0)$ 满足 $u^+(x_0) = 0$，并且令 $\phi = u^+$ 代入 (5.3) 得

$$\int_\Gamma |(u^+)'|^p \, dx = \bar{\lambda} \int_\Gamma (u^+)^p \, dx.$$

因此， $u^+ / \|u^+\|_p$ 也是 (1.4) 的极小化元；根据证明的第一部分， u^+ 仅在 x_0处为零，因此 $u \geq 0$ 位于 Γ中。 □

对于 $x \in \Gamma$，令 $\lambda(x)$ 如 (5.2) 中所定义。根据 (5.2) 和引理 5.3，极小值恰好在 (1.4) 中极小化元的零点处取得，且每个极小化元恰有一个零点。该零点的位置取决于 Γ的拓扑。对于 $p = 2$，在一点施加狄利克雷条件是对基尔霍夫拉普拉斯算子的秩一扰动，而 [7] 的交错不等式给出 $0 = \lambda_{1,\,2}(\Gamma,\ \emptyset) \leq \lambda(x) \leq \lambda_{2,\,2}(\Gamma,\ \emptyset)$，对每个 $x \in \Gamma$均成立，这与下面的命题 5.5 一致。在区间上， λ 是混合诺伊曼–狄利克雷问题的第一特征值（例 5.2）；文献 [34]研究了带权 p-拉普拉斯算子在混合边界条件下的 Fu˘c´ık 谱的第一条曲线。下面的命题确定了等边星形图上的零点位置；它不是 Γ的对称点。

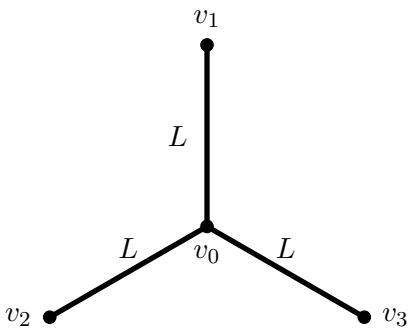

图 4：命题 5.4 中的等边三边星形图，所有顶点均满足基尔霍夫条件。

命题 5.4。令 Γ 为一棵星形图，其中心顶点为 v_0，有三条悬挂边 e_1、e_2、e_3，长度均为 L，分别终止于 v_1、v_2、v_3；所有顶点均满足基尔霍夫条件（图 4），并令 $1 < p < \infty$。设 $c_p = 2^{1/(p-1)}$，且 余切$_p$ = 余弦$_p$ / 正弦$_p$，它在 $(0, \pi_p)$ 上严格递减，并在 $\pi_p/2$ [20]处取零。令 z_p 为下式在 $(0, \pi_p/2)$ 内的唯一根

$$\cot_p(z) = c_p \cot_p\Big(\frac{\pi_p}{2} - z\Big). \tag{5.5}$$

那么顶点 *v1*，

$$\bar{\lambda} = \lambda(v_1) = \lambda(v_2) = \lambda(v_3) = \frac{p}{p'} \Big(\frac{z_p}{L}\Big)^p < 2^{-p} \lambda(v_0),$$

顶点 $v1$ 和 $\lambda(x) > \lambda$ 对于其他每个 $x \in \Gamma$ 都成立。因此，式 (5.2) 中的最小值恰好在三个悬挂顶点处取得，而不在中心处。对于 $p=2$，$\bar{\lambda} = 反正切^2(1/\sqrt{2})/\bar{L}^2 \approx 0.379/L^2$。

证明。如果零点位于中心，每条边上都是区间长度为 L 的例 5.2 混合问题，因此 $\lambda(v_0) = {}^{p}_{p'}\left(\frac{\pi_p}{2L}\right)^p$。现在在 v_1 处施加狄利克雷条件，并令 $\lambda = {}^{p}_{p'}k^p$，其中 $0 < kL < \pi_p/2$。边上 $-(\varphi_p(u'))' = \lambda\varphi_p(u)$ 的每个解都是 $\sin_p(k\,\cdot)$ [20] 的某个平移的倍数。我们在 e_1 上取 $u = \sin_p(kt)$，其中 t 是到 v_1 的距离；在 e_2 和 e_3 上分别取 $u = B\sin_p(ks + \pi_p/2)$，其中 s 是到 v_2 的距离，即 v_3，因此 $u(v_1) = 0$，且在 v_2 处 $u' = 0$，在 v_3 处也是如此。由于 $\sin_p(\pi_p - \theta) = \sin_p\theta$，且 $\cos_p(\pi_p - \theta) = -\cos_p\theta$，在 v_0 处的连续性和基尔霍夫条件可写为

$$\sin_p(kL) = B\sin_p\Big(\frac{\pi_p}{2} - kL\Big), \qquad \varphi_p\big(\cos_p(kL)\big) = 2\,\varphi_p\Big(B\cos_p\Big(\frac{\pi_p}{2} - kL\Big)\Big),$$

并消去 B，得到带有 $z = kL$ 的 (5.5)。在 $(0, \pi_p/2)$ 上，(5.5) 的左端从 $+\infty$ 严格递减至 0，右端从 0 严格递增至 $+\infty$，因此 (5.5) 在此恰有一个根 z_p。相应的 u 在 $\Gamma \setminus \{v_1\}$ 上为正，因此由引理 2.8*(iii)* 及 $V_D = \{v_1\}$ 可知，它是第一特征函数，并且 $\lambda(v_1) = {}^{p}_{p'}(z_p/L)^p$。在 $z = \pi_p/4$ 处，左端小于右端，因为 $c_p > 1$，所以 $z_p < \pi_p/4$ 且 $\lambda(v_1) < 2^{-p}\lambda(v_0)$。由对称性，$\lambda(v_2) = \lambda(v_3) = \lambda(v_1)$。

设 x 位于 e_i 内部。则 $\Gamma \setminus \{x\}$ 有两个连通分支：线段 S 位于 x 与 v_i 之间，长度为 $t < L$；另一个是其余部分。对于 $u \in X(\Gamma, \{x\})$，$|u'|^p$ 和 $|u|^p$ 的积分分别在这两个连通分支上进行，因此 $\lambda(x) \geq \min\{\mu(t)\ \lambda_B\}$。这里，$\mu(t) > \mu(L) = \lambda(v_0) > \lambda(v_1)$ 是例 5.2 中的混合特征值，而 λ_B 是在非零的 $u \in W^{1,p}(\Gamma)$ 上瑞利商的下确界，这些函数在 S 上为零。这样的函数属于 $X(\Gamma, \{v_i\})$，因此 $\lambda_B \geq \lambda(v_i) = \lambda(v_1)$。由定理 2.3，下确界 λ_B 可以取到；若 $\lambda_B = \lambda(v_i)$，则极小化函数将是 $V_D = \{v_i\}$ 上的第一特征函数，且在 S 上为零，而 S 是正长度的集合。由引理 2.8(ii)，这是不可能的，因为 $\Gamma \setminus \{v_i\}$ 是连通的。因此 $\lambda(x) > \lambda(v_1)$。结合 $\lambda(v_0) > \lambda(v_1)$，由此可证，$\lambda = \lambda(v_1)$ 恰在 v_1, v_2, v_3 处取到。对于 $p=2$，有 $c_2 = 2$ 且 $\cot(\pi/2 - z) = \tan z$，因此 (5.5) 化为 $\tan^2 z = \frac{1}{2}$。 □

命题 5.5. 设 $p > 1$。则 $\mathcal{F}_{p,\Gamma} \subseteq (\lambda, \infty) \times (\lambda, \infty)$。特别地，对于每个 $b \geq 0$，都有 $\alpha(b) > \lambda$，且 $\lambda_{2,p}(\Gamma, \emptyset) > \lambda$。

证明。 设 $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathcal{F}_{p,\Gamma}$，并令 u 为相应的特征函数。取测试函数 $\phi = 1$，式 (2.7) 的 Neumann-Kirchhoff 版本可写为

$$\lambda^+ \int_\Gamma (u^+)^{p-1}\,dx - \lambda^- \int_\Gamma (u^-)^{p-1}\,dx = 0.$$

若 $u \geq 0$，则 $\int_\Gamma (u^-)^{p-1}\,dx = 0$，由恒等式可得 $\lambda^+ = 0$，因为 $u \not\equiv 0$，故 (λ^+, λ^-) 位于一条平凡直线上。$u \leq 0$ 的情形相同。因此，u 在 Γ 中改变符号。将 u^+ 和 u^- 作为测试函数代入式 (2.7)，得到

$$\lambda^+ = \frac{\int_\Gamma |(u^+)'|^p\,dx}{\int_\Gamma (u^+)^p\,dx} \geq \bar{\lambda} \quad \text{and} \quad \lambda^- = \frac{\int_\Gamma |(u^-)'|^p\,dx}{\int_\Gamma (u^-)^p\,dx} \geq \bar{\lambda}. \tag{5.6}$$

假设 $\lambda^+ = \bar{\lambda}$。那么，由 (5.6) 可知，$u^+/\|u^+\|_p$ 是 (1.4) 的极小化函数。由于 u 变号，u^+ 在多个点处取零，这与引理 5.3 矛盾；同样的论证也适用于 λ^-。对于 $b \geq 0$，点 $(b + \alpha(b)\ \alpha(b))$ 属于 $\mathcal{F}_{p,\Gamma}$，这是由命题 3.13 和 5.1 得出的，因为 $\alpha(b) > 0$。因此，$\alpha(b) > \lambda$，且 $b = 0$ 给出 $\lambda_{2,p}(\Gamma, \emptyset) = \alpha(0) > \lambda$。 □

命题 5.6。 设 $\alpha(b)$ 由 (3.14) 定义，且 $V_D = \emptyset$。那么

$$\lim_{b \to +\infty} \alpha(b) = \bar{\lambda},$$

其中 λ 由 (1.4) 给出。

证明。 根据命题 5.5，$\alpha(b) > \lambda$ 对每个 $b \geq 0$都成立，因此 $\liminf_{b\to\infty} \alpha(b) \geq \lambda$。接下来需要证明反向不等式。部分论证取自命题 4.6。假设反证，存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$\max_{u\in P[-1,+1]} \tilde{I}_b(u) \geq \bar{\lambda} + \epsilon, \quad \text{for all } P \in \mathbb{P} \text{ and all } b \geq 0.$$

选择 (1.4) 中的一个极小化函数 u，其中 $u \leq 0$ 属于 Γ，并考虑由下式定义的路径 $P \in \mathbb{P}$

$$P(t) = \frac{t\phi_{1,p} + (1-|t|)u}{\|t\phi_{1,p} + (1-|t|)u\|_p}, \quad t \in [-1,+1].$$

由于 u 在某处为零，而 $\phi_{1,p}$ 不为零，因此它定义良好。由 $P[-1,+1]$ 的紧性，I_b 在 $P[-1,+1]$ 上的最大值可在某个 $t_b \in [-1,+1]$ 处取得。记作$w_{t_b} = t_b\phi_{1,p} + (1-|t_b|)u$，则有

$$\int_\Gamma |w'_{t_b}|^p\,dx - b\int_\Gamma (w^+_{t_b})^p\,dx \geq (\bar{\lambda}+\epsilon)\int_\Gamma |t_b\phi_{1,p} + (1-|t_b|)u|^p\,dx \tag{5.7}$$

对所有 $b \geq 0$ 均成立。令 $b \to +\infty$ 沿某个子序列趋近，我们可以假设 $t_b \to \bar{t} \in [-1,+1]$。由于 w_{t_b} 在 $W^{1,p}(\Gamma)$ 中有界，且界与 b 无关，将 (5.7) 除以 b 得到 $\int_\Gamma (w^+_{t_b})^p\,dx \to 0$，当 $b \to +\infty$ 时成立；而 $w_{t_b} \to w_{\bar{t}}$ 在 $W^{1,p}(\Gamma)$ 中的收敛给出

$$\int_\Gamma \left((\bar{t}\,\phi_{1,p} + (1-|\bar{t}|)u)^+\right)^p\,dx = 0,$$

这意味着 $(w_{\bar{t}})^+ = 0$ 属于 Γ，也就是说，$w_{\bar{t}}(x) \leq 0$ 属于 Γ，或者等价地

$$\bar{t}\,\phi_{1,p} \leq -(1-|\bar{t}|)u \quad \text{in } \Gamma.$$

由于 u 在某处为零，且 $\phi_{1,p} \equiv$ 为常数 > 0，因此该不等式推出 $t \leq 0$。由此可推得 (5.7)

$$\int_\Gamma |w'_{\bar{t}}|^p\,dx \geq (\bar{\lambda}+\epsilon)\int_\Gamma |\bar{t}\phi_{1,p} + (1-|\bar{t}|)u|^p\,dx \tag{5.8}$$

利用 $\phi'_{1,p} \equiv 0$，可得 $|w'_{\bar{t}}|^p = (1-|\bar{t}|)^p|u'|^p$。此外，由于 $\bar{t}\phi_{1,p} \leq 0$ 且 $(1-|\bar{t}|)u \leq 0$ 属于Γ，不等式 $(a+b)^p \geq a^p + b^p$ 对所有 $a,\ b \geq 0$ 均成立，因此有

$$|\bar{t}\phi_{1,p} + (1-|\bar{t}|)u|^p \geq |\bar{t}\phi_{1,p}|^p + |(1-|\bar{t}|)u|^p.$$

因此，不等式 (5.8) 化为

$$\int_\Gamma (1-|\bar{t}|)^p|u'|^p\,dx \geq (\bar{\lambda}+\epsilon)\int_\Gamma (|\bar{t}\phi_{1,p}|^p + (1-|\bar{t}|)^p|u|^p)\,dx. \tag{5.9}$$

若 $\bar{t} = -1$，则 (5.9) 表示 $0 \geq (\bar{\lambda}+\epsilon)\int_\Gamma \phi^p_{1,p}\,dx$，这与假设矛盾。若 $\bar{t} \in (-1,\ 0]$，则 $0 < (1-|\bar{t}|)^p \leq 1$，并且，由于 u 是 (1.4) 中的极小化函数，

$$\int_\Gamma |u'|^p\,dx = \bar{\lambda}\int_\Gamma |u|^p\,dx.$$

由于 顶点 $v1_{,p}|^p\,dx \geq 0$，不等式 (5.9) 变为

$$(1-|\bar{t}|)^p\int_\Gamma |u'|^p\,dx \geq (\bar{\lambda}+\epsilon)(1-|\bar{t}|)^p\int_\Gamma |u|^p dx.$$

