arXiv:2611.30211v1 [math.NA] 23 Nov 2026

采用 SGMRES 的 CCP-2D GEC 数值模拟*

ZHENYU ZOU†、HAORAN GUAN‡、KANGXIN LIU§、YUFENG WEI§、YIPEI CHEN‡、
PEITING YOU‡、和YUWEI FAN‡

摘要。流体模型为模拟低温气体放电提供了一种高效方法，而这类放电在半导体制造中具有重要意义。据我们所知，本文首次为二维电容耦合等离子体（CCP）的气体电子学会议（GEC）参考单元提出了系统的数值框架。该框架采用结构化非均匀圆柱网格来解析空间梯度。泊松方程采用半隐式 Scharfetter-Gummel（SG）格式，连续性方程和电子能量方程则采用隐式 SG 格式。本文还研究了基于传统漂移-扩散项的显式和隐式形式。为求解由此产生的大规模线性方程组，我们引入一种采用不完全 LU（ILU）预条件的草图广义最小残量法（sGMRES）作为求解器。据我们所知，本文首次将随机化 sGMRES 应用于工程领域的实际模拟。通过降低全局正交化的开销，ILU-sGMRES 在保持精度的同时，比 ILU-GMRES 实现了更高的计算效率，尤其是在重启值相对较大时。具体而言，数值测试表明，与传统 ILU-GMRES 相比，ILU-sGMRES 在单机上最多可将端到端墙钟时间缩短 25.38%，在三节点基准测试中最多可缩短 11.71%，同时等离子体场的最大相对差异仅为 0.194%。数值实验比较了不同数值格式和求解器的性能，证明了 ILU-sGMRES 在实际模拟中的鲁棒性。

关键词。电容耦合等离子体，GEC，半隐式格式，非均匀网格，线性系统，sGMRES

AMS 学科分类。65M06, 65N06, 76X05, 35K57, 65F10

1. 引言。射频（RF）电容耦合等离子体（CCP）广泛应用于半导体制造中的刻蚀、薄膜沉积和表面改性 [1, 5]。其鞘层动力学、电子加热、功率沉积和空间均匀性强烈依赖于运行条件、驱动波形和反应器几何结构 [4, 5, 9, 22, 23] 。气体电子学会议（GEC）参考单元为等离子体模拟模型的研究和比较提供了明确定义的配置 [7, 10, 17]。与一维平行板模型相比，轴对称 GEC 模型能够解析径向和轴向变化、电极边缘效应以及向周围腔室的粒子输运 [7, 13], ，因此是研究等离子体多维流体模拟数值方法的代表性设置。

流体模型通过耦合带电粒子的连续性方程、电子能量方程和泊松方程 [1, 6, 11], 以低于动理学模型的计算成本描述等离子体的宏观行为。尽管如此，轴对称电容耦合等离子体的模拟在数值计算上仍然十分耗费资源。鞘层附近的陡峭梯度需要局部加密网格，而粒子的特征时间尺度差异悬殊，以及粒子输运、

*提交给编辑，日期。
†香港中文大学机械与自动化工程系，新界沙田，999077，香港特别行政区，中国（zyzou@mae.cuhk.edu.hk）。

‡华为莱布尼茨研究中心理论实验室，新界沙田，999077，香港特别行政区，中国（guan.haoran@huawei.com，liukangxin3@huawei.com，chen.yipei1@huawei.com，youpeiting@huawei.com，fanyuwei2@huawei.com）。§通讯作者。华为莱布尼茨研究中心理论实验室，新界沙田，999077，香港特别行政区，中国（liukangxin3@huawei.com，wei.yufeng@huawei.com）。

此稿件仅供审阅。

带电粒子、电子能量与电场之间的强耦合，使离散系统本身变得复杂 [13, 17, 18]。由于可能需要经过许多射频周期才能达到周期状态，因此时间步长的大小以及每一步求解线性系统的成本，都会影响总体计算开销。采用自适应网格的隐式耦合方法 [2], 等离子体流体框架，如 SOMAFOAM 和 Zapdos [10, 19]，以及 GPU加速实现，如 Vidyut3d [17]，推动了等离子体模拟的发展。进一步降低整个时间推进过程中线性求解器的成本仍然十分重要。

电容耦合等离子体的隐式流体模拟需要反复求解稀疏且非对称的线性系统，其系数反映了漂移-扩散输运、非均匀网格和多场耦合。尽管预条件广义最小残量（GMRES）方法广泛用于求解此类系统，但其标准Arnoldi正交化的成本会随着Krylov子空间维数的增加而显著增长，从而在重启过程中产生正交化开销与收敛速率之间的权衡。草图广义最小残量法（sGMRES）利用随机投影绕过这一瓶颈，使局部正交化能够相较于传统GMRES降低计算成本。然而，由于线性系统会随着等离子体的演化而不断变化，线性求解器的改进并不总能直接转化为端到端效率的提升。因此，有必要基于真实残差的收敛性、等离子体场的差异以及全耦合模拟中的实际运行时间缩减，对随机Krylov求解器进行评估。

本文在结构化非均匀圆柱网格上，为电容耦合等离子体（CCP）的二维轴对称气体电子学会议（GEC）参考单元提出了一个系统的数值框架。该自洽框架耦合了泊松方程、粒子连续性方程和电子能量方程，并考虑了三种数值格式：显式传统漂移-扩散格式（FEPL）、隐式传统漂移-扩散格式（FIP），以及采用通量修正的隐式 Scharfetter–Gummel 格式（用于电子能量）（FIP–SG–EFC）。所有由此得到的线性系统均采用不完全 LU 预条件的随机草图广义最小残量法（sGMRES）求解。据我们所知，本文首次系统介绍了 CCP-2D GEC 的计算框架，并首次将随机迭代求解器应用于工业实际模拟。我们评估了不同格式和求解器下的时间步长敏感性、计算场和计算成本，并考察了重启维数对墙钟时间的影响。最后，通过分析积分完成情况、持续放电情况以及周期性的实现情况，成功验证了采用 FIP–SG–EFC和 ILU-sGMRES 的配置在电压、气体压力和驱动频率的 27 种组合下的鲁棒性。

本文其余部分安排如下。?? 介绍轴对称 CCP-2D GEC 的物理模型和控制方程。?? 介绍非均匀网格上的有限体积离散及数值处理方法。?? 介绍作为求解器的 ILU-sGMRES 方法。?? 比较数值方案和线性求解器，并考察不同运行条件下的组合配置。结论见?? 。

本文采用以下记号。对于 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $b \in \mathbb{R}^n$，X，$b \geq 0$表示它们的所有元素均非负。 $\sigma_1(X)$ 表示矩阵 X 的最大奇异值。对于 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $b \in \mathbb{R}^n$，有 $\|A\|_2 = \sigma_1(A)$ $\|b\|_2 =$

本稿件仅供审阅。

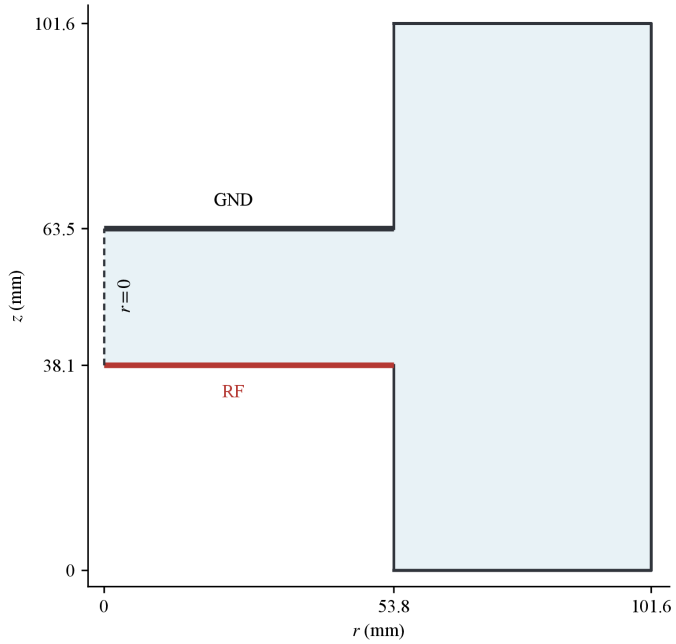

图 1：CCP-2D GEC 的轴对称计算几何。

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} b_i^2}, \quad \kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$$

2. CCP-2D GEC 模型。本节将通过以下控制方程组介绍轴对称 CCP-2D GEC 模型。反应区如图 1所示。

$$-\nabla \cdot (\epsilon_0 \nabla \phi) = e \cdot (n_+ - n_e), \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathrm{J}_e = S_e, \tag{2.1b}$$

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + \nabla \cdot \mathrm{J}_+ = S_e, \tag{2.1c}$$

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathrm{Q}_e - \mathrm{G} = S_q. \tag{2.1d}$$

在（2.1）中，（2.1a）为泊松方程，其中 ϕ 表示电势。 e和 ϵ_0 在（2.1a）中分别表示元电荷和真空介电常数。 ϕ由 n_e 和 n_+ 在连续性方程（2.1b）和（2.1c）中确定，分别表示电子和离子的密度。粒子的通量 J_e 和 J_+ 在（2.1b）–（2.1d）中具有如下形式：

$$\mathrm{J}_e = -D_e \nabla n_e + \mu_e n_e \nabla \phi, \quad \mathrm{J}_+ = -D_+ \nabla n_+ - \mu_+ n_+ \nabla \phi. \tag{2.2}$$

D_e、 D_+、 μ_e 和 μ_+ 在（2.2）中分别表示 n_e和 n_+的扩散系数和漂移迁移率。在实际情况下，我们总是有 $D_e \gg D_+$ 和 $\mu_e \gg \mu_+$。

本稿件仅供审阅使用。

（2.1d）是电子能量方程，其中

$$w_e = \frac{3}{2} n_e k T_e, \quad \mathrm{Q}_e = -\frac{5}{2} k D_e n_e \nabla T_e + \frac{5}{2} k T_e \mathrm{J}_e, \quad G = e\mathrm{J}_e \cdot \nabla \phi. \tag{2.3}$$

在（2.3）中， w_e 和 Q_e 分别是电子能量和电子能量通量。T_e 表示控制方程中的电子温度，单位为开尔文。以电子伏特为单位报告的数值通过 T_e[电子伏特] $=$ （k/e）T_e[开尔文]进行换算。G 是焦耳热项。 $k > 0$ 中的 w_e 是玻尔兹曼常数。对于（2.1d）中的电子能量方程，其中 $-e\mathrm{J}_e \cdot \nabla \phi = -e\nabla \cdot （\mathrm{J}_e \phi） + e\phi \nabla \cdot \mathrm{J}_e$，我们将（2.1d）改写为

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathrm{Q}_{eg} + e\phi \nabla \cdot \mathrm{J}_e = S_q, \tag{2.4}$$

with

$$\mathrm{Q}_{eg} = \mathrm{Q}_e - e \cdot (\mathrm{J}_e \phi). \tag{2.5}$$

这里，Q_e 定义见（2.3）。本文重点研究考虑电子能量方程时（2.4）的数值格式。对于（S_e 和 S_q 在（2.1b）-（2.1d）中的化学反应项，我们有

$$S_e = k_r N_0 n_e, \quad S_q = -H_r S_e - e k_e N_0 n_e - n_e Q_{el}. \tag{2.6}$$

在（2.6）中， k_r， $k_e > 0$ 是反应系数，受 T_e 影响，并通过求解（2.1d）进行更新。 $N_0 > 0$ 是计算域内中性气体的密度。 H_r是每次化学反应的能量损失。 Q_{el} 是每个电子的弹性碰撞能量损失率，其形式为

$$Q_{el} = 3k(T_e - T_g) \cdot \frac{\nu m_e}{m_{Ar}}. \tag{2.7}$$

在（2.7）中， T_g 表示中性气体的温度。 ν_m 表示电子动量传递碰撞的频率。 m_e 和 m_{Ar} 分别表示电子和中性氩原子的质量。它们均为正常数。

3. CCP-2D GEC 的数值方案。本节介绍轴对称 GEC CCP 模型的数值离散。

3.1. 网格配置与几何关系。对于图 1中的反应区，我们采用由三维柱坐标系推导出的轴对称构型，将三维物理问题简化为二维计算域。为在物理精度与计算效率之间实现更优的平衡，该区域被离散为**非均匀结构化网格**，并在**鞘层附近进行局部细化**，如图 2所示。这种非均匀策略仅在鞘层处布置高密度网格，以更好地解析陡峭的鞘层区域梯度，同时在主体区采用较粗的网格，从而控制计算成本。

如坐标框架所示，任意单元 P 的中心表示为（r_i, z_j），其中 Δr_{ij} 和 Δz_{ij} 分别表示其水平和垂直网格间距。由于圆柱对称性，二维区域中的每个单元在物理上都对应一个三维同轴环。该单元周围的四个面依次标记为“北”（n）、“南”（s）、“东”（e）和“西”（w）。

此稿件仅供审阅。

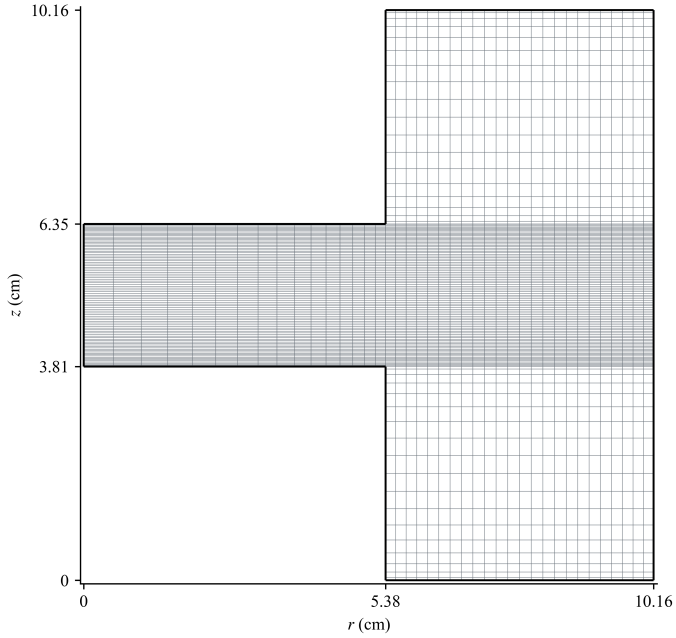

图 2：CCP-2D GEC 的网格配置。

根据对单元进行的几何积分，其体积 V_p 以及对应面（ $l \in \{n, s, e, w\}$ ）的表面积 $A_{p,l}$ 可表示为

$$V_p = 2\pi r_i \, \Delta r_{ij} \, \Delta z_{ij}, \quad A_{p,e} = 2\pi r_{i+\frac{1}{2}} \Delta z_{ij}, \quad A_{p,w} = 2\pi r_{i-\frac{1}{2}} \Delta z_{ij}, \\ A_{p,n} = A_{p,s} = 2\pi r_i \, \Delta r_{ij}. \tag{3.1}$$

在（3.1）中，$r_{i+\frac{1}{2}}$ 表示单元东侧和西侧界面的径向坐标。为便于使用有限体积法（FVM）对（2.1）中的控制方程进行离散化，引入面面积与单元总体积之比，定义为 $F_{p,l} = A_{p,l} / V_p$。根据（3.1），各面的几何尺度因子 $F_{p,l}$ 可表示为

$$F_{p,e} = \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i \Delta r_{ij}}, \quad F_{p,w} = \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i \Delta r_{ij}}, \quad F_{p,n} = F_{p,s} = \frac{1}{\Delta z_{ij}}. \tag{3.2}$$

这些几何参数自然地考虑了柱坐标系固有的曲率效应，从而确保网格界面上的通量计算满足守恒性。

3.2. 边界条件和一些设置。对于轴对称 CCP-2D GEC 的数值格式，我们从边界条件开始。我们采用适用于二维 GEC 的 Sakiyama边界条件。如图 1所示，二维 GEC 的几何结构中有四种边界表面：对称轴、上电极、下电极和介电壁。对于柱坐标中单元

