arXiv:2611.30197v1 [math.AT] 23 Nov 2026

HOM有向 Van Kampen 定理的同伦论解释

PHILIPPE GAUCHER

摘要。我们在底层空间为 Δ-生成空间的有向空间范畴，以及 Δ-Hausdorff 对象构成的全子范畴上构造 Grandis 模型结构。在这两种情形下，该模型结构都是左正则的，其弱等价恰好是按 Grandis 的意义诱导基本范畴等价的映射。基本范畴函子将所有小范畴值的同伦余极限保留为小范畴上的 folk 模型结构中的余极限。对于两个诱导有向子空间的并，当且仅当 Grandis 的范畴推出公式成立时，该并方块才是同伦推出。他的覆盖定理表明，只要这两个子空间的内部覆盖整个空间，便可得出这一结论。

目录

1. 引言 1 2. 有向空间与基本范畴 3 3. 路径提升及其等价类 6 4. 以其自然有向结构粘接一个圆盘 9 5. Grandis 模型结构 14 6. 有向 Van Kampen 定理的同伦论解释 17 参考文献 20

1. 引言

本文旨在为 Grandis 有向 Van Kampen 定理提供一种同伦论解释。有向空间 $\overrightarrow{\pi}_1(X)$ 的基本范畴 X 以 X 的所有点为对象。其态射为 d-固定端点的有向路径的同伦类。有向映射 $f\colon X \to Y$ 通过将点和路径类映射到它们在 $\overrightarrow{\pi}_1(f)$ 下的像，诱导出函子 f。一个初等 d-同伦是从参数正方形到空间的连续映射，它固定端点，并将每条逐坐标非递减路径映射为有向路径。如果有限之字形链的初等 d-同伦将两条路径连接起来，那么它们表示同一个态射。双向同伦只要求存在一族固定端点的有向路径构成的连续族 [4, 定义 4.34 和 4.49–4.50]。

对于一个跨度 $B \leftarrow A \to C$，记其推出为 $B \sqcup_A C$。Grandis 证明了，如果两个诱导有向子空间 U，V 的内部覆盖 X，则典范函子

$$\overrightarrow{\pi}_1(U) \sqcup_{\overrightarrow{\pi}_1(U\cap V)} \overrightarrow{\pi}_1(V) \longrightarrow \overrightarrow{\pi}_1(X)$$

2020 数学主题分类。主要分类号 55U35；次要分类号 18N40、55Q05。关键词与短语。有向空间，基本范畴，有向同伦，Van Kampen 定理，同伦推出。

是一个同构 [8, 定理 3.6(a)] （定理 2.1）。 $U \cap V$ 的包含映射诱导出对象上的单射函子。这些是小范畴上的 folk 模型结构中的余纤维化，在该模型结构中每个对象都是余纤维的。因此，左侧的推出计算了一个同伦推出。在有向空间的哪种模型结构中，并集 $X = U \cup V$ 本身计算 $U \leftarrow U \cap V \to V$ 的同伦推出?

我们沿用 Grandis 对基本范畴的定义，并以此问题为考量来选择生成余纤维化。有向区间表示路径，而有向方形表示路径之间的基本同伦，其中两条相对边为常值。普通区间和圆盘也发挥作用，其中所有连续路径都视为有向路径。它们使我们能够通过路径端点处的同构来比较同一路径的不同提升，并收缩粘接球面周围的领圈。从所有路径都视为有向路径的普通区间到有向区间的有向映射必为常值，因为它必须在两个方向上都单调不减。这解释了为何领圈需要第二种参数。这两种参数分别出现在 3 中的七个生成元里。

Grandis 模型结构 (定理 5.1)。 设 $\mathbf{dTop}$ 表示具有 Δ-生成底层空间的有向空间范畴，或其由 Δ-*Hausdorff* 对象构成的全子范畴。那么$\mathbf{dTop}$ 具有组合模型结构 $\mathbf{dTop}_G$，其中 (3) 中的七个映射构成一组生成余纤维化。其弱等价恰为满足 f 使得 $\overrightarrow{\pi}_1(f)$ 为范畴等价的有向映射。

对于以小范畴为指标的普通空间图表，Dror Farjoun 证明，取值于群胚的范畴中，齐性余极限的基本群胚等价于基本群胚的同伦余极限 [5, 定理 1.1]。在基点处取自同构群，便得到齐性余极限的经典基本群。下面的定理给出了 Grandis 基本范畴的有向类比。

有向 Van Kampen 定理的同伦论解释 (定理 6.1)。 基本范畴函子 $\overrightarrow{\pi}_1$ 从 ∞-范畴 $\mathbf{dTop}_G$诱导出一个到小范畴 *folk* 模型范畴底层 $X\colon \ J \to \mathbf{dTop}_G$ 范畴的函子。该函子保持所有小余极限。特别地，对于以小范畴为指标的图表

$$\operatorname*{hocolim}_{j\in J} \overrightarrow{\pi}_1(X(j)) \longrightarrow \overrightarrow{\pi}_1\Big(\operatorname*{hocolim}_{j\in J} X(j)\Big)$$

由范畴之间的一个等价表示，其中 同伦余极限 表示左侧 *folk* 模型结构中的同伦余极限，以及右侧 *Grandis* 模型结构中的同伦余极限。

对于任意的诱导有向子空间并集 $X = U \cup V$，当且仅当 Grandis 的范畴比较是同构时，包含映射方块才是 Grandis 模型结构中的同伦推出。若内部覆盖 X，则他的定理保证该同构成立。对此解释而言，无须对 U、V 或它们的交集作余纤维化假设（推论 6.2）。有向区间中两个在端点相交的闭子区间仍给出同伦推出（例 6.3），而例 6.4 中的交错闭覆盖则不然。

论文提纲。第 2 节回顾基本范畴和 Grandis 覆盖定理，并介绍生成余纤维化。第 3 节考察路径提升及其等价类。在第 4 节中，我们利用覆盖定理计算附着一个胞腔后的基本范畴，并将计算推广到沿余纤维化作出的推出。这两项计算给出了第 5节中的模型结构。第 6 节证明同伦余极限定理，并将其应用于并集。

致谢。 在 GPT Astra 的帮助下，我最初研究了由定向 n-立方体的边界包含生成的极小模型结构，其中 $n \geqslant 0$。存在一个平凡余纤维化，它将具有相同端点的两个不同的 d-同伦路径等价类识别为一类。对该模型结构及相关表述似乎可以做一些局部修正，但都不尽如人意。我开始相信这个问题无解。后来，我抱着不大的希望，问 Astra 能否更改生成余纤维化，使得弱等价恰好是那些在 Grandis 意义下诱导基本范畴等价的映射。令我惊讶的是，（3）中的七个映射解决了这个问题（定理 5.1）。对于有向区间，这种变化已经显现出来（注5.4）。我谨向 Astra 致谢，感谢它帮助我找到答案。

2. 有向空间与基本范畴

令 **Top** 表示 Δ生成空间范畴或其Δ-豪斯多夫空间全子范畴。若空间 K 的拓扑由从标准拓扑单形 $n \geqslant 0$出发的连续映射 $\Delta^n \to K$ 所诱导的终拓扑给出，则称其为 Δ-生成的。若每个连续映射 $[0,1] \to K$ 的像都是闭集，则称其为 Δ-豪斯多夫的定义 B.1]。

在这两个范畴中，积和子空间都带有普通积拓扑或子空间拓扑的 Δ-Kelley 化。这是针对相同连续测试单形的终拓扑。因此，从一个 Δ-生成空间到其像位于某个子空间中的连续映射，会连续地分解通过该子空间。我们尤其将此用于路径、方形和单形。Δ-豪斯多夫空间的积和子空间仍然是 Δ-豪斯多夫空间 [6,命题 B.4 和 B.5]。

令 **dTop** 表示选定 **Top**上的有向空间范畴。一个有向空间X 由 **Top** 中的底层空间 $|X|$ 以及一组连续路径 $[0,1] \to |X|$组成，这些路径称为其有向路径。该集合包含常值路径，并且在拼接以及与任意连续非减映射 $[0,1] \to [0,1]$进行前复合下封闭。有向映射是保持有向路径的连续映射。按照 Grandis 的术语，空间 K 上的自然有向结构是指其中每条连续路径$[0,1] \to K$ 都是有向路径 [8, 第 1.1 节，第 284–285]页。我们将带有此结构的 K 记为 K_{nat}。诱导子空间的有向路径是环境空间中的有向路径，且其像位于该子空间中。在积空间上，当一条路径的两个投影都是有向路径时，该路径是有向的。对于 **Top**的任一选择，范畴 **dTop** 都是局部可呈示的 [7, 第 21 页，定义 3.5] 之后。

要在**dTop**中构造余极限，先在**Top** 中取底层空间的余极限，再赋予由图表中有向路径的像生成的定向结构。 Δ-生成空间的余极限具有普通终拓扑。在 Δ-Hausdorff 情形下，我们再取 Δ-Hausdorff 反射，其单位是一个商映射 [6, 命题 B.7 及其证明]。因此，直和项的像仍覆盖底层集合。在这两种

情形下，当且仅当一条路径存在有限细分，使得每一段都是某个直和项中有向路径的像时，该路径才是有向的。事实上，具有这一性质的路径包括直和项中有向路径的像以及常值路径。它们在拼接和非递减重参数化下封闭，因为细分点在非递减映射下的逆像是区间或空集。反过来，每一条这样的路径都是有向路径像的拼接经重参数化所得。

对于 $n \geqslant 0$ 令 C_n 为单位立方体 $[0,1]^n$，其上配备逐坐标非递减连续路径，其中 $C_0 = *$ 是单点空间。对于 $I = [0,1]$，Grandis 将 I_{nat} 称为 自然区间 [8, 第 1 节。2]。我们用 C_1 表示有向路径的参数，用 I_{nat} 表示参数可双向变化的同伦。

对于范畴 C 的对象 x, y，记 $\mathbf{C}(x,y)$ 为从 x 到 y 的态射集合，并用 id_x 表示 x 的恒等态射。基本范畴 $\overrightarrow{\pi}_1(X)$ 的对象是 X 中的点。用 γ 表示由有向路径 γ 所代表的箭头。若且唯若从 x 到 y 的两条路径 γ_0, γ_1 由有限个初等 d-同伦组成的之字形链连接，它们才表示同一个箭头。从 γ_0 到 γ_1 的这种同伦（图 1）是一个有向映射 $H\colon C_2 \to X$，满足

$$H(0,t) = \gamma_0(t), \quad H(1,t) = \gamma_1(t), \quad H(s,0) = x, \quad H(s,1) = y \qquad (s,t \in [0,1]).$$