等价地，

$$\bar{\lambda}(1-|\bar{t}|)^p\int_\Gamma |u|^p\,dx \geq (\bar{\lambda}+\epsilon)(1-|\bar{t}|)^p\int_\Gamma |u|^p dx,$$
$$\bar{\lambda} \geq \bar{\lambda}+\epsilon,$$

这是不可能的。 □

根据命题 5.5 和命题 5.6，λ 是满足以下条件的最大数：$\mu\,\mathcal{F}_{p,\Gamma} \subseteq (\mu,\ \infty)\times(\mu,\ \infty)$，因为 $(b+\alpha(b),\ \alpha(b)) \in \mathcal{F}_{p,\Gamma}$ 并且 $\alpha(b) \to \lambda$ 当 $b \to \infty$ 时。

6 对角线处第一条曲线的可微性

在本节中，$1 < p < \infty$ 和 $\lambda_2 = \lambda_{2,\,p}(\Gamma,\ V_D)$ 始终满足条件，其中 V_D 满足 (H)，且可能为空（命题 5.1）。根据推论 3.18 和 (3.15)，$\mathfrak{C}$ 经过点 $(\lambda_2,\ \lambda_2)$，并且是以下两条弧的并集

$$\mathfrak{C}^+ = \{(b+\alpha(b), \alpha(b)) : b \geq 0\}, \qquad \mathfrak{C}^- = \{(\alpha(b), b+\alpha(b)) : b \geq 0\},$$

它们关于对角线互为反射。根据命题 4.6 和命题 5.6，按照 (1.5) 中的 Λ，$\alpha(b) \to \Lambda$ 为 $b \to \infty$。根据命题 4.5，映射 $b \mapsto b + \alpha(b)$ 是从 $[0,\infty)$ 到 $[\lambda_2, \infty)$ 的严格递增同胚，而 α 是从 $[0,\infty)$ 到 $(\Lambda,\ \lambda_2]$ 的严格递减同胚。因此 $\mathfrak{C}^+ \cap \mathfrak{C}^- = \{(\lambda_2,\ \lambda_2)\}$，弧 $\mathfrak{C}^+$ 是严格递减同胚的图像

$$g : [\lambda_2, \infty) \to (\Lambda, \lambda_2], \qquad g(b+\alpha(b)) = \alpha(b),$$

而 $\mathfrak{C}^-$ 是 g^{-1} 的图像。因此，曲线 $\mathfrak{C}$ 是函数

$$G : (\Lambda, \infty) \to (\Lambda, \infty), \qquad G(\lambda) = \begin{cases} g^{-1}(\lambda), & \Lambda < \lambda \leq \lambda_2, \\ g(\lambda), & \lambda \geq \lambda_2, \end{cases} \tag{6.1}$$

该函数定义良好，因为 $g(\lambda_2) = \lambda_2$，它是连续且严格递减的，并且是一个对合，$G \circ G = \mathrm{id}$，唯一的不动点为 λ_2。如果 $\mathfrak{C}$ 在 $(\lambda_2,\ \lambda_2)$ 处可微，则称其在 λ_2 处可微。

注 6.1。对合性质的两个推论无需任何分析。若单侧导数 $G'(\lambda_2^+)$ 和 $G'(\lambda_2^-)$ 存在、有限且非零，那么在 λ_2 处从右侧对 $G \circ G =$ 恒等式求导；此处 G 将 $[\lambda_2, \lambda_2 + h)$ 映到 $(G(\lambda_2 + h)\ \lambda_2]$，得到

$$G'(\lambda_2^-)\, G'(\lambda_2^+) = 1.$$

若 G 在 λ_2 处可微，则 $G'(\lambda_2)^2 = 1$；又由于 G 单调递减，$G'(\lambda_2) = -1$。因此，只要 $\mathfrak{C}$ 在对角线上光滑，它就与对角线正交。下文的结果将确定两个单侧斜率。

~ ~我们采用第 3 节的记号，其中定义了 M 和 I_b；$\|I_b'(u)\|_*$ 表示式 (3.3) 中给出的范数，$\mathbb{P}$ 和 $\alpha(b)$ 则定义于 (3.14)。常数 c_e 以及球 $B_\rho(v) \subseteq M$ 取自引理 3.7，并记 $\lambda_{1,p} = \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)$。我们假设

方程 (1.1) 中特征值为 λ_2 的每个特征函数都是固定 $\phi_{2,p} \in M.$ 的倍数 (6.2)

~在 M 上具有临界值 λ_2 的 I_0 的临界点，恰好是 M 中具有 ~特征值 λ_2 的特征函数。因此，(6.2) 表明，I_0 在水平 λ_2 处的临界集为 $\{\phi_{2,p}, -\phi_{2,p}\}$。对于 $p = 2$，(6.2) 表明 λ_2 具有单重性。我们置

$$A = \int_\Gamma (\phi_{2,p}^+)^p \, dx, \qquad B = \int_\Gamma (\phi_{2,p}^-)^p \, dx, \qquad A + B = 1, \qquad r = \frac{A}{B}, \tag{6.3}$$

并注意到 $A, B > 0$，因为 $\phi_{2,p}$ 根据引理 2.8 *(iii)* 改变符号，当 $\lambda_2 > \lambda_{1,p}$ 时。

下文所使用的定量变形引理和非临界区间性质分别是第 3 节的引理 3.8 和 3.10。

引理 6.2。令 $0 < \varepsilon < \lambda_2 - \lambda_{1,p}$，并置

$$O_\varepsilon = \{u \in M : \tilde{I}_0(u) < \lambda_2 - \varepsilon\}.$$

则 O_ε 恰好有两个道路连通分支：$C_\varepsilon^- \ni -\phi_{1,\,p}$ 和 $C_\varepsilon^+ \ni \phi_{1,\,p}$，且二者在$M$中都是开集。

证明。 根据引理 3.7， M 的开子集的道路连通分支是开集，这就证明了最后一个断言；并且 B_r（x）中的任意两点 $x \in M$和 $0 < r \leq 1/$（$2c_e$）都能通过$B_{C_0 r}$（x）中的一条路径相连，其中 $C_0 = 2$（$1 + c_e\|x\|$）。

根据定理 1.1、 $b = 0$ 和推论 3.18，在区间（$\lambda_{1,\ p}$， λ_2）内没有特征值，˜且 $\lambda_{1,\ p}$ 是单重的（引理 2.8），因此 I_0 中临界值低于 λ_2 的唯一临界点是$\pm\phi_{1,\ p}$。

我们断言，对于每个 $r > 0$，都存在 $\eta > 0$ 使得

$$\{u \in M : \tilde{I}_0(u) \leq \lambda_{1,p} + \eta\} \subseteq B_r(\phi_{1,p}) \cup B_r(-\phi_{1,p}). \tag{6.4}$$

˜否则，存在 $u_n \in M$ 使得 I_0（u_n）$\to$ $\lambda_{1、\ p}$ 和$\|u_n \mp \phi_{1、\ p}\| \geq r$。该序列在 X（Γ， V_D）中有界，因此沿某个子序列 $u_n \rightharpoonup u$，并且根据定理 2.3， $u_n \to u$ 在 L^p（Γ）中。于是 $u \in M$，并且由弱下半连续性，$\int_\Gamma |u'|^p\,dx \leq \lambda_{1、\ p}$，从而$u = \pm\phi_{1、\ p}$ 和$\int_\Gamma |u_n'|^p\,dx \to \int_\Gamma |u'|^p\,dx$。 u_n'的弱收敛结合范数的收敛，根据 L^p（Γ）的一致凸性可知， $u_n' \to u'$ 在 L^p（Γ）中，因此 $u_n \to \pm\phi_{1、\ p}$ 在 X（Γ， V_D）中，这与$\|u_n \mp \phi_{1、\ p}\| \geq r$ 矛盾。

顶点 v1由于 I_0 在 M 上连续，且 I_0(±$\phi_{1,\ p}$) = $\lambda_{1,\ p} < \lambda_2 - \varepsilon$，因此存在 $\rho > 0$，使得 B_ρ(±$\phi_{1,\ p}$) $\subseteq O_\varepsilon$。令

$$r = \min\Big\{\frac{\rho}{C_0},\ \frac{1}{2c_e}\Big\}, \qquad C_0 = 2\big(1 + c_e\|\phi_{1,p}\|\big),$$

并令 $\eta > 0$ 由此 r通过（如有必要）缩小而得到，使得$\lambda_{1,\ p} + \eta < \lambda_2 - \varepsilon$。经过这样的缩小后，包含关系（6.4）仍然成立。

顶点 v1令 $u \in O_\varepsilon$。若 I_0(u)$\leq \lambda_{1,\ p} + \eta$，则（6.4）意味着

$$u \in B_r(\phi_{1,p}) \cup B_r(-\phi_{1,p}).$$

顶点 v1若 I_0(u)$> \lambda_{1,\ p} + \eta$，则区间 $[\lambda_{1,p} + \eta, I_0(u)]$ 不包含 I_0的任何临界值，因此，根据引理 3.10，存在一条路径，将 u连接到某个点 y，使得 I_0(y)$\leq \lambda_{1,\ p} + \eta$，并且沿着这条路径，

˜ ˜ ˜I_0 单调不增。特别地，这条路径包含在 $\{I_0 \leq I_0(u)\} \subseteq O_\varepsilon$中。此外，（6.4）意味着

$$y \in B_r(\phi_{1,p}) \cup B_r(-\phi_{1,p}).$$

因此，在两种情形下， u 都可以在 O_ε 内连接到 B_r（$\phi_{1,\ p}$） $\cup\, B_r$（$-\phi_{1,\ p}$）中的一点。由 (3.4) 可知，这一点可以通过一条包含于.....的路径连接到$\phi_{1,\ p}$ 或$-\phi_{1,\ p}$

$$B_{C_0 r}(\pm\phi_{1,p}) \subseteq B_\rho(\pm\phi_{1,p}) \subseteq O_\varepsilon.$$

O_ε 中的每一点因此都属于$\phi_{1,\ p}$ 或$-\phi_{1,\ p}$的道路分支，因此O_ε 至多有两个道路连通分支。

它至少有两个：若 O_ε 中存在一条从$-\phi_{1,\ p}$ 到$\phi_{1,\ p}$ 的路径，则该路径将属于 $\mathbb{P}$ 并满足

$$\max_{P[-1,1]} \tilde{I}_0 \leq \lambda_2 - \varepsilon < \lambda_2 = \alpha(0),$$

这与 α(0)的定义 (3.14) 矛盾。 □

定理 6.3。 设 $1 < p < \infty$ 并假设(6.2)成立。则 α 在$b = 0$处从右侧可微，且

$$\alpha'(0^+) = -\max\{A, B\}. \tag{6.5}$$

因此，当 G 如(6.1)中所示时，

$$G'(\lambda_2^+) = -\max\Big\{r, \frac{1}{r}\Big\}, \qquad G'(\lambda_2^-) = -\min\Big\{r, \frac{1}{r}\Big\},$$

并且 $\mathfrak{C}$ 在(λ_2, λ_2) 处可微，当且仅当 $r = 1$，也就是说，当且仅当

$$\int_\Gamma (\phi_{2,p}^+)^p \, dx = \int_\Gamma (\phi_{2,p}^-)^p \, dx;$$

在这种情况下，斜率为 -1。

证明。对于 $\rho > 0$ 取

$$N_\rho = B_\rho(\phi_{2,p}) \cup B_\rho(-\phi_{2,p}),$$

并固定 $\rho \in (0, \min\{\|\phi_{2,p}\|, 1/c_e\})$，使得两个球互不相交。对于 $u,\ v \in M$逐点有$|u^+ - v^+| \le |u - v|$，因此 $\|u^+ - v^+\|_p \le \|u - v\|_p$。 $t \mapsto t^p$在 $[0,1]$, 上的中值定理，结合 $\|u^+\|_p,\ \|v^+\|_p \le 1$，可得

$$\left| \int_\Gamma (u^+)^p \, dx - \int_\Gamma (v^+)^p \, dx \right| \le p \, \|u - v\|_p \le p \, c_e \|u - v\|.$$

由于 $(-\phi_{2,\,p})^+ = \phi_{2,\,p}^-$，量 $\int_\Gamma (u^+)^p \, dx$ 在 $B_\rho(\phi_{2,\,p})$上与 A 的差至多为 $p\, c_e \rho$，而在 $B_\rho(-\phi_{2,\,p})$上与 B的差至多为 $p\, c_e \rho$。记 $\kappa = p\, c_e \rho$。

步骤 *1*：我们断言，存在 $\beta > 0$ 和 $\varepsilon_0 > 0$，二者都取决于 ρ，使得

$$\|\tilde{I}_0'(u)\|_* \ge \beta \qquad \text{for all } u \in M \setminus N_{\rho/8} \text{ with } |\tilde{I}_0(u) - \lambda_2| \le 2\varepsilon_0. \tag{6.6}$$

~ ~否则，存在 $u_n \in M \setminus N_{\rho/8}$，满足 $I_0(u_n) \to \lambda_2$ 以及 $\|I_0'(u_n)\|_* \to 0$，而引理 3.6 给出一个收敛到能级为 λ_2 的临界点的子序列。该极限仍满足$\|u \mp \phi_{2,\,p}\| \ge \rho/8$，因此既不是 $\phi_{2,\,p}$，也不是 $-\phi_{2,\,p}$，这与 (6.2) 矛盾。固定

$$\delta = \frac{\rho}{8C_*}, \qquad S = M \setminus N_{\rho/2},$$

其中 C_* 是 $b = 0, c = \lambda_2$ 对应的引理 3.8 中的常数。于是 $\delta \le \rho/16 \le 1/(16c_e)$。缩小$\varepsilon_0$，使得

$$\frac{10\varepsilon_0}{\delta} \le \beta, \qquad \varepsilon_0 \le 1, \qquad 2\varepsilon_0 < \lambda_2 - \lambda_{1,p}.$$

我们断言，对于每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$，引理 3.8 的假设 (3.5) 在 $c = \lambda_2$ 下成立。设给定这样的 ε，并令 $u \in M$ 满足 $\operatorname{dist}(u,\ S) \le 2C_*\delta = \rho/4$ 和 $|I_0(u) - \lambda_2| \le 2\varepsilon$。选取$w \in S$ 使得 $\|u - w\| < 3\rho/8$。于是 $w \notin N_{\rho/2}$，也就是说，$\|w \mp \phi_{2,\,p}\| \ge \rho/2$，因此

$$\|u \mp \phi_{2,p}\| \ge \|w \mp \phi_{2,p}\| - \|u - w\| > \frac{\rho}{2} - \frac{3\rho}{8} = \frac{\rho}{8},$$