本稿件仅供审阅。

P处对称轴（z轴）上的变量
和通量，我们有

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_{r=0}=0, \quad \mathrm{J}_{e,p,b}=0, \quad \mathrm{J}_{+,p,b}=0, \quad \mathrm{Q}_{eg,p,b}=0. \tag{3.3}$$

对于上/下电极和介电壁，边界条件的形式为

$$\mathrm{J}_{+,p,b}=\max\left(-\mu_{+} n_{+,p} \cdot \frac{\phi_b-\phi_p}{d_{p,l}}, 0\right), \tag{3.4}$$

$$\mathrm{J}_{e,p,b}=v_{e,p} n_{e,p}-\gamma \cdot \mathrm{J}_{+,b}, \tag{3.5}$$

$$\mathrm{Q}_{eg,p,b}=\frac{5}{2} k T_{e,p} v_{e,p} n_{e,p}-\frac{5}{3} \gamma k T_{e,p} \mathrm{J}_{+,p,b}-e \mathrm{J}_{e,p,b} \phi_{p,b}, \tag{3.6}$$

$$\phi_{p,b}=\begin{cases} 0 & \text{the dielectric wall} \\ \phi_{bottom}+\phi_{RF} \sin\left(2 \pi f_{RF} t+\phi_{0 bottom}\right) & \text{the lower electrode} \\ \phi_{top} & \text{the upper electrode} \end{cases}, \tag{3.7}$$

with

$$d_{p,l}=\begin{cases} \frac{\Delta r_{ij}}{2} & l=\{e,w\} \\ \frac{\Delta z_{ij}}{2} & l=\{n,s\} \end{cases}, \quad v_{e,p}=\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{8 k T_{e,p}}{\pi m_e}}. \tag{3.8}$$

在（3.7）中，ϕ_{bottom} 和 ϕ_{top} 表示电极的直流偏置，ϕ_{RF}，f_{RF} 和 $\phi_{0\mathrm{bottom}}$ 分别为施加的射频振幅、驱动频率和初始相位。在基准方案的配置中，下电极接入驱动电压，上电极接地，且 $\phi_{\mathrm{top}}=0$。m_e 在（3.7）中表示电子的质量。

除边界条件外，我们还为数值格式提供了一些定义和设置。根据不同面的通量，我们定义

$$\mathrm{Y}_{p,\mathrm{lout}}=\begin{cases} \mathrm{Y}_{p,l} & l=\{n,e\} \\ -\mathrm{Y}_{p,l} & l=\{s,w\} \end{cases}, \tag{3.9}$$

其中，$\mathrm{Y}=\{\mathrm{J}_e,\ \mathrm{J}_+,\ \mathrm{Q}_{eg},\ \mathrm{G}\ \nabla\phi\}$ 在（3.7）中，并且

$$\mathrm{G}_{p,l}=e \phi_p \cdot \mathrm{J}_{e,p,l}, \tag{3.10}$$

对于单元 P。对于柱坐标系中的二维矩形网格，$d_{p,\ l}$ 取为单元 P 的中心（r_i，z_j）与其四个相邻单元中心之间的间距

$$\begin{aligned} &d_{p,n}=d_{i,j+}=z_{j+1}-z_j, \quad d_{p,e}=d_{i+,j}=r_{i+1}-r_i, \\ &d_{p,s}=d_{i,j-}=z_j-z_{j-1}, \quad d_{p,w}=d_{i-,j}=r_i-r_{i-1}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

与 $l=\{n,e,s,w\}$。此外，我们在本工作中采用迎风格式作为

$$c^u_{i+\frac{1}{2},j}=\begin{cases} c_{i,j}, & \phi_{i+1,j} \geq \phi_{i,j} \\ c_{i+1,j}, & \phi_{i+1,j}<\phi_{i,j} \end{cases}, \quad c^u_{i,j+\frac{1}{2}}=\begin{cases} c_{i,j}, & \phi_{i,j+1} \geq \phi_{i,j} \\ c_{i,j+1}, & \phi_{i,j+1}<\phi_{i,j} \end{cases}. \tag{3.12}$$

对于单元 P，其中心为 (r_i, z_j)。

3.3. 基于 SG 的连续性方程和电子能量方程隐式格式。我们使用 SG 格式以及上述边界条件，对带电粒子连续性方程和电子能量方程进行离散。

本文仅供审阅。

3.3.1. 电子连续性方程。对于式（2.1b）中的电子连续性方程，其通量和源项见式（2.2）和（2.6），我们对式（2.1b）在体积 V_p 上积分，得到

$$\int_{V_p} \frac{\partial n_e}{\partial t} dV + \int_{V_P} \nabla \cdot \mathrm{J}_e dV = \int_{V_p} S_e dV. \tag{3.13}$$

对于 $\int_{V_P} \nabla \cdot \mathrm{J}_e dV$在（3.13）中，利用高斯散度定理，可得

$$\int_{V_P} \nabla \cdot \mathrm{J}_e \, dV = \oint_{\partial P} \mathrm{J}_e \cdot \mathbf{n} \, dA \approx \sum_{l \in \partial P} A_{e,l} \mathrm{J}_{e,p,lout}. \tag{3.14}$$

在（3.14）中，$l = \{n, s, e, w\}$。$A_{p,\ l}$和 $\mathrm{J}_{e,\ p,\ lout}$ 定义见（3.1）和（3.9）。因此，将（3.14）与（3.13）结合。在第 n个时间步，我们采用（3.13）中的隐式格式，并将等式两边除以 V_p。于是，

$$\frac{n_{e,p}^{n+1} - n_{e,p}^{n}}{\Delta t} + \sum_{l \in \partial P} F_{p,l} \mathrm{J}_{e,p,lout}^{n+1} = S_{e,p}^{n}. \tag{3.15}$$

在（3.15）中，$F_{p,\ l}$ 和 $\mathrm{J}_{e,\ p,\ lout}$ 定义见（3.2）和（3.9）。源项$S_{e,\ p}^{n}$ 根据（2.6）采用显式形式表示为

$$S_{e,p}^{n} = k_r^n N_0 n_{e,p}^{n}. \tag{3.16}$$

内部面

对于内部面上的通量 $\mathrm{J}_{e,\ p,\ l}$对于单元 P（r_i，z_j）的中心，我们对（2.1b）采用 SG格式。我们将 P´eclet 数定义为

$$\begin{aligned} P_{e,i,j+} &= \frac{\mu_e}{D_e} \cdot (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}), \quad P_{e,i+,j} = \frac{\mu_e}{D_e} \cdot (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}), \\ P_{e,i,j-} &= \frac{\mu_e}{D_e} \cdot (\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j}), \quad P_{e,i-,j} = \frac{\mu_e}{D_e} \cdot (\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j}). \end{aligned} \tag{3.17}$$

利用伯努利函数 $B(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ 和（3.17），可将 $\mathrm{J}_{e,p,l}$ 写为

$$\mathrm{J}_{e,p,n} = \mathrm{J}_{e,i,j+} = \frac{D_e}{d_{i,j+}} \cdot (B(-P_{e,i,j+}) n_{e,i,j} - B(P_{e,i,j+}) n_{e,i,j+1}), \tag{3.18}$$

$$\mathrm{J}_{e,p,e} = \mathrm{J}_{e,i+,j} = \frac{D_e}{d_{i+,j}} \cdot (B(-P_{e,i+,j}) n_{e,i,j} - B(P_{e,i+,j}) n_{e,i+1,j}), \tag{3.19}$$

$$\mathrm{J}_{e,p,s} = \mathrm{J}_{e,i,j-} = \frac{D_e}{d_{i,j-}} \cdot (B(-P_{e,i,j-}) n_{e,i,j-1} - B(P_{e,i,j-}) n_{e,i,j}), \tag{3.20}$$

$$\mathrm{J}_{e,p,w} = \mathrm{J}_{e,i-,j} = \frac{D_e}{d_{i-,j}} \cdot (B(-P_{e,i-,j}) n_{e,i-1,j} - B(P_{e,i-,j}) n_{e,i,j}). \tag{3.21}$$

在（3.18）-（3.21）中，d-值在（3.11）中定义。我们在 n_e （3.18）-（3.21）中取 $n+1$-个时间步。因此，根据（3.9），将（3.18）-（3.21）代入（3.15），可得

$$\frac{n_{e,i,j}^{n+1} - n_{e,i,j}^{n}}{\Delta t} + F_{p,n} \cdot (\mathrm{J}_{e,i,j+}^{n+1} - \mathrm{J}_{e,i,j-}^{n+1}) + F_{p,e} \cdot \mathrm{J}_{e,i+1,j}^{n+1} - F_{p,w} \cdot \mathrm{J}_{e,i-1,j}^{n+1} = S_{e,i,j}^{n}. \tag{3.22}$$

边界

当单元的某些面 P 位于边界上时，与（3.22）类似，

e

此稿件仅供审阅。

离散化后，包含内部面和边界的电子连续性方程可写为

$$\frac{n_{e,p}^{n+1}-n_{e,p}^{n}}{\Delta t}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{int}}}F_{p,l,i}\mathrm{J}_{e,p,lout}^{n+1}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{bnd}}}F_{p,l,b}\mathrm{J}_{e,p,b}^{n+1}=S_{e,p}^{n}. \tag{3.23}$$

在（3.23）中，$\mathrm{J}_{e、p、b}$ 根据边界类型取自（3.3）和（3.5）。$F_{p、l、i}$ 和$F_{p、l、b}$ 分别是在内部面和边界上（3.2）中的取值。利用（3.5），重排（3.23），可得

$$\left(\frac{1}{\Delta t}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{bnd}}}F_{p,l,b}v_{e,p}^{n}\right)\cdot n_{e,p}^{n+1}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{int}}}F_{p,l,i}\mathrm{J}_{e,p,lout}^{n+1}=\frac{n_{e,p}^{n}}{\Delta t}+S_{e,p}^{n}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{bnd}}}F_{l,b}\mathrm{J}_{+,p,b}^{n}. \tag{3.24}$$

我们取 n个时间步上的 $\mathrm{J}_{+、p、b}$ 和 $\mathrm{J}_{e、p、b}$，代入（3.4）和（3.5）。

3.3.2. 离子连续性方程。对于（2.1c）中的离子连续性方程，其通量和源项由（2.2）和（2.6）给出；类似于（3.13）和（3.14），我们在第 $n+1$个时间步采用隐式格式，可得

$$\frac{n_{+,p}^{n+1}-n_{+,p}^{n}}{\Delta t}+\sum_{l\in\partial P}F_{p,l}\mathrm{J}_{+,p,lout}^{n+1}=S_{e,p}^{n}. \tag{3.25}$$

$S_{e、p}^{n}$ 在（3.25）中取（3.16）的形式。$\mathrm{J}_{+p、,lout}^{n+1}$ 在（3.9）中定义，其中 n_{+}^{n+1}。

内部面对于通量 $\mathrm{J}_{+,p,l}$ 对于内部面，类似于 (3.17)，对于单元 P，其中心为 $(r_i,\ z_j)$，我们定义如下 P´eclet 数:

$$\begin{aligned}P_{+,i,j+}&=-\frac{\mu_+}{D_+}\cdot(\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j}),\quad P_{+,i+,j}=-\frac{\mu_+}{D_+}\cdot(\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}),\\ P_{+,i,j-}&=-\frac{\mu_+}{D_+}\cdot(\phi_{i,j-1}-\phi_{i,j}),\quad P_{+,i-,j}=-\frac{\mu_+}{D_+}\cdot(\phi_{i-1,j}-\phi_{i,j}).\end{aligned} \tag{3.26}$$

类似于 (3.18)-(3.21)，利用 $B(x)=\frac{x}{e^x-1}$、(3.11) 和 (3.26)，我们将 SG 格式中的 $\mathrm{J}_{+,p,l}$ 写为

$$\mathrm{J}_{+,p,n}=\mathrm{J}_{+,i,j+}=\frac{D_+}{d_{i,j+}}\cdot(B(-P_{+,i,j+})n_{+,i,j}-B(P_{+,i,j+})n_{+,i,j+1}), \tag{3.27}$$

$$\mathrm{J}_{+,p,e}=\mathrm{J}_{+,i+,j}=\frac{D_+}{d_{i+,j}}\cdot(B(-P_{+,i+,j})n_{+,i,j}-B(P_{+,i+,j})n_{+,i+1,j}), \tag{3.28}$$

$$\mathrm{J}_{+,p,s}=\mathrm{J}_{+,i,j-}=\frac{D_+}{d_{i,j-}}\cdot(B(-P_{+,i,j-})n_{+,i,j-1}-B(P_{+,i,j-})n_{+,i,j}), \tag{3.29}$$

$$\mathrm{J}_{+,p,w}=\mathrm{J}_{+,i-,j}=\frac{D_+}{d_{i-,j}}\cdot(B(-P_{+,i-,j})n_{+,i-1,j}-B(P_{+,i-,j})n_{+,i,j}). \tag{3.30}$$

因此，结合 (3.9) 并类似于 (3.22)，我们将 (3.27)-(3.30) 代入 (3.25) 并写 e 可以具有

$$\frac{n_{+,i,j}^{n+1}-n_{+,i,j}^{n}}{\Delta t}+F_n\cdot(\mathrm{J}_{+,i,j+}^{n+1}-\mathrm{J}_{+,i,j-}^{n+1})+F_e\cdot\mathrm{J}_{+,i+1,j}^{n+1}-F_w\cdot\mathrm{J}_{+,i-1,j}^{n+1}=S_{e,i,j}^{n}. \tag{3.31}$$

边界

当单元的某些面 P 位于边界上时，利用（2.1c）以及类似于（3.23）的关系 ，

此稿件仅供审阅。

我们可以得到

$$\frac{n_{+,p}^{n+1}-n_{+,p}^{n}}{\Delta t}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{int}}}F_{p,l,i}\mathrm{J}_{+,p,lout}^{n+1}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{bnd}}}F_{p,l,b}\mathrm{J}_{+,p,b}^{n+1}=S_{e,p}^{n}. \tag{3.32}$$

在（3.32）中，$\mathrm{J}_{+,\ p,\ b}$ 根据真实情况，在（3.3）和（3.4）中定义，其中 n_{+}^{n+1}。因此，我们将（3.32）改写为

$$(\frac{1}{\Delta t}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{bnd}}}F_{p,l,b}\cdot\frac{\partial \mathrm{J}_{+,p,b}^{n+1}}{\partial n_{+,p}^{n+1}})\cdot n_{+,p}^{n+1}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{int}}}F_{p,l,i}\mathrm{J}_{+,l,out}^{n+1}=\frac{n_{+,p}^{n}}{\Delta t}+S_{e,p}^{n}. \tag{3.33}$$

3.3.3. 电子能量方程。对于电子能量方程（2.4），类似于 -（3.14），我们有

$$\int_{V_P}\nabla\cdot\mathrm{Q}_{eg}\,dV=\oint_{\partial P}\mathrm{Q}_{eg}\cdot\mathbf{n}\,dA\approx\sum_{l\in\partial P}A_l\mathrm{Q}_{eg,p,lout}. \tag{3.34}$$

在（3.34）中，Q_{eg} 在（2.5）中定义。类似于（3.15）和（3.25），我们可以得到

$$\frac{\frac{3}{2}kn_{e,p}^{n+1}T_{e,p}^{n+1}-\frac{3}{2}kn_{e,p}^{n}T_{e,p}^{n}}{\Delta t}+\sum_{l\in\partial P}F_{p,l}\mathrm{Q}_{eg,p,lout}^{n+1}=S_{q,p}^{n}-\sum_{l\in\partial P}F_{p,l}\mathrm{G}_{p,lout}^{n}, \tag{3.35}$$

基于隐式形式的（2.3）。在（3.35）中，$\mathrm{G}_{p,\ lout}^{n}$ 与 $\mathrm{J}_{e,\ p,\ l}^{n}$ 分别在（3.10）和（3.18）-（3.21）中显式定义。根据（2.7）和（3.16），$\mathrm{S}_{q,\ p}^{n}$ 的形式为

$$\begin{aligned}S_{q,p}^{n}&=-H_rS_{e,p}^{n}-ek_e^{n}N_0n_{e,p}^{n}-n_{e,p}^{n}Q_{el}^{n}\\&=-H_rk_r^{n}N_0n_{e,p}^{n}-ek_e^{n}N_0n_{e,p}^{n}-n_{e,p}^{n}\cdot 3k(T_{e,p}^{n}-T_g)\cdot\frac{\nu m_e}{m_{Ar}}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