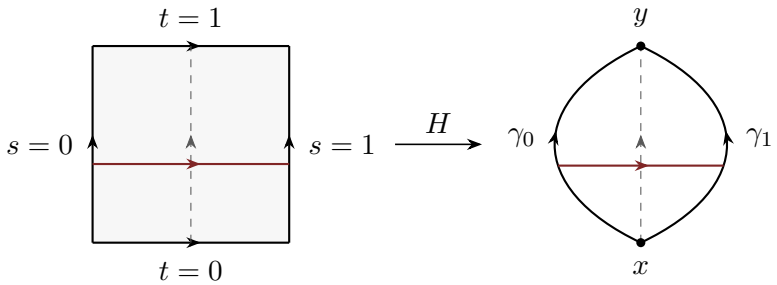


图 1. 一个基本的 d-同伦，其在 X 中的像以示意方式绘出。参数正方形中的虚线线段给出了从 x 到 y 的一条中间路径。方形内的水平箭头表示当 t 固定、s 增加时，路径上的一个点如何移动。方形中的每条逐坐标非递减路径在 X 中都必须具有有向像。

Grandis 不变性定理 ([8, 定理 3.2(a),(c),(d)])。 以拼接诱导复合、以常值路径表示恒等态射时，基本范畴定义了一个函子 $\overrightarrow{\pi}_1\colon \mathbf{dTop} \to \mathbf{Cat}$ 到小范畴范畴。对于有向映射 $f\colon X \to Y$，函子 $\overrightarrow{\pi}_1(f)$ 将 x 映射到 $f(x)$，并将 $\langle\gamma\rangle$ 映射到 $\langle f \circ \gamma\rangle$。该函子保持小余积和二元积。

设 $H\colon X \times C_1 \to Y$ 是一个定向映射，并定义 $H_\varepsilon\colon X \to Y$，使得 $H_\varepsilon(x) = H(x,\varepsilon)$，其中 $\varepsilon = 0, 1$。这个 d- 同伦诱导出函子 $\overrightarrow{\pi}_1(X) \to \overrightarrow{\pi}_1(Y)$ 之间的自然变换 $\eta\colon \overrightarrow{\pi}_1(H_0) \Rightarrow \overrightarrow{\pi}_1(H_1)$。如果 H 在 $X \times I_{\mathrm{nat}}$ 上是定向的，那么 η 是一个自然同构。对于 $\overrightarrow{\pi}_1(X)$ 中的箭头 $u\colon x \to y$，其分量满足

$$\eta_x = \langle t \mapsto H(x,t)\rangle\colon H_0(x) \to H_1(x), \qquad \eta_y \circ \overrightarrow{\pi}_1(H_0)(u) = \overrightarrow{\pi}_1(H_1)(u) \circ \eta_x. \tag{1}$$

对于 C_1 中具有相同端点的两条有向路径 γ_0，γ_1，令 $m(t) = \max\{\gamma_0(t)\ \gamma_1(t)\}$。对于 $i = 0,\ 1$，公式

$$H_i(s,t) = (1-s)\gamma_i(t) + s\,m(t), \qquad 0 \leqslant s,t \leqslant 1,$$

给出了一个从 γ_i 到 m 的、端点固定的 d-同伦。由于 $\gamma_i(t) \leqslant m(t)$，该表达式关于 s 是非递减的；又由于两条路径都是非递减的，它关于 t 也是非递减的。将恒等态射和一个固定 0,1 的非递减重参数化视为 C_1中的路径，并将这些同伦与 X中的一条有向路径复合，可知这样的重参数化保持其等价类。由于 C_n 是 C_1 的 n 重积，而 C_0 是一个点，保持二元积可得

$$\overrightarrow{\pi}_1(C_n) \cong \Big([0,1]^n, \leqslant\Big). \tag{2}$$

右侧我们将逐坐标序视为一个范畴，其中存在唯一的箭头 $x \to y$当 $x \leqslant y$ 时，否则不存在箭头。有向路径只能从 x 到 y，当且仅当 $x \leqslant y$；此时直线段就是这样一条路径 [8, 第3节.4(a),(c)]。

对于 $a, b \in I$，直线路径 $t \mapsto (1-t)a + tb$ 表示 $\overrightarrow{\pi}_1(I_{\mathrm{nat}})$中的一个箭头 $a \to b$。这个箭头是唯一的，因为直线插值给出了任意两条具有这些端点的路径之间的同伦。

对于 U of X 的诱导有向子空间，令 $\mathrm{int}_X U$ 表示$|X|$ 中包含于 $|U|$的最大开子集。

2.1. **定理** (Grandis 有向 Van Kampen 定理 [8, 定理 3.6(a)])。设 U, V是 X 的诱导有向子空间，且$\mathrm{int}_X U \cup \mathrm{int}_X V = |X|$。令 $W = U \cap V$。下列方形是小范畴的一个推出。

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\pi}_1(W) & \longrightarrow & \overrightarrow{\pi}_1(U) \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \overrightarrow{\pi}_1(V) & \longrightarrow & \overrightarrow{\pi}_1(X) \end{array}$$

在小范畴范畴 **Cat** 上的 folk 模型结构中，弱等价是范畴等价，余纤维化是对象上单射的函子，纤维化是等纤维化 [13, 例 11.3.9 和 12.21]。特别地，所有小范畴都是余纤维的。folk 模型结构是组合的，因为它是余纤维生成的，并且 **Cat**（范畴有限极限理论的模型范畴）是局部有限可表示的 [1, 定理 5。30]。记 $\varnothing$ 为始对象。对于跨度 $B \leftarrow A \to C$，正向 Reedy 模型结构中的闩映射为 $\varnothing \to A$，$A \to B$以及 $A \to C$。若它们是余纤维化，则该跨度是余纤维的，且其普通推出计算同伦推出 [10, 定理 5.1.3 和推论 5.1。6]。这适用于定理2.1，因为 W 的两个包含映射在点上都是单射。

生成余纤维化。对于每个整数 $m \geqslant 1$，令 $\mathbf{D}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的闭单位圆盘，$\mathbf{S}^{m-1}$ 为其边界。我们通过递增仿射同胚将 $\mathbf{D}^1$ 与 $[0,1]$ 视为相同，并将 $\mathbf{S}^0$ 记作它的两个端点，赋予它们离散拓扑，因此也赋予其唯一的定向结构。生成余纤维化的集合$\mathcal{I}_{\mathrm{G}}$ 由以下映射组成：

dTop中的以下映射。

$$\begin{aligned} &\varnothing \longrightarrow C_0, \qquad \varnothing \longrightarrow C_1, \qquad \varnothing \longrightarrow C_2, \qquad \varnothing \longrightarrow \mathsf{S}^1_{\mathrm{nat}}, \\ &\mathsf{S}^0 \hookrightarrow I_{\mathrm{nat}}, \qquad C_1 \times \mathsf{S}^0 \hookrightarrow C_1 \times I_{\mathrm{nat}}, \qquad \mathsf{S}^1_{\mathrm{nat}} \hookrightarrow \mathsf{D}^2_{\mathrm{nat}}. \end{aligned} \tag{3}$$

相对$\mathcal{I}_{\mathrm{G}}$-胞腔映射是由$\mathcal{I}_{\mathrm{G}}$中的映射的余积经推出后再作超限复合得到的复合。我们用 $\mathsf{cof}(\mathcal{I}_{\mathrm{G}})$ 表示$\mathcal{I}_{\mathrm{G}}$ 在推出、超限复合和收缩运算下的闭包。称其中的元素为$\mathcal{I}_{\mathrm{G}}$-余纤维化。若对象 K 满足 $\varnothing \to K$ 属于 $\mathsf{cof}(\mathcal{I}_{\mathrm{G}})$，则称它相对于这些生成元是余纤维的。用 $\mathsf{inj}(\mathcal{I}_{\mathrm{G}})$ 表示具有相对于$\mathcal{I}_{\mathrm{G}}$中每个元素的右提升性质的映射等价类，并用 W_{G} 表示在 $\overrightarrow{\pi}_1$下诱导等价的定向映射等价类。

相对于前三个映射的提升，分别相当于在没有边界数据的情况下提升点、路径和有向方形，如（4）左侧方形所示。（3）第二行给出了图2中所示的比较映射。区间将同一纤维中的两个提升连接起来，条带比较一条路径的提升，而圆盘则在端点相同的情况下，识别从 I_{nat} 到同一纤维的两个定向映射的等价类。生成元 $\varnothing \to \mathsf{S}^1_{\mathrm{nat}}$ 使圆盘包含映射的源在其完整的自然有向结构下成为余纤维对象。

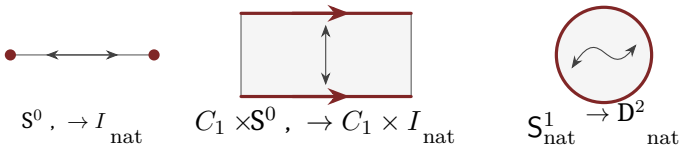


图 2. 三个源非空的生成元。粘接子空间以红色绘出。在条带中，路径可以在垂直坐标方向自由移动，而在水平方向必须单调不减。在圆盘中，每条连续路径都是有向的。

3. 路径提升及其等价类

有向映射 $u\colon I_{\mathrm{nat}} \to X$ 通过与点上的恒等映射 $C_1 \to I_{\mathrm{nat}}$ 前复合，给出一条有向路径。我们将此复合的等价类记为 $\langle u \rangle$。它是可逆的，因为 $\overrightarrow{\pi}_1(I_{\mathrm{nat}})$ 中的箭头 $0 \to 1$ 是可逆的。其逆由 $t \mapsto u(1-t)$ 表示。我们将使用定义在 I_{nat} 上的映射来连接同一纤维中的点。Grandis 将反向路径也是有向路径的路径称为可逆的 。在 I_{nat} 上为有向路径是一个更强的条件，而且拼接 [8, Section 1.5] 不一定保持这一性质。我们用 vu 表示先接箭头 u 再接箭头 v。