~使得 $u \notin N_{\rho/8}$。此外 $|I_0(u) - \lambda_2| \le 2\varepsilon \le 2\varepsilon_0$，因此 (6.6) 适用于 u，并得出

$$\|\tilde{I}_0'(u)\|_* \ge \beta \ge \frac{10\varepsilon_0}{\delta} \ge \frac{10\varepsilon}{\delta},$$

这就是 (3.5)。我们将相应的变形记为 η_ε。(3.6) 中的界 $\|\eta_\varepsilon(t,u) - u\| \le C_*\delta = \rho/8$ 对 ε 是一致的，因为 δ 和 C_* 不依赖于 ε。选择 $2\varepsilon_0 < \lambda_2 - \lambda_{1,p}$ 可确保 $|I_0(\pm\phi_{1,p}) - \lambda_2| = \lambda_2 - \lambda_{1,p} > 2\varepsilon$，因此由 (3.6)，$\eta_\varepsilon$ 固定 $\pm\phi_{1,p}$，且 $\eta_\varepsilon(1,\cdot)$ 将 $\mathbb{P}$ 映射到 $\mathbb{P}$。最后，$u \notin N_\rho$ 意味着 $u \in S$，因为 $N_{\rho/2} \subseteq N_\rho$。

步骤 *2*：令 $0 < b \le \varepsilon_0$ 和 $P \in \mathbb{P}$。在 M 上，我们有 $\int_\Gamma (u^+)^p \, dx \le 1$，因此 $\tilde{I}_b \ge \tilde{I}_0 - b$。若~$\max_P I_0 > \lambda_2 + \varepsilon_0$，则

$$\max_P \tilde{I}_b > \lambda_2 + \varepsilon_0 - b \ge \lambda_2.$$

否则 $P \subseteq \{I_0 \le \lambda_2+\varepsilon_0\}$。设 $P=\eta_{\varepsilon_0}(1,P)\in\mathbb{P}$。由 (3.14) 可得 $\max_{\tilde P} I_0 \ge \alpha(0)=\lambda_2$，且最大值在某个 $u\in P$对应的 $\eta_{\varepsilon_0}(1,u)$ 处取得。若 $u\notin N_\rho$，则 $u\in S$，而 (3.6) 给出 $I_0(\eta_{\varepsilon_0}(1,u)) \le \lambda_2-\varepsilon_0$，这是不可能的。因此 $u\in N_\rho$，并且由于 I_0 不会沿变形增大，

$$\tilde I_0(u) \;\ge\; \tilde I_0\big(\eta_{\varepsilon_0}(1,u)\big) \;\ge\; \lambda_2.$$

因此

$$\max_P \tilde I_b \;\ge\; \tilde I_b(u)=\tilde I_0(u)-b\int_\Gamma (u^+)^p\,dx \;\ge\; \lambda_2-b\big(\max\{A,B\}+\kappa\big).$$

在这两种情形下，右端均从下方界定 $\max_P I_b$，因此对 $P\in\mathbb{P}$取下确界，

$$\alpha(b) \;\ge\; \lambda_2-b\big(\max\{A,B\}+\kappa\big) \qquad (0<b\le\varepsilon_0). \tag{6.7}$$

步骤 *3*：设 $\varepsilon'\in(0,\varepsilon_0]$ 且 $\varepsilon\in(0,\varepsilon']$。由 (3.14)，存在 $P\in\mathbb{P}$，使得 $\max_P I_0\le\lambda_2+\varepsilon$。令 $P=\eta_{\varepsilon'}(1,P)\in\mathbb{P}$，从而 $\max_{\tilde P} I_0\le\lambda_2+\varepsilon$。我们断言

$$u\in\tilde P \;\text{ and }\; \tilde I_0(u)>\lambda_2-\varepsilon' \quad\Longrightarrow\quad u\in N_\rho. \tag{6.8}$$

If $u\notin N_\rho$，其原像 $u_0\in P$ 由 (3.6) 满足 $\|u_0-u\|\le C_*\delta=\rho/8$，因此

$$\|u_0\mp\phi_{2,p}\|\ge\|u\mp\phi_{2,p}\|-\|u-u_0\|\ge\rho-\frac{\rho}{8}=\frac{7\rho}{8}>\frac{\rho}{2},$$

从而 $u_0\notin N_{\rho/2}$，即 $u_0\in S$。又因 $I_0(u_0)\le\lambda_2+\varepsilon\le\lambda_2+\varepsilon'$，由 (3.6) 得 $I_0(u)\le\lambda_2-\varepsilon'$。

应用引理 6.2，以 $\varepsilon'/2$ 代替 ε，并记 $O=O_{\varepsilon'/2}$ 和 $C^\pm=C^\pm_{\varepsilon'/2}$。在 $[-1,1]$ 上参数化 $\tilde P$，并令

$$t^*=\sup\{t:\tilde P(t)\in C^-\},\qquad t^{**}=\inf\{t>t^*:\tilde P(t)\in C^+\}.$$

集合 $\tilde P^{-1}(C^-)$和 $\tilde P^{-1}(C^+)$在 $[-1,1]$ 中不交且为开集，并分别包含 -1 和 1。于是 $\tilde P(t^*)\notin C^-$，因为 $\tilde P^{-1}(C^-)$是开集且 t^*是其上确界；又因为 t^*是 $\tilde P^{-1}(C^-)$中点的极限，故 $\tilde P(t^*)\notin C^+$。因此 $\tilde P(t^*)\notin O$，也就是说，$\tilde I_0(\tilde P(t^*))\ge\lambda_2-\varepsilon'/2$，并且根据 (6.8)，$P(t^*)\in N_\rho$。令 U为 $B_\rho(\phi_{2,p})$和 $B_\rho(-\phi_{2,p})$中包含 $P(t^*)$的球。在 t^{**}处同样适用这一论证。对于 $t\in(t^*,t^{**})$，点 $\tilde P(t)$既不属于 C^-，也不属于 C^+，因此 $P([t^*,t^{**}])$是 $M\setminus O$的连通子集，因而也是 N_ρ的连通子集。由于它连通且包含 $P(t^*)$，所以它包含于 U中。由于 U是开集且 P 连续，存在 $a<t^*$和 $c>t^{**}$使得

$$\tilde P(a)\in C^-,\qquad \tilde P(c)\in C^+,\qquad \tilde P([a,c])\subseteq U.$$

顶点 v1令 $Q\in\mathbb{P}$ 为 C^- 中从 $-\phi_{1,\,p}$ 到 $P(a)$ 的一条路径、$P|_{[a,c]}$ 以及 C^+ 中从 $\tilde P(c)$ 到 $\phi_{1,\,p}$ 的一条路径的拼接。于是

$$Q\subseteq O\cup U,\qquad \tilde I_0\le\lambda_2+\varepsilon \;\text{ on } Q,\qquad \tilde I_0<\lambda_2-\frac{\varepsilon'}{2} \;\text{ on } Q\setminus U. \tag{6.9}$$

顶点 v1将 Q 替换为 $t\mapsto -Q(-t)$。后者同样属于 $\mathbb{P}$，且由于 I_0 是偶函数，I_0 沿其取值不变，因此我们可以指定两个球中的哪一个是 U。

步骤 *4*：令 $0<b\le\varepsilon_0/2$，取 $\varepsilon'=2b\max\{A,B\}$，使得 $\varepsilon'\le\varepsilon_0$因为 $\max\{A,B\}\le1$，令 $\varepsilon\in(0,\varepsilon']$，并令 Q 为步骤 3 中的路径，其中

$$U=B_\rho(\phi_{2,p})\;\text{ if } A\ge B,\qquad U=B_\rho(-\phi_{2,p})\;\text{ if } A<B.$$

在 $Q\setminus U$ 上，根据（6.9），

$$\tilde{I}_b \le \tilde{I}_0 < \lambda_2 - \frac{\varepsilon'}{2} = \lambda_2 - b\max\{A,B\},$$

而在顶点 v1 上，$\int_\Gamma (u^+)^p\,dx \ge \max\{A,B\} - \kappa$ 且 $\tilde{I}_0 \le \lambda_2 + \varepsilon$，因此

$$\tilde{I}_b(u) \le \lambda_2 + \varepsilon - b\big(\max\{A,B\} - \kappa\big).$$

Hen ˜ce $\alpha(b) \le \max_Q I_b \le \lambda_2 - b(\max\{A,B\} - \kappa) + \varepsilon$，并且由于 $\varepsilon \in (0,\varepsilon']$ 是任意的，

$$\alpha(b) \;\le\; \lambda_2 - b\big(\max\{A,B\} - \kappa\big) \qquad (0 < b \le \varepsilon_0/2). \tag{6.10}$$

步骤 *5*：由 (6.7) 和 (6.10)，对于每个可容许的 ρ，

$$-\max\{A,B\} - \kappa \;\le\; \liminf_{b\to 0^+} \frac{\alpha(b)-\lambda_2}{b} \;\le\; \limsup_{b\to 0^+} \frac{\alpha(b)-\lambda_2}{b} \;\le\; -\max\{A,B\} + \kappa,$$

其中 $\kappa = p\,c_e\rho$。令 $\rho \to 0$，得到 (6.5)。首先取极限 $b \to 0^+$：β 和 ε_0 依赖于 ρ。最后，对于 $b > 0$ 和 $\lambda = b + \alpha(b)$，

$$\frac{G(\lambda)-G(\lambda_2)}{\lambda-\lambda_2} = \frac{\alpha(b)-\lambda_2}{b+\alpha(b)-\lambda_2} = \frac{\big(\alpha(b)-\lambda_2\big)/b}{1+\big(\alpha(b)-\lambda_2\big)/b} \;\longrightarrow\; \frac{-\max\{A,B\}}{1-\max\{A,B\}} = -\frac{\max\{A,B\}}{\min\{A,B\}}$$

当 $b \to 0^+$ 时，由 (6.3) 和 $\min\{A,B\} > 0$ 得出。由于 $b \mapsto b + \alpha(b)$ 是 $[0,\infty)$ 到 $[\lambda_2,\infty)$ 上的同胚，这个极限为 $G'(\lambda_2^+)$。$G'(\lambda_2^-)$ 的值由注 6.1 得出，而 G 在 λ_2 处的可微性等价于两个单侧导数相等，也就是 $r = 1$。 □

注 *6.4.* 对于 $p = 2$ 和 λ_2 单重的情形，定理 *6.3* 也可由已知结果推出。在 (λ_2,λ_2) 附近，$\Sigma_{2,\Gamma}$ 的非平凡部分由两条经过 (λ_2,λ_2) 的曲线组成，这些曲线由 *[23, 40],* 的 *Lyapunov–Schmidt* 约化给出；该约化适用于 Γ，因为 $X(\Gamma, V_D)$ 紧致嵌入 $L^2(\Gamma)$；将方程与 $\pm\phi_2$,*2* 配对可得，它们的斜率分别为 $-r$ 和 $-1/r$。斜率为 $-s$ 的曲线与直线 $\lambda^+ = \lambda^- + b$ 在 $\lambda^- = \lambda_2 - \frac{s}{1+s}b + o(b)$ 处相交，而该值随 s 减小；根据定理 *1.1*，$(b + \alpha(b)\ \alpha(b))$ 是这条直线上的第一个非平凡点；因此，$\mathfrak{C}$ 在 $\lambda^+ > \lambda^-$ 时沿着较陡的曲线，在 $\lambda^+ < \lambda^-$ 时沿着另一条曲线，也就是说，按照 *[39,* 第 *3],* 节中的含义（其中未计算斜率），它是经过 (λ_2,λ_2) 的最小曲线。对于 $p = 2$，定理 *6.3* 的内容因而是在不进行约化的情况下给出一个证明，同时涵盖重特征值的情形（定理 *6.7*）。对于 $p \ne 2$，不存在这样的约化，而且我们不知道有此类型的结果；在 *[35]* 中构造的经过 p-拉普拉斯算子的特征值的曲线，并未提供关于其斜率的信息。在有限维情形下，*Holubov ´a* 和 *Ne˘cesal [26]* 得到如下结果：对于一个对称矩阵以及具有特征向量 u_0 的单特征值，其斜率为 $-\|u_0^+\|^2/\|u_0^-\|^2$ *for*$\pm u_0$，这与定理 *6.3* 一致；重特征值的情形见注 *6.8*。

推论 6.5。设 $1 < p < \infty$，并假设 (6.2)。设 $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ 是一个双射，将顶点映射到顶点，并将每条闭边等距地映射到一条闭边，其中 $\sigma(V_D) = V_D$。则 $\phi_{2,p} \circ \sigma = \pm\phi_{2,p}$；若 $\phi_{2,p} \circ \sigma = -\phi_{2,p}$，则 $\mathfrak{C}$ 在 (λ_2,λ_2) 处可微，斜率为-1。对于区间 $[0,L]$，若其两个端点要么都属于 V_D，要么都不属于 V_D，则结论成立，其中 σ 是反射 $x \mapsto L - x$。

证明。根据假设，σ 将 V_D 映射到 V_D，因此 $V(\Gamma)\setminus V_D$ 映射到自身，故其保持顶点条件不变；而且 $u \mapsto u\circ\sigma$ 是从 $X(\Gamma, V_D)$到自身的线性双射。在每条边上，σ 都是等距映射，因此$(u\circ\sigma)' = \pm u'\circ\sigma$，其中符号仅取决于该边；变量替换 $y = \sigma(x)$给出，对于 $u,\phi \in X(\Gamma, V_D)$，

$$\int_\Gamma |(u\circ\sigma)'|^{p-2}(u\circ\sigma)'(\phi\circ\sigma)'\,dx = \int_\Gamma |u'|^{p-2}u'\phi'\,dy,$$

$$\int_\Gamma |u\circ\sigma|^{p-2}(u\circ\sigma)(\phi\circ\sigma)\,dx = \int_\Gamma |u|^{p-2}u\,\phi\,dy.$$

当 ϕ 变化时， $\phi\circ\sigma$ 遍历 $X(\Gamma, V_D)$，于是只要u 是特征函数， $u\circ\sigma$ 就是特征值为 λ 的特征函数，并且 $\|u\circ\sigma\|_p = \|u\|_p$。由(6.2)， $\phi_{2,p}\circ\sigma = t\phi_{2,p}$ ，其中 $|t| = 1$。若 $t = -1$，则$\phi_{2,p}^- = (\phi_{2,p}\circ\sigma)^+ = \phi_{2,p}^+\circ\sigma$，因此

$$B = \int_\Gamma (\phi_{2,p}^-)^p\,dx = \int_\Gamma (\phi_{2,p}^+\circ\sigma)^p\,dx = \int_\Gamma (\phi_{2,p}^+)^p\,dx = A,$$