内部面

对于内部面的通量 Q_{eg}，我们将 P´eclet 数定义为

$$\begin{aligned}P_{T,i,j+}&=\frac{\mathrm{J}_{e,i,j+}\cdot d_{i,j+}}{D_en_{e,i,j+\frac{1}{2}}^{u}},\quad P_{T,i+,j}=\frac{\mathrm{J}_{e,i+,j}\cdot d_{i+,j}}{D_en_{e,i+\frac{1}{2},j}^{u}},\\P_{T,i,j-}&=\frac{\mathrm{J}_{e,i,j-}\cdot d_{i,j-}}{D_en_{e,i,j-\frac{1}{2}}^{u}},\quad P_{T,i-,j}=\frac{\mathrm{J}_{e,i-,j}\cdot d_{i-,j}}{D_en_{e,i-,j}^{u}},\end{aligned} \tag{3.37}$$

采用（3.12）中定义的迎风格式。使用 $B(x)=\frac{x}{e^x-1}$ 和 P´eclet 数-

本稿件仅供审阅。

字（3.37）中的数值，我们将（2.5）中的 Q_{eg} 写为

(3.38)
$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_{eg,p,n}=\mathrm{Q}_{eg,i,j+}=&\frac{5}{2}kn^{u}_{e,i,j+\frac{1}{2}}\cdot\frac{D_e}{d_{i,j+}}\cdot(B(-P_{T,i,j+})T_{e,i,j}-B(P_{T,i,j+})T_{e,i,j+1})\\&-e\cdot\mathrm{J}_{e,i,j+}\phi^{u}_{i,j+\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

(3.39)
$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_{eg,p,e}=\mathrm{Q}_{eg,i+,j}=&\frac{5}{2}kn^{u}_{e,i+\frac{1}{2},j}\cdot\frac{D_e}{d_{i+,j}}\cdot(B(-P_{T,i+,j})T_{e,i,j}-B(P_{T,i+,j})T_{e,i+1,j})\\&-e\cdot\mathrm{J}_{e,i+,j}\phi^{u}_{i+\frac{1}{2},j},\end{aligned}$$

(3.40)
$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_{eg,p,s}=\mathrm{Q}_{eg,i,j-}=&\frac{5}{2}kn^{u}_{e,i,j-\frac{1}{2}}\cdot\frac{D_e}{d_{i,j-}}\cdot(B(-P_{T,i,j-})T_{e,i,j-1}-B(P_{T,i,j-})T_{e,i,j})\\&-e\cdot\mathrm{J}_{e,i,j-}\phi^{u}_{i,j-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

(3.41)
$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_{eg,p,w}=\mathrm{Q}_{eg,i-,j}=&\frac{5}{2}kn^{u}_{e,i-\frac{1}{2},j}\cdot\frac{D_e}{d_{i-,j}}\cdot(B(-P_{T,i-,j})T_{e,i-1,j}-B(P_{T,i-,j})T_{e,i,j})\\&-e\cdot\mathrm{J}_{e,i-,j}\phi^{u}_{i-\frac{1}{2},j}.\end{aligned}$$

因此，我们将 (3.38)-(3.41) 代入 (3.35)，可得

(3.42)
$$\begin{aligned}&\frac{\frac{3}{2}n^{n+1}_{e,i,j}kT^{n+1}_{e,i,j}-\frac{3}{2}n^{n}_{e,i,j}kT^{n}_{e,i,j}}{\Delta t}+F_n\cdot(\mathrm{Q}^{n+1}_{eg,i,j+}-\mathrm{Q}^{n+1}_{eg,i,j-})+F_e\cdot\mathrm{Q}^{n+1}_{eg,i+1,j}\\&\qquad-F_w\cdot\mathrm{Q}^{n+1}_{eg,i-1,j}=S^{n}_{q,i,j}-\sum_{l\in\partial P}F_l\mathrm{G}^{n}_{p,lout}.\end{aligned}$$

边界

当单元 P 的某些面位于边界上时，与 (3.23) 和 (3.32) 类似，离散化后，同时考虑内部面和边界的电子能量方程可写为

(3.43)
$$\frac{\frac{3}{2}n^{n+1}_{e,i,j}kT^{n+1}_{e,i,j}-\frac{3}{2}n^{n}_{e,i,j}kT^{n}_{e,i,j}}{\Delta t}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{int}}}F_{p,l,i}\mathrm{Q}^{n+1}_{eg,l,out}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{bnd}}}F_{p,l,b}Q^{n+1}_{eg,p,b}=S^{n}_{q,p}-H^{n}_{p}.$$

在 (3.43) 中，$Q_{eg,\ p,\ b}$ 根据边界类型取自 (3.3) 和 (3.6)。我们定义 $H^{n}_{p}=\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{int}}}F_{p,\ l,\ i}\mathrm{G}^{n}_{p,\ lout}-\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{bnd}}}F_{p,\ l,\ b}\mathrm{G}^{n}_{p,\ b}$。将 (3.43) 改写为

(3.44)
$$\begin{aligned}&(\frac{3}{2}kn^{n+1}_{e,p}\cdot\frac{1}{\Delta t}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{bnd}}}F_{p,l,b}\cdot\frac{\partial\mathrm{Q}^{n+1}_{eg,p,b}}{\partial T^{n+1}_{e,p}})\cdot T^{n+1}_{e,p}+\sum_{l\in\partial P_{\mathrm{int}}}F_{p,l,i}\mathrm{Q}^{n+1}_{eg,p,lout}\\&\qquad=\frac{3}{2}kn^{n}_{e,p}\cdot\frac{T^{n}_{e,p}}{\Delta t}+S^{n}_{q,p}-H^{n}_{p}.\end{aligned}$$

3.4. 泊松方程的基于SG的半隐式格式。 我们转而讨论泊松方程。（2.1a）等价于

(3.45)
$$\nabla\cdot(\epsilon_0\nabla\phi)=e\cdot(n_e-n_+).$$

本稿件仅供审阅。

对于（3.45），当我们在 n_e 的右端项中采用半隐式形式，并取第 $n+1$个时间步时，可得

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \nabla \phi^{n+1}) = e \cdot (n_e^{n+1} - n_+^n). \tag{3.46}$$

对于式（2.1b）中的电子连续性方程，我们取

$$n_e^{n+1} = n_e^n - \Delta t \, \nabla \cdot \mathrm{J}_e^{n+1} + \Delta t \, S_e^n. \tag{3.47}$$

将式（3.47）与式（3.46）结合，可得

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \nabla \phi^{n+1}) + e\Delta t \, \nabla \cdot \mathrm{J}_e^{n+1} = e(n_e^n - n_+^n) + e\Delta t \, S_e^n. \tag{3.48}$$

内部面

利用高斯散度定理，对于所有面均为内部面的单元 P，可得

$$\sum_{l \in \partial P} \epsilon_0 (\nabla \phi_{p,lout}^{n+1}) F_{p,l} + e\Delta t \sum_{l \in \partial P} \mathrm{J}_{e,p,lphiout}^{n+1} F_{p,l} = e(n_{e,p}^n - n_{+,p}^n) + e\Delta t S_{e,p}^n, \tag{3.49}$$

与（3.15）和（3.25）类似。在（3.49）中，与（3.18）-（3.21）类似，我们将 $\mathrm{J}_{e,lphiout}$ 定义为 $l = \{n, e, s, w\}$：

$$\mathrm{J}_{e,p,nphiout}^{n+1} = \frac{D_e}{d_{i,j+}} \cdot (B(-P_{\phi,i,j+}) n_{e,i,j}^n - B(P_{\phi,i,j+}) n_{e,i,j+1}^n), \tag{3.50}$$

$$\mathrm{J}_{e,p,sphiout}^{n+1} = \frac{D_e}{d_{i,j-}} \cdot (B(-P_{\phi,i,j-}) n_{e,i,j-1}^n - B(P_{\phi,i,j-}) n_{e,i,j}^n), \tag{3.51}$$

$$\mathrm{J}_{e,p,ephiout}^{n+1} = \frac{D_e}{d_{i+,j}} \cdot (B(-P_{\phi,i+,j}) n_{e,i,j}^n - B(P_{\phi,i+,j}) n_{e,i+1,j}^n), \tag{3.52}$$

$$\mathrm{J}_{e,p,wphiout}^{n+1} = \frac{D_e}{d_{i-,j}} \cdot (B(-P_{\phi,i-,j}) n_{e,i-1,j}^n - B(P_{\phi,i-,j}) n_{e,i,j}^n), \tag{3.53}$$

在（3.49）中，我们定义

$$\begin{aligned} \nabla \phi_{p,n}^{n+1} &= \frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1}}{d_{i,j+}}, \quad \nabla \phi_{p,e}^{n+1} = \frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1}}{d_{i+,j}}, \\ \nabla \phi_{p,s}^{n+1} &= \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j-1}^{n+1}}{d_{i,j-}}, \quad \nabla \phi_{p,w}^{n+1} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1}}{d_{i-,j}}, \end{aligned} \tag{3.54}$$

其中 d-值由（3.11）定义。此外，在（3.50）-（3.53）中，我们有

$$\begin{aligned} P_{\phi,p,n} = P_{\phi,i,j+} &= \frac{\mu_e}{D_e} \cdot (\phi_{i,j+1}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1}), \quad P_{\phi,p,e} = P_{\phi,i+,j} = \frac{\mu_e}{D_e} \cdot (\phi_{i+1,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1}), \\ P_{\phi,p,s} = P_{\phi,i,j-} &= \frac{\mu_e}{D_e} \cdot (\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j-1}^{n+1}), \quad P_{\phi,p,w} = P_{\phi,i-,j} = \frac{\mu_e}{D_e} \cdot (\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1}). \end{aligned} \tag{3.55}$$

本稿件仅供审阅。

因此，利用（3.9），将（3.50）-（3.54）代入（3.49）可得

(3.56)
$$
\begin{aligned}
&F_{p,n}\cdot\left[\epsilon_0\cdot\frac{\phi^{n+1}_{i,j+1}-\phi^{n+1}_{i,j}}{d_{i,j+}}+e\Delta t\cdot\frac{D_e}{d_{i,j+}}\cdot\left(B(-P_{\phi,i,j+})n^n_{e,i,j}-B(P_{\phi,i,j+})n^n_{e,i,j+1}\right)\right]\\
&-F_{p,s}\cdot\left[\epsilon_0\cdot\frac{\phi^{n+1}_{i,j}-\phi^{n+1}_{i,j-1}}{d_{i,j-}}+e\Delta t\cdot\frac{D_e}{d_{i,j-}}\cdot\left(B(-P_{\phi,i,j-})n^n_{e,i,j-1}-B(P_{\phi,i,j-})n^n_{e,i,j}\right)\right]\\
&+F_{p,e}\cdot\left[\epsilon_0\cdot\frac{\phi^{n+1}_{i+1,j}-\phi^{n+1}_{i,j}}{d_{i+,j}}+e\Delta t\cdot\frac{D_e}{d_{i+,j}}\cdot\left(B(-P_{\phi,i+,j})n^n_{e,i,j}-B(P_{\phi,i+,j})n^n_{e,i+1,j}\right)\right]\\
&-F_{p,w}\cdot\left[\epsilon_0\cdot\frac{\phi^{n+1}_{i,j}-\phi^{n+1}_{i-1,j}}{d_{i-,j}}+e\Delta t\cdot\frac{D_e}{d_{i-,j}}\cdot\left(B(-P_{\phi,i-,j})n^n_{e,i-1,j}-B(P_{\phi,i-,j})n^n_{e,i,j}\right)\right]\\
&=e\cdot(n^n_{e,i,j}-n^n_{+,i,j})+e\Delta tS^n_{e,i,j}.
\end{aligned}
$$

对于（3.56）中的半隐式格式，我们将（3.50）-（3.53）改写为关于 $\delta\phi^{n+1}$ 的函数:

(3.57)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{e,p,nphiout}(\delta\phi^{n+1})=&\frac{D_e}{d_{i,j+}}\cdot[B\Big(-\frac{\mu_e}{D_e}\cdot(\phi^{n+1}_{i,j+1}-\phi^{n+1}_{i,j})\Big)n^n_{e,i,j}\\
&-B\Big(\frac{\mu_e}{D_e}\cdot(\phi^{n+1}_{i,j+1}-\phi^{n+1}_{i,j})\Big)n^n_{e,i,j+1}],
\end{aligned}
$$

(3.58)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{e,p,sphiout}(\delta\phi^{n+1})=&\frac{D_e}{d_{i,j-}}\cdot[B\Big(-\frac{\mu_e}{D_e}\cdot(\phi^{n+1}_{i,j}-\phi^{n+1}_{i,j-1})\Big)n^n_{e,i,j-1}\\
&-B\Big(\frac{\mu_e}{D_e}\cdot(\phi^{n+1}_{i,j}-\phi^{n+1}_{i,j-1})\Big)n^n_{e,i,j}],
\end{aligned}
$$

(3.59)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{e,p,ehiout}(\delta\phi^{n+1})=&\frac{D_e}{d_{i+,j}}\cdot[B\Big(-\frac{\mu_e}{D_e}\cdot(\phi^{n+1}_{i+1,j}-\phi^{n+1}_{i,j})\Big)n^n_{e,i,j}\\
&-B\Big(\frac{\mu_e}{D_e}\cdot(\phi^{n+1}_{i+1,j}-\phi^{n+1}_{i,j})\Big)n^n_{e,i+1,j}],
\end{aligned}
$$

(3.60)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{e,p,wphiout}(\delta\phi^{n+1})=&\frac{D_e}{d_{i-,j}}\cdot[B\Big(-\frac{\mu_e}{D_e}\cdot(\phi^{n+1}_{i,j}-\phi^{n+1}_{i-1,j})\Big)n^n_{e,i-1,j}\\
&-B\Big(\frac{\mu_e}{D_e}\cdot(\phi^{n+1}_{i,j}-\phi^{n+1}_{i-1,j})\Big)n^n_{e,i,j}].
\end{aligned}
$$

利用一阶泰勒公式，我们可以用 $\mathrm{J}_{e,p,lphiout}(\delta\phi^n)$ 近似 $\mathrm{J}_{e,p,lphiout}(\delta\phi^{n+1})$，即

(3.61)
$$
\mathrm{J}_{e,p,lphiout}(\delta\phi^{n+1})=\mathrm{J}_{e,p,lphiout}(\delta\phi^n)+\frac{\partial\mathrm{J}_{e,p,lphiout}(\delta\phi^n)}{\delta\phi^n}\cdot(\delta\phi^{n+1}-\delta\phi^n).
$$

就 $\frac{\partial\mathrm{J}_{e,p,lphiout}(\delta\phi^n)}{\delta\phi^n}$ 在（3.61）中而言，当 $\delta\phi^n\approx 0$时，由于有 $B'(0)=-\frac{1}{2}$对于$B(x)=x/(e^x-1)$，我们可以得到

(3.62)
$$
\frac{\partial\mathrm{J}_{e,p,lphiout}(\delta\phi^n)}{\delta\phi^n}=\mu_e\cdot\frac{n^n_{e,p,l}}{d_{p,l}},
$$

取 $l=\{n,e,s,w\}$。根据 (3.61) 和 (3.62)，$\mathrm{J}_{e,\ p,\ lphiout}(\delta\phi^{n+1})$ 可以改写为

本稿件仅供审阅使用。

另一种形式:

$$\mathrm{J}_{e,p,lphiout}(\delta\phi^{n+1}) = \mathrm{r}^{n}_{e,p,lphiout} + \mu_e \cdot \frac{n^n_{e,p,l}}{d_{p,l}} \cdot \delta\phi^{n+1}, \tag{3.63}$$

$$\mathrm{r}^{n}_{e,p,lphiout} = \mathrm{J}_{e,p,lphiout}(\delta\phi^{n}) - \mu_e \cdot \frac{n^n_{e,p,l}}{d_{p,l}} \cdot \delta\phi^{n}. \tag{3.64}$$