3.1. 命题。设 $p\colon X \to Y$ 是一个对于 $S^0 \hookrightarrow I_{\mathrm{nat}}$ 和 $S^1_{\mathrm{nat}} \hookrightarrow D^2_{\mathrm{nat}}$ 具有右提升性质的有向映射。对于 $y \in Y$，赋予纤维 $p^{-1}(y) = \{x \in X \mid p(x) = y\}$ 其诱导有向结构。对于 $a, b \in p^{-1}(y)$，存在一个有向映射 $I_{\mathrm{nat}} \to p^{-1}(y)$，从 a 到 b。所有此类映射都表示 $\overrightarrow{\pi}_1(X)$ 中相同的同构 $\theta_{a,b}\colon a \to b$ 。对于同一纤维中的点a, b, c，

$$\theta_{a,a} = \mathrm{id}_a, \qquad \theta_{b,c}\,\theta_{a,b} = \theta_{a,c}.$$

证明。 在下方方形中，顶部映射将 I_{nat} 的端点映至 a 和 b，底部映射则恒为 y。 p 的右提升性质给出了所示映射 u，

其像落在纤维中。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{S}^0 & \xrightarrow{(a,b)} & X \\ \downarrow & \overset{u}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ I_{\mathrm{nat}} & \xrightarrow[y]{} & Y. \end{array}$$

考虑有向映射 $u_j\colon I_{\mathrm{nat}} \to p^{-1}(y)$，$1 \leqslant j \leqslant r$，其底层路径首尾相接，构成以 a 为起点和终点的环路。我们证明 $\langle u_r\rangle \cdots \langle u_1\rangle = \mathrm{id}_a$。如有必要，插入一条常值路径，使得 $r \geqslant 2$。将 S^1 划分为依次相接的闭弧 A_1，B_1，$\ldots$，A_r，B_r，按循环顺序排列，并从 z_0 开始。在 A_j 上，使用关于$[0,1]$的保向参数化遍历 u_j。在 B_j 上，取常值 $u_j(1) = u_{j+1}(0)$，指标按循环顺序读取。这些赋值在端点处相一致，从而给出连续映射 $L\colon \mathsf{S}^1 \to |p^{-1}(y)|$。

为每条弧 $U_j = B_{j-1} \cup A_j \cup B_j$ 赋予其自然有向结构。[1] 在 U_j上，映射L 经由 u_j 因塌缩 B_{j-1} 和 B_j 至 A_j参数区间的端点而分解。此塌缩是连续的，因此在自然结构之间是有向的。各 U_j 的内部覆盖整个圆，因此每条连续路径都可有限细分为若干段，使每段都落在某个 U_j内。因此 $\mathsf{S}^1_{\mathrm{nat}}$ 是这些弧沿其交集在 $\mathbf{dTop}$ 中的余极限。于是，L 的限制给出有向映射 $\mathsf{S}^1_{\mathrm{nat}} \to p^{-1}(y)$。与纤维的包含映射复合，即得下方的上方映射。对圆盘包含映射的右提升性质给出了所示的延拓 F。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{S}^1_{\mathrm{nat}} & \xrightarrow{\mathrm{incl}\circ L} & X \\ \downarrow & \overset{F}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathsf{D}^2_{\mathrm{nat}} & \xrightarrow[y]{} & Y. \end{array}$$

令 $z\colon [0,1] \to \mathsf{S}^1$ 按循环顺序从 z_0 返回 z_0，依次经过各条弧一次。由于 L 在每个 B_j 上都是常值，路径 Lz 表示 $\langle u_r\rangle \cdots \langle u_1\rangle$。圆盘的凸性及其自然有向结构给出了一个有向映射

$$H\colon C_2 \longrightarrow X, \qquad H(s,t) = F\Big((1-s)z(t) + sz_0\Big).$$

事实上，F 的论证定义了一个映射到 $\mathsf{D}^2_{\mathrm{nat}}$ 的连续映射，其中每条连续路径都是有向的。我们有 $H(0,t) = Lz(t)$ 以及 $H(1,t) = H(s,0) = H(s,1) = a$。因此，该环路表示恒等态射。对于从 a 到 b 的两个映射 u、$v\colon I_{\mathrm{nat}} \to p^{-1}(y)$，先沿着 u 再沿着 v 的逆路径所得到的环路给出 $v^{-1}u = \mathrm{id}_a$。这证明了唯一性。常值路径表示 $\theta_{a,a}$ 沿着从 a 到 b 以及从 b 到 c 的路径，再沿着从 a 到 c 的一条路径的逆路径，得到 $\theta_a^{-1}{}_{,c}\theta_{b,c}\theta_{a,b} = \mathrm{id}_a$。□

3.2. **命题**。若 $p\colon X \to Y$ 对 I_{G} 具有右提升性质，则 $\overrightarrow{\pi}_1(p)$ 在对象上满射且全忠实。

证明。对于 $n = 0$，1，2，相对于 $\varnothing \to C_n$ 在（3）中的提升给出了下方左侧的映射 $\tilde{u}$。因此 p 在点上是满射，并且其中每条有向路径或有向方形 Y 都有提升。给定有向路径 $\gamma\colon C_1 \to Y$的两个提升 α，$\beta\colon C_1 \to X$，相对于条带

[1]对于仅在端点处粘合的弧，有向余极限只包含那些能在各弧之间有限次细分的路径。以交汇点为中心的角坐标中，路径 $t \mapsto t\sin(1/t)$ 在 $t = 0$ 处延拓为 0，它在每个充分短的初始区间内都会经过两侧，因此无法进行这种细分。交叠使交汇点的一个邻域包含在某条弧中。区间示例见 [8, 第 1.5 节，第 289–290] 页。

包含映射给出右侧的 H，其中 pr_1 是到 C_1的投影。

$$\begin{array}{ccc} \varnothing & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \overset{\widetilde{u}}{\nearrow} & \downarrow p \\ C_n & \xrightarrow[u]{} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_1 \times \mathsf{S}^0 & \xrightarrow{(\alpha,\beta)} & X \\ \downarrow & \overset{H}{\nearrow} & \downarrow p \\ C_1 \times I_{\mathrm{nat}} & \xrightarrow[\gamma\,\mathrm{pr}_1]{} & Y. \end{array} \tag{4}$$

根据 Grandis 不变性定理，H 诱导出一个自然同构 $\overrightarrow{\pi}_1(\alpha) \cong \overrightarrow{\pi}_1(\beta)$。由（1），它在 $i \in \{0,1\}$ 处的分量由有向映射 $I_{\mathrm{nat}} \to p^{-1}(\gamma(i))$ 表示，该映射由 $s \mapsto H(i,s)$ 给出，因此命题 3.1 将其认定为 $\theta_{\alpha(i),\beta(i)}$。在 $\overrightarrow{\pi}_1(C_1)$ 中 $0 \to 1$ 处的自然性给出

$$\begin{array}{ccc} \alpha(0) & \xrightarrow{\langle\alpha\rangle} & \alpha(1) \\ {\scriptstyle \theta_{\alpha(0),\beta(0)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{\alpha(1),\beta(1)}} \\ \beta(0) & \xrightarrow[\langle\beta\rangle]{} & \beta(1). \end{array} \tag{5}$$

特别地，如果 $\delta\colon C_1 \to X$ 位于同一个纤维中，令 α 恒等于 $\delta(0)$，并取 $\beta = \delta$。顶部和左侧的箭头都是恒等映射，因此 $\langle\delta\rangle = \theta_{\delta(0),\delta(1)}$。这里 δ 只需在 C_1 上是有向的，提升方块各边便是如此。

固定 $a, b \in X$。对于一条从 $p(a)$ 到 $p(b)$ 的有向路径 γ，选取一个提升 α，并令

$$T_{a,b}(\gamma) = \theta_{\alpha(1),b}\,\langle\alpha\rangle\,\theta_{a,\alpha(0)} \quad \text{in } \overrightarrow{\pi}_1(X)(a,b).$$

对于第二个提升 β，命题3.1 的复合律和方形（5）给出

$$\begin{aligned} \theta_{\beta(1),b}\,\langle\beta\rangle\,\theta_{a,\beta(0)} &= \theta_{\beta(1),b}\,\langle\beta\rangle\,\theta_{\alpha(0),\beta(0)}\,\theta_{a,\alpha(0)} \\ &= \theta_{\beta(1),b}\,\theta_{\alpha(1),\beta(1)}\,\langle\alpha\rangle\,\theta_{a,\alpha(0)} \\ &= \theta_{\alpha(1),b}\,\langle\alpha\rangle\,\theta_{a,\alpha(0)}. \end{aligned} \tag{6}$$

因此$T_{a,\,b}(\gamma)$ 与所选的提升无关。

现在设 $K\colon C_2 \to Y$ 是一个初等 d-同伦，它固定 $p(a)$ 和 $p(b)$。利用 $n = 2$ 和 $u = K$，（4）中的左侧方形给出一个提升 $K\colon C_2 \to X$。对于 $i = 0, 1$，由 $\alpha_i(t) = K(i,t)$ 给出的路径 $\alpha_i\colon C_1 \to X$ 提升了 γ_i。对于 $j = 0, 1$，路径 $s \mapsto K(s,j)$ 位于 $\gamma_0(j) = \gamma_1(j)$ 上方的纤维中，因此表示 $\theta_{\alpha_0(j)\,\alpha_1(j)}$。根据（2），$C_2$ 中从（0，0）到（1，1）的两条边界路径具有相同的等价类。应用 $\overrightarrow{\pi}_1(\widetilde{K})$ 得到

$$\theta_{\alpha_0(1),\alpha_1(1)}\,\langle\alpha_0\rangle = \langle\alpha_1\rangle\,\theta_{\alpha_0(0),\alpha_1(0)}.$$

在左侧复合$\theta_{\alpha_1(1)\,b}$，并在右侧复合 $\theta_{a,\,\alpha_0(0)}$。命题 3.1 的复合律给出 $T_{a,\,b}(\gamma_0) = T_{a,\,b}(\gamma_1)$，如（6）所示。该等式沿每条由初等 d-同伦构成的有限之字形链保持成立。