也就是说， $r = 1$，定理 6.3 适用。

现在令 $\Gamma = [0, L]$，其中 $V_D = \{0, L\}$ 或 $V_D = \emptyset$，因此两个端点处的顶点条件分别为 $u = 0$ 和 $u' = 0$；再令 u 为特征值 $(p-1)k^p$, $k > 0$ 对应的特征函数。我们使用图 5 前一段中回顾的函数 $\sin_p$ 和 $\cos_p = \sin_p'$。这里 $\sin_p(\pi_p/2) = 1$，而 $\cos_p$ 的零点是 $\frac{\pi_p}{2} + \pi_p\mathbb{Z}$ 中的点。根据初值问题 [20] 的唯一性，当 $V_D = \{0, L\}$ 时， $u(x) = c\sin_p(kx)$；当 $V_D = \emptyset$ 时， $u(x) = c\sin_p(kx + \pi_p/2)$，其中 $c \neq 0$；而 $x = L$ 处的条件给出 $kL \in \pi_p\mathbb{N}$。因此，每个特征值都是单重的，(6.2) 成立，并且相差一个常数因子，

$$\phi_{2,p}(x) = \sin_p\Big(\frac{2\pi_p x}{L}\Big) \quad \text{if } V_D = \{0, L\}, \qquad \phi_{2,p}(x) = \sin_p\Big(\frac{\pi_p x}{L} + \frac{\pi_p}{2}\Big) \quad \text{if } V_D = \emptyset.$$

由于 $\sin_p$ 是奇函数且 $\sin_p(\theta + \pi_p) = -\sin_p\theta$，因此对于所有 θ，都有 $\sin_p(2\pi_p - \theta) = -\sin_p\theta$ 以及 $\sin_p(\pi_p - \theta) = \sin_p\theta$，所以在两种情况下均有 $\phi_{2,\,p}(L - x) = -\phi_{2,\,p}(x)$。 □

对于 $b \geq 0$，令 K_b 为 I_b 在 M 上取值 $\alpha(b)$ 时的临界点集合，并令

$$m_b = \min_{u\in K_b}\int_\Gamma (u^+)^p\,dx, \qquad M_b = \max_{u\in K_b}\int_\Gamma (u^+)^p\,dx.$$

在 (6.2) 条件下，我们有 $K_0 = \{\phi_{2,p}, -\phi_{2,p}\}$、 $m_0 = \min\{A, B\}$ 以及 $M_0 = \max\{A, B\}$。下一个结果对任意 $b \geq 0$ 都成立，且无需假设 (6.2)。

命题 6.6。令 $1 < p < \infty$ 和 $b \geq 0$。则 K_b 非空且紧致， $0 < m_b \leq M_b < 1$，并且

$$-M_b \leq \liminf_{h\to 0}\frac{\alpha(b+h) - \alpha(b)}{h} \leq \limsup_{h\to 0}\frac{\alpha(b+h) - \alpha(b)}{h} \leq -m_b, \tag{6.11}$$

其中，当 $b = 0$ 时 $h \to 0^+$。特别地，如果 $u \mapsto \int_\Gamma (u^+)^p\,dx$ 在 K_b 上为常数，例如当 K_b 是单点集合时，则 α 在 b 处可微；当 $b = 0$ 时从右侧可微，并且 $\alpha'(b) = -m_b = -M_b$。

证明。根据命题 3.12， $\alpha(b)$ 是 I_b 的一个临界值，因此 $K_b \neq \emptyset$。 K_b 中的一个序列是在层级 $\alpha(b)$ 处的 Palais–Smale 序列，因此根据引理 3.6，它有一个收敛到该层级临界点的子序列；于是 K_b 是紧致的。令 $u \in K_b$。根据拉格朗日乘数法， u 是方程 (1.1) 的一个解，其中 $(\lambda^+, \lambda^-) = (b + \alpha(b)\ \alpha(b))$。如果 u 不改变符号，那么它将是一个具有常符号的特征函数，其特征值为 $b + \alpha(b)$ 或 $\alpha(b)$，根据命题 3.12，这两个特征值都大于 $\lambda_{1,p}$，这与引理 2.8 *(iii)* 矛盾。因此 $0 < \int_\Gamma (u^+)^p\,dx < 1$，并且由紧性可得 $0 < m_b \leq M_b < 1$。

固定顶点 v1（0， $1/c_e$），令 $N_r(K_b) = \{u \in M\colon \operatorname{dist}(u,\ K_b) < r\}$ 对 $r > 0$，并令 $\kappa = p\,c_e\rho$。根据定理 6.3 证明中的第一个不等式，

$$m_b - \kappa \leq \int_\Gamma (u^+)^p\,dx \leq M_b + \kappa \qquad \text{for } u \in N_\rho(K_b). \tag{6.12}$$

我们按照定理 6.3 证明中步骤 1 的方法进行，将 I_0、 λ_2 和 N_r 分别替换为 I_b、 $\alpha(b)$ 和 $N_r(K_b)$。

˜回顾一下，在 $\alpha(b)$ 这一层级上， I_b 的临界点集合恰好是 K_b。因此，根据˜引理 3.6，存在常数

$$\beta > 0 \qquad \varepsilon_0 > 0 \qquad \|I_b' u\|_* \geq \beta \qquad u \in \text{and}$$

，使得对于每个满足 $|I_b(u)$ ˜$- \alpha(b)| \leq 2\varepsilon_0$ 的 $M \setminus N_{\rho/8}(K_b)$，都有 ( )。接下来，选择 $\delta = \frac{\rho}{8C_*}$, 以及 $S = M \setminus N_{\rho/2}(K_b)$，其中 C_* 是引理 3.8 中出现的、对应于 b 和 $c = \alpha(b)$ 的常数。如有必要，通过减小 ε_0，我们可以假设

$$\frac{10\varepsilon_0}{\delta} \leq \beta, \qquad \varepsilon_0 \leq 1, \qquad 2\varepsilon_0 < \alpha(b) - \lambda_{1,p}.$$

现在可以应用定理 6.3 中步骤 1 的相同论证。事实上，距离函数$u \mapsto \text{dist}(u,\ K_b)$是 1-Lipschitz 的，因此其中使用的估计在以 $N_r(K_b)$ 替代N_r时仍然成立。因此，对每个 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$，引理 3.8 给出了一个满足以下条件的变形 η_ε

$$\|\eta_\varepsilon(t,u) - u\| \leq \frac{\rho}{8}$$

˜ ˜对所有 $t \in [0,1]$ 和 $u \in M$ 均成立。此外， $I_b(-\phi_{1,\ p}) = \lambda_{1,\ p}$ 以及 $I_b(\phi_{1,\ p}) = \lambda_{1,\ p} - b$ 均小于$\alpha(b) - 2\varepsilon$，因此映射 $\eta_\varepsilon(1,\ \cdot)$ 将 $\mathbb{P}$ 映入 $\mathbb{P}$。

下界。 设 $0 < |h| \leq \varepsilon_0/2$ 满足 $b + h \geq 0$，并固定 $P \in \mathbb{P}$。由于

$$\tilde{I}_{b+h}(u) = \tilde{I}_b(u) - h\int_\Gamma (u^+)^p\,dx, \qquad 0 \leq \int_\Gamma (u^+)^p\,dx \leq 1$$

˜对所有 $u \in M$，我们考虑两种情况。如果 $\max_P I_b > \alpha(b) + \varepsilon_0$，那么

$$\max_P \tilde{I}_{b+h} > \alpha(b) + \varepsilon_0 - |h| \geq \alpha(b) + |h|.$$

顶点 v1否则，将步骤 2 的论证应用于 η_{ε_0}，我们得到 $u \in P \cap N_\rho(K_b)$，使得 $I_b(u) \geq \alpha(b)$。因此，由 (6.12) 可得，

$$\tilde{I}_{b+h}(u) \geq \begin{cases} \alpha(b) - h(M_b + \kappa), & h > 0, \\ \alpha(b) + |h|(m_b - \kappa), & h < 0. \end{cases}$$

由于 $m_b - \kappa \leq 1$，在两种情况下

$$\alpha(b+h) \geq \alpha(b) - h(M_b + \kappa) \quad h > 0, \qquad \alpha(b+h) \geq \alpha(b) + |h|(m_b - \kappa) \quad h < 0. \tag{6.13}$$

顶点 v1上界。 设 $0 < |h| \leq \varepsilon_0$ 满足 $b + h \geq 0$，设 $\varepsilon \in (0, |h|]$，设 $P \in \mathbb{P}$ 满足 $\max_P I_b \leq$ ˜$\alpha(b) + \varepsilon$，并令 $P = \eta_{|h|}(1, P)$。证明 (6.8) 的论证表明，每个满足˜ ˜$I_b(u) > \alpha(b) - |h|$ 的 $u \in P$都属于 $N_\rho(K_b)$。因此，对于 $u \in P \setminus N_\rho(K_b)$，我们有

$$\tilde{I}_{b+h}(u) \leq \tilde{I}_b(u) + \max\{-h, 0\} \leq \alpha(b) - |h| + \max\{-h, 0\},$$

顶点 v1这等于 $\alpha(b) - h$，若 $h > 0$ 且 $\alpha(b)$，若 $h < 0$。对于 $u \in P \cap N_\rho(K_b)$，由 (6.12) 及 ˜$I_b(u) \leq \alpha(b) + \varepsilon$，我们有

$$\tilde{I}_{b+h}(u) \leq \begin{cases} \alpha(b) + \varepsilon - h(m_b - \kappa), & h > 0, \\ \alpha(b) + \varepsilon + |h|(M_b + \kappa), & h < 0. \end{cases}$$

由于顶点 v1 和 ε 是任意的，

$$\alpha(b+h) \leq \alpha(b) - h(m_b - \kappa) \quad h > 0, \qquad \alpha(b+h) \leq \alpha(b) + |h|(M_b + \kappa) \quad h < 0. \tag{6.14}$$

将 (6.13) 和 (6.14) 除以顶点 v1，得到

$$-(M_b + \kappa) \leq \frac{\alpha(b+h) - \alpha(b)}{h} \leq -(m_b - \kappa) \qquad (0 < |h| \leq \varepsilon_0/2,\ b + h \geq 0),$$

其中 $\kappa = p\,c_e\rho$ 和 ρ 是任意的。先令 $h \to 0$，再令 $\rho \to 0$，得到（6.11 ）. □

定理 6.7。令 $p=2$，令 E_2 为 λ_2 的特征空间，并回顾命题 *6.6* 的记号，

$$M_0=\max\Big\{\int_\Gamma (u^+)^2\,dx:\ u\in E_2,\ \|u\|_2=1\Big\}.$$

于是 $\frac12\le M_0<1$，$\alpha'(0^+)=-M_0$，并且

$$G'(\lambda_2^+)=-\frac{M_0}{1-M_0},\qquad G'(\lambda_2^-)=-\frac{1-M_0}{M_0}.$$

特别地，$\mathfrak{C}$ 在(λ_2,λ_2) 处可微，当且仅当对于每个$u\in E_2$，$\int_\Gamma (u^+)^2\,dx=\int_\Gamma (u^-)^2\,dx$。若 λ_2 是单重的，则 $M_0=\max\{A,B\}$，这些公式即为定理 *6.3* 中的公式。

证明。命题 6.6 中的集合 K_0 为 $E_2\cap M$，且 $K_0=-K_0$。因此，根据命题 6.6，$M_0<1$，并且对每个 $u\in K_0$，$M_0\ge\max\{\int_\Gamma (u^+)^2\,dx,\ \int_\Gamma (u^-)^2\,dx\}\ge\frac12$。根据命题 6.6，$\liminf_{b\to0^+}(\alpha(b)-\lambda_2)/b\ge -M_0$。

对于上界，令 $u_*\in K_0$ 其中 $\int_\Gamma (u_*^+)^2\,dx=M_0$。将 ϕ_1、$_p$ 和 u_* 的方程相互代入测试，得到 λ_1、$_p\int_\Gamma \phi_1$、$_p u_*\,dx=\int_\Gamma \phi_1'$、$_p u_*'\,dx=\lambda_2\int_\Gamma \phi_1$、$_p u_*\,dx$；由于 λ_1、$_p<\lambda_2$，两个积分均为零。对于 $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$，令 $w(\theta)=\sin\theta\,\phi_1$、$_p+\cos\theta\,u_*$。于是 $\|w(\theta)\|_2=1$ 且 $w(\pm\pi/2)=\pm\phi_1$、$_p$，因此在 $[-1,1]$ 上重新参数化后的 w 属于 $\mathbb{P}$；又由于 $|\sin\theta|\ge 2|\theta|/\pi$，

$$\tilde I_0(w(\theta))=\lambda_{1,p}\sin^2\theta+\lambda_2\cos^2\theta\le\lambda_2-c\,\theta^2,\qquad c=\frac{4(\lambda_2-\lambda_{1,p})}{\pi^2}.$$

此外，$\|w(\theta)-u_*\|_2=2|\sin(\theta/2)|\le|\theta|$，因此，在定理 6.3 的证明中，将 $c_e\|\cdot\|$替换为 $p=2$ 和 $\|\cdot\|_2$ 后得到的第一个不等式给出 $\int_\Gamma (w(\theta)^+)^2\,dx\ge M_0-2|\theta|$。于是，对于 $b>0$，

$$\tilde I_b(w(\theta))\le\lambda_2-c\,\theta^2-b\,(M_0-2|\theta|)\le\lambda_2-bM_0+\max_{s\in\mathbb{R}}\big(2bs-cs^2\big)=\lambda_2-bM_0+\frac{b^2}{c},$$

而由 (3.14) 得

$$\alpha(b)\le\lambda_2-bM_0+\frac{\pi^2b^2}{4(\lambda_2-\lambda_{1,p})}\qquad(b>0).\tag{6.15}$$