在（3.62）-（3.64）中， d-值定义于（3.11）中。对于中心位于（r_i， z_j）的单元 P，我们使用

$$\begin{aligned} n_{e,p,n} = n_{e,i,j+\frac{1}{2}} = \frac{n_{e,i,j} + n_{e,i,j+1}}{2}, \quad n_{e,p,e} = n_{e,i+\frac{1}{2},j} = \frac{n_{e,i+1,j} + n_{e,i,j}}{2}, \\ n_{e,p,s} = n_{e,i,j-\frac{1}{2}} = \frac{n_{e,i,j} + n_{e,i,j-1}}{2}, \quad n_{e,p,w} = n_{e,i-\frac{1}{2},j} = \frac{n_{e,i-1,j} + n_{e,i,j}}{2}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

因此，根据（3.57）-（3.60），将（3.63）和（3.64）代入（3.56）。可得以下方程:

(3.66)

$$\begin{aligned} & F_{p,n} \cdot (\epsilon_0 + e\Delta t \mu_e \cdot n^n_{e,i,j+\frac{1}{2}}) \cdot \frac{\phi^{n+1}_{i,j+1} - \phi^{n+1}_{i,j}}{d_{i,j+}} \\ & - F_{p,s} \cdot (\epsilon_0 + e\Delta t \mu_e \cdot n^n_{e,i,j-\frac{1}{2}}) \cdot \frac{\phi^{n+1}_{i,j} - \phi^{n+1}_{i,j-1}}{d_{i,j-}} \\ & + F_{p,e} \cdot (\epsilon_0 + e\Delta t \mu_e \cdot n^n_{e,i+\frac{1}{2},j}) \cdot \frac{\phi^{n+1}_{i+1,j} - \phi^{n+1}_{i,j}}{d_{i+,j}} \\ & - F_{p,w} \cdot (\epsilon_0 + e\Delta t \mu_e \cdot n^n_{e,i-\frac{1}{2},j}) \cdot \frac{\phi^{n+1}_{i,j} - \phi^{n+1}_{i-1,j}}{d_{i-,j}} \\ & = e \cdot (n^n_{e,i,j} - n^n_{+,i,j}) + e\Delta t S^n_{e,i,j} \\ & - (\mathrm{r}_{e,p,nphiout}(\delta\phi^n) - \mathrm{r}_{e,p,sphiout}(\delta\phi^n) + \mathrm{r}_{e,p,ephiout}(\delta\phi^n) - \mathrm{r}_{e,p,wphiout}(\delta\phi^n)). \end{aligned}$$

边界

当单元的某些面 P 位于边界上时，类似于（3.49），有

$$\begin{aligned} & \sum_{l\in\partial P_{int}} \epsilon_0(\nabla\phi^{n+1}_{p,lout})F_l + \sum_{l\in\partial P_{bnd}} \epsilon_0(\nabla\phi^{n+1}_{p,b,lout})F_l \\ & + e\Delta t \sum_{l\in\partial P_{int}} \mathrm{J}^{n+1}_{e,p,lphiout}F_l + e\Delta t \sum_{l\in\partial P_{bnd}} \mathrm{J}^{n+1}_{e,p,lphiout}F_l \\ & = e(n^n_{e,p} - n^n_{+,p}) + e\Delta t S^n_{e,p}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

当 $l \in \partial P_{bnd}$ 时，我们取 $\mathrm{J}_{e,\ p,\ lphiout} = \mathrm{J}_{e,\ p,\ b}$ 其定义见（3.3）和（3.5）。$\nabla\phi^{n+1}_{p,\ lout}$（3.67）中的量，对于满足 $l \in \{n, e, s, w\}$ 的内部面，定义见（3.9）。对于 $\nabla\phi_{p,\ b,\ lout}$ 当 $l \in \partial P_{bnd}$ 时，我们取

$$\begin{aligned} \nabla\phi_{p,b,n} = \frac{\phi_{b,n} - \phi_p}{d_{p,n}}, \quad \nabla\phi_{p,b,e} = \frac{\phi_{b,e} - \phi_p}{d_{p,e}}, \\ \nabla\phi_{p,b,s} = \frac{\phi_p - \phi_{b,s}}{d_{p,s}}, \quad \nabla\phi_{p,b,w} = \frac{\phi_p - \phi_{b,w}}{d_{p,w}}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

本稿件仅供审阅。

这里，$d_{p,\,l}$ 的定义见（3.8）。$\phi_{b,\,l}$ 在介电壁和上／下电极处取（3.7）。对称轴处，我们取

$$\nabla\phi_{p,b,l} = 0. \tag{3.69}$$

就$\nabla\phi_{p\,b}^{n+1}{}_{,,lout}$而言，类似于(3.9)，我们令

$$\nabla\phi_{p,b,lout}^{n+1} = \begin{cases} \nabla\phi_{p,b,l}^{n+1} & l = \{n, e\} \\ -\nabla\phi_{p,b,l}^{n+1} & l = \{s, w\} \end{cases}, \tag{3.70}$$

其中$\nabla\phi_{p\,b\,l}^{n+1}{}_{,,}$定义见(3.68)。

3.5. 含对流扩散项的通量。 对于(n_e, J$_e$)中的通量，除采用 SG 格式的(2.2)外，对于单元 P ，其中心为(r_i, z_j)，我们也可以将 J$_l$ 与 $l = \{n, e, s, w\}$ 写成含传统对流扩散项的形式:

$$\mathrm{J}_{e,p,n} = \mathrm{J}_{e,i,j+} = -D_e \cdot \frac{n_{e,i,j+1} - n_{e,i,j}}{d_{i,j+}} + \mu_e n_{e,i,j+}^{u} \cdot \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{d_{i,j+}}, \tag{3.71}$$

$$\mathrm{J}_{e,p,e} = \mathrm{J}_{e,i+,j} = -D_e \cdot \frac{n_{e,i+,j} - n_{e,i,j}}{d_{i+,j}} + \mu_e n_{e,i+,j}^{u} \cdot \frac{\phi_{i+,j} - \phi_{i,j}}{d_{i+,j}}, \tag{3.72}$$

$$\mathrm{J}_{e,p,s} = \mathrm{J}_{e,i,j-} = -D_e \cdot \frac{n_{e,i,j} - n_{e,i,j-}}{d_{i,j-}} + \mu_e n_{e,i,j-}^{u} \cdot \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{d_{i,j-}}, \tag{3.73}$$

$$\mathrm{J}_{e,p,w} = \mathrm{J}_{e,i-,j} = -D_e \cdot \frac{n_{e,i,j} - n_{e,i-1,j}}{d_{i-,j}} + \mu_e n_{e,i-,j}^{u} \cdot \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{d_{i-,j}}, \tag{3.74}$$

对于传统电子通量，迎风格式中的电子密度由 $\mu_e\,\partial_l\phi$ 上电子漂移速度的符号决定。扩散项采用相邻单元电子密度的中心差分，其中 d值定义见(3.11)。类似地，含对流扩散项的通量 J$_{+,l}$ 可写为

$$\mathrm{J}_{+,p,n} = \mathrm{J}_{+,i,j+} = -D_+ \cdot \frac{n_{+,i,j+1} - n_{+,i,j}}{d_{i,j+}} - \mu_+ n_{+,i,j} \cdot \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{d_{i,j+}}, \tag{3.75}$$

$$\mathrm{J}_{+,p,e} = \mathrm{J}_{+,i+,j} = -D_+ \cdot \frac{n_{+,i+,j} - n_{+,i,j}}{d_{i+,j}} - \mu_+ n_{+,i,j} \cdot \frac{\phi_{i+,j} - \phi_{i,j}}{d_{i+,j}}, \tag{3.76}$$

$$\mathrm{J}_{+,p,s} = \mathrm{J}_{+,i,j-} = -D_+ \cdot \frac{n_{+,i,j} - n_{+,i,j-}}{d_{i,j-}} - \mu_+ n_{+,i,j} \cdot \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{d_{i,j-}}, \tag{3.77}$$

$$\mathrm{J}_{+,p,w} = \mathrm{J}_{+,i-,j} = -D_+ \cdot \frac{n_{+,i,j} - n_{+,i-1,j}}{d_{i-,j}} - \mu_+ n_{+,i,j} \cdot \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{d_{i-,j}}, \tag{3.78}$$

对于电子能量通量的传统通量，扩散系数在每个面上采用算术平均值 $n_{e,\,l} = (n_{e,\,L} + n_{e,\,R})/2$。迎风温度 $T_{e,\,l}^{u}$根据 J$_{e,\,l}$ 的符号来选取，而非仅依据电子漂移速度。静电贡献中的面上电势取算术平均值$\phi_l = (\phi_L + \phi_R)/2$。该实现将这一势通量贡献及相应的静电功分配到右端项上的相邻网格单元中。对于

本稿件仅供审阅。

电子能量的通量 Q_{eg}，我们取

$$\mathrm{Q}_{eg,p,n} = \mathrm{Q}_{eg,i,j+} = -\frac{5}{2}kD_e\overline{n}_{e,i,j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{T_{e,i,j+1} - T_{e,i,j}}{d_{i,j+}} + \frac{5}{2}kT^u_{e,i,j+\frac{1}{2}}\mathrm{J}_{e,i,j+} - e \cdot \mathrm{J}_{e,i,j+}\overline{\phi}_{i,j+}, \tag{3.79}$$

$$\mathrm{Q}_{eg,p,e} = \mathrm{Q}_{eg,i+,j} = -\frac{5}{2}kD_e\overline{n}_{e,i+\frac{1}{2},j} \cdot \frac{T_{e,i+1,j} - T_{e,i,j}}{d_{i+,j}} + \frac{5}{2}kT^u_{e,i+\frac{1}{2},j}\mathrm{J}_{e,i+,j} - e \cdot \mathrm{J}_{e,i+,j}\overline{\phi}_{i+,j}, \tag{3.80}$$

$$\mathrm{Q}_{eg,p,s} = \mathrm{Q}_{eg,i,j-} = -\frac{5}{2}kD_e\overline{n}_{e,i,j-\frac{1}{2}} \cdot \frac{T_{e,i,j} - T_{e,i,j-1}}{d_{i,j-}} + \frac{5}{2}kT^u_{e,i,j-\frac{1}{2}}\mathrm{J}_{e,i,j-} - e \cdot \mathrm{J}_{e,i,j-}\overline{\phi}_{i,j-}, \tag{3.81}$$

$$\mathrm{Q}_{eg,p,w} = \mathrm{Q}_{eg,i-,j} = -\frac{5}{2}kD_e\overline{n}_{e,i-\frac{1}{2},j} \cdot \frac{T_{e,i,j} - T_{e,i-1,j}}{d_{i-,j}} + \frac{5}{2}kT^u_{e,i-\frac{1}{2},j}\mathrm{J}_{e,i-,j} - e \cdot \mathrm{J}_{e,i-,j}\overline{\phi}_{i-,j}. \tag{3.82}$$

在（3.82）中，J_e 的值由（3.71）-（3.74）定义。对于泊松方程的半隐式格式，其步骤与 SG格式类似。对于半隐式格式，只需将（3.18）-（3.21）替换为（3.71）-（3.74）。边界条件遵循（3.3）-（3.12）。

3.6. 求解 ϕ^{n+1}、 n_e^{n+1}、 n_+^{n+1}和 T_e^{n+1}。 对于采用 SG格式模拟轴对称 CCP-2D GEC 的情况，我们按以下顺序分别计算变量：ϕ-n_e-n_+-T_e。根据（3.56）和（3.67），通过求解线性系统即可计算电势 ϕ^{n+1}

$$\mathbf{A}_\phi^n x^{n+1} = \mathbf{b}_\phi^n, \tag{3.83}$$

其中 n_e^n 和 n_+^n。对于电子密度 n_e^{n+1}，根据（3.22）和（3.24），电子密度 n_e^{n+1}必须通过求解以下方程得到:

$$\mathbf{A}_e^n x^{n+1} = \mathbf{b}_e^n, \tag{3.84}$$

其中 ϕ^{n+1}。就离子密度 n_+^{n+1}而言，根据式（3.31）和（3.33），我们可以通过求解线性系统 n_+^{n+1}来计算

$$\mathbf{A}_+^n x^{n+1} = \mathbf{b}_+^n, \tag{3.85}$$

其中 ϕ^{n+1} 和 n_e^{n+1}。与之前相同，根据式（3.42）和（3.44），我们可以计算T_e^{n+1}，其中

$$\mathbf{A}_T^n x^{n+1} = \mathbf{b}_T^n. \tag{3.86}$$

在式（3.83）–（3.86）中，带电粒子和电子能量对应的矩阵均具有稀疏近邻结构。对于非奇异的 M矩阵，若其右端项逐分量非负，则线性系统的精确解也逐分量非负。这些条件是否成立，取决于组装系数、源项、边界贡献以及时间步长。文中 **??** 所述的数值保护措施在时间推进过程中对离散化进行补充。时间推进过程总结于 算法 3.1。

当电子能量方程采用传统对流扩散项的通量时，我们无法保证矩阵对角线上的元素为正，且

本稿件仅供审阅。

对于 A_T，其他非零元素为负。不过，在数值模拟中，电子能量方程采用传统对流扩散项的通量效率更高，参见?? 中的实验。

算法 3.1 CCP-2D GEC 数值模拟 输入：初始值 $n_e^0, n_+^0, T_e^0, \phi^0$, $T_0 = 0, n = 0$, **时间步长** Δt, **确定的网格，最终模拟时间** $T_{\max}$。 **输出：变量** $n_e^T, n_+^T, T_e^T, \phi^T$ **的最终阶段。1：重复 2：求解 (3.83) 以计算** ϕ^{n+1}。**3：求解 (3.84) 以计算** n_e^{n+1}。**4：求解 (3.85) 以计算** n_+^{n+1}。**5：求解 (3.86) 以计算** T_e^{n+1}。**6：递增迭代次数并更新时间：** $n \leftarrow n+1, T \leftarrow T_0 + n\Delta t$。**7：直到** $T \geq T_{\max}$

对于显式 FEPL方案，流体方程使用时间层 n 的通量和电场进行推进。随后，使用更新后的带电粒子密度求解泊松方程。因此，所采用的计算序列为

$$(n_e^n, n_+^n, w_e^n, \phi^n) \xrightarrow{\text{explicit fluid update}} (n_e^{n+1}, n_+^{n+1}, w_e^{n+1}) \xrightarrow{\text{Poisson solve}} \phi^{n+1}. \tag{3.87}$$

流体更新后，静电求解基于

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \nabla \phi^{n+1}) = e(n_e^{n+1} - n_+^{n+1}). \tag{3.88}$$

显式流体更新使用旧时间层的通量和源项。对于电子连续性方程，我们取

$$\frac{n_{e,p}^{n+1} - n_{e,p}^n}{\Delta t} + \sum_{l \in \partial P} F_{p,l} \mathrm{J}_{e,p,lout}^n = S_{e,p}^n, \tag{3.89}$$

$$\frac{n_{e,p}^{n+1} - n_{e,p}^n}{\Delta t} + \sum_{l \in \partial P_{\text{int}}} F_{p,l,i} \mathrm{J}_{e,p,lout}^n + \sum_{l \in \partial P_{\text{bnd}}} F_{p,l,b} \mathrm{J}_{e,p,b}^n = S_{e,p}^n. \tag{3.90}$$

对于离子连续性方程，我们取

$$\frac{n_{+,p}^{n+1} - n_{+,p}^n}{\Delta t} + \sum_{l \in \partial P} F_{p,l} \mathrm{J}_{+,p,lout}^n = S_{e,p}^n, \tag{3.91}$$

$$\frac{n_{+,p}^{n+1} - n_{+,p}^n}{\Delta t} + \sum_{l \in \partial P_{\text{int}}} F_{p,l,i} \mathrm{J}_{+,p,lout}^n + \sum_{l \in \partial P_{\text{bnd}}} F_{p,l,b} \mathrm{J}_{+,p,b}^n = S_{e,p}^n. \tag{3.92}$$