因此，我们可以令 $T_{a,\,b}(\langle\gamma\rangle) = T_{a,\,b}(\gamma)$。所得映射

$$\overrightarrow{\pi}_1(X)(a,b) \underset{\overline{T}_{a,b}}{\overset{\overrightarrow{\pi}_1(p)}{\rightleftarrows}} \overrightarrow{\pi}_1(Y)(p(a),p(b))$$

互为逆。事实上，p 将$T_{a,b}(\gamma)$中的两个纤维箭头都映为恒等态射，从而得到$\overrightarrow{\pi}_1(p)(T_{a,b}(\gamma)) = \langle\gamma\rangle$。对于一条从 a 到 b的有向路径 δ，取 δ 本身作为 $p\delta$ 的提升，便得到$T_{a,b}(p\delta) = \langle\delta\rangle$。这证明了完全忠实性。□

4. 附加具有自然有向结构的圆盘

在将 D^1 同一识别为 I后，(3) 中定义域非空的三个生成元是边界包含映射 $B \hookrightarrow E$，其中

$$B = T \times \mathsf{S}^{m-1}_{\mathrm{nat}}, \qquad E = T \times \mathsf{D}^{m}_{\mathrm{nat}}, \qquad (T, m) \in \{(*,1), (C_1, 1), (*,2)\}.$$

用 $(t,\ z)$ 表示 $|T| \times \mathbf{D}^m$ 中的一个点，并用 $\|z\|$ 表示 z 的欧几里得范数。在一维情形中，区间坐标 $u \in [0,1]$ 对应于 $z = 2u - 1$，因此两个端点的半径均为 1。对于条带 $C_1 \times \mathbf{D}^1_{\mathrm{nat}}$，下述变形只改变 z，并保持有向路径坐标不变。

4.1. **定理**。设 $f\colon\ B \to A$ 是一个有向映射，并在**dTop**中取左侧的推出。那么右侧的方形是小范畴的一个推出。

$$\begin{array}{ccc} B & \hookrightarrow & E \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle \chi} \\ A & \xhookrightarrow[j]{} & X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\pi}_1(B) & \longrightarrow & \overrightarrow{\pi}_1(E) \\ {\scriptstyle \overrightarrow{\pi}_1(f)}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle \overrightarrow{\pi}_1(\chi)} \\ \overrightarrow{\pi}_1(A) & \xrightarrow[\overrightarrow{\pi}_1(j)]{} & \overrightarrow{\pi}_1(X). \end{array}$$

边界 $|B|$ 是豪斯多夫空间 $|E|$ 的闭子空间。在 Δ-生成空间中，底层推出因而包含 $|A|$ 作为闭子空间，并且只要 $|A|$ 是 Δ-豪斯多夫空间，它就是 Δ-豪斯多夫空间 [6, 命题 B.15]。因此，在任一情形下，$|X|$ 都是由 $|A| \sqcup |E|$ 取商得到的空间，其中将每个边界点 $(t,\ z)$ 与 $f(t,\ z)$ 等同。我们将 A 与其在 j 下的像等同。

连续函数 $\rho\colon\ |X| \to [0,1]$ 在 A 上取值 1，并将 $\chi(t,z)$ 映射到 $\|z\|$，其定义良好，因为这些值在 B 上一致。取 $0 < a < b < 1$，并为 (7) 中的 U、W、V赋予其诱导有向结构。这里 $i\colon\ B \hookrightarrow E$ 是边界包含，而$\Phi\colon \mathbf{D}^m \to \mathbf{D}^m$ 在 $\|z\| \geqslant a$上与径向投影一致。

$$\begin{array}{ccccc} U = \rho^{-1}\big(]a,1]\big) & \hookleftarrow & W = U \cap V & \hookrightarrow & V = \rho^{-1}\big([0,b[\big) \\ {\scriptstyle d_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_W} & & \downarrow{\scriptstyle d_V} \\ A & \xleftarrow{\quad f \quad} & B & \xhookrightarrow{\quad i \quad} & E \end{array} \tag{7}$$

$$\chi(t,z) \longmapsto f\left(t, \frac{z}{\|z\|}\right) \qquad \chi(t,z) \longmapsto \left(t, \frac{z}{\|z\|}\right) \qquad \chi(t,z) \longmapsto (t, \Phi(z))$$

$$x \longmapsto x \quad (x \in A) \qquad\qquad \Phi(z) = \frac{z}{\max(a, \|z\|)}$$

在 W上有 $a < \|z\| < b$，因此 $\Phi(z) = z/\|z\|$。因此 $d_U|_W = f \circ d_W$和 $d_V|_W = i \circ d_W$。映射 Φ将半径为 a的圆盘扩展到单位圆盘（图 3）。

命题（领圈变形）。*(7)* 中的垂直映射是定向的。对于 $Z = U, W, V$，映射 d_Z有一个定向截面 s_Z，并且存在一个有向同伦 $H_Z\colon\ Z \times I_{\mathrm{nat}} \to Z$，从 id_Z 到 $s_Z d_Z$。此外，存在一个有向同伦 $H_X\colon\ X \times I_{\mathrm{nat}} \to X$，从 id_X 到映射 h，使得 $h|_U = j d_U$ 和 $h|_V = \chi d_V$。

证明。截面。选取 $a < c < b$。在点上，定义

$$\begin{aligned} s_U &\colon A \longrightarrow U, \qquad s_U(x) = j(x), \\ s_W &\colon B \longrightarrow W, \quad s_W(t,z) = \chi(t, cz), \\ s_V &\colon E \longrightarrow V, \qquad s_V(t,z) = \chi(t, az). \end{aligned}$$

对于 $\|z\| = 1$，我们有 $\|cz\| = c \in]a,\ b[$ 并且 $cz/\|cz\| = z$。对于 $\|z\| \leqslant 1$，我们有 $\|az\| \leqslant a < b$以及 $\Phi(az) = az/a = z$。因此，这些截面的取值位于所示集合中，并且（7）给出

$$d_U s_U = \mathrm{id}_A, \qquad d_W s_W = \mathrm{id}_B, \qquad d_V s_V = \mathrm{id}_E.$$

连续性与定向性。 开集 U 和 V 覆盖 X。粘接商映射$p = [j, \chi]\colon |A| \sqcup |E| \twoheadrightarrow |X|$ 在开集 $|U|$上的限制是一个商映射

$$p_U \colon |A| \sqcup \chi^{-1}(|U|) \twoheadrightarrow |U|, \qquad \chi^{-1}(|U|) = \{(t,z) \in |E| \mid a < \|z\| \leqslant 1\}.$$

两个直和项都是 Δ-生成的，因此它们的普通商空间已经具有 U的 Δ-生成拓扑。在这两个直和项上，有

$$d_U p_U(x) = x, \qquad d_U p_U(t,z) = f\left(t, \frac{z}{\|z\|}\right).$$

这些连续公式在粘接点处一致，因为 $z/\|z\| = z$ 对于 $\|z\| = 1$。因此 d_U 根据 p_U的商映射性质是连续的。根据第 2 节对推出路径的描述， U 中的一条有向路径可细分为 A 或领圈中有向路径的像。在来自 A的部分上， d_U 是恒等态射。在领圈部分上，它是沿自然定向的圆盘坐标作径向投影，然后再复合 f。因此 d_U 是定向的。其截面s_U 是定向的，因为它是 j，其陪域为诱导子空间 U。

开集 V和 W 与 A不相交。因此， p 在这些集合上的限制是双射商映射，因而是同胚。它们分别将 $|V|$ 和 $|W|$ 识别为 $|T|$ 与开圆盘 $\|z\| < b$、以及 $|T|$ 与环域 $a < \|z\| < b$的积。在这两个积中， χ 都将有向路径映为有向路径，且像中的每条有向路径都可细分为来自该胞腔的部分。因此，这些识别给出了积定向结构。在这些坐标下， d_W 和 d_V 通过径向投影和 Φ作用于圆盘坐标，而它们的截面则分别通过乘以 c 和 a作用。这四个映射都是连续的。它们保持有向路径，因为它们固定 T坐标，且圆盘坐标具有其自然有向结构。

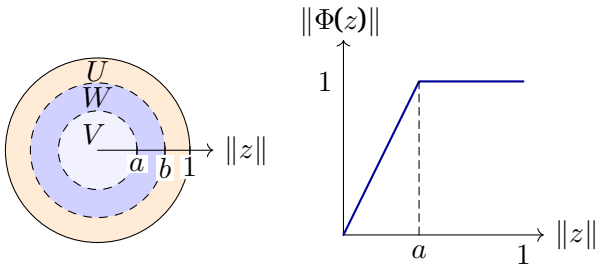


图 3。 $m = 2$ 的粘接圆盘以及半径变化量 $\|z\| \mapsto \min(\|z\|/a,\ 1)$。集合 U 和 V与圆盘分别交于 $a < \|z\| \leqslant 1$ 和 $\|z\| < b$。虚线圆围成 W，外圆则粘接到$A \subset U$。

定向的 同伦。在 $A \subset U$ 上定义 $H_U(x,\ s) = x$。在 $Z = U,\ W,\ V$ 的胞腔部分上定义 h

$$H_Z(\chi(t,z),s) = \chi\Big(t,(1-s)z + sz'\Big), \qquad z' = \begin{cases} z/\|z\| & \text{on the collar of } U, \\ cz/\|z\| & \text{on } W, \\ a\Phi(z) & \text{on } V. \end{cases}$$

对于 $s \in [0,1]$，这三个线段分别从 $\|z\|$ 径向地插值到 1、 c 和 $\min(\|z\|, a)$。因此，它们始终处于各自指定的区域内，包括 V 中的 $z = 0$ 处。在 U 中，半径为 1 的端点与 $f(t,\ z/\|z\|)$ 识别。因此，对每个 Z 和 $x \in Z$，

$$H_Z(x,0) = x, \qquad H_Z(x,1) = s_Z(d_Z(x)).$$

在 W 和 V 上，这些插值是以 I_{nat} 为参数的有向同伦，因为圆盘坐标带有其自然有向结构。在 U 上，当 $\|z\| = 1$ 时，领圈插值固定 z，因此它在 χ 处与 A 上的投影一致（t,z） $= jf$（t,z）。因此，这两个连续映射可分解为

$$\Big(|A| \sqcup \chi^{-1}(|U|)\Big) \times I \xrightarrow{p_U \times \mathrm{id}_I} |U| \times I \xrightarrow{H_U} |U|.$$