因此，$\alpha'(0^+)=-M_0$。关于 $G'(\lambda_2^\pm)$ 的公式可仿照定理 6.3 证明中的步骤 5 得出，只需将 $\max\{A,B\}$ 替换为 M_0。最后，$M_0/(1-M_0)=(1-M_0)/M_0$ 当且仅当 $M_0=\frac12$；根据 M_0的下界，这当且仅当对每个 $u\in K_0$都有 $\int_\Gamma (u^+)^2\,dx=\int_\Gamma (u^-)^2\,dx$。如果 λ_2 是单重的，那么 $K_0=\{\pm\phi_{2,p}\}$ 且 $M_0=\max\{A,B\}$。□

注 6.8。*(i)* 定理 *6.7* 中的下界对每个 p都成立：根据命题 *6.6*，下极限$\liminf_{b\to0^+}(\alpha(b)-\lambda_2)/b\ge -M_0$，其中 M_0 是集合 K_0中、在 M 内对应特征值 λ_2的特征函数上的 $\int_\Gamma (u^+)^p\,dx$ 的最大值。在(6.2)条件下，等式 $\alpha'(0^+)=-M_0$ 成立；此时$K_0=\{\pm\phi_{2,p}\}$ 且 $M_0=\max\{A,B\}$（定理 *6.3*），而对于 $p=2$，该等式也成立（定理 *6.7*）。定理 *6.7* 中的上~界使用由 $\phi_{1,p}$ 和 u_*张成的平面，在该平面上 $I_0\le\lambda_2$；对于 $p\ne2$，泛函 $\int_\Gamma |u'|^p\,dx$ 不是二次的，而我们不知道有何平面可以替代它。

(ii) 定理 *6.7* 与 *[26]* 的有限维结果一致。对于特征值为 λ、特征空间为 E 的对称矩阵，要使 *Fuˇc´ık* 曲线沿单位向量 $u_0\in E$ 的方向离开（λ,λ），其必要条件是将 $|u_0|$ 正交投影到 E 上所得的结果为 u_0 的倍数。由于 $|u_0|=2u_0^+-u_0$，这意味着 u_0 是 $u\mapsto\|u^+\|^2$ 在 E 的单位球面上的临界点，而该曲线的切线斜率为 $-\|u_0^+\|^2/(1-\|u_0^+\|^2)$。定理 *6.7* 确定了第一条曲线所沿的方向：函数在侧面 $\lambda^+>\lambda^-$ 上的最大值 M_0，以及在侧面 $\lambda^+<\lambda^-$ 上的最小值 $1-M_0$。

现在我们计算三边星形图上的 A 和 B，并证明对每个 p， $A<B$ 都成立。设 Γ 为一棵星形图，其内部顶点为 v_0，三条悬挂边为 e_1、e_2、e_3，长度为 $\ell_1>\ell_2>\ell_3>0$；在悬挂顶点处施加狄利克雷条件，即 $V_D=\{v_1,v_2,v_3\}$，并在 v_0 处施加基尔霍夫条件；见图 5。我们将 e_i 与 $[0,\ell_i]$ 等同，其中 $x=0$ 位于 v_0，而 $x=\ell_i$ 位于 v_i，并令 $1<p<\infty$。我们使用注 2.7 中的函数 $\sin_p$，其归一化满足 $\sin_p(0)=0$、$\sin_p'(0)=1$，且 $|\sin_p|^p+|\sin_p'|^p=1$；因此，长度为 L 的区间上的第一狄利克雷特征值为 $(p-1)(\pi_p/L)^p=\frac{p}{p'}(\pi_p/L)^p$，如注 2.7 所述。它是奇函数，满足 $\sin_p(\theta+\pi_p)=-\sin_p\theta$，仅在 $\pi_p\mathbb{Z}$ 上为零，并且 $\cos_p=\sin_p'$ 满足 $(\varphi_p(\cos_p))'=-(p-1)\varphi_p(\sin_p)$，其中 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s$；见 [20]。我们按命题 5.4 中的定义使用 $\cot_p=\cos_p/\sin_p$。当 $p=2$ 时，这些函数分别为 sin、cos、cot 和 $\pi_2=\pi$。

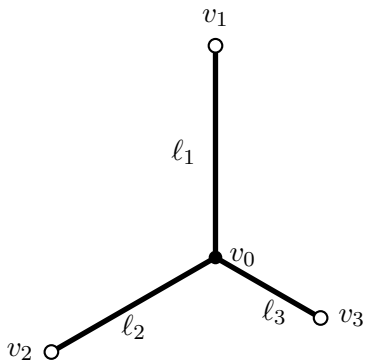

图 5：带有顶点 v1 的三边星形图，悬挂顶点v_1、v_2、v_3 处满足狄利克雷条件，v_0处满足基尔霍夫条件。

对于 $\lambda=(p-1)k^p$ 且满足 $k>0$ 的情形，e_i 上满足 $-(\varphi_p(u'))'=\lambda\varphi_p(u)$ 并在 v_i 处取零的每个解都具有如下形式

$$u_i(x)=c_i\sin_p\big(k(\ell_i-x)\big),\qquad x\in[0,\ell_i],\tag{6.16}$$

由该方程初值问题解的唯一性 [20], ，我们令

$$S(k)=\varphi_p\big(\cot_p(k\ell_1)\big)+\varphi_p\big(\cot_p(k\ell_2)\big)+\varphi_p\big(\cot_p(k\ell_3)\big).\tag{6.17}$$

对于 $p=2$，$S(k)=\cot(k\ell_1)+\cot(k\ell_2)+\cot(k\ell_3)$。

引理 6.9。设 $1<p<\infty$ 且 $\ell_1>\ell_2>\ell_3>0$。

(i) 若 u 是特征值为 $(p-1)k^p$ 的特征函数，且 $u(v_0)\neq0$，则对于 $i=1$、*2*、*3*，$\sin_p(k\ell_i)\neq0$，其由 *(6.16)* 给出，其中 $c_i=u(v_0)/\sin_p(k\ell_i)$，且 $S(k)=0$。反过来，若$S(k)=0$，且对于 $i=1$、*2*、*3*，$\sin_p(k\ell_i)\neq0$，则令 $c_i=1/\sin_p(k\ell_i)$ 的 *(6.16)* 定义了一个特征值为 $(p-1)k^p$ 的特征函数，且 $u(v_0)=1$。

(ii) 如果 u 是特征值为 $(p-1)k^p$ 且 $u(v_0)=0$ 的特征函数，那么 $k\geq\pi_p/\ell_2$。

(iii) 函数 S 在 $(0,\ \pi_p/\ell_1)$ 中有唯一零点 k_1，并且有唯一零点 k_2 i n

$$I_2=\Big(\frac{\pi_p}{\ell_1},\ \min\Big\{\frac{2\pi_p}{\ell_1},\frac{\pi_p}{\ell_2}\Big\}\Big),$$

以及 $\lambda_{1,\ p}=(p-1)k_1^p$，$\lambda_2=(p-1)k_2^p$。

(iv) 特征值 λ_2 是单重的，其特征函数 $\phi_{2,\ p}$ 仅在 $\Gamma\setminus V_D$ 的一个点处为零，即在距 v_1 的距离为 π_p/k_2 的 e_1 点处。

证明。 (*i*) 根据（6.16）以及在 v_0、c_i 处的连续性，$\sin_p(k\ell_i)$ 的正弦为 $=u(v_0)$，其中 $i=1$，2，3。 u 沿 e_i 在 v_0 处的外向导数为 $u_i'(0)=-c_ik$ 的余弦 $\sin_p(k\ell_i)$，因此基尔霍夫条件

写作 $\sum_{i=1}^{3}\varphi_p(c_i)\varphi_p$（$p(k\ell_i)$ 的余弦）$=0$。若 $u(v_0)\neq 0$，则第一个关系给出 $p(k\ell_i)$ 的正弦为 $\neq 0$，并且 $c_i = u(v_0)$/为 $p(k\ell_i)$ 的正弦；第二个关系变为 $\varphi_p(u(v_0))\ S(k)=0$，即 $S(k)=0$。反向阅读，同样的计算给出逆命题：当 $c_i = 1$/为 $p(k\ell_i)$ 的正弦时，函数（6.16）在 v_0 处连续，且 $u(v_0)=1$；由于 $S(k)=0$，它在那里满足基尔霍夫条件。

（*ii*）若 $u(v_0)=0$，那么对每个 i，要么 $c_i=0$，要么 $\sin p(k\ell_i)=0$。满足 $c_i\neq 0$ 的边有 $\sin p(k\ell_i)=0$，因此 $|\cos p(k\ell_i)|=1$，并对基尔霍夫条件贡献一个非零项。如果恰好只有一条边满足 $c_i\neq 0$，那么总和不可能为零。结合 $u\neq 0$，可知存在两条边 e_i 和 e_j，$i\neq j$，且 $\sin p(k\ell_i)=\sin p(k\ell_j)=0$。于是 $k\ell_i,\ k\ell_j\in \pi_p\mathbb{N}$，因此

$$k\ \geq\ \frac{\pi_p}{\min\{\ell_i,\ell_j\}}\ \geq\ \frac{\pi_p}{\ell_2},$$

因为三个长度中任意两个较小者都不超过 ℓ_2。

（*iii*）对于 $\theta\notin\pi_p\mathbb{Z}$，恒等式 $(\varphi_p(\cos p))'=-(p-1)\varphi_p(\sin p)$ 以及 $|\sin_p|^p+|\cos_p|^p=1$ 给出

$$\frac{d}{d\theta}\,\varphi_p(\cot_p\theta)=\frac{d}{d\theta}\,\frac{\varphi_p(\cos_p\theta)}{\varphi_p(\sin_p\theta)}=-(p-1)\,\frac{|\sin_p\theta|^p+|\cos_p\theta|^p}{|\sin_p\theta|^p}=-\frac{p-1}{|\sin_p\theta|^p}.$$

因此，只要其三个项均有限，顶点 v1 就严格递减，且

$$S'(k)=-(p-1)\sum_{i=1}^{3}\frac{\ell_i}{|\sin_p(k\ell_i)|^p}<0.$$

此外，对于每个 $m\in\mathbb{Z}$，当 θ 从右侧趋近 $m\pi_p$ 时，$\varphi_p(\cot_p\theta)\to+\infty$；当 θ 从左侧趋近 $m\pi_p$ 时，$\varphi_p(\cot_p\theta)\to-\infty$。在 $(0,\pi_p/\ell_1)$ 上，所有 $k\ell_i$ 都属于 $(0,\pi_p)$。特别地，当 $k\to 0^+$ 时，$S(k)\to+\infty$；当 $k\to(\pi_p/\ell_1)^-$ 时，$S(k)\to-\infty$，因为第一项趋于 $-\infty$，而另外两项保持有限。因此，函数 S 在此区间内恰有一个零点 k_1。在 I_2 上，我们有 $k\ell_1\in(\pi_p,2\pi_p)$ 和 $k\ell_2,k\ell_3\in(0,\pi_p)$，因此 S 在该处有限且严格递减。它在 I_2 的左端趋于 $+\infty$，此时第一项趋于 $+\infty$；在右端趋于 $-\infty$，此时第一项或第二项趋于 $-\infty$。因此，S 在 I_2 中恰有一个零点 k_2。

对于每个 i，我们都有 $k_1\ell_i<\pi_p$，因此由 *(i)* 可知，与 k_1 对应的特征函数为正，进而根据引理 2.8*(iii)*，有 $\lambda_{1,\,p}=(p-1)k_1^p$。接下来只需证明不存在满足 $k_1<k<k_2$ 的特征值 $(p-1)k^p$。若此类特征值对应的特征函数满足 $u(v_0)\neq 0$，则由 *(i)*可得 $S(k)=0$；但 S 在 $(k_1,\ \pi_p/\ell_1)$ 或 $(\pi_p/\ell_1,\ k_2)$ 内没有零点，而 $k=\pi_p/\ell_1$ 也不可能，因为 $\sin p(k\ell_1)=0$。若它对应的特征函数满足 $u(v_0)=0$，则由 *(ii)* 可得 $k\geq\pi_p/\ell_2>k_2$，且$k_2\in I_2$。因此，根据 (2.6)，有 $\lambda_2=(p-1)k_2^p$。

(iv) 由*(ii)* 和 $k_2<\pi_p/\ell_2$可知，λ_2 的特征函数在 v_0处均不为零。由*(i)*可知，λ_2 的每个特征函数都由其在 v_0处的取值唯一确定，因此 λ_2 是单重的。结合 $c_1=1$，

$$\phi_{2,p}(x)=\sin_p\big(k_2(\ell_1-x)\big)\ \text{ on } e_1,\qquad \phi_{2,p}(x)=\frac{\sin_p(k_2\ell_1)}{\sin_p(k_2\ell_i)}\,\sin_p\big(k_2(\ell_i-x)\big)\ \text{ on } e_i,\ i=2,3,$$

除归一化外。由于顶点 v1$(\pi_p,\ 2\pi_p)$，函数 $\sin p(k_2(\ell_1-x))$ 在 $(0,\ \ell_1)$ 上恰好在 $x=\ell_1-\pi_p/k_2$处为零。对于 $i=2,\ 3$，我们有 $k_2\ell_i\in(0,\ \pi_p)$，因此函数 $\sin p(k_2(\ell_i-x))$ 在 $[0,\ell_i)$ 上不为零，并且 $\phi_{2,\ p}(v_0)=\sin p(k_2\ell_1)\neq 0$。 □

在归一化 $c_1=1$下，函数 $\phi_{2,\ p}$ 在与 v_1 相邻、长度为 π_p/k_2的 e_1 线段上为正，在 $\Gamma\setminus V_D$的其余部分为负，因为

$$\phi_{2,p}(v_0)=\sin_p(k_2\ell_1)<0,\qquad c_i=\frac{\sin_p(k_2\ell_1)}{\sin_p(k_2\ell_i)}<0\quad(i=2,3).$$

（6.3）中的比值 r 不依赖于 $\phi_{2,\,p}$的归一化，因此两个权函数都可以用 $c_1 = 1$计算。写成 $k = k_2$、 $\sigma_p = \int_0^{\pi_p} |\sin_p\theta|^p\,d\theta$，并代入 $\theta = k(\ell_i - x)$，可得

$$\int_\Gamma (\phi_{2,p}^+)^p\,dx = \frac{\sigma_p}{k}, \tag{6.18}$$

$$\int_\Gamma (\phi_{2,p}^-)^p\,dx = \frac{1}{k}\int_{\pi_p}^{k\ell_1} |\sin_p\theta|^p\,d\theta + \sum_{i=2}^{3}\Big|\frac{\sin_p(k\ell_1)}{\sin_p(k\ell_i)}\Big|^p \frac{1}{k}\int_0^{k\ell_i} |\sin_p\theta|^p\,d\theta. \tag{6.19}$$