对于电子能量方程，我们取

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{3}{2} n_{e,i,j}^{n+1} k T_{e,i,j}^{n+1} - \frac{3}{2} n_{e,i,j}^n k T_{e,i,j}^n}{\Delta t} + F_n \cdot (\mathrm{Q}_{eg,i,j+}^n - \mathrm{Q}_{eg,i,j-}^n) + F_e \cdot \mathrm{Q}_{eg,i+1,j}^n \\ &\quad - F_w \cdot \mathrm{Q}_{eg,i-1,j}^n = S_{q,i,j}^n - \sum_{l \in \partial P} F_l \mathrm{G}_{p,lout}^n, \end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{3}{2} n_{e,i,j}^{n+1} k T_{e,i,j}^{n+1} - \frac{3}{2} n_{e,i,j}^n k T_{e,i,j}^n}{\Delta t} + \sum_{l \in \partial P_{\text{int}}} F_{p,l,i} \mathrm{Q}_{eg,l,out}^n + \sum_{l \in \partial P_{\text{bnd}}} F_{p,l,b} Q_{eg,p,b}^n \\ &\quad = S_{q,p}^n - H_p^n. \end{aligned} \tag{3.94}$$

本稿件仅供审阅。

n_e^{n+1}， n_+^{n+1}和 T_e^{n+1}可以通过（3.89）-（3.94）进行更新。

3.7. 数值可容许性与保护机制。当更新后的场超出规定的可容许范围时，数值实现会启用保护措施，包括带电粒子密度的下界、根据规定的密度下限构造的电子能量守恒变量下界，以及化学源项的相对变化限制器。电子能量的守恒下限本身并不会对用更新后的电子密度相除后得到的局部电子温度施加固定下界。保护措施可防止此类状态在后续更新中传播。这些措施本身并不能证明未经修改的离散化具有正性或精确性。系统会记录保护机制的触发事件，以便将其发生频率与线性求解器的收敛情况以及等离子体场的射频周期变化分别报告。对于显式 FEPL方法，还会通过记录下限修正所增加能量的累计体积积分，对电子能量守恒变量的修正进行额外审计。因此，数值实验会区分成功的时间积分与严重依赖此类修正的解。

4. sGMRES 作为求解器。为求解（3.83）-（3.86）中的线性系统，可以采用多种不同类型的求解器，包括 Eigen 中的 SparseLU 和 BICGSTAB。本文采用最新的草图 GMRES（sGMRES） [14]并将不完全 LU（ILU）分解用作预条件器，对轴对称 CCP-2D GEC 进行数值模拟。

4.1. sGMRES。sGMRES [8, 14] 是一种用于求解线性系统的新型迭代方法。它利用随机矩阵草图技术 [3, 20] ，解决了经典 Arnoldi 过程中构造 GMRES 正交归一基时面临的根本性计算瓶颈。我们考虑如下典型线性系统

$$Ax = b, \tag{4.1}$$

其中， $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个非奇异矩阵， $b \in \mathbb{C}^n$ 是一个已知向量。我们将x_0 和 r_0 分别定义为初始猜测和残差，其中 $r_0 = b - Ax_0$。

标准子空间投影方法寻求形如$x_m = x_0 + By$ 的近似解，其中 $B \in \mathbb{C}^{n\times d}$ 是基的高而窄矩阵，满足 $d \ll n$，张成 Krylov子空间 $\mathcal{K}_d(A, r_0)$，而 $y \in \mathbb{C}^d$ 是一个坐标向量。为控制内存和计算开销， d 通常选择为重启的维数，这意味着子空间基每经过 d个内步就会重构一次。传统 GMRES 则通过以下方式最小化高维残差：

$$\min_{y\in\mathbb{C}^d} \|ABy - r_0\|_2. \tag{4.2}$$

使用通过完整 Arnoldi 过程构造的严格正交归一基 B ，但每个重启周期需要进行 $\mathcal{O}(nd^2)$ 次浮点运算，带来了难以承受的计算负担。整体迭代过程会持续进行，直到满足收敛准则或达到预先设定的最大迭代次数。

为绕过这一瓶颈，sGMRES 通过随机降维纳入草图-求解范式。设 $S \in \mathbb{C}^{s\times n}$ 是一个无偏子空间嵌入矩阵，其嵌入维数为 $s = \mathcal{O}(d)$ ，畸变参数为$\epsilon \in (0, 1)$，则以高概率有

$$\sqrt{1-\epsilon}\cdot\|My\|_2 \le \|SMy\|_2 \le \sqrt{1+\epsilon}\cdot\|My\|_2, \tag{4.3}$$

此稿件仅供审阅。

对于指定子空间中的向量，所选草图满足此嵌入性质，其中也包括应用下述界时的残差方向。这是草图与子空间相关的条件性质，而非对草图每一种实现的自动保证。矩阵草图的一些典型方法包括高斯草图、子采样随机哈达玛变换和 CountSketch。将草图矩阵 S左乘（4.2）后，sGMRES 将优化问题投影到一个显著更小的空间中，表述如下：

$$\hat{y} = \arg\min_{y\in\mathbb{C}^d} \|S(ABy - r_0)\|_2 = \arg\min_{y\in\mathbb{C}^d} \|Cy - g\|_2, \tag{4.4}$$

其中 $C = SAB \in \mathbb{C}^{s\times d}$ 是草图降阶系统， $g = Sr_0 \in \mathbb{C}^s$ 是草图初始残差。在此投影下，根据（4.3）和（4.4），草图极小化解的真实残差在结构上受（ y_o ）的精确极小化解约束：4.2）可得

$$\begin{aligned} \|AB\hat{y} - r_0\|_2 &\le \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \cdot \|S(AB\hat{y} - r_0)\|_2 \\ &\le \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \cdot \|S(ABy_o - r_0)\|_2 \le \frac{\sqrt{1+\epsilon}}{\sqrt{1-\epsilon}} \cdot \|ABy_o - r_0\|_2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

在上述嵌入假设下，（4.5）将草图极小化解的真实残差范数界定为相对于精确子空间极小化解的 $h = \sqrt{(1+\epsilon)/(1-\epsilon)}$ 倍。有限维 CountSketch 的实际效果仍需评估，且实现会根据原始系统的残差终止。

sGMRES 的核心优势在于放宽了对基 B完全正交性的要求。在 sGMRES 中，基矩阵 $B = [b_1, b_2, \ldots, b_d] \in \mathbb{C}^{n\times d}$通过计算成本较低的 k截断 Arnoldi 过程构造，其中每个新向量只与前 k 个向量正交化（其中 $k \ll d$）。对于未进行预条件的算子，截断 Arnoldi 关系的示意形式如下。实现的求解器将局部过程应用于左预条件算子 $P^{-1}A$，如算法 4.1所示）。由此得到截断 Krylov 递推关系

$$Ab_j = \sum_{i=\max(1,j-k+1)}^{j+1} h_{ij} b_i, \tag{4.6}$$

其中 $h_{ij} = b_i^{\mathsf{H}} Ab_j$ 和 $b_{j+1} = (Ab_j - \sum^{j} h_{ij}b_i)/h_{j+1,j}$。操作 $Ab_j{}_{i=\max(1,j-k+1)}$在此生成循环中并行收集，并实时进行草图化，以构成 C的列；使用子采样随机哈达玛变换等快速嵌入时，计算开销仅为 $\mathcal{O}(nd\log d)$ 次运算。循环完成后，使用薄 QR 分解 4.4在 $\mathcal{O}(sd^2$时间内求解小型稠密最小二乘问题，得到坐标向量 $\hat{}$ $C = QR$,$y = R^{-1}(Q^{\mathsf{H}}g)$。最后，高维解重构为

$$\hat{x} = x_0 + B\hat{y}. \tag{4.7}$$

同时，通过 $\hat{}r_{\text{est}} = \|(I - QQ^{\mathsf{H}})g\|_2$ 在降阶空间中高效监测草图残差范数，它可作为真实残差收敛的可靠替代指标。

此稿件仅供审阅。

4.2. 将 ILU 分解用作预条件。式（3.83）-（3.86）中的线性系统由于具有非对称性、刚性和空间变化的系数，求解起来颇具挑战。 κ_2（B）由截断的 Arnoldi 过程生成，可能会迅速退化，从而损害 sGMRES 的数值稳定性和精度。为缓解这一问题，必须引入预条件器 $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$，将原问题变换为谱结构更有利的等价系统，例如左预条件系统

$$P^{-1}Ax = P^{-1}b. \tag{4.8}$$

对于左预条件，Krylov 基以预处理残差初始化 $\widetilde{r}_0 = P^{-1}(b - Ax_0)$，后续矩阵作用则使用 $P^{-1}A$。其中，d 表示每个重启周期的最大 Krylov 维数，而 k 表示局部正交化中最近的基向量数量。原系统残差 $b - Ax$ 用于收敛性测试，具体规定见算法 4.1。

在实际应用中，针对一般稀疏非对称系统，一种稳健且广泛采用的选择是**不完全 LU （ILU）分解** [16]。经典的精确 LU 分解将矩阵分解为下三角矩阵 L 与上三角矩阵 U 的乘积，使得 $A = LU$。然而，对于大型稀疏矩阵，精确分解会引入大量新的非零元素，从而使内存需求呈指数级增长。ILU 分解通过计算近似分解来限制这种复杂度，其形式为

$$A = LU - R_0. \tag{4.9}$$

在（4.9）中， L是单位下三角矩阵。 U 是上三角矩阵，而 R_0 是表示被丢弃项的残差误差矩阵。由此，我们将预条件矩阵定义为 $P = LU$。对于不完全分解，保留的填充由所选的 ILU 变体及其填充/丢弃控制决定，不必与 A的稀疏模式一致。因此，每个 Krylov 步所需的预条件矩阵-向量运算$z = P^{-1}g$ 可通过依次进行前代和回代高效执行

$$Ly = g, \quad Uz = y. \tag{4.10}$$

通过采用这种高效的预条件，sGMRES 显著改变了相较于标准 GMRES 的整体计算复杂度特征。标准 GMRES 每个周期需要执行 $\mathcal{O}(nd^2)$ 次运算来完成完整正交化，而 sGMRES 通过 k 截断局部窗口（$k \ll d$），将这一开销降至 $\mathcal{O}(ndk)$，同时将约化系统的计算任务转移到一个规模较小的 $s \times d$ 稠密最小二乘问题上。在比较中，两种算法使用相同的收敛容差、最大迭代预算和重启维数 d。正交化的局部窗口 k 仅适用于 sGMRES。因此，sGMRES 相较于标准 GMRES 的整体计算加速效果，很大程度上取决于 Krylov子空间的维数 d。随着 d 增加，只要 k 不会严重降低子空间质量或引发过早发散，正交化步骤带来的节省就会变得格外显著。ILU 预条件旨在提高所得 Krylov 迭代的收敛性。对于每个矩阵， $\kappa_2(A)$ 的降低或特征值聚集在 1 附近都无法得到保证。因此，必须根据测得的迭代次数和实际运行时间开销来确定总体计时收益。ILU-sGMRES 展示于

本稿件仅供审稿使用。

算法 4.1。约化最小二乘问题通过列主元 QR 分解求解，其中包括对数值秩的判定。对于满秩约化系统，显式三角回代与标准列主元 QR 分解给出的最小二乘更新相同。

算法 4.1 带重启 d 和 k-截断 Arnoldi 基的 ILU-sGMRES 输入： $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$, 初始猜测 x_0，重启维数 d，截断窗口 k，最大迭代次数 $N_{\max}$，残差容差 τ输出：计算解 $\hat{}x$ 和算法状态 1：构造 ILU 预条件子 $P \approx A$2：设置 $d_0 = \min(d, N_{\max})$, $s = \min\{2(d_0+1)\ n\}$ 并采用随机 CountSketch$S \in \mathbb{C}^{s\times n}$3：设置 $\hat{}x \leftarrow x_0$ 和 $N_{\text{iter}} \leftarrow 0$4：当 $N_{\text{iter}} < N_{\max}$ 时执行 5：$r \leftarrow b - A\hat{}x$；若 $\|r\|_2 \le \tau \max(1, \|b\|_2)$, 则返回 $\hat{}x$ 并报告成功 6：$\widetilde{r} \leftarrow P^{-1}r$, $g \leftarrow S\widetilde{r}$和 $b_1 \leftarrow \widetilde{r}/\|\widetilde{r}\|_2$7：使用 $m_j = P^{-1}Ab_j$ 构造 $B = [b_1, \ldots, b_m]$，并针对最近的 k 个基向量进行两遍正交化；若发生数值崩溃则停止，或在执行 $\min(d, N_{\max} - N_{\text{iter}}, n)$步后停止 8：构造 $C = [Sm_1, \ldots, Sm_m]$，并通过列主元计算 $C\Pi = QR$ 9：若 $\operatorname{rank}(C) = 0$ 则 10：返回 $\hat{}x$ 并报告失败 11：否则 12：使用秩揭示列主元 QR 分解处理秩亏约化系统，求解 $\hat{}y = \arg\min_z \|Cz - g\|_2$ 13：结束 if 14：$\hat{}x \leftarrow \hat{}x + B\hat{}y$；$N_{\text{iter}} \leftarrow N_{\text{iter}} + m$15：结束 while 16：若 $\|b - A\hat{}x\|_2 \le \tau \max(1, \|b\|_2)$，则返回 $\hat{}x$ 并报告成功；否则返回 $\hat{}x$ 并报告失败。

在本研究中，我们主要考察并比较 ILU-GMRES 和 ILU-sGMRES 在轴对称 CCP-2D GEC 模拟中的性能，重点关注其精度和效率。通过这项全面评估，我们旨在评估随机求解器在等离子体物理模拟领域的适用性和鲁棒性。除 ILU 分解外，还可以采用多种预条件器，包括 Jacobi 预条件[16], 逐次超松弛（SOR） [21], 稀疏近似逆（SPAI） [12]以及代数多重网格（AMG）方法 [15]。本文在所有数值实验中始终采用 ILU 预条件子。

5. 实验结果。本节评估采用不同方案和求解器进行 CCP-2D GEC 模拟的数值精度、计算成本和鲁棒性。首先，我们比较离散化中三种方案的时间步长敏感性、等离子体场差异和计算成本。随后，我们在匹配的设置下考察线性求解器的场差异和计算性能。最后，我们评估适用于 27 种电压-压力-频率（v-p-f）条件的隐式方案和 sGMRES 求解器组合。

图1 展示了 GEC CCP 的轴对称计算域。

本稿件仅供审阅。

表1：基准GEC CCP模型的物理和数值参数

类别	参数	值
气体状态	气体温度 T_g；参考压力 p	300 开尔文；0.1 托
气体状态	中性粒子数密度 N_0	3.219×10^{21} 米$^{-3}$
激发	电压幅值 ϕ_{RF}；频率 f_{RF}	75 V；13.56 兆赫兹
电子输运	迁移率 μ_e；扩散系数 D_e	300 米^2 伏特$^{-1}$秒$^{-1}$；1.199×10^3 分钟^{2}秒$^{-1}$
离子输运	迁移率 μ_+；扩散系数 D_+	$1.444\ \mathrm{m^2\,V^{-1}s^{-1}}$；$6.42 \times 10^{-2}$ 米^{2}秒$^{-1}$
电极边界	电子损失系数 K_s；二次发射系数 γ	1.19×10^5 米 秒$^{-1}$；0。01
能量模型	特征能量损失 H_l	2.512×10^{-18} J
初始状态	n_{e0}，n_{i0}	10^{13} 米$^{-3}$；$10^{13}\,\mathrm{m^{-3}}$
初始状态	T_e^0；ϕ^0	4.00 电子伏特（相当于 4.64×10^4 开尔文）；0 V
空间网格	非均匀轴对称网格 $N_r \times N_z$	40×130

腔室的径向尺寸和轴向尺寸均为 101。6 mm。下电极和上电极分别位于 $z = 38.1$ mm 和 $z = 63.5$ mm，且半径均为 53。8 mm。电极间隙为 25。4 mm。下电极施加正弦射频电压，而上电极和外侧径向壁接地。在 $r = 0$施加轴对称边界条件。除非另有说明，数值实验采用 表1中列出的参数。模型包含直接电离和激发，但不考虑亚稳态输运及相关反应路径。空间离散采用 40×130 非均匀轴对称网格。下文报告的体积加权场差异以轴对称单元体积作为权重。