由于 I 是局部紧豪斯多夫的， $p_U \times \mathrm{id}_I$ 是一个商映射，见 [12, 第29节，习题 11(a)]，所以 H_U 是连续的。[2]

对于 $U \times I_{\mathrm{nat}}$ 中的有向路径（$\gamma,\ \sigma$），按照上文将 γ 细分为有向片段 $j\alpha$ 或 χ（$\tau,\ z$）。在这些片段上，像路径逐点定义为

$$H_U(j\alpha,\sigma) = j\alpha, \qquad H_U(\chi(\tau,z),\sigma) = \chi\left(\tau,(1-\sigma)z + \sigma\frac{z}{\|z\|}\right).$$

这里 α 在 A 中是定向的， τ 在 T 中是定向的，并且新的圆盘坐标是连续的，因而在 $\mathbf{D}^m_{\mathrm{nat}}$ 中是定向的。因此每个片段在 U 中都是定向的，它们的拼接也同样如此。

同伦 H_U 通过下式延拓到 X 的全部：

$$H_X(jx,s) = jx, \qquad H_X(\chi(t,z),s) = \chi\Big(t,(1-s)z + s\Phi(z)\Big).$$

事实上， $\Phi(z) = z/\|z\|$ 在领圈上，而 $\Phi(z) = z$ 在粘接球面上。因此，这两个连续公式沿商映射 $p \times \mathrm{id}_I$ 下降，这与 H_U 的情形相同。 $X \times I_{\mathrm{nat}}$ 中的有向路径再次细分为若干片段，其 X-投影位于 A 中或来自该胞腔。在每个胞腔片段上， T-坐标保持不变，而圆盘坐标是连续的。在 A 上，同伦就是投影。因此， H_X 是定向的。令 $h(x) = H_X(x,\ 1)$。那么 $H_X(x,\ 0) = x$ 并且

$$h|_U = jd_U, \qquad h|_V = \chi d_V.$$

□

定理的证明 *4.1*。对于 $Z = U,\ W,\ V$，截面恒等态射与 Grandis 不变性定理应用于 H_Z 可得

$$\overrightarrow{\pi}_1(d_Z)\overrightarrow{\pi}_1(s_Z) = \mathrm{id}, \qquad \mathrm{id}_{\overrightarrow{\pi}_1(Z)} \cong \overrightarrow{\pi}_1(s_Z)\overrightarrow{\pi}_1(d_Z).$$

因此， $\overrightarrow{\pi}_1(d_Z)$是一个等价，其拟逆为 $\overrightarrow{\pi}_1(s_Z)$。

[2]此分解中的积取自所有拓扑空间构成的范畴，并赋予普通积拓扑。有向乘积的底层空间 $|U \times I_{\mathrm{nat}}|$ 带有 $|U| \times I$ 的 Δ-Kelley 化。因此，恒等态射 $|U \times I_{\mathrm{nat}}| \to |U| \times I$ 是连续的，与 H_U 复合后即可得到有向乘积上的连续性。

令 $P = \overrightarrow{\pi}_1(A) \sqcup_{\overrightarrow{\pi}_1(B)} \overrightarrow{\pi}_1(E)$，并令 $q\colon P \to \overrightarrow{\pi}_1(X)$由 $\overrightarrow{\pi}_1(j)$和 $\overrightarrow{\pi}_1(\chi)$诱导。由定理 2.1，(7) 顶行的范畴推出为 $\overrightarrow{\pi}_1(X)$。在 folk 模型结构中，所有小范畴都是余纤维的；函子 $\overrightarrow{\pi}_1(W) \to \overrightarrow{\pi}_1(V)$和 $\overrightarrow{\pi}_1(B) \to \overrightarrow{\pi}_1(E)$是余纤维化，因为它们在对象上是单射。因此，Hovey 立方体引理 [10, 引理 5.2.6] 蕴含，三个等价 $\overrightarrow{\pi}_1(d_U)$、$\overrightarrow{\pi}_1(d_W)$和 $\overrightarrow{\pi}_1(d_V)$在推出上诱导出一个等价 $d\colon \overrightarrow{\pi}_1(X) \to P$。

为识别 q 自身，回顾 $h|_U = jd_U$ 和 $h|_V = \chi d_V$。因此，覆盖的推出性质给出 $qd = \overrightarrow{\pi}_1(h)$。将 Grandis 不变性定理应用于 H_X，得到$\overrightarrow{\pi}_1(h) \cong \mathrm{id}_{\overrightarrow{\pi}_1(X)}$。由于 d 是等价，q也是等价。对象集函子保留余极限，因为它是将集合映射为如下范畴的函子的左伴随：该范畴的每一对有序元素之间都有一个箭头。因此，在对象上，q 是从点集的推出到 X的点集之间的典范双射。一个在对象上为双射的全忠实函子是同构。□

4.2. **命题**。每个 I_{G}-余纤维化 $i\colon A \to X$ 的底层映射都是闭 T_1包含，即一种闭嵌入，并且 $X \setminus i(A)$ 中的每个点在 X中都是闭的。当且仅当路径 γ 在 A 中是定向的，$i\gamma$ 在 X中是定向的。

证明。式 (3) 中的每个映射，在底层空间上都是有限 CW 复形中子复形的包含映射。对于条带，$I \times \mathbf{S}^0$ 是 $I \times I$上的乘积 CW 结构中两条相对边的并集。因此，每个底层映射都是一个 q余纤维化，因为 q余纤维化由圆盘边界包含生成 [6, 第2节和附录 B，第 608] 页。底空间函子 dTop → Top 按第2节保持余极限，并保持收缩，所以 $|i|$ 是一个 q余纤维化。对于 Top 的任一选择，圆盘粘接及其超限复合都在通常的拓扑空间中计算 [6, 命题 B.15 和 B.16]。因此，根据 [10, 推论 2.4，$|i|$ 是一个闭 T_1 包含映射。6]

对于定向结构，首先沿有向映射$u\colon K \to A$粘接一个生成元 $K \overset{\cdot}{\to} E$。记 $i\colon A \to X$和 $\chi\colon E \to X$为到推出的映射。在底层推出中，$\chi^{-1}(i(A)) = K$。设 γ 是 A 中的一条路径，且 $i\gamma$ 是定向的。根据第2节，$i\gamma$ 可细分为来自 A 或 E的定向片段。来自 E 的片段取值于K，其定向结构由 E诱导。应用 u，即可得到 γ 在 A中的相应定向片段。因此，γ 是定向的。

对于相对的 $\mathcal{I}_{\mathrm{G}}$-胞腔映射，在每个阶段对直和项良序排列，并逐个附接。由推出的泛性质可知，这会得到相同的推出。在所得的超限序列 (X_α) 中，我们通过对 β 作归纳证明，对于每个 $\alpha < \beta$，X_α 都具有由 X_β 诱导的定向结构。在后继阶段，这由单次附接可得，因为诱导结构会逐次限制。在极限序数 β 处，底层空间是较早各阶段的并集，并赋予其终拓扑 [6, 命题 B.16]。它们的有向路径集合的并集在重参数化和拼接下封闭，因为任意两个阶段在 β 之下都有一个共同的上界。该并集包含常值路径，因此就是余极限的定向结构。因此，X_β 中像落在 X_α 内的有向路径，在某个满足 $\alpha \leqslant \delta < \beta$ 的 X_δ 中也是有向路径，进而由归纳可知，它在 X_α 中也是有向路径。

最后，局部可呈现范畴 **dTop** 中的小对象论证表明，$i\colon A \to X$ 在 A 下是相对 $\mathcal{I}_{\mathrm{G}}$-胞腔映射 $j\colon A \to X'$ [10, Corollary 2.1.15]的一个收缩。记 $s\colon X \to X'$和 $p\colon X' \to X$为 A下的映射，使得 $si = j$和 $ps = \mathrm{id}_X$。如果

$i\gamma$ 是定向的，那么 $j\gamma = s\,i\gamma$ 在 X'中是定向的，因此 γ 在 A中是定向的。反过来，因为 i 是一个有向映射，结论成立。□

4.3. **定理**。 函子 $\overrightarrow{\pi}_1$ 保留沿 I_{G}-余纤维化的推出，以及在极限序数处连续的 I_{G}-余纤维化超限序列的余极限。

证明。 设 λ 为非零极限序数，设 $(X_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ 为这样的序列，其余极限记作 $X_\lambda = \text{余极限}_{\alpha<\lambda} X_\alpha$。由命题 4.2可知，转移映射在底层空间上是闭的 T_1包含映射，且每个阶段都带有由 X_λ诱导的有向结构。对于 **Top** 的任一选择，底层余极限都是带有终拓扑的并集 [6,命题 B。16]。因此，从紧区间或方形到$|X_\lambda|$ 的每个连续映射都通过某个阶段 [10, 命题 2.4。2]。

由诱导有向结构可知，有向路径或初等 d-同伦作为有向映射都通过该阶段。因此，$\overrightarrow{\pi}_1(X_\lambda)$ 的每个态射都有一个来自某个阶段的代表。若两个代表给出相同的态射，则取一条将它们连接起来的初等 d-同伦有限之字形链。两条路径以及该之字形链中方形的阶段指标的最大值仍小于 λ。该阶段中的之字形链将这两个等价类等同。在对象上，余极限就是点集的并集。由于范畴的滤过余极限是在对象和态射上计算的，典范函子

$$\operatorname{colim}_{\alpha<\lambda} \overrightarrow{\pi}_1(X_\alpha) \longrightarrow \overrightarrow{\pi}_1(X_\lambda)$$

是一个同构。

根据 Grandis 不变性定理， $\overrightarrow{\pi}_1$ 保留不交并，包括空余积。因此， $\overrightarrow{\pi}_1$ 将每个生成元沿任意映射作出的推出映射为推出：对于源为空的生成元，这由生成元的余积公式得出；对于其余三个，则由定理 4.1 得出。