这里，(6.18) 是在 $\phi_{2,p} > 0$ 所在线段上的积分。在 (6.19) 中，第一项来自 e_1的其余部分，而求和项来自 e_2 和 e_3。对 (6.19) 的三个贡献项均为非负。对于 $p = 2$，有 $\sigma_2 = \pi/2$，于是 (6.18)–(6.19) 变为

$$\int_\Gamma (\phi_{2,p}^+)^2\,dx = \frac{\pi}{2k}, \qquad \int_\Gamma (\phi_{2,p}^-)^2\,dx = \frac{\ell_1 - \pi/k}{2} - \frac{\sin(2k\ell_1)}{4k} + \sum_{i=2}^{3}\frac{\sin^2(k\ell_1)}{\sin^2(k\ell_i)}\Big(\frac{\ell_i}{2} - \frac{\sin(2k\ell_i)}{4k}\Big). \tag{6.20}$$

命题 6.10。 设 $1 < p < \infty$ 和 $\Omega = \{(\ell_1,\ell_2,\ell_3) :\ \ell_1 > \ell_2 > \ell_3 > 0\}$。对于 $\ell \in \Omega$，令 $D(\ell)$ 表示 (6.19) 的右端减去 (6.18) 的右端，其中 $k = k_2$。

(i) $\mathfrak{C}$ 在 (λ_2,λ_2) 处可微，当且仅当 $D(\ell) = 0$，也就是说，当且仅当

$$\int_\Gamma (\phi_{2,p}^+)^p\,dx = \int_\Gamma (\phi_{2,p}^-)^p\,dx. \tag{6.21}$$

此外，如果 $D(\ell) > 0$，则 $r < 1$；如果 $D(\ell) < 0$，则 $r > 1$。

(ii) 顶点 *v1*在Ω上连续。因此$\Omega_+ = \{D > 0\}$ 和$\Omega_- = \{D < 0\}$ 是开集，并且对每个 $\ell \in \Omega_+ \cup \Omega_-$，$\mathfrak{C}$ 在(λ_2,λ_2) 处有一个角点。

(iii) 如果 $\ell_2 < \ell_1 < 2\ell_2$，那么对每个充分小的 $\ell_3 > 0$，$(\ell_1,\ell_2,\ell_3) \in \Omega_+$。特别地，对每个 p，都存在一些星形图，使得 $\mathfrak{C}$ 在(λ_2,λ_2)处有一个角点。

(iv) 对于 $p = 2$，集合$\Omega_0 = \{D = 0\}$ 是Ω的一个真解析子簇，因此是零测集；对于几乎每个 $\ell \in \Omega$，$\mathfrak{C}$ 在(λ_2,λ_2) 处有一个角点。

证明。 *(i)* 根据引理 6.9，λ_2 是单重的，因此（6.2）成立，定理 6.3适用。（6.18）–（6.19）中使用的归一化 $c_1 = 1$ 以相同的正因子乘以 A 和 B，所以D 的符号与 $B - A$相同，并且 $D = 0$ 当且仅当 $r = 1$。

(ii) 集合 $\{(k,\ \ell) :\ \ell \in \Omega\ \ k \in I_2(\ell)\}$ 是开集，因为 I_2 的端点关于 ℓ 连续变化，且在其上，S 关于 k 连续且严格递减。给定 $\ell^0 \in \Omega$ 和一个足够小的 $\eta > 0$，在 $\ell = \ell^0$ 处有 $S(k_2(\ell^0) - \eta) > 0 > S(k_2(\ell^0) + \eta)$，并且当 ℓ 接近 ℓ^0 时，这些不等式仍然成立，因此 $|k_2(\ell) - k_2(\ell^0)| < \eta$。因此 k_2 在 Ω 上连续；又由于 $\sin_p(k_2\ell_2)$ 和 $\sin_p(k_2\ell_3)$ 均不为零，D 也连续。最后一个断言由 *(i)* 得出。

(iii) 固定 ℓ_1，ℓ_2，其中 $\ell_2 < \ell_1 < 2\ell_2$，并令 $\ell_3 \to 0^+$。那么 $I_2 = (\pi_p/\ell_1,\ \pi_p/\ell_2)$，因此 k_2 保持在紧致区间 $[\pi_p/\ell_1, \pi_p/\ell_2]$, $k_2\ell_3 \to 0^+$ 内，且 $\varphi_p(\cot_p(k_2\ell_3)) \to +\infty$。由于 $S(k_2) = 0$,

$$\varphi_p\big(\cot_p(k_2\ell_1)\big) + \varphi_p\big(\cot_p(k_2\ell_2)\big) = -\varphi_p\big(\cot_p(k_2\ell_3)\big) \to -\infty.$$

第一项有下界： $k_2\ell_1 \in (\pi_p, \pi_p\ell_1/\ell_2)$，其中 $\pi_p\ell_1/\ell_2 < 2\pi_p$；且 $\varphi_p \circ \cot_p$ 在 $(\pi_p, 2\pi_p)$ 上递减，因此 $\varphi_p(\cot_p(k_2\ell_1)) > \varphi_p(\cot_p(\pi_p\ell_1/\ell_2))$。于是 $\varphi_p(\cot_p(k_2\ell_2)) \to -\infty$，其中 $k_2\ell_2 \in (0,\pi_p)$，也就是说，$k_2\ell_2 \to \pi_p^-$，从而

$$\sin_p(k_2\ell_2) \to 0, \qquad \sin_p(k_2\ell_1) \to \sin_p\Big(\frac{\pi_p\ell_1}{\ell_2}\Big) \neq 0, \qquad \frac{1}{k_2}\int_0^{k_2\ell_2} |\sin_p\theta|^p\,d\theta \to \frac{\sigma_p\,\ell_2}{\pi_p} > 0,$$

中间的极限不为零，因为 $\pi_p < \pi_p\ell_1/\ell_2 < 2\pi_p$。(6.19) 中的项 $i=2$ 因而趋于 $+\infty$，(6.19) 的其余各项均非负，并且 (6.18) 满足 $\sigma_p/k_2 \le \sigma_p\ell_1/\pi_p$。因此，当 $\ell_3 \to 0^+$ 时， $D \to +\infty$ 。

(iv) 设 $p=2$。由于 $S'<0$ 在 I_2上，零点 k_2 是单重的，并且由隐函数定理，k_2 实解析地依赖于 $\ell \in \Omega$。由于 $\sin(k_2\ell_2)$ 与 $\sin(k_2\ell_3)$ 不取零值，由 (6.20) 给出的函数 D 在连通开集 Ω 上是实解析的，并且由*(iii)*可知它不恒为零。因此 Ω_0 是 Ω 的真解析子簇，且为零测集。对于 $p \neq 2$，函数 $\sin^p$ 在 $\pi_p/2$ 处一般不是实解析的，而数 $k_2\ell_2$ 与 $k_2\ell_3$ 可能穿过该处，因此这一论证不适用。 □

例 *6.11.* 设 Γ 为图 *5* 中带有 $\ell_1=\ell_2=\ell_3=\ell$ 的星形图，在 v_1、v_2、v_3 处施加狄利克雷条件，在 v_0 处施加基尔霍夫条件，并设 $p=2$。引理 *6.9(i)* 与 *(ii)* 的证明并不使用长度的排序。由 *(i)*，一个在 v_0 处不取零值的特征函数所对应的特征值 k^2 满足 *3 cot(kℓ)* $=0$，即 $k\ell \in \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$。由 *(ii)* 的证明，满足 $u(v_0)=0$ 的特征函数 u 要求 $k\ell \in \pi\mathbb{N}$。于是 $|\cos(k\ell)|=1$，而 v_0 处的基尔霍夫条件为 $c_1+c_2+c_3=0$。因此 λ_1、$_2=(\pi/(2\ell))^2$、 $\lambda_2=(\pi/\ell)^2$，以及

$$E_2=\left\{u=c_i\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\ on\ e_i\ (i=1,2,3):\ c_1+c_2+c_3=0\right\}$$

维数为二，因此(6.2) 不成立。由于$\sin(\pi x/\ell)>0$ 在$(0,\ell)$上，对于 $u\in E_2\setminus\{0\}$，商$\int_\Gamma(u^+)^2\,dx/\int_\Gamma u^2\,dx$ 等于 $\sum_{c_i>0}c_i^2/\sum_i c_i^2$。若恰有一个 c_i为正，设其为 c_1，令 $s=|c_2|$且 $t=|c_3|$。则 $c_1=s+t$，商等于

$$\frac{(s+t)^2}{(s+t)^2+s^2+t^2}\le\frac{2}{3},$$

当且仅当 $s=t$时取等号。若两个 c_i 为正，则商至多为$_{1\,2}$，因为$(s+t)^2\ge s^2+t^2$。因此，定理 *6.7* 适用，其中 $M_0=\frac{2}{3}$在 $c=(2,-1,-1)$处取到，并且

$$G'(\lambda_2^+)=-2,\qquad G'(\lambda_2^-)=-\frac{1}{2}.$$

因此， $\mathfrak{C}$ 在(λ_2,λ_2)处有一个角点，尽管 Γ 在其边的任意置换下保持不变。空间 E_2 包含满足 $\int_\Gamma(u^+)^2\,dx=\int_\Gamma(u^-)^2\,dx$的函数，例如 $c=(1,-1,0)$，它在 e_1 与 e_2的交换下为奇函数；但斜率由极大化者$c=(2,-1,-1)$决定。推论 *6.5* 不适用，因为(6.2) 不成立。极大化者在v_0处为零，因此其负集是 e_2 和 e_3内部的并集，并且它有三个节点域。因此，在图上，与 $\mathfrak{C}$ 中的一个点相关联的解可能有多于两个节点域，这与在 *[11]*的区域上证明的节点域性质形成对照。

注 *6.12.* 定理 *6.3* 和推论 *6.5* 的证明仅通过定理 *2.3*、引理 *2.8*、引理 *3.6*、定理 *1.1* 和推论 *3.18* 用到图，因此无需修改即可应用于有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ *[10]* 上的 *Dirichlet* p-拉普拉斯算子。然而，在区域上，*(6.2)* 很难验证，而且在最对称的区域上并不成立。在球 $B\subset\mathbb{R}^N, N\ge 2$ 上，对于每个 $p\in(1,\infty)$，第二特征函数都不是径向函数 *[2]*。如果 u 是其中之一，并且 $u\circ R=c(R)\,u$ 对旋转群 $SO(N)$ 中的每个 R 都成立，那么 c 在 $SO(N)$ 上是取值于 $\{\pm1\}$ 的连续函数，并且 $c(id)=1$。由于 $SO(N)$ 是连通的， $c\equiv 1$，而且 u 是径向的，因为$SO(N)$ 在球面上具有传递作用。因此， u 的某个旋转是一个不与 u成比例的特征函数，故 *(6.2)* 不成立。在图上可以检验 *(6.2)* 并计算出 r ，而定理 *6.3* 的两种情形对每个 p 都会出现（推论 *6.5* 和命题 *6.10*）。即使不满足 *(6.2)*，对称图仍可能产生角点（例 *6.11*）。

我们以三个问题结束本节。首先，对于 $p\neq 2$ ，当 (6.2) 不成立时，我们不知道 $\alpha'(0^+)=-M_0$ 是否成立。其次，对于 $p=2$ 且 λ_2 单重时， $\mathfrak{C}$ 的角点是

两条光滑曲线的交点，见$\Sigma_{2,\Gamma}$（注 6.4）。对于 $p \neq 2$，我们不知道$\Sigma_{p,\Gamma}$是否包含一条经过（λ_2, λ_2）的第二条曲线，其在 $\lambda^+ > \lambda^-$一侧的斜率为 $-\min\{r, 1/r\}$。第三，对于$b > 0$，命题 6.6 只给出了界（6.11），我们不知道 α 的单侧导数是否存在。定理 6.3 的证明使一条近最优路径经过质量较大的临界点邻域（步骤 3 和 4），这用到了引理 6.2 以及$\tilde{}$ $\tilde{}$ I_0的偶性。对于 $b > 0$，泛函 I_b 不是偶函数，而引理 6.2 没有对应的结果。

7 非共振：在 $(\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D))$ 与 $\mathfrak{C}$ 之间

本节讨论问题

$$\begin{cases} -\big(|u'|^{p-2}u'\big)' = f(x,u) & \text{on the edges of } \Gamma, \\ u(v) = 0 & \forall v \in V_D, \\ \displaystyle\sum_{e \in E_v(\Gamma)} |u_e'(v)|^{p-2}u_e'(v) = 0, & v \in V(\Gamma) \setminus V_D. \end{cases} \tag{7.1}$$

在本节中，$V_D \subseteq V(\Gamma)$ 满足 (H)，且可能为空。在后一种情况下$\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) = 0$，第一特征函数 $\phi_{1,p}$ 为常数，且下文引用的第 3–4 节中的结果由命题 5.1 得出。命题 4.6 是唯一需要 $V_D \neq \emptyset$ 的命题，本文不会用到它。

我们假设 $f(x,u)/|u|^{p-2}u$ 渐近地位于点 $(\lambda_{1,p}, \lambda_{1,p})$（其中 $\lambda_{1,p} = \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D)$）与点 $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathfrak{C}$之间。令 $f: \Gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 L^∞-Carath´eodory 条件。给定一点 $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathfrak{C}$，我们假设对于 x，一致地有：

$$\pi_\pm(x) \le \liminf_{s \to \pm\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \le \limsup_{s \to \pm\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \le \Pi_\pm(x) \tag{7.2}$$

其中 $\pi_\pm(x)$和 $\Pi_\pm(x)$是满足以下条件的 L^∞ 函数

$$\begin{cases} \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \le \pi_+(x) \le \Pi_+(x) \le \lambda^+ & \text{a.e. in } \Gamma \\ \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \le \pi_-(x) \le \Pi_-(x) \le \lambda^- & \text{a.e. in } \Gamma. \end{cases} \tag{7.3}$$

令 $F(x, s) = \int_0^s f(x, t)\, dt$。我们还假设，对于 x，以下条件一致成立：

$$\theta_\pm(x) \le \liminf_{s \to \pm\infty} \frac{pF(x,s)}{|s|^p} \le \limsup_{s \to \pm\infty} \frac{pF(x,s)}{|s|^p} \le \Theta_\pm(x) \tag{7.4}$$