对于场和空间分布的比较，最后周期相位平均值通过在一个射频周期内均匀间隔采样十个样本来近似，即 $q_{10} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} q(t_k)$。这种离散的相位采样平均值不同于用于其他诊断量的时间积分平均值。

表2 总结了各组实验的比较结果和主要指标。相应小节中提供了详细的时间步、求解器及硬件设置。

5.1. 数值格式的比较。 在本部分中，根据等离子体的计算场、时间步长敏感性和计算成本，对三种数值格式进行了比较。

5.1.1. 离散格式与基准放电。在比较时间分辨率之前，先建立基准放电，以刻画模型的空间结构和后期演化。表3总结了三种完整的离散格式。 FEPL 先显式推进流体变量，再求解泊松方程，并对电子能量的下界进行监测和修正

本稿件仅供审阅使用。

表2：数值实验概述及评估的主要指标

实验	比较	主要评估
数值方案	FEPL，FIP 和 FIP–SG–EFC；变化的 Δt	场差异、数值可接受性和运行时间
求解器精度	SparseLU、ILU-GMRES 和 ILU-sGMRES；20-RF延续	真实残差和场的差异
求解器效率	ILU-GMRES 和 ILU-sGMRES；重启维数 $d = 30, 50, 60$	墙钟时间和 Krylov阶段异成本降低
参数研究	FIP–SG–EFC + sGMRES；27 V-p-f 条件	完备性，放电性、周期性和电子能量可容许性持久-

表3：三种方案的时间推进和空间离散

方案	流体更新	粒子通量	泊松ment 处理-	电子-能量处理
FEPL	显式	传统漂移-扩散	显式更新	传统通量和边界ary 处理；监测 en-能量下限
FIP	隐式	传统漂移–扩散	半隐式	传统通量和边界-ary
FIP–SG–EFC	隐式	沙尔费特–甘梅尔	SG一致半隐式	SG一致通量修正；传统边界

电子能量。 FIP 采用隐式时间推进和传统漂移-扩散通量，而 FIP–SG–EFC将SG粒子通量与电子能量输运相结合，并对泊松方程采用SG一致的半隐式处理。因此，这里比较的是完整的数值方案，而非单纯比较时间积分。

放电的基准方案采用 FIP 和 SparseLU 计算，时间步长为 $\Delta t = 2.4582 \times 10^{-10}$ 秒。均匀的初始状态经过 1000 个射频周期的演化。 图 3 展示了最后一个射频周期内，在十个等间隔相位采样点上取平均的四个场。 n_e 和 n_+ 集中在电极之间，并在径向和轴向上均有变化，尤其是在电极边缘附近。T_e 在低密度鞘层区域中升高，而 ϕ 在等离子体主体区较高，并朝电极和外侧径向壁方向降低。这些分布展示了轴对称几何结构中的等离子体主体区、鞘层区域及有限电极边缘效应。

图 4 展示了从均匀初始状态逐渐趋向周期性放电的演变过程。左图给出了周期变化度量，右图则显示了相位平均 n_e 和 T_e 相对于

本稿件仅供审阅。

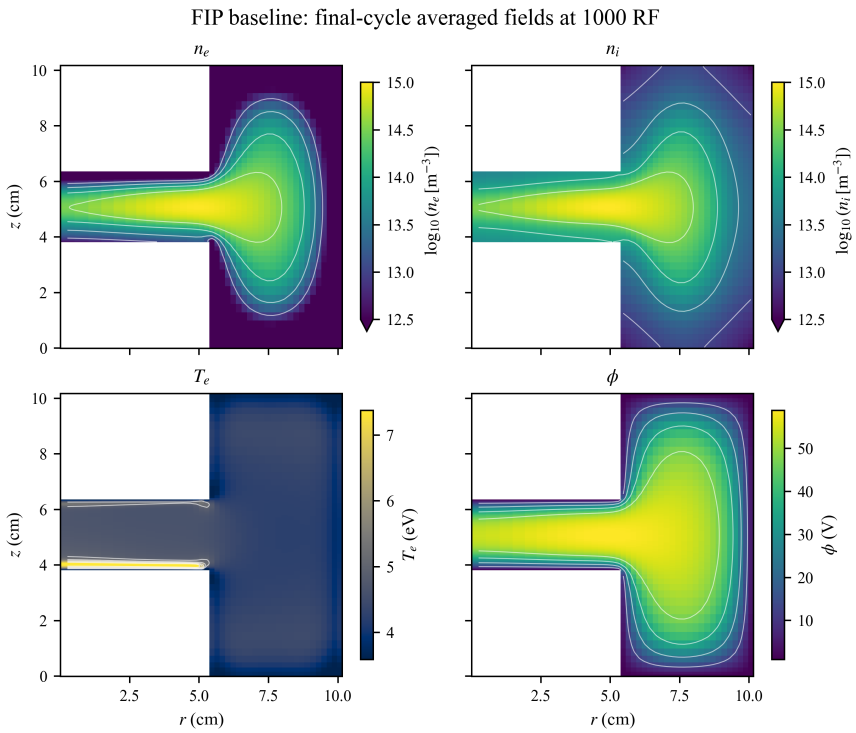

图3：使用 FIP、SparseLU 和 $\Delta t = 2.46 \times 10^{-10}$s 获得的最后一个射频周期（1000 个射频周期）内的十相平均值： n_e、 n_+、 T_e 和 ϕ

1000 个射频周期时的状态的归一化变化。随着放电的发展， n_e 增大，而 T_e 在初始瞬态期间经历了主要调整。随后，周期变化度量逐渐减小。收敛度量 R_{main}定义为相邻且不重叠的 20 个射频周期区块之间，监测诊断量的最大相对变化。这些诊断量表征了 n_e、 n_+、 T_e 以及 T_e的空间分布。在最后 20 个射频周期内，$R_{\mathrm{main}} = 7.96 \times 10^{-6}$，表明解已趋近周期状态。因此，后续数值比较采用 1000 个射频周期时的状态作为基准方案。

图 5 通过展示 10、100、200、500 和 1000 个射频周期时的相位平均轴向分布，呈现了相同演变过程的空间分辨视图。 n_e、 n_+ 和ϕ 在最初的 100 个射频周期内变化显著，之后的变化则逐渐减小。到 500 个射频周期时，这四种场分布已接近 1000 个射频周期时的结果，这与图 4中周期变化量逐渐减小的趋势一致。

5.1.2. 时间步长敏感性与可接受的时间步长。为比较数值格式的时间分辨率，我们考察其时间步长敏感性以及在较大时间步长下的表现，包括规定的仿真时间区间的完备性和数值修正。对于十相采样场

此稿件仅供审阅。

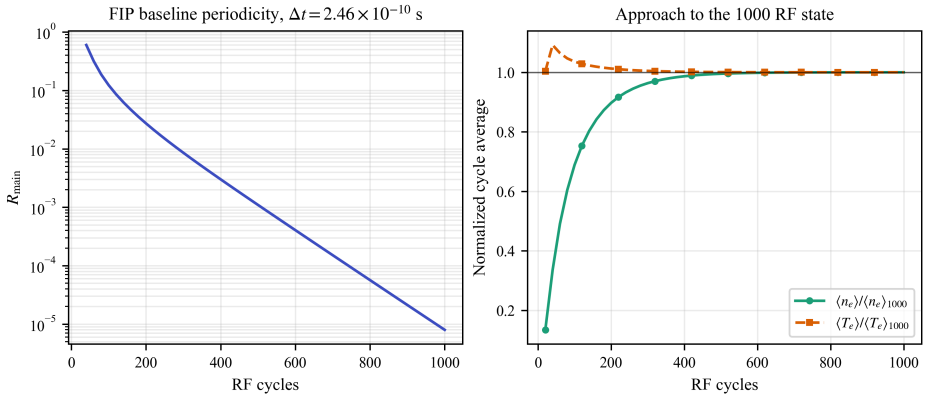

图 4：FIP 参考计算演进至 1000 个射频周期

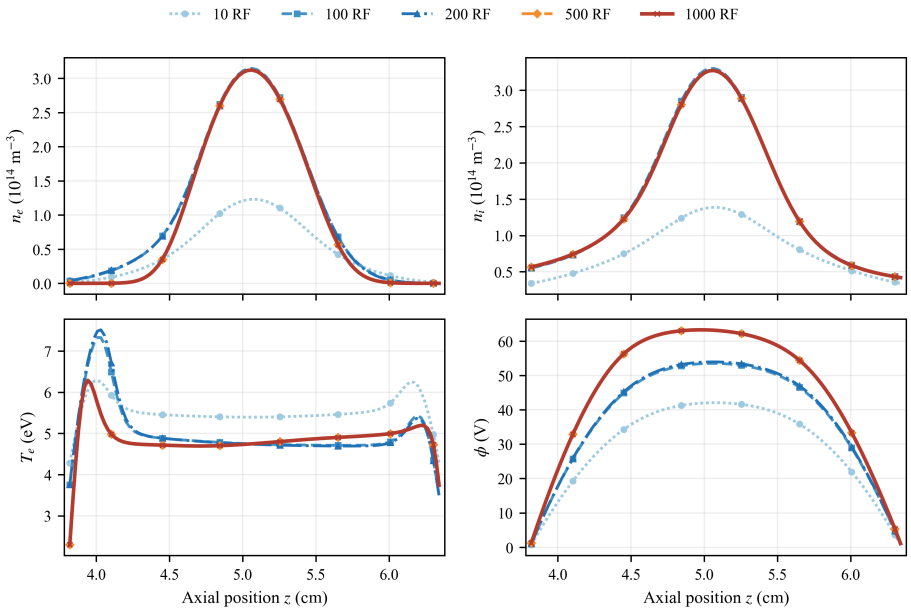

图 5：沿同一连续参考轨迹，在 10、100、200、500 和 1000 个射频周期时的相位平均轴向分布，包含 FIP

$q \in \{\phi, n_e, n_+, T_e\}$，轴对称体积加权相对差定义为 a s

$$E_q(\Delta t) = \sqrt{\frac{\sum_i w_i \left(q_i(\Delta t) - q_i(\Delta t_{\mathrm{fine}})\right)^2}{\sum_i w_i q_i(\Delta t_{\mathrm{fine}})^2}}, \tag{5.1}$$

其中 w_i 是单元的体积 i。（5.1）中，Δt_{fine} 表示相同方案下最细的时间步长，并非经过独立验证的参考解。

表4比较了三种方案的时间步长敏感性。误差以百分比表示。当场差异

此稿件仅供审阅。

表4：与同方案下最精细的可用比较器相比的轴对称体积加权差异

方案	Δt (s)	E_ϕ	E_{n_e}	E_{n_+}	E_{T_e}	判定
FIP	4.92×10^{-10}	8.320	2.724	1.295	10.753	$> 5\%$
	3.84×10^{-10}	8.283	2.578	0.994	10.788	$> 5\%$
	3.07×10^{-10}	8.262	2.481	0.755	10.812	$> 5\%$
	2.46×10^{-10}	0.059	0.506	0.503	0.060	符合 5% 标准
	1.23×10^{-10}	–	–	–	–	比较器
FIP–SG–EFC	4.92×10^{-10}	8.677	2.633	1.011	13.254	$> 5\%$
	3.84×10^{-10}	8.647	2.497	0.731	13.336	$> 5\%$
	3.07×10^{-10}	8.626	2.419	0.537	13.395	$> 5\%$
	2.46×10^{-10}	0.069	0.349	0.333	0.115	符合 5% 标准
	1.23×10^{-10}	–	–	–	–	比较器
FEPL	9.00×10^{-12}	0.616	5.137	4.967	66.378	诊断
	4.50×10^{-12}	0.00198	0.00706	0.00674	0.00081	符合 5% 标准
	2.25×10^{-12}	–	–	–	–	比较器

四个相对差异的最大值不超过 5% 时，认为测试时间步长满足该标准。对于两种隐式格式，满足该标准的最大测试时间步长为 $\Delta t = 2.46 \times 10^{-10}$s；相对于各自时间步长为 1.23×10^{-10}s 的最精细比较器， FIP 的最大差异为 0.506%， FIP–SG–EFC的最大差异为 0.349%。在 $\Delta t = 3.07 \times 10^{-10}$ s 时，这些最大值分别增至 10.81% 和 13.40%，主要是由于 T_e的差异。 n_e 和 n_+ 的差异仍低于 3%。因此，在这些较大的时间步长下， T_e 对时间分辨率更加敏感。

对于 FEPL，满足相同判据的最大时间步长为 4.50×10^{-12}秒，相对于 2.25×10^{-12} 秒的最大差异为 0。0071%。将时间步长增大至 9.00×10^{-12} 秒，会使 T_e 中的差异升至 66。4%。按照目前对场差异的判据，两种隐式格式所用的时间步长约为 FEPL的 55 倍。然而， FEPL的长期计算需要对电子能量下限进行修正。记录的活跃单元修正比例约为 7.4×10^{-5}，累计增加的能量约为 3.68×10^{-10} 焦耳。场差异与数值修正分别报告，因为时间步长结果一致并不意味着没有进行数值干预。

全局加权差异可能会掩盖电极附近的局部偏差。因此，图6 比较了 n_e 和 T_e的最终周期平均轴向剖面，并放大显示了 n_e 下电极附近的区域以及 T_e 上电极附近的区域。 FEPL列展示了 $\Delta t = 4.50 \times 10^{-12}$ 和 2.25×10^{-12}秒时完成的 1000 个射频周期结果。对于两种隐式格式，当 $\Delta t = 2.46 \times 10^{-10}$ 秒和 1.23×10^{-10}秒时，主体区的剖面几乎重合。局部差异集中在高梯度鞘层区域。当 $\Delta t = 4.92 \times 10^{-10}$秒时，偏差延伸至 n_e 和 T_e的峰值。

图7 展示了不同数值格式和时间步长下对应的相位平均 n_e 。尽管 n_e 的等值线在测试的各个时间步长下总体上相似，但图6 中的轴向分布显示，在电极附近的高梯度区域，尤其是鞘层周围，局部差异更加显著。表4 中的定量差异也表明，相似的整体空间结构可以与显著的场差异并存。因此，时间敏感性不仅体现在全局场量指标上，也体现在局部鞘层区域剖面中。 FEPL 这一行报告了三种不同状态。 $\Delta t = 9.00 \times 10^{-12}$呈现了

本稿件仅供审阅。

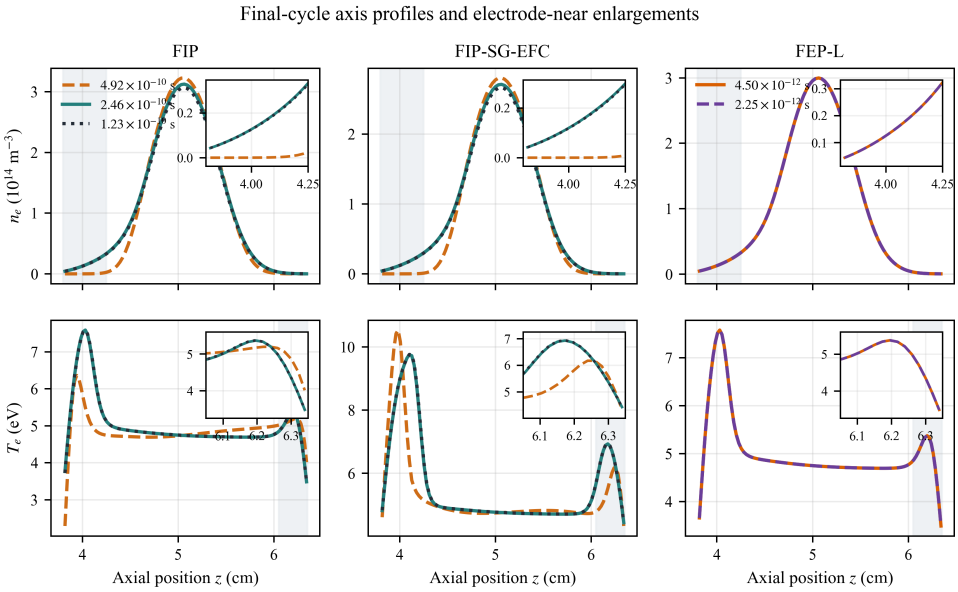

图 6：不同时间分辨率下的最终周期平均轴向剖面

表 5：隐式格式的大步长压力测试

方案	Δt (s)	结果	触发校正的更新（%）
FIP	9.2183×10^{-9}	已完成	1.65%
FIP	1.8437×10^{-8}	已完成	10.21%
FIP	3.6873×10^{-8}	已完成	61。86%
FIP–SG–EFC	9.2183×10^{-9}	已完成	3。81%
FIP–SG–EFC	1.8437×10^{-8}	第 2 步发生可容许性失效	–