设 $A \to B$ 是一个相对 $\mathcal{I}_{\mathrm{G}}$-胞腔映射，并设 $A \to Y$ 是一个有向映射。取一个序数 μ 和一个胞腔表示 $(B_\alpha)_{\alpha\leqslant\mu}$，其中 $B_0 = A$ 且 $B_\mu = B$，并在每个后继阶段附加一个胞腔。令 $Y_\alpha = Y \sqcup_A B_\alpha$。我们证明典范函子$\overrightarrow{\pi}_1(Y) \sqcup_{\overrightarrow{\pi}_1(A)} \overrightarrow{\pi}_1(B_\alpha) \to \overrightarrow{\pi}_1(Y_\alpha)$ 是一个同构。在第零阶段，它在 $\overrightarrow{\pi}_1(Y)$ 上是恒等态射。若将$\to E$ 附加到 B_α 上（ $K \hookrightarrow$），则根据推出性质，沿 $K \to B_\alpha \to Y_\alpha$ 将其附加到 Y_α 上可得 $Y_{\alpha+1}$。将单个生成元的结果应用于这两次附加，得到

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\pi}_1(Y_{\alpha+1}) &\cong \overrightarrow{\pi}_1(Y_\alpha) \sqcup_{\overrightarrow{\pi}_1(K)} \overrightarrow{\pi}_1(E)\\ &\cong \left(\overrightarrow{\pi}_1(Y) \sqcup_{\overrightarrow{\pi}_1(A)} \overrightarrow{\pi}_1(B_\alpha)\right) \sqcup_{\overrightarrow{\pi}_1(K)} \overrightarrow{\pi}_1(E)\\ &\cong \overrightarrow{\pi}_1(Y) \sqcup_{\overrightarrow{\pi}_1(A)} \overrightarrow{\pi}_1(B_{\alpha+1}),\end{aligned}$$

其中，中间一行用到了归纳假设，最后一行用到了推出的粘合。在极限序数处，两个序列都是其较早阶段的余极限，因为沿着$A \to Y$的推出在 A下保持余极限。两个序列中的后继映射都是生成元的推出。因此，根据证明的第一部分， $\overrightarrow{\pi}_1$ 保持两个极限阶段的余极限。取前述比较同构的余极限，便得到极限阶段的比较映射，因为沿着 $\overrightarrow{\pi}_1(A)$ 的推出在 $\to \overrightarrow{\pi}_1(Y)$下也保持余极限。对于一般的 $A \to B$，若其属于 $\mathrm{cof}(\mathrm{I}_{\mathrm{G}})$，则取命题 4.2 的证明中在 A 下的映射 $s\colon\ B \to B'$ 和 $p\colon\ B' \to B$，其中 $ps =$恒等映射，且 $A \to B'$ 是相对 I_{G}-胞腔映射。由

在 B 中的自然性，这些映射表明， B 的比较映射是 B'的比较同构的一个收缩。因此它也是同构。□

5. Grandis 模型结构

对于一类映射 S，将 inj(S) 记作相对于S具有右提升性质的映射，将 cof(S) 记作其在推出、超限复合和收缩下的闭包。箭头范畴的对象是映射，其态射是交换方块。

Smith 识别定理 ([2, 定义 1.5 和定理 1.7])。 设 $\mathcal{C}$ 是一个局部可呈现范畴， I 是$\mathcal{C}$中的一组映射，而 W 是$\mathcal{C}$中的一类映射。假设满足以下条件。

(c0) W 满足三取二性质，并且在收缩下封闭。(c1) $\mathrm{inj}(I) \subseteq W$.(c2) $\mathrm{cof}(I) \cap W$ 在推出和超限复合下封闭。(c3) 对于每个 $i \in I$，存在一个集合 $S_i \subseteq W$，使得箭头范畴中每个满足 $w \in W$ 的态射 $i \to w$ 都可分解为 $i \to w_0 \to w$，其中 $w_0 \in S_i$。

于是 $\mathcal{C}$ 具有一个组合模型结构，其弱等价为 W，生成余纤维化为 I，纤维化为 $\mathrm{inj}(\mathrm{cof}(I) \cap W)$。

条件 (c3) 是在 I 处的解集条件。根据 [2, 定义 1.14 和命题 1.15], ，只要 W 是箭头范畴的一个可达且可达嵌入的全子范畴，该条件就成立。

5.1. **定理** (Grandis 模型结构)。 设 **dTop** 表示以下二者之一：具有 Δ-生成底层空间的有向空间范畴，或其由 Δ-*Hausdorff* 对象构成的全子范畴。则**dTop** 具有一个组合模型结构 $\mathbf{dTop}_{\mathrm{G}}$，其中 (3) 中的七个映射构成生成余纤维化集合。其弱等价恰好是满足以下条件的定向映射 f： $\overrightarrow{\pi}_1(f)$ 是范畴等价。

证明。 我们应用 Smith 识别定理，取 $I = \mathcal{I}_{\mathrm{G}}$ 以及 $W = W_{\mathrm{G}}$。范畴**dTop** 对于 **Top** 的任一选择，根据第 2 节都是局部可呈示的。由 (3) 中的七个映射组成集合 $\mathcal{I}_{\mathrm{G}}$。由于范畴等价在收缩下封闭且满足三取二性质，对于 W_{G} 也同样成立。这给出了 (c0)，而命题 3.2 给出了 (c1)。

对于 $i \in \mathrm{cof}(\mathrm{I}_{\mathrm{G}}) \cap W_{\mathrm{G}}$，由命题 4.2，等价 $\overrightarrow{\pi}_1(i)$ 在对象上是单射。因此 $\overrightarrow{\pi}_1(i)$ 是 folk 模型结构中的平凡余纤维化。由定理 4.3， $\overrightarrow{\pi}_1$将 i 的推出映为 $\overrightarrow{\pi}_1(i)$ 的推出，并将此类映射的超限复合映为它们像的复合。folk 平凡余纤维化在这两种运算下都封闭，dTop 中的 $\mathrm{cof}(\mathrm{I}_{\mathrm{G}})$ 也如此。因此，$\mathrm{cof}(\mathrm{I}_{\mathrm{G}}) \cap W_{\mathrm{G}}$ 在推出和超限复合下封闭，满足 (c2) 的要求。

为了利用可及性验证 (c3)，我们首先证明 $\overrightarrow{\pi}_1$ 是可达的。由于 dTop 是局部可呈示的，选取一个正则基数 κ，使得 C_0、C_1、C_2 都是 κ-可呈示的。对于 $i = 0$，取 1、2，令 A_i 为从 dTop 到集合的函子，它将 X 映射到集合 $A_i(X) = \mathrm{dTop}(C_i, X)$，即由 $C_i \to X$ 构成的定向映射集合，并通过后复合作用。在 C_0 的点处求值，可将 $A_0(X)$ 识别为 X 的点集。映射 $c_X\colon A_0(X) \to A_1(X)$ 将 x 映射到 x 处的常值路径。对于 $j = 0$，取 1，令 $r_j\colon A_2(X) \to A_1(X)$ 将 F 映射到路径 $s \mapsto F(s, j)$。由此得到具有固定端点的初等 d-同伦集合 $H(X)$，其为

集合中的拉回

$$\begin{array}{ccc} H(X) & \hookrightarrow & A_2(X) \\ {\scriptstyle F\mapsto(F(0,0),F(0,1))}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle (r_0,r_1)} \\ A_0(X)\times A_0(X) & \xrightarrow[c_X\times c_X]{} & A_1(X)\times A_1(X). \end{array}$$

对于 $j=0,1$，令 $e_j\colon H(X)\to A_1(X)$ 将 F 映至路径 $t\mapsto F(j,t)$。对于小范畴 $\mathcal{C}$，令 $\mathrm{Ob}\mathcal{C}$ 和 $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ 分别表示其对象和态射的集合。用 $\mathrm{coeq}(e_0,e_1)$ 表示集合范畴中的余等化子，则有

$$\mathrm{Ob}\,\overrightarrow{\pi}_1(X)=A_0(X),\qquad \mathrm{Mor}\,\overrightarrow{\pi}_1(X)=\mathrm{coeq}(e_0,e_1).$$

事实上，这个余等化子就是 $A_1(X)$ 对由 $e_0(F)\sim e_1(F)$（其中 $F\in H(X)$）生成的等价关系取商。因而，当且仅当存在连接它们的有限之字形链，由此类同伦构成时，两条路径的像才相同。每个 A_i 都因 C_i的 κ-可表示性而保持 κ-滤过余极限。这类余极限与集合中的有限极限及余等化子可交换，因此，所展示的描述表明 $\overrightarrow{\pi}_1$ 在对象和态射上都保持它们。由于范畴的滤过余极限是在对象和态射上逐点计算的，$\overrightarrow{\pi}_1$ 是可达的。

小范畴之间的等价构成$\mathbf{Cat}$的箭头范畴中的一个可达且可达嵌入的全子范畴，这由 [14, 定理 4.1]应用组合民间模型结构可得。由 $\overrightarrow{\pi}_1$ 在箭头范畴上诱导的函子是可达的，因为其中的余极限是在源和目标处计算的。等价类在该函子下的逆像为W_{G}。根据 [2, 定义 1.14 和命题 1.18]，W_{G} 同样是$\mathbf{dTop}$箭头范畴中的可达且可达嵌入的全子范畴。

因此，Beke 的命题 1.15 给出了 W_{G} [2] 的 (c3)。接下来，Smith 定理给出了所述的模型结构。□

5.2.**推论(**左适当性**)**。无论选择哪一种$\mathbf{Top}$，*Grandis* 模型结构$\mathbf{dTop}_{\mathrm{G}}$ 都是左适当的。

证明。设 $i\colon A\to B$ 是一个余纤维化，$w\colon A\to A'$ 是一个弱等价。构造推出

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ i\ } & B \\ {\scriptstyle w}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle w'} \\ A' & \longrightarrow & B\sqcup_A A'. \end{array}$$

由定理 4.3，$\overrightarrow{\pi}_1(w')$ 是 $\overrightarrow{\pi}_1(w)$ 沿 $\overrightarrow{\pi}_1(i)$ 的推出。函子 $\overrightarrow{\pi}_1(w)$ 是范畴等价，而根据命题 4.2，$\overrightarrow{\pi}_1(i)$ 在对象上是单射，因此是民间余纤维化。folk 模型结构是左适当的，因为每个小范畴都是余纤维的 [11, 命题 A.2.4.2]。因此，$\overrightarrow{\pi}_1(w')$ 是等价，所以 w' 是 $\mathbf{dTop}$ 中的弱等价$_{\mathrm{G}}$。□