其中 $\theta_\pm(x)$和 $\Theta_\pm(x)$是满足以下条件的 L^∞ 函数

$$\begin{cases} \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \le \theta_+(x) \le \Theta_+(x) \le \lambda^+ & \text{a.e. in } \Gamma \\ \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \le \theta_-(x) \le \Theta_-(x) \le \lambda^- & \text{a.e. in } \Gamma \\ \theta_+(x) > \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \quad \text{and} \quad \theta_-(x) > \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) & \text{on subsets of positive measure,} \\ \text{either } \Theta_+(x) < \lambda^+ \text{ a.e. in } \Gamma \text{ or } \Theta_-(x) < \lambda^- \text{ a.e. in } \Gamma. \end{cases} \tag{7.5}$$

定理 7.1. 设(7.2)、(7.3)、(7.4)和(7.5) 成立，并设$(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathfrak{C}$。那么，问题(7.1)至少有一个解 $u \in X(\Gamma, V_D)$。

为证明定理 7.1，定义能量泛函 顶点 v1: $X(\Gamma, V_D) \to \mathbb{R}$ 如下

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{p}\int_\Gamma |u'|^p\,dx - \int_\Gamma F(x,u)\,dx. \tag{7.6}$$

于是 $\mathcal{E} \in C^1(X(\Gamma,\ V_D)\ \mathbb{R})$，其临界点是（7.1）的弱解。

根据关于 x 一致成立的（7.4）以及 f 上的 L^∞-Carath´eodory 条件，对于每个 $\delta > 0$，存在 $a_\delta \in L^1(\Gamma)$，使得对几乎处处的 $x \in \Gamma$,

$$\begin{cases} (\theta_+(x)-\delta)\frac{s^p}{p} - a_\delta(x) \le F(x,s) \le (\Theta_+(x)+\delta)\frac{s^p}{p} + a_\delta(x) \quad \forall s > 0, \\ (\theta_-(x)-\delta)\frac{|s|^p}{p} - a_\delta(x) \le F(x,s) \le (\Theta_-(x)+\delta)\frac{|s|^p}{p} + a_\delta(x) \quad \forall s < 0. \end{cases} \tag{7.7}$$

引理 7.2。 $\mathcal{E}$ 满足 $X(\Gamma, V_D)$ 上的 $(P.S.)$ 条件。

证明。 设 (u_n) 是一个 $(P.S.)$ 序列，即

$$|\mathcal{E}(u_n)| \le K, \tag{7.8}$$

$$|\langle \mathcal{E}'(u_n), \phi\rangle| \le \epsilon_n\|\phi\| \qquad \forall \phi \in X(\Gamma, V_D), \tag{7.9}$$

其中 K 为常数，且 $\epsilon_n \to 0$。根据（7.2）和 L^∞-Carath´eodory 条件，存在 $K_1 > 0$ 和 $a \in L^\infty(\Gamma)$，使得

$$|f(x,s)| \le a(x) + K_1|s|^{p-1} \qquad \text{for a.e. } x \in \Gamma \text{ and all } s \in \mathbb{R}. \tag{7.10}$$

只需证明 (u_n) 在 $X(\Gamma,\ V_D)$ 中有界。若确实如此，则根据定理 2.3，沿着一个子序列，$u_n \rightharpoonup u$ 在 $X(\Gamma,\ V_D)$ 中且 $u_n \to u$ 在 $L^p(\Gamma)$ 中。由（7.10），$(f(x,\ u_n))$ 在 $L^{p'}(\Gamma)$ 中有界，因此 $\int_\Gamma f(x,\ u_n)(u_n - u)\,dx \to 0$，并且令 $\phi = u_n - u$ 代入（7.9）可得 $\int_\Gamma |u_n'|^{p-2}u_n'(u_n' - u')\,dx \to 0$。因此，根据引理 2.5，$u_n \to u$ 属于 $X(\Gamma,\ V_D)$。

反设沿某个子序列（仍记作 (u_n)）顶点 v1，并令$w_n = u_n/\|u_n\|$。再取一个子序列，使得 $w_n \rightharpoonup w_0$ 在 $X(\Gamma,\ V_D)$中，$w_n \to w_0$ 在 $L^p(\Gamma)$中，且 $w_n \to w_0$在 Γ中几乎处处成立。令 $g_n = f(x,\ u_n)/\|u_n\|^{p-1}$。由 (7.10),

$$|g_n| \le \frac{a}{\|u_n\|^{p-1}} + K_1|w_n|^{p-1}, \tag{7.11}$$

因此 (g_n) 在 $L^{p'}(\Gamma)$ 中有界，且沿某个子序列，$g_n \rightharpoonup f_0$ 在 $L^{p'}(\Gamma)$中。以 $w_n - w_0$ 测试 (7.9)，并除以 $\|u_n\|^{p-1}$，得到 $\int_\Gamma |w_n'|^{p-2}w_n'(w_n' - w_0')\,dx \to 0$，因为根据 Hölder 不等式，$\int_\Gamma g_n(w_n - w_0)\,dx \to 0$。因此，由引理 2.5，$w_n \to w_0$属于 $X(\Gamma,\ V_D)$，尤其是 $\|w_0\| = 1$；将 (7.9) 除以 $\|u_n\|^{p-1}$ 并令 $n \to \infty$，得到

$$\int_\Gamma |w_0'|^{p-2}w_0'\phi'\,dx = \int_\Gamma f_0\,\phi\,dx \qquad \forall \phi \in X(\Gamma, V_D). \tag{7.12}$$

表示 f_0。我们声称，在 $\{w_0 = 0\}$ 上几乎处处有 $f_0 = 0$，并且

$$\pi_+ w_0^{p-1} \le f_0 \le \Pi_+ w_0^{p-1} \text{ a.e. on } \{w_0 > 0\}, \qquad \pi_-|w_0|^{p-1} \le -f_0 \le \Pi_-|w_0|^{p-1} \text{ a.e. on } \{w_0 < 0\}. \tag{7.13}$$

由于 $|w_n|^{p-1} \to |w_0|^{p-1}$属于 $L^{p'}(\Gamma)$，(7.11) 给出 $g_n\chi_{\{w_0=0\}} \to 0$属于 $L^{p'}(\Gamma)$，因此 $f_0 = 0$几乎处处成立于$\{w_0 = 0\}$上。令 $\delta > 0$。由 (7.2)，存在 $S_\delta > 0$，使得对于几乎处处的 $x \in \Gamma$以及所有 $s \ge S_\delta$，$f(x,s) \le (\Pi_+(x) + \delta)s^{p-1}$。对于几乎处处满足 $w_0(x) > 0$ 的 x，我们有 $u_n(x) \to +\infty$，因此

$$h_n = \left(g_n - (\Pi_+ + \delta)(w_n^+)^{p-1}\right)^+\chi_{\{w_0>0\}} \to 0 \qquad \text{a.e. in } \Gamma.$$

由 (7.11)，$0 \le h_n \le G_n := a\|u_n\|^{1-p} + K_1|w_n|^{p-1}$，且 G_n 在 $L^{p'}(\Gamma)$ 中收敛，因此根据广义控制收敛定理，$h_n \to 0$属于 $L^{p'}(\Gamma)$。函数 $\big(g_n - (\Pi_+ + \delta)(w_n^+)^{p-1}\big)\chi_{\{w_0>0\}}$ 以上界 h_n 为界，并在 $L^{p'}(\Gamma)$ 中弱收敛至 $\big(f_0 - (\Pi_+ + \delta)w_0^{p-1}\big)\chi_{\{w_0>0\}}$，因此 $f_0 \le (\Pi_+ + \delta)w_0^{p-1}$ 在 $\{w_0 > 0\}$ 上几乎处处成立。其余三个界的证明方式相同，控制函数为 $G_n + (\|\pi_\pm\|_\infty + \delta)|w_n|^{p-1}$，它们也在 $L^{p'}(\Gamma)$ 中收敛。令 $\delta \to 0$，即可得到 (7.13)。

令 $\lambda^+(x) = f_0(x)/w_0(x)^{p-1}$ 在 $\{w_0 > 0\}$ 上，并在其他地方取 $\lambda^+(x) = \lambda^+$，且令 $\lambda^-(x) = -f_0(x)/|w_0(x)|^{p-1}$在 $\{w_0 < 0\}$ 上，并在其他地方取 $\lambda^-(x) = \lambda^-$。那么

$$f_0 = \lambda^+(x)(w_0^+)^{p-1} - \lambda^-(x)(w_0^-)^{p-1},$$

由 (7.13) 和 (7.3)，函数 $\lambda^\pm(x)$ 满足 (4.2)；并且根据命题 3.12，$\lambda^\pm > \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)$，

$$\lambda^+(x) > \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \text{ on } \{w_0 \le 0\}, \qquad \lambda^-(x) > \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \text{ on } \{w_0 \ge 0\}. \tag{7.14}$$

由 (7.12)，w_0 是 (4.4) 的非平凡解。若 (4.3) 成立，则引理 4.3 表明 w_0 变号，且 $\lambda^\pm(x) = \lambda^\pm$ 在 $\{\pm w_0 > 0\}$上几乎处处成立。因此，下列情形之一成立：

(i) $\lambda^+(x) = \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)$ 在 Γ中几乎处处成立；

(ii) $\lambda^-(x) = \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)$ 在 Γ 中几乎处处；

(iii) w_0 变号，且是满足 (1.1) 的解，其对应的点为 $(\lambda^+,\ \lambda^-) \in \mathfrak{C}$。

我们证明它们各自都会导致矛盾。将 (7.8) 除以 $\|u_n\|^p$，并在 $X(\Gamma,\ V_D)$ 中使用 $w_n \to w_0$，得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma \frac{pF(x,u_n)}{\|u_n\|^p}\,dx = \int_\Gamma |w_0'|^p\,dx. \tag{7.15}$$

另一方面，由 (7.7) 可知，对每个 $\delta > 0$，几乎处处的 $x \in \Gamma$ 以及所有 $s \in \mathbb{R}$，

$$(\theta_+ - \delta)(s^+)^p + (\theta_- - \delta)(s^-)^p - p\,a_\delta \le pF(x,s) \le (\Theta_+ + \delta)(s^+)^p + (\Theta_- + \delta)(s^-)^p + p\,a_\delta.$$

我们取 $s = u_n(x)$，除以 $\|u_n\|^p$ 并积分。由于 $w_n^\pm \to w_0^\pm$ 在 $L^p(\Gamma)$ 中，令 $n \to \infty$，再令 $\delta \to 0$，由 (7.15) 得到

$$\int_\Gamma \big(\theta_+(w_0^+)^p + \theta_-(w_0^-)^p\big)\,dx \le \int_\Gamma |w_0'|^p\,dx \le \int_\Gamma \big(\Theta_+(w_0^+)^p + \Theta_-(w_0^-)^p\big)\,dx. \tag{7.16}$$

假设 (i) 成立。由 (7.14)，在 Γ 上几乎处处有顶点 v1，而由 (7.12) 和 $\phi = w_0$ 得到

$$\int_\Gamma |w_0'|^p\,dx = \lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) \int_\Gamma w_0^p\,dx. \tag{7.17}$$

于是，(7.16) 中的左侧不等式给出顶点 v1$(\theta_+ - \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D))w_0^p\,dx \le 0$。这是不可能的，因为由 (7.5)，$\theta_+ \ge \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)$ 几乎处处成立，而 $\theta_+ > \lambda_{1,\,p}(\Gamma,\ V_D)$ 在一个正测度集合上成立；然而，$w_0 > 0$ 几乎处处成立。情形 (ii) 同样会导致矛盾，其中 $w_0 < 0$ 几乎处处成立，且 θ_-。

假设 (iii) 成立。那么，由 (7.12) 和 $\phi = w_0$，以及 (7.16) 中的右侧不等式，得到

$$\int_\Gamma \big((\lambda^+ - \Theta_+)(w_0^+)^p + (\lambda^- - \Theta_-)(w_0^-)^p\big)\,dx \le 0.$$

根据 (7.5)，两个被积函数均为非负函数，并且要么几乎处处为 $\Theta_+ < \lambda^+$，要么几乎处处为 $\Theta_- < \lambda^-$。w_0^+ 和 w_0^- 在正测度集合上均为正，因此积分为正，这是矛盾的。因此，(u_n) 有界。

□

引理 7.3。 存在 $\delta > 0$ 和 $R > 0$ 使得

$$\max\{\mathcal{E}(R\phi_{1,p}), \mathcal{E}(-R\phi_{1,p})\} < -\|a_\delta\|_1 \le \inf_{P\in\mathbb{P}_1} \max_{u\in P[-1,+1]} \mathcal{E}(u), \tag{7.18}$$

w此处 a_δ 由(7.7) 给出，而 $\mathbb{P}_1 = \{P \in C([-1,+1], X(\Gamma, V_D)) : \ P(\pm 1) = \pm R\phi_{1,\ p}\}$。

证明。 我们使用 (7.7) 中的函数 a_δ。与 (7.7) 中函数 $\Theta_\pm(x)$ 相关联的泛函为

$$\mathcal{L}(u) = \int_\Gamma |u'|^p \, dx - \int_\Gamma \Theta_+(x)(u^+)^p \, dx - \int_\Gamma \Theta_-(x)(u^-)^p \, dx, \tag{7.19}$$

并且我们断言

$$\beta = \inf_{P\in\mathbb{P}} \max_{u\in P[-1,+1]} \mathcal{L}(u) > 0, \tag{7.20}$$

其中， $\mathbb{P}$与前文一样，是从 $-\phi_{1,p}$ 到 $\phi_{1,p}$ 的所有连续路径构成的集合，且这些路径位于 M 中。令 $b = \lambda^+ - \lambda^- \ge 0$。情形 $\lambda^+ < \lambda^-$ 可通过将 u 替换为 $-u$，并将 $f(x,s)$ 替换为 $-f(x,-s)$，化归为此情形。此变换交换了 (7.2)–(7.5) 中的下标 $+$ 和 $-$，而 $\mathfrak{C}$ 的对称性给出 $(\lambda^-, \lambda^+) \in \mathfrak{C}$。在 M 上，由 (7.5) 得到 $\mathcal{L}(u) \ge \int_\Gamma |u'|^p \, dx - \lambda^+ \int_\Gamma (u^+)^p \, dx - \lambda^- \int_\Gamma (u^-)^p \, dx = \tilde{I}_b(u) - \lambda^-$，并且对每个 $P \in \mathbb{P}$，$\max_P \tilde{I}_b \ge \alpha(b) = \lambda^-$，因为 $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathfrak{C}$。因此 $\beta \ge 0$。由 $\theta_\pm(x) \le \Theta_\pm(x)$、定义 (7.19) 以及 (7.5)，我们推得

$$\mathcal{L}(\pm\phi_{1,p}) \le \int_\Gamma (\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) - \theta_\pm(x))\phi_{1,p}^p \, dx < 0.$$