较大的四场差异，因此被保留用于诊断；而具有 $\Delta t = 4.50 \times 10^{-12}$ 和 2.25×10^{-12} 的情况则提供了完整的 1000 个射频场，并构成长时间比较。

为考察较大时间步长下的数值行为，我们对这两种隐式格式分别进行了 100 个射频周期压力测试。 表 5 列出了最终边界附近的代表性点。触发数值修正的网格单元更新所占比例，按限制器被记录的激活次数除以活动单元的更新次数计算。在 $\Delta t = 9.2183\times10^{-9}$s 时，两种隐式格式均完成了规定的 100 个射频周期，修正比例分别为 1.65%（对应 FIP）和 3.81%（对应 FIP–SG–EFC）。

随着时间步长增大，各方案表现出不同的数值行为。FIP–SG–EFC 在第二个时间步、时间为 $\Delta t = 1.8437 \times 10^{-8}$s 时未能通过电子能量可容许性检查。在同一时间步， FIP 完成了 100 个射频周期，但其活动单元的更新中有 10.21% 触发了数值修正。在 $\Delta t = 3.6873\times10^{-8}$ s 时，这一比例达到 61.86%，且 $R_{\text{main}} = 0.881$，表明该方案在很大程度上依赖数值修正，并且仍存在显著的周期间变化。

本稿件仅供审阅。

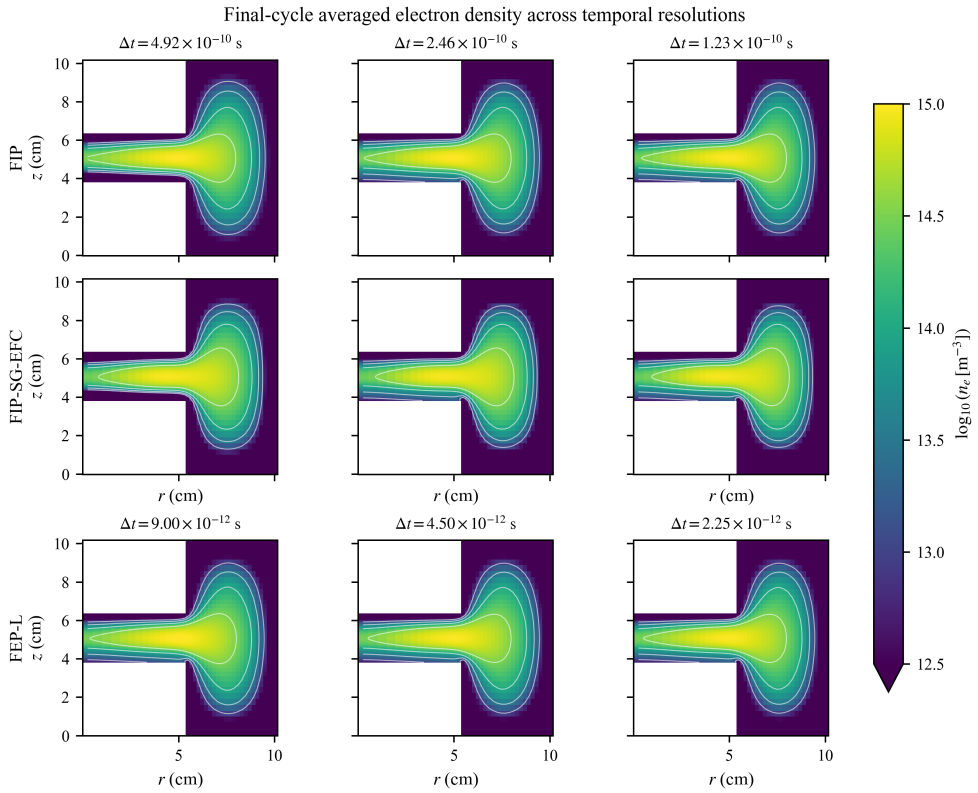

图 7：不同时间步长下最后一个周期的相位平均 n_e

5.1.3. 物理解与计算成本。按照上一小节对时间步长的选择，图 8和图 9比较了各方案在满足场差异判据的时间步长下，经过 1000 个射频周期后的相位平均场。如图 4和图 5中基准方案的演化所示，推进至 1000 个射频周期可减小初始瞬态的影响，并为比较后期放电场提供统一的模拟时长。FEPL 采用 $\Delta t = 4.50 \times 10^{-12}$s，而隐式格式采用 $\Delta t = 2.46 \times 10^{-10}$s。三种方案均产生相似的 n_e主体结构，而轴向分布显示 T_e 的鞘层峰值更高，适用于 FIP–SG–EFC。由于完整方案在粒子通量离散和电子能量处理方面也存在差异，这些差异反映了不同离散格式的综合影响，不能仅归因于显式与隐式时间推进之间的比较。

在相同选定时间步长下，图 10 给出了三种方案的计算成本。为排除节点间差异，每种方案都在同一节点上使用一个固定的 CPU 核心和相同的线程配置运行 10 个射频周期。记录的时间分别为 219.07、21.68 和 23.61 秒/射频周期。在这些候选分辨率下，两种隐式格式的吞吐量分别约为 .11 和 9.28 倍于 FEPL。隐式时间步长约为 FEPL 的 55 倍，大幅减少了每个射频周期所需的时间步数。尽管每步的平均计算成本更高，

本稿件仅供审阅。

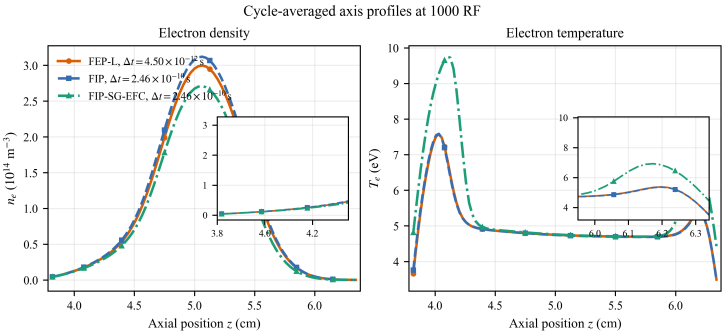

图 8：采用各方案，在 1000 个射频周期时的相位平均轴向 n_e 和 T_e 分布 's 满足场差判据的时间步长

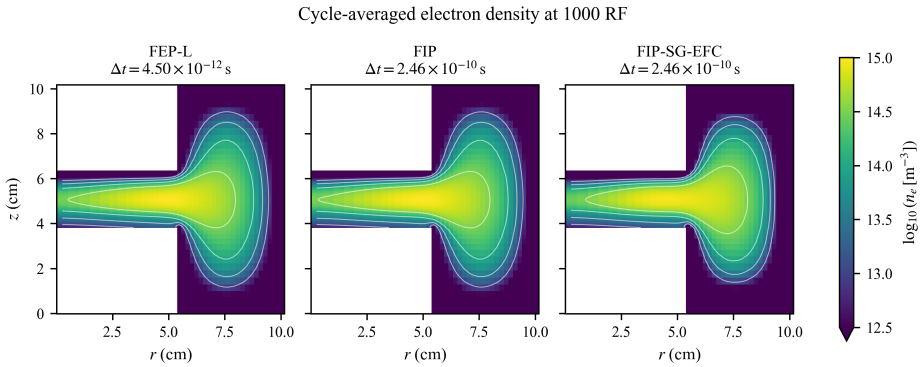

图 9：采用各方案满足场差判据的时间步长，在 1000 个射频周期时的相位平均 n_e

隐式格式每个射频周期的总成本仍然更低。在计时区间内，FIP–SG–EFC未对电子能量进行下限修正，而 FEPL和 FIP分别进行了 55744 次和 1760 次修正。

5.2. 线性求解器的精度。为评估线性求解器对计算得到的等离子体场的影响，三种计算均采用 FIP–SG–EFC，并从 1000 个射频周期结束时的同一状态开始，继续计算 20 个射频周期，时间步长为 $\Delta t = 2.46\times10^{-10}$s。求解器分别为 SparseLU、ILU-GMRES 和 ILU-sGMRES。两种迭代求解器采用相同的 ILU 预条件子，重启维数为 $d = 50$，原线性系统的残差容差为 $\tau = 10^{-10}$，$\|A\hat{x} - b\|_2/\max(1, \|b\|_2)$，其中 $\hat{x}$ 表示计算迭代值。sGMRES 正交化的局部窗口为 $k = 4$。三个求解器均完成了 20 个射频周期的计算区间，其最大真实线性残差分别为 1.53×10^{-15}、9.89×10^{-11} 和9.89×10^{-11}。

表6 比较了三种求解器之间相位平均的四场差异。ILU-GMRES 与 ILU-sGMRES 之间的最大四场差异仅为 0.194%。n_e、n_+、ϕ和 T_e 的差异分别为 0.1935%、0.1861%、0.0089% 和 0.0382%。相较于 SparseLU，n_e 和 n_+ 的差异为 4.259%

本稿件仅供审阅。

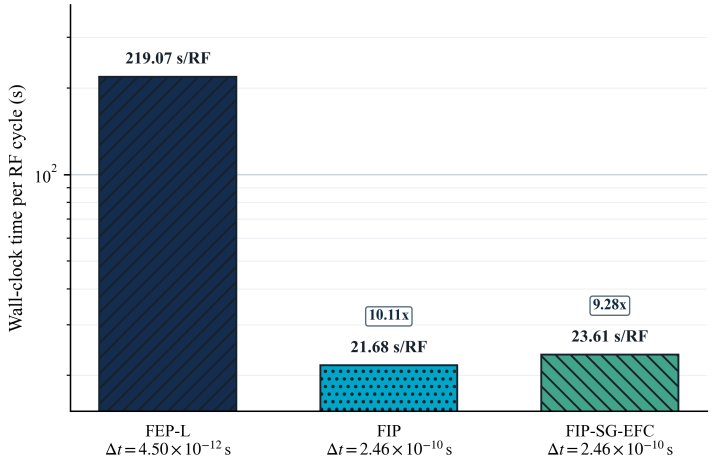

图10：同一计算节点上三种时间方案的计时

表6：从1000个射频周期的状态经过共同的20-RF延续后，相位平均场的轴对称体积加权差异（百分比）

比较	E_ϕ	E_{n_e}	E_{n_+}	E_{T_e}	最大值
GMRES-SparseLU	0.692	4.259	4.184	1.487	4.259
sGMRES-SparseLU	0.696	4.454	4.371	1.506	4.454
sGMRES-GMRES	0.0089	0.1935	0.1861	0.0382	0.1935

对于 ILU-GMRES，分别为 4.184%；对于 ILU-sGMRES，分别为 4.454% 和 4.371%。因此，在相同的预条件器和容差下，sGMRES 生成的等离子体场与 GMRES 得到的结果非常接近，而相较于直接求解器，两种迭代求解器所得的带电粒子密度差异更大。

图中轴向分布图11显示，三种求解器的空间结构相似，差异最明显之处在于 n_e 和 n_+ 的峰值附近，以及电极附近的 T_e 。在20-RF延续过程中，ILU-GMRES和ILU-sGMRES分别触发了1197次和1196次密度下限修正，而SparseLU未触发任何修正。未记录到其他标量下限修正。因此，两种迭代求解器表现出相似的场分布，且密度修正次数几乎相同。

5.3. 线性求解器的计算效率。在比较场分布（??）后，我们考察ILU-sGMRES相对于ILU-GMRES的计算效率。ILU-sGMRES旨在降低迭代过程中正交化和基存储的成本。重启维数 d也是重启前Krylov子空间的最大规模。增大 d 可以减少过早重启导致的停滞，但也会增加正交化和存储的成本。因此，我们比较 $d = 30$、50和60的情况。

三节点性能基准测试在相同的计算节点上进行，每个节点均配备一颗海光C86 7285 32核处理器。每个节点

本稿件仅供审阅。

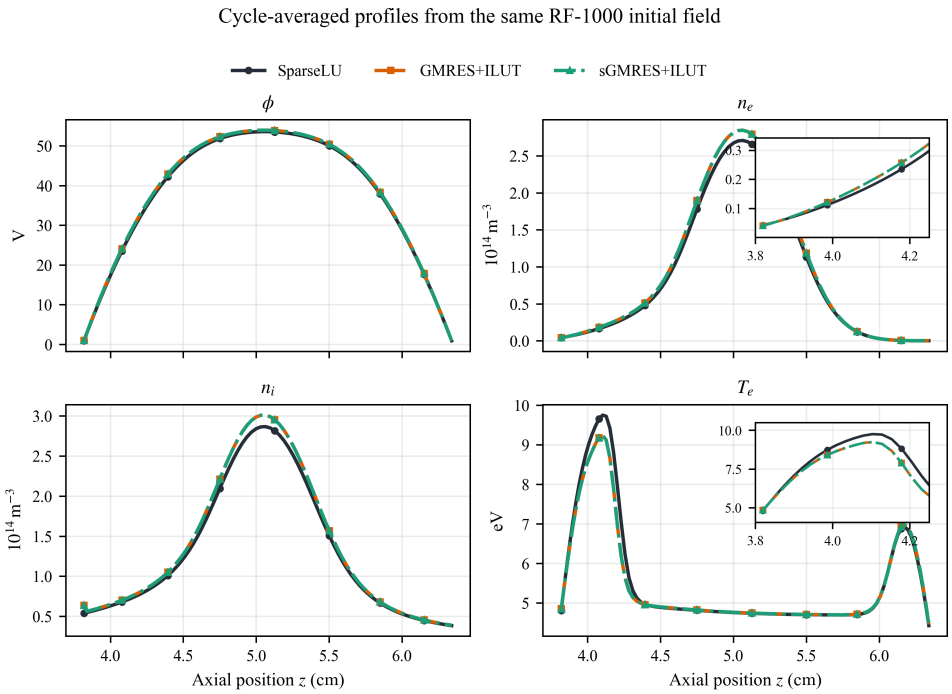

图11：使用 SparseLU、ILU-GMRES 和 ILU-sGMRES 获得的相位平均轴向分布

均使用固定在一个物理 CPU 核心上的单个进程和单个线程，依次执行完整的配置集合。为减少每个射频周期的时间步数及相关计算成本，我们采用较宽松的时间分辨率 $\Delta t = 7.37 \times 10^{-10}$s（每个射频周期 100 个时间步），约为??中所选时间步长的三倍。基准测试包含 SparseLU、ILU-GMRES 和 ILU-sGMRES，分别使用 $d = 30$、$d = 50$ 和 $d = 60$。每次计算均从相同的初始场开始，推进 100 个射频周期。全部 21 次计算均在线性求解器未发生故障的情况下完成，且其真实相对残差最大值不超过 10^{-10}。运行时间的减少量首先根据每个节点内的配对比较计算，然后求取三个节点上的均值和样本标准差。

表7 显示，在不同的 d 下，ILU-sGMRES 所需的运行时间少于 ILU-GMRES。当 $d = 30$ 为 50 和 60 时，运行时间分别减少 $2.88 \pm 2.45\%$、$8.65 \pm 1.62\%$ 和 11.71 ± 0.54 %，相应地。Krylov 阶段分别减少了 4.54%、14.96% 和 17.34%。尽管 ILU-sGMRES 的相对优势随着 d 增大而增加，但两种迭代求解器的总运行时间也随之增加。因此，测试配置中最快的是 $d = 30$ 的 ILU-sGMRES，所需时间为 6.805 ± 0.046 秒/RF，其相对于 SparseLU 的节点配对运行时间减少了 $21.22 \pm 7.45\%$。Krylov 阶段的降幅大于端到端运行时间的降幅，反映出 CCP 的每个时间步还包含其他操作。