5.3. **注**。七个生成余纤维化的定义域都是余纤维对象。除始对象外，它们是 $\mathsf{S}^0\cong C_0\sqcup C_0$，$C_1\times\mathsf{S}^0\cong C_1\sqcup C_1$，以及 $\mathsf{S}^1_{\mathrm{nat}}$。从始对象到 C_0、C_1 以及 $\mathsf{S}^1_{\mathrm{nat}}$ 的映射都出现在（3）中。因此，余纤维化的等价类由余纤维对象之间的映射生成，这正是 Henry 所要求的。根据 [9, 定义 1.2、定理 1.4 和例 1。7], 存在一个余纤维化为

cof($\mathcal{I}_{\mathrm{G}}$)。其弱等价属于 W_{G}，因此从极小模型结构到 Grandis 模型结构的恒等态射是左 Quillen 函子。由于后者的弱等价恰好是 W_{G}，导出恒等函子将前者在 W_{G} 中所有映射的像处局部化。从这个意义上说，Grandis 模型结构是将极小模型结构在 W_{G} 处作左 Bousfield 局部化所得。

不存在这样的左 Bousfield 局部化：它使 $\mathbf{dTop}$ 上的离散模型结构恰好以 W_{G}作为弱等价。事实上，在这样的局部化中，每个映射都是余纤维化，因此其弱等价就是平凡余纤维化，并且在推出下封闭。塌缩$I_{\mathrm{nat}} \to *$ 属于 W_{G}，因为 $\overrightarrow{\pi}_1(I_{\mathrm{nat}})$ 中任意两点之间恰有一个箭头。设 $q\colon I_{\mathrm{nat}} \to \mathsf{S}^1_{\mathrm{nat}}$ 由 $q(t) = e^{2\pi i t}$给出。在下方跨度的任意余锥中，从圆出发的映射都是常值映射，因为它与满射 q 的复合是常值映射。因此该方形是一个推出。

$$\begin{array}{ccc} I_{\mathrm{nat}} & \longrightarrow & * \\ {\scriptstyle q}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathsf{S}^1_{\mathrm{nat}} & \longrightarrow & *. \end{array}$$

底部映射不属于 W_{G}，因为 $\overrightarrow{\pi}_1(\mathsf{S}^1_{\mathrm{nat}})$ 是圆的通常基本群胚，见 [8, 第3节。1] 而塌缩将其顶点群 $\mathbb{Z}$ 映到平凡群。

5.4. 注。 边界包含 $\mathsf{S}^0 \hookrightarrow C_1$ 不是 $\mathbf{dTop}_{\mathrm{G}}$中的余纤维化。令$X = [-1, 1]$，并设 $p(x) = \max(0, x)$。若连续路径 γ在 X中满足 $p\gamma$非递减，则称其为定向路径。因此 $p\colon X \to C_1$ 将 $[-1, 0]$连同其自然有向结构一起塌缩。在下列方形中，$i \in \mathcal{I}_{\mathrm{G}}$ 且 $e(0) = -1, e(1) = 1$。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \overset{\widetilde{b}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow[b]{} & C_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{S}^0 & \xrightarrow{e} & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ C_1 & \xrightarrow[\mathrm{id}]{} & C_1 \end{array}$$

包含映射 $s\colon C_1 \hookrightarrow X$, $s(y) = y$ 是 p 的定向截面。当 $A = \varnothing$ 时，因此可以取 $\widetilde{b} = sb$。否则，i 具有 $T \times \mathsf{S}^{m-1}_{\mathrm{nat}} \to T \times \mathsf{D}^m_{\mathrm{nat}}$ 第 4 节中的形式。圆盘中的任意两个点都可以由双向的有向路径连接，因此映射$z \mapsto b(t, z)$ 是常值映射，其值为 $h(t) = b(t, 0)$，对每个 $t \in T$ 均成立。0 上的纤维为 $[-1, 0]$，而 $y \in\,]0$ 上的纤维为 $\{y\}$。二者都是凸集，因此对于 $u \in \mathsf{S}^{m-1}$，我们可以在 $h(t)$ 上的纤维中，用一条路径将 $s(h(t))$ 与 $a(t, u)$ 连接起来，

$$\widetilde{b}(t, ru) = (1 - r)s(h(t)) + r\,a(t, u), \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1.$$

$\widetilde{\ }$在 $r = 0$处，值 $s(h(t))$ 与 u 无关。估计式 $|b(t, ru) - s(h(t))| \leqslant 2r$ 给出了$\widetilde{\ }$此处的连续性，而极坐标给出了 $r > 0$ 的连续性。映射 b 延拓为 $\widetilde{a}$，并且由于 $pb = b$，它是定向的。因此，根据定理 5.1，p 是一个平凡纤维化。

在右侧，提升会将 0 映到 -1，并将每个 $t > 0$ 映到 t。开子集 $[-1, -1/2[$ 在 X 中的逆像将是 $\{0\}$，这在 $[0, 1]$中不是开集。有向路径$t \mapsto 2t - 1$ 连接所需的端点，并投影为带有初始停顿的恒等路径；在 $\overrightarrow{\pi}_1(C_1)$ 中，根据（2），这表示同一个箭头。

6. 有向 Van Kampen 定理的同伦论解释

对于模型范畴 M，记 M_∞ 为其在弱等价处的 ∞-范畴局部化。我们将 M 中的同伦余极限定义为 M_∞中的余极限。对于 $\mathbf{dTop}_{\mathrm{G}}$ 以及带有 folk 模型结构的 Cat，我们均采用这一约定。对于小范畴 J，记 M^J 为从 J →到 M 的函子范畴及其自然变换。无论选择哪种 M，在逐对象弱等价处局部化 M^J，都等价于从 J的神经 NJ到 M_∞ [3,的函子 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}(NJ, \mathrm{M}_\infty)$。定理 7.9.8]。事实上，这两个模型范畴都存在小余极限，并且它们的余纤维化和平凡余纤维化在余积和序贯复合下封闭，正如 [3]的定义 7.7.2 的对偶以及注 7.9.7 所要求的那样。在此等价下，常值图表函子相对应。因此，它们的左伴随将左导出余极限与 M_∞中的余极限对应起来，这由 [3, 注 7.9.10] 的对偶得出。特别地，M_∞ 中的每个跨度都可以由 M 中的普通跨度表示。

6.1. **定理** (有向范·坎彭)。 基本范畴函子 $\overrightarrow{\pi}_1$ 诱导出一个函子，将 $\mathbf{dTop}_{\mathrm{G}}$ 的底层 ∞-范畴映至小范畴的 ***folk*** 模型范畴的底层范畴。此函子保所有小余极限。特别地，对于由小范畴作指标的图表$X\colon\ J \to \mathbf{dTop}_{\mathrm{G}}$，典范比较映射

$$\operatorname*{hocolim}_{j\in J} \overrightarrow{\pi}_1(X(j)) \longrightarrow \overrightarrow{\pi}_1\Big(\operatorname*{hocolim}_{j\in J} X(j)\Big)$$

由范畴等价表示，其中 hocolim 表示左侧 ***folk*** 模型结构和右侧 ***Grandis*** 模型结构中的同伦余极限。

证明。 由定理 5.1， $\overrightarrow{\pi}_1$ 将 $\mathbf{dTop}_{\mathrm{G}}$ 中的弱等价映为范畴等价，因此在局部化上诱导出一个函子。这些局部化具有小余极限 [3,命题 7.7 的对偶。4]。只需证明所诱导的函子保推出和小余积 [11, 命题 4.4.2。7]。

考虑一个跨度 $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$ in $\mathbf{dTop}_{\mathrm{G}}$。选取一个余纤维替换 $q_A\colon\ A' \to A$，使其为平凡纤维化。将 fq_A 和 gq_A 分解为余纤维化 $A' \hookrightarrow B'$ 和 $A' \hookrightarrow C'$，后接平凡纤维化 $q_B\colon\ B' \to B$和 $q_C\colon\ C' \to C$。由于 A'是余纤维的，且两条腿都是余纤维化，因此替换跨度是 Reedy 余纤维的。因此，推出$P = B' \sqcup_{A'} C'$ 计算了原跨度的同伦推出 [10, 定理 5.1.3 和推论 5.1.6]。

根据定理4.3，将 $\overrightarrow{\pi}_1$ 应用于左侧的推出，得到右侧的推出 t.

$$\begin{array}{ccc} A' & \hookrightarrow & B' \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ C' & \longrightarrow & P \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\pi}_1(A') & \longrightarrow & \overrightarrow{\pi}_1(B') \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \overrightarrow{\pi}_1(C') & \longrightarrow & \overrightarrow{\pi}_1(P). \end{array}$$

根据命题 4.2，从 $\overrightarrow{\pi}_1(A')$ 出发的两个函子在对象上都是单射。因此，它们是民间余纤维化，而 $\overrightarrow{\pi}_1(A')$ 是余纤维对象。右侧方形计算了一个 folk 同伦推出。函子 $\overrightarrow{\pi}_1(q_A)$、$\overrightarrow{\pi}_1(q_B)$ 和 $\overrightarrow{\pi}_1(q_C)$ 从替换跨度到 $\overrightarrow{\pi}_1(B) \leftarrow \overrightarrow{\pi}_1(A) \rightarrow \overrightarrow{\pi}_1(C)$ 给出了逐对象等价。在局部化中沿着该等价传输推出余锥，表明 $\overrightarrow{\pi}_1(P)$ 是后一个跨度的同伦推出。

对于由 $(X_i)_{i\in S}$ 小集合 S 索引的族，选择余纤维替换 $QX_i \to X_i$。它们的余积计算了 $\mathbf{dTop}_{\mathrm{G}}$ 中的同伦余积。根据 $\overrightarrow{\pi}_1$ 定理 4.3 的证明中回顾的余积公式，典范函子

$$\coprod_{i\in S} \overrightarrow{\pi}_1(QX_i) \longrightarrow \overrightarrow{\pi}_1\left(\coprod_{i\in S} QX_i\right)$$

是一个同构，即使 S 为空也是如此。每个 $\overrightarrow{\pi}_1(QX_i)$ 都是 folk 余纤维化的，且等价于 $\overrightarrow{\pi}_1(X_i)$，因此左侧计算的是 folk 同伦余积。