˜ $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{L}$ 上的限制 M 因此具有山路几何

$$\max\{\tilde{\mathcal{L}}(+\phi_{1,p}), \tilde{\mathcal{L}}(-\phi_{1,p})\} < 0 \le \max_{u\in P[-1,+1]} \tilde{\mathcal{L}}(u),$$

˜对每条路径 $P \in \mathbb{P}$均成立。关于 M 上的 $\mathcal{L}$ 的（*P.S.*）条件，证明与引理 3.6 完全相同：权函数 $\Theta_\pm \in L^\infty(\Gamma)$仅出现在由˜的定理 2.3 的紧嵌入而收敛的项中。因此， β 是 $\mathcal{L}$的一个临界值，也就是说，存在 $u \in M$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) = \beta, \\ (\mathcal{L}'(u), \phi) = t(J'(u), \phi), \qquad \forall \phi \in X(\Gamma, V_D). \end{cases} \tag{7.21}$$

反设 $\beta = 0$成立。在（7.21）中取 $\phi = u$ 可得 $t = 0$，因此 u 是（4.4）的一个非平凡解，且满足 $\lambda^\pm(x) = \Theta_\pm(x)$。由（7.5），这与引理 4.3 矛盾。接下来讨论（7.18）。由（7.5）和引理 2.8， $\int_\Gamma (\theta_\pm - \lambda_{1,\ p}(\Gamma, V_D))\phi_{1\ ,\ p}^p \, dx > 0$，并取 $\delta > 0$ 小于 β 且小于这两个积分。由（7.7）中的左侧不等式可得

$$\mathcal{E}(\pm R\phi_{1,p}) \le \frac{R^p}{p} \int_\Gamma \big(\lambda_{1,p}(\Gamma, V_D) - \theta_\pm + \delta\big)\phi_{1,p}^p \, dx + \|a_\delta\|_1 \to -\infty \qquad (R \to \infty),$$

并且我们选取顶点 v1，使其满足

$$\mathcal{E}(\pm R\phi_{1,p}) < -\|a_\delta\|_1. \tag{7.22}$$

设顶点 v1。若顶点 v2，则由 (7.22) 可得

$$\mathcal{E}(\pm R\phi_{1,p}) < -\|a_\delta\|_1 \le 0 = \mathcal{E}(0) \le \max_{u\in P[-1,+1]} \mathcal{E}(u).$$

顶点 v1特别是 $\max_{u\in P[-1,+1]} \mathcal{E}(u) \ge -\|a_\delta\|_1$。若 $0 \notin P[-1,+1]$，则归一化路径 $P(t) = P(t)/\|P(t)\|_p$ 属于 $\mathbb{P}$。由 (7.7)，

$$\mathcal{E}(u) \ge \frac{\mathcal{L}(u) - \delta\|u\|_p^p}{p} - \|a_\delta\|_1.$$

因此，由 (7.20)，

$$\max_{u\in P[-1,+1]} \frac{p\mathcal{E}(u)+\delta\|u\|_p^p+p\|a_\delta\|_1}{\|u\|_p^p} \geq \max_{u\in\tilde{P}[-1,+1]} \mathcal{L}(u) \geq \beta,$$

因此，由于 $\delta<\beta$，

$$\max_{u\in P[-1,+1]} \frac{p\mathcal{E}(u)+p\|a_\delta\|_1}{\|u\|_p^p} \geq \beta-\delta>0,$$

这意味着

$$\max_{u\in P[-1,+1]} \mathcal{E}(u) > -\|a_\delta\|_1.$$

因此，对于每个 $P\in\mathbb{P}_1$，$\max_P \mathcal{E}\geq -\|a_\delta\|_1$，结合 (7.22) 即得 (7.18)。 □

定理 7.1 的证明。设 R 和 $\mathbb{P}_1$ 如引理 7.3 中所述。由引理 7.2 和引理 7.3，极小极大原理 [42, 定理 2.9]，应用于连接 $-R\phi_{1,p}$ 与 $R\phi_{1,p}$ 的路径类 $\mathbb{P}_1$，可知 $c=\inf_{P\in\mathbb{P}_1}\max_{u\in P[-1,+1]}\mathcal{E}(u)$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个临界值。该水平上的临界点满足方程 (7.1)。 □

当 $V_D=\emptyset$ 时，假设 (7.3) 和 (7.5) 具有特殊形式。此时 $\lambda_{1,p}(\Gamma,V_D)=0$，并且根据命题 5.6 和命题 5.5，曲线 $\mathfrak{C}$ 对每个 $b\geq 0$都满足 $\alpha(b)>\lambda$，其中$\alpha(b)\to\lambda$ 随 $b\to+\infty$ 而趋于 $b+\alpha(b)$，后者递增至 $+\infty$。因此，可容许对区域是一个半带，且对 f 在 $+\infty$ 处的增长完全没有限制。

推论 7.4. 设 $V_D=\emptyset$，且 f 满足 L^∞-*Carath´eodory* 条件以及(7.2) 和 (7.4)，其中 $\pi_\pm,\Pi_\pm,\theta_\pm,\Theta_\pm\in L^\infty(\Gamma)$ 满足

$$0\leq\pi_+\leq\Pi_+,\qquad 0\leq\pi_-\leq\Pi_-\leq\bar{\lambda},\qquad 0\leq\theta_+\leq\Theta_+,\qquad 0\leq\theta_-\leq\Theta_-\leq\bar{\lambda}\quad a.e.\ in\ \Gamma,$$

在正测度子集上，$\theta_+>0$ 和 $\theta_->0$。那么，无论 Π_+ 和 Θ_+的大小如何，(7.1) 至少有一个解。

证明。根据命题 4.1 和 4.5（由命题 5.1 可知对 $V_D=\emptyset$ 成立），映射 $b\mapsto b+\alpha(b)$ 连续且严格递增；又因为 $\alpha(0)=\lambda_{2,p}(\Gamma,\emptyset)$（推论 3.18 和命题 5.1），且 $b+\alpha(b)\geq b$，它将 $[0,\infty)$ 映到 $[\lambda_{2,p}(\Gamma,\emptyset),\infty)$ 上。取 $b\geq 0$，使得

$$b+\alpha(b) \;\geq\; \max\{\|\Pi_+\|_\infty,\ \|\Theta_+\|_\infty\},$$

并令 $(\lambda^+,\ \lambda^-)=(b+\alpha(b),\ \alpha(b))\in\mathfrak{C}$。于是 $\Pi_+\leq\lambda^+$ 且 $\Theta_+\leq\lambda^+$ 几乎处处成立，而命题 5.5 给出 $\Pi_-\leq\lambda<\alpha(b)=\lambda^-$ 且 $\Theta_-\leq\lambda<\lambda^-$ 几乎处处成立。因此 (7.3) 和 (7.5) 成立，(7.5) 的最后一个条件在负侧满足，故定理 7.1 适用。 □

只要已知 λ，推论 7.4 就能发挥作用。例 5.2 给出了区间上的结果，半带的情形也可由 [4, 16], 得到，而命题 5.4 给出了等边星形图上的结果。

声明

利益冲突。作者声明，他们不存在利益冲突。

数据可用性。本文不适用数据共享，因为本研究未生成任何数据集。

资助。作者未获得本项工作的专项资助。

参考文献

[1] W. Allegretto and Y. X. Huang，关于 p-拉普拉斯算子的Picone恒等式及其应用，《非线性分析》，32（1998），第819–830页。[2] T. V. Anoop， P. Drábek， and S. Sasi，关于球上 p-拉普拉斯算子的第二特征函数的结构，《美国数学会会刊》，144（2016），第2503–2512页。[3] M. Arias， J. Campos， M. Cuesta， and J.-P. Gossez，一个带权函数的非对称Neumann问题，《亨利·庞加莱分析非线性研究所年刊》，25（2008），第267–280页。[4] M. Arias， J. Campos， and J.-P. Gossez，关于Neumann p-拉普拉斯算子的反最大值原理与Fučík谱，《微分与积分方程》，13（2000），第217–226页。[5] M. Belloni and B. Kawohl，关于涉及 p-拉普拉斯算子的方程的直接唯一性证明，《数学手稿》，109（2002），第229–231页。[6] G. Berkolaiko，量子图简介，载于《几何与计算谱理论》，《当代数学》第700卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2017年，第41–72页。[7] G. Berkolaiko， J. B. Kennedy， P. Kurasov， and D. Mugnolo，量子图谱分析的手术原理，《美国数学会汇刊》，372（2019），第5153–5197页。[8] G. Berkolaiko and P. Kuchment，量子图导论，《数学调查与专著》第186卷，美国数学会，2013年。[9] M. Cuesta，通过Ekeland变分原理研究 C^1 流形上的极小极大定理，《摘要与应用分析》，2003（2003），第757–768页。[10] M. Cuesta， D. G. de Figueiredo， and J.-P. Gossez， p-拉普拉斯算子的Fučík谱的起始部分，《微分方程杂志》，159（1999），第212–238页。[11] M. Cuesta， D. G. de Figueiredo， and J.-P. Gossez， p-拉普拉斯算子的节点域性质，《科学院院报：数学系列I》，330（2000），第669–673页。[12] M. Cuesta and J.-P. Gossez，关于相对于Fučík谱的非共振的变分方法，《非线性分析：理论、方法与应用》，19（1992），第487–500页。[13] G. D'Aguì， A. Sciammetta， and P. Winkert，关于带无通量边界条件的 p-拉普拉斯算子的Fučík谱，《非线性分析：现实世界应用》，69（2023），第103736页。[14] E. N. Dancer，关于弱非线性椭圆型偏微分方程的Dirichlet问题，《爱丁堡皇家学会会刊A辑：数学》，76（1977），第283–300页。[15] N. Dancer and K. Perera，关于 p-拉普拉斯算子的Fučík谱与临界群的若干注记，《数学分析及其应用杂志》，254（2001），第164–177页。[16] D. G. de Figueiredo and J.-P. Gossez，关于椭圆算子的Fučík谱的第一条曲线，《微分与积分方程》，7（1994），第1285–1302页。

[17] L. M. Del Pezzo and J. D. Rossi，利用 p-拉普拉斯算子的度量图聚类，《密歇根数学杂志》，65（2016），第 451–472 页。[18] , 量子图上的 p-拉普拉斯算子的第一特征值，《分析与数学物理》，6（2016），第 365–391 页。
[19] P. Drábek and S. B. Robinson，p-拉普拉斯算子的共振问题，《泛函分析杂志》，169（1999），第 189–200 页。[20] D. E. Edmunds and J. Lang，特征值、嵌入与广义三角函数，施普林格，2011。[21] P. Exner and O. Post，类图薄流形的谱收敛，《几何与物理杂志》，54（2005），第 77–115 页。[22] S. Fučík，具有跳跃非线性项的边值问题，ˇCasopis pro pˇestov´an´ı matematiky，101（1976），第 69–87 页。
[23] T. Gallouët and O. Kavian，某些半线性问题在无穷远处的存在与不存在结果，《图卢兹数学科学学院年刊》（5），3（1981），第 201–246 页。
[24] J. García Azorero and I. Peral Alonso，p-拉普拉斯算子的存在性与非唯一性：非线性特征值，《偏微分方程通讯》，12（1987），第 1389–1430 页。
[25] S. Goyal and K. Sreenadh，非局部椭圆算子的 Fuˇc´ık 谱，《非线性微分方程与应用》NoDEA，21（2014），第 567–588 页。[26] G. Holubová and P. Nečesal，离散系统的 Fuˇc´ık 谱：曲线及其切线，《线性与多重线性代数》，（2025）。
[27] V. Kostrykin and R. Schrader，量子线的 Kirchhoff 定律，《物理学杂志A：数学与一般物理》，32（1999），第 595–630 页。[28] T. Kottos and U. Smilansky，图上的量子混沌，《物理评论快报》，79（1997），第 4794–4797 页。[29] P. Kuchment，量子图：I. 一些基本结构，《随机介质中的波》，14（2004），第 S107–S128 页。[30] P. Kurasov，度量图上拉普拉斯算子的谱隙，《波兰物理学报A》，124（2013），第 1060–1062 页。
[31] P. Kurasov and S. Naboko，图上微分算子的瑞利估计，《谱理论杂志》，4（2014），第 211–219 页。[32] A. C. Lazer and P. J. McKenna，悬索桥中的大振幅周期振荡：与非线性分析的一些新联系，《SIAM评论》，32（1990），第 537–578 页。[33] A. Lê，p-拉普拉斯算子的特征值问题，《非线性分析：理论、方法与应用》，64（2006），第 1057–1099 页。[34] L. Leadi and A. Marcos，带权混合 p-拉普拉斯算子 Fuˇc´ık 谱中的第一条曲线，《国际数学与数学科学杂志》，（2007），第 57607 号文章，13 页。
[35] A. M. Micheletti and A. Pistoia，关于 p-拉普拉斯算子的 Fuˇc´ık 谱，《微分与积分方程》，14（2001），第 867–882 页。

[36] D. Motreanu and P. Winkert, *Fu˘c´ık* 谱中具有不同边界条件的负 *p*-拉普拉斯算子，载于《非线性分析：稳定性、逼近与不等式》，施普林格，2012，第 471–485 页。
[37] L. Pauling，芳香分子的抗磁各向异性，《化学物理学杂志》，4（1936），第 673–677 页。[38] K. Perera，关于 *p*-拉普拉斯算子的 *Fu˘cik* 谱，《非线性微分方程与应用》NoDEA，11（2004），第 259–270 页。[39] K. Perera, M. Squassina, and Y. Yang，关于分数阶 ´-拉普拉斯算子和拉普拉斯算子 p的 *Dancer–Fu˘c* 谱札记，《非线性分析进展》，4（2015），第 13–23 页。[40] B. Ruf，关于具有跳跃非线性项的非线性椭圆问题，《纯粹与应用数学年刊》，128（1981），第 133–151 页。[41] J. L. Vázquez，某些拟线性椭圆方程的强最大值原理，《应用数学与优化》，12（1984），第 191–202 页。[42] M. Willem，极小极大定理，非线性微分方程及其应用进展第 24 卷，Birkh¨auser，波士顿，1996。