在配备 Intel Core i5-10500H 处理器和 8GB 随机存取存储器的笔记本电脑上进行了独立的单机基准测试。该测试采用与集群基准测试相同的时间分辨率和时长，$\Delta t = 7.37 \times 10^{-10}$ s（100 步/射频周期）

本稿件仅供审阅。

表7：三个相同计算节点上运行100个射频周期的求解器墙钟时间（每个射频周期100步）。数值为三个节点的均值和样本标准差；降幅根据节点内配对比较计算。

求解器	重启 d	运行时间（秒/射频周期）	sGMRES降幅（%）
SparseLU	—	8.690 ± 0.813	—
GMRES	30	7.010 ± 0.184	—
sGMRES	30	6.805 ± 0.046	2.88 ± 2.45
GMRES	50	8.106 ± 0.042	—
sGMRES	50	7.404 ± 0.093	8.65 ± 1.62
GMRES	60	9.677 ± 0.141	—
sGMRES	60	8.543 ± 0.131	11.71 ± 0.54

表8：单台机器上 100 个射频周期的求解器墙钟时间（100 步/射频 ）

求解器	重启 d	运行时间（秒/射频）	sGMRES降幅（%）
SparseLU	—	7.737	—
GMRES	30	5.323	—
sGMRES	30	4.943	7.13
GMRES	50	8.064	—
sGMRES	50	6.160	23.62
GMRES	60	9.957	—
sGMRES	60	7.430	25.38

超过 100 个射频周期。表8 报告了每种配置单次运行的每个射频周期运行时间。在不同的 d 下，ILU-sGMRES 相较于 ILU-GMRES 将运行时间分别缩短了 7.13%、23.62% 和 25.38%。相对优势仍随 d 而增加，而最短运行时间出现在 $d = 30$ （4.943 s/射频周期）。由于两项基准测试均使用单个 CPU 核心，因此计算节点拥有更多核心在这些测试中并无优势。某些配置在笔记本电脑上的运行时间较短，可能反映了单核性能以及执行环境方面的差异。

表9 报告了在与 L_2 表8相同的本地100射频周期基准测试后，相对于SparseLU的未加权相对 场差异。不同于 ?? 中的 d 体积加权20射频周期比较，本测试将 d 设为30、50和60。将 n_e 从30提高到50后，ILU-GMRES的差异从17.91%降至9.48%，ILU-sGMRES的差异从18.41%降至9.65%，对于 n_+也呈现出类似趋势。进一步将 d 提高到60后，密度差异的变化较小。在每个重启维数下，ILU-GMRES和ILU-sGMRES相对于SparseLU均表现出相近的场差异，表明在本测试中，所观察到的运行时间缩短并未伴随明显的额外场偏差。

5.4. 不同运行条件下的鲁棒性。前述实验确定了数值方案的时间步长设置，并比较了 ILU-GMRES 和 ILU-sGMRES 的准确性与计算效率。接下来，我们评估结合 FIP–SG–EFC与 ILU-sGMRES 的配置在不同运行条件下的表现。施加电压、气体压力和

本稿件仅供审阅使用。

表9：独立局部 100-RF 比较中相对于 SparseLU 的未加权相对场差异（100 步/RF）

求解器	重启	n_e	n_+	T_e	ϕ
SparseLU	—	—	—	—	—
GMRES	30	17.91%	17。22%	1。48%	3.37%
sGMRES	30	18。41%	17.70%	1。48%	3。44%
GMRES	50	9。48%	9.09%	1.77%	1。19%
sGMRES	50	9.65%	9。26%	1.76%	1.24%
GMRES	60	9.18%	8.80%	1.79%	1。08%
sGMRES	60	9.18%	8.81%	1.78%	1。10%

驱动频率分别在 $V \in \{50, 100, 200\}$ V、 $p \in \{0.05, 0.5, 2\}$ 托和 $f \in \{6.78, 13.56, 27.12\}$ 兆赫兹的范围内变化，共有 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 种组合。参数范围涵盖电压相差四倍、压力相差 40 倍，以及从 6.78 到 27.12 兆赫兹的频率。范围内既包括低压力、低频率下放电可能熄灭的条件，也包括低压力、高电压下对电子能量可容许性构成挑战的情况。输运系数随压力缩放，同时保持约化系数不变。中性粒子密度计算如下：

$$N(p) = \frac{p}{k_B T_g},$$

其中迁移率和扩散的系数由下式给出

$$\mu_s(p) = \frac{(N\mu_s)_{\mathrm{ref}}}{N(p)}, \qquad D_s(p) = \frac{(ND_s)_{\mathrm{ref}}}{N(p)}.$$

以压力为 0.1 托时的情况为基准，压力为 0.05、0.5 和 2 托时，迁移率和扩散系数分别按 2、$_{1\ 5}$ 和 $_{1\ 20}$ 的因子缩放。因此，在不同运行条件下，输运系数随压力变化，但在每次模拟中，其空间和时间分布保持恒定。每种条件均从相同的初始状态推进至 1000 个射频周期。能够维持放电但尚未满足周期性判据的情况，将继续计算，直至连续三个 20 射频周期区间内达到 $R_{\mathrm{main}} < 5 \times 10^{-3}$，或达到 2000 个射频周期。此处， R_{main} 用于衡量相邻区间内各受监测诊断量之间的最大相对变化，定义如上。结果根据积分完成情况、放电持续性、周期性以及电子能量的可容许性进行分类，同时单独监测线性求解器的收敛情况。

表10 总结了27种运行条件下的结果。在这些条件下，25种完成了规定的积分，其中21种维持了放电，4种熄灭。在持续放电的情况中，17种在2000个射频周期内满足连续三个区间的周期性判据。其余四种情况出现在（200 V、0.5 托）和（50 V、2 托）下，二者均为 $f = 13.56$ 和 27.12 兆赫兹。它们的线性求解均已完成，但周期变化量的测度显示出缓慢振荡或趋于平台。另外两种情况出现在（200 V、0.05 托）下，且 $f = 13.56$ 和 27.12 兆赫兹；由于违反了.....条件，它们在第一个射频周期内便终止

此稿件仅供审阅。

表10：根据积分完备性、放电持续性和周期性对27种运行条件进行分类

判据	条件数量
积分已完成	25/27
持续放电	21/27
满足周期性判据	17/27
到第 2000 个射频周期时仍在持续，但不具周期性	4/27
放电熄灭	4/27
电子能量可容许性失效	2/27

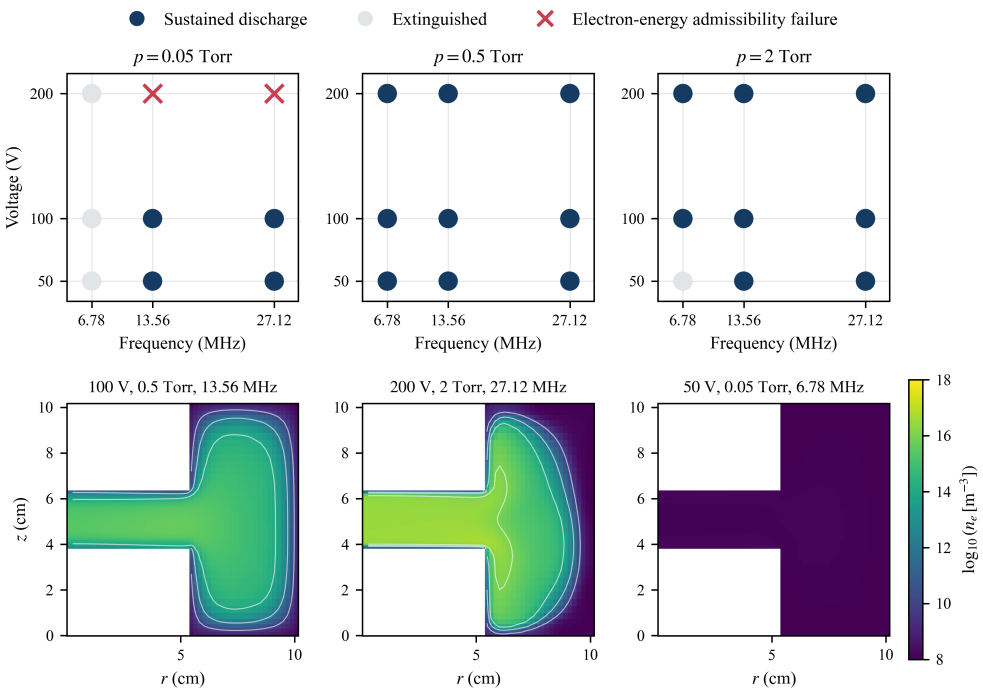

图 12：27 种电压-压力-频率条件下的放电响应

电子能量的可容许性。 图12展示了放电在电压-压力-频率矩阵中的响应，以及具有代表性的 n_e分布。放电熄灭主要发生在低压力、低频率条件下。在0.05 托下，提高驱动频率可使部分情况维持放电；而在电压为200 V时，13.56 和 27.12 兆赫兹下，电子能量的可容许性均遭到破坏。持续放电的情况保有明确的等离子体主体，而熄灭情况下的 n_e 低了几个数量级。结果表明，采用“FIP–SG–EFC +sGMRES”的组合配置能够适应多种放电响应，同时也表明，在所测试的低压力和高电压条件下，电子能量的可容许性构成一项限制。

本稿件仅供审阅。

6. 结论。 本文提出了一种轴对称框架，用于在结构化非均匀圆柱网格上模拟 CCP-2D GEC。泊松方程采用半隐式 Scharfetter-Gummel（SG）格式，而连续性方程和电子能量方程则采用隐式 SG 格式。我们还展示了采用传统漂移-扩散项的显式/隐式格式。对于模拟中产生的大规模线性方程组，我们采用随机化 ILU-sGMRES。与 ILU-GMRES 相比，该方法通过避免全局正交化瓶颈，在重启值相对较大时实现了更高的计算效率。数值基准测试表明，与传统 ILU-GMRES 相比，ILU-sGMRES 可将端到端墙钟时间最多缩短 25.38%，同时将最大等离子体场相对差异限制在仅 0.194%。数值实验考察了不同格式和求解器的性能，以及 ILU-sGMRES 在模拟中的鲁棒性。

致谢。 作者声明不存在利益冲突。Zhenyu Zou 和 Haoran Guan 对本研究的贡献相同，并列为共同第一作者；Kangxin Liu 和 Yufeng Wei 为共同通讯作者。我们衷心感谢香港理工大学的 Zhonghua Qiao 教授在本研究过程中给予的宝贵支持与帮助。

参考文献

[1] L. L. Alves and L. Marques, *Fluid modelling of capacitively coupled radio-frequency discharges: A review* 54 2012 124012, , Plasma Physics and Controlled Fusion, （），第 https: //doi.org/10.1088/0741-3335/54/12/124012 页。[2] R. R. Arslanbekov and V. I. Kolobov, *Implicit and coupled fluid plasma solver with adaptive Cartesian mesh and its applications to non-equilibrium gas discharges*, Plasma Sources Science and Technology，30（2021年），第 045013 页，https://doi.org/10.1088/1361-6595/abeff4。[3] O. Balabanov and L. Grigori, *Randomized Gram–Schmidt Process with Application to GMRES* 44 2022 1450 1474 , SIAM Journal on Scientific Computing, （），第 A–A 页。[4] P. Belenguer and J. P. Boeuf, *Transition between different regimes of RF glow discharges*, Physical Review A，41（1990），第 4447–4459 页，https://doi.org/10.1103/PhysRevA.41.4447。[5] Z. H. Bi, Y. X. Liu, W. Jiang, X. Xu, and Y. N. Wang, *A brief review of dual-frequency capacitively coupled discharges* 11 2011 2 8, , Current Applied Physics, （），第 S–S 页，https: //doi.org/10.1016/j.cap.2011.07.002。[6] J. P. Boeuf, *Numerical model of RF glow discharges*, Physical Review A，36（1987），第 2782–2792 页，https://doi.org/10.1103/PhysRevA.36.2782。[7] J. P. Boeuf and L. C. Pitchford, *Two-dimensional model of a capacitively coupled RF discharge and comparisons with experiments in the Gaseous Electronics Conference reference reactor* 51 1995 1376 10 1103 , Physical Review E, （），第 –1390 页，https://doi.org/ . /PhysRevE. 51.1376。[8] L. Burke, E. Carson, and Y. Ma, *On the numerical stability of sketched GMRES*, SIAM Jour- nal on Matrix Analysis and Applications，47（2026年），https://doi.org/10.1137/25M1744629，https://doi.org。[9] G. Chen and L. L. Raja, *Fluid modeling of electron heating in low-pressure high-frequency capacitively coupled plasma discharges* , , Journal of Applied Physics, （），第 –6085 页，https://doi.org/10.1063/1.1818354。[10] C. DeChant, C. Icenhour, S. Keniley, G. Gall, A. Lindsay, D. Curreli, and S. Shan-non, *Verification and validation of the open-source plasma fluid code: Zapdos*, Com- puter Physics Communications，291（2023），第 108837 页，https://doi.org/10.1016/j.cpc.2023. 108837。[11] E. Gogolides and H. H. Sawin, *Continuum modeling of radio-frequency glow discharges. I. theory and results for electropositive and electronegative gases*, Journal of Applied Physics，72（1992），第 3971–3987 页，https://doi.org/10.1063/1.352250。[12] M. J. Grote and T. Huckle, *Parallel preconditioning with sparse approximate inverses*, SIAM Journal on Scientific Computing，18（1997），第 838–853 页，https://doi.org/10.1137/ S1064827594276552。[13] D. P. Lymberopoulos and D. J. Economou, *Modeling and simulation of glow discharge plasma reactors* 12 1994 1229 1236, , Journal of Vacuum Science & Technology A, （），第 – 页，https://doi.org/10.1116/1.579300。

本稿件仅供审阅。

[14] Y. Nakatsukasa and J. A. Tropp, *Fast and accurate randomized algorithms for linear systems and eigenvalue problems*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，45（2024），第 1183–1214 页，https://doi.org/10.1137/23M1565413。[15] J. W. Ruge and K. Stüben, *Algebraic multigrid (amg)*，载于 Multigrid Methods，S. F. Mc- Cormick 编，第 3 卷，Frontiers in Applied Mathematics，Society for Industrial and Applied Mathematics，费城，1987年，第 73–130 页，https://doi.org/10.1137/1.9781611971057。ch4。[16] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*，Society for Industrial and Applied Mathematics（SIAM），费城，PA，美国，第 2 版，2003年，https://doi.org/10.1137/1. 9780898718003。[17] H. Sitaraman, N. Deak, and T. Taneja, *equilibrium plasmas on adaptive grids* 2025 10 48550 2507 08200, , , https://doi.org/ . /arXiv。 . https://arxiv.org/abs/2507.08200，https://arxiv.org/abs/2507.08200，版本 1。[18] J. Teunissen, *tion* 29 2020 10 , Plasma Sources Science and Technology，（），第 015010 页，https://doi.org/ . 1088/1361-6595/ab6757。[19] A. K. Verma and A. Venkattraman, *SOMAFOAM: An OpenFOAM based solver for continuum simulations of low-temperature plasmas*, Computer Physics Communications，263（2021年），第 107855 页，https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.107855。[20] D. Woodruff, *Sketching as a Tool for Numerical Linear Algebra*, 理论计算机科学基础与趋势，10（2014年），第 1–157 页。[21] D. Young, *Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type*, Transac- tions of the American Mathematical Society，76（1954年），第 92–111 页，https://doi.org/10. 1090/S0002-9947-1954-0059635-7。[22] Y. R. Zhang, X. Xu, A. Bogaerts, and Y. N. Wang, *Fluid simulation of the phase-shift effect in hydrogen capactively coupled plasmas: I. transient behaviour of electrodynamics and power deposition* 45 2012 015202, , 物理学杂志 D：应用物理，（），第 https: //doi.org/10.1088/0022-3727/45/1/015202 页。[23] Y. R. Zhang, X. Xu, A. Bogaerts, and Y. N. Wang, *Fluid simulation of the phase-shift effect in hydrogen capactively coupled plasmas: II. radial uniformity of the plasma characteristics* 45 2012 , 物理学杂志 D：应用物理，（），第 015203 页，https: //doi.org/10.1088/0022-3727/45/1/015203。

本稿件仅供审阅使用。