对于普通图表 $X\colon J \to \mathbf{dTop}_{\mathrm{G}}$，现在可以明确表示陈述中的比较映射。选取投射余纤维化替换 $QX \to X$ $\mathbf{indTop}_{\mathrm{G}}^{J}$ 和 $v\colon R \to \overrightarrow{\pi}_1 \circ QX$ $\mathbf{in\ Cat}^{J}$。由于这两个模型范畴都是组合的，根据 [11,命题 A.2.8.2], ，这两种投射模型结构均存在。在这些结构中，常值图表函子保纤维化和平凡纤维化，因此其左伴随 colim_J 可在余纤维图表上计算导出余极限。将 $\overrightarrow{\pi}_1$ 应用于 QX 的余极限余锥，即得到

$$\mathrm{colim}_J R \xrightarrow{\mathrm{colim}_J v} \mathrm{colim}_J(\overrightarrow{\pi}_1 \circ QX) \longrightarrow \overrightarrow{\pi}_1(\mathrm{colim}_J QX)\,.$$

该复合表示比较映射，并且由于局部化中的余极限保持性，它是范畴等价。□

6.2. **推论**（并集的同伦推出）。设 U、V 是 X 的诱导有向子空间，且其点集覆盖 X。顶点为 $U\cap V$、U、V、X 的包含映射方块在 $\mathbf{dTop}_{\mathrm{G}}$ 中是同伦推出，当且仅当函子

$$\kappa\colon \overrightarrow{\pi}_1(U) \sqcup_{\overrightarrow{\pi}_1(U\cap V)} \overrightarrow{\pi}_1(V) \longrightarrow \overrightarrow{\pi}_1(X)$$

由到 X 的包含映射诱导的函子是同构。只要 U 和 V 的内部覆盖 X，下列方形既是有向空间的推出，也是 $\mathbf{dTop}_{\mathrm{G}}$ 中的同伦推出。

$$\begin{array}{ccc} U\cap V & \hookrightarrow & U \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ V & \hookrightarrow & X. \end{array}$$

证明。赋予 $W = U\cap V$ 其诱导结构，于是 W 是 U、$\to X \hookleftarrow V$ 的拉回。按照定理 6.1 的证明，将 $U \leftarrow W \to V$ 替换为余纤维化跨度 $U' \leftarrow W' \to V'$。其推出 P 带有比较映射 $q\colon P \to X$，该映射由 $U' \to U$、$\to X$ 以及 $V' \to V$、$\to X$ 诱导。原方形是同伦推出，当且仅当 q 是弱等价。根据定理 4.3，$\overrightarrow{\pi}_1(P)$ 是替换跨度的基本范畴的推出。两个范畴跨度都是 Reedy 余纤维的，因为二者在对象上的腿映射都是单射。推出函子是跨度上的左 Quillen 函子，因此它将二者之间的逐对象等价映射为交换三角形中的对角等价

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\pi}_1(P) & \xrightarrow{\overrightarrow{\pi}_1(q)} & \overrightarrow{\pi}_1(X) \\ & {\scriptstyle\simeq}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\kappa} & \\ & \overrightarrow{\pi}_1(U) \sqcup_{\overrightarrow{\pi}_1(W)} \overrightarrow{\pi}_1(V) & \end{array}\,.$$

根据定理 5.1， q 是弱等价，当且仅当 $\vec{\pi}_1(q)$ 是等价，也即当且仅当 κ 是等价。对象集函子保持推出，因此在对象上 κ 是从点集的推出到其并集的双射。因此， κ 是等价，当且仅当它是同构。

现在假设这些内部覆盖了 X。设有向映射 $h_U\colon U \to Z$ 和 $h_V\colon V \to Z$在 W上相等，并令 $h\colon |X| \to |Z|$ 为由此得到的点映射。对于每个连续测试单形 $\sigma\colon \Delta^n \to |X|$, 根据勒贝格数引理，足够精细的重心细分从属于这两个内部的逆像。该细分的每个闭单形都是由 Δ生成的，因此 σ 的限制可连续地经由相应的诱导子空间分解。沿有限细分进行粘合，得到 $h\sigma$的连续性，进而得到 h的连续性。同样， X 中的一条有向路径可细分为 U 或 V中的有向路径。它们在 h_U 或 h_V 下的像都是有向的，因此整条像路径也是有向的。这证明了 dTop 中的推出性质。定理 2.1 表明 κ 是一个同构，而第一个断言给出了同伦推出。□

6.3. **例** (两个闭子区间)。 固定 $0 < c < 1$ 并赋予 $U = [0, c]$ 和 $V = [c, 1]$它们在 C_1中的诱导有向结构。它们的内部不相交于 c。由（2）以及递增仿射重标度， U 和 V 的基本范畴分别是对应的有序区间。在它们沿 $\{c\}$作范畴推出时，每个态射都是来自这两个区间的态射的有限复合。这样的复合是非递减的，因此，如果它的端点位于 c的一侧，它就化为该区间中唯一的态射。对于 $x < c < y$，从 x 到 y 的复合必须经过公共对象 c。将两侧的因子分别复合，恰好得到

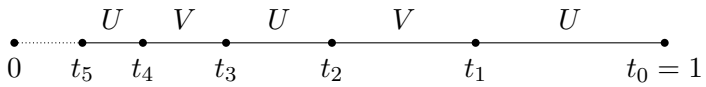
$$x \longrightarrow c \longrightarrow y.$$

因此，该推出恰好有一个箭头 $x \to y$ 对应于 $x \leqslant y$ ，而对应于 $x > y$的箭头不存在。与 $\vec{\pi}_1(C_1)$ 的比较映射是一个同构，因此根据推论 6.2，这个并方块是一个同伦推出。

6.4. **例** （交替的闭子区间）。 取一个严格递减序列 $(t_n)_{n\geqslant 0}$ ，使其满足 $t_0 = 1$ 且极限为 0。对于 $n \geqslant 0$ ，令 $J_n = [t_{n+1}, t_n]$。考虑由 C_1 诱导的有向子空间 U， V，其定义如下:

$$U = \{0\} \cup \bigcup_{k\geqslant 0} J_{2k}, \qquad V = \{0\} \cup \bigcup_{k\geqslant 0} J_{2k+1}.$$

它们的点集覆盖 $[0, 1]$ ，且在其中是闭集，因为这些区间在 0 以外局部有限，并且两个集合都包含 0。它们的交集是 $\{0\} \cup \{t_n \mid n \geqslant 1\}$。



对于 $0 < y \leqslant 1$，取 k 使得 $t_{2k} < y$。 J_{2k} 和 J_{2k+1} 的中点位于 $]0,\ y[$ 中，且分别属于 $U \setminus V$和 $V \setminus U$。因此，这两个部分都不包含 $[0, y]$。任一部分中包含 0 的连通子集必为单点集。因此，任一部分中从 0 出发的路径都是常值路径。事实上，在每个由 Δ生成的子空间拓扑中，0 都是孤立点，因为任何像包含 0 的连续测试单形，其像都是 $\{0\}$。

在 $\vec{\pi}_1(U) \sqcup_{\vec{\pi}_1(U\cap V)} \vec{\pi}_1(V)$ 中，一个箭头是来自两个部分的箭头的有限复合，因此源为 0 的唯一箭头是其恒等态射。在 $\vec{\pi}_1(C_1)$ 中，路径 $t \mapsto t$ 表示一个

箭头 $0 \to 1$。因此，比较函子不是满的，而推论 6.2 表明这个并方块不是同伦推出。

参考文献

[1] J. Adámek 和 J. Rosický。《局部可呈示范畴与可达范畴》。剑桥：剑桥大学出版社，1994 年。 https://doi.org/10.1017/CBO9780511600579。[2] T. Beke。《可层化同伦模型范畴》。《剑桥哲学学会数学学报》，129(3)：447–475，2000 年。 https://doi.org/10.1017/S0305004100004722。[3] D.-C. Cisinski。《高阶范畴与同伦代数》，剑桥高等数学研究丛书第 180 卷。剑桥大学出版社，2019 年。 https://doi.org/10.1017/9781108588737。[4] L. Fajstrup、E. Goubault、E. Haucourt、S. Mimram 和 M. Raussen。《有向代数拓扑与并发性》。SpringerBriefs 应用科学与技术丛书。Springer，2016 年。https://doi.org/10.1007/978-3-319-15398-8。[5] E. D. Farjoun。《同伦余极限的基本群》。《数学进展》，182(1)：1–27，2004 年。 https://doi.org/10.1016/S0001-8708(03)00072-0。[6] P. Gaucher。《流的左适当性》。《范畴论及其应用》，37(19)：562–612，2021 年。 https://doi.org/10.70930/tac/c4rpm1y7。[7] P. Gaucher。《多基点 d-空间的自然同伦》。《冈山大学数学杂志》，68(1)：13–62，2026年。 https://doi.org/10.18926/mjou/70890。[8] M. Grandis。《有向同伦理论 I》。《拓扑学、微分几何与范畴论笔记》，44(4)：281–316，2003 年。 https://www.numdam.org/item/CTGDC_2003__44_4_281_0/。[9] S. Henry。《极小模型结构》，2020 年。arXiv 预印本。 https://doi.org/10.48550/arXiv.2011.13408。[10] M. Hovey。《模型范畴》。普罗维登斯：美国数学学会，1999 年。 https://doi.org/10.1090/surv/063。[11] J. Lurie。《高阶拓扑斯理论》（AM-170），数学年刊研究丛书第 170 卷。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，2009 年。 https://doi.org/10.1515/9781400830558。[12] J. R. Munkres。《拓扑学》。新泽西州上萨德尔河：Prentice Hall，第二版，2000 年。[13] E. Riehl。《范畴同伦理论》，新数学专著丛书第 24 卷。剑桥：剑桥大学出版社，2014 年。 https://doi.org/10.1017/CBO9781107261457。[14] J. Rosický。《关于组合模型范畴》。《应用范畴结构》，17(3)：303–316，2009 年。 https://doi.org/10.1007/s10485-008-9171-2。

巴黎西岱大学，法国国家科学研究中心，IRIF，F-75013，巴黎，法国*URL*： https://www.irif.fr/~gaucher