arXiv:2611.30227v1 [math.LO] 23 Nov 2026

$\mathbb{C}(t)$具有严格序性质

SPENCER DEMBNER 和 COLE FRANKLIN

摘要。设 $(E,\ P)$、$(E',\ P')$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的、带有标记 p-扭点的椭圆曲线；带标记同源是将 P 映射到 P'的同源。我们证明，带标记同源关系可在 $\mathbb{C}(t)$ 中解释，并且具有严格无限链。因此，$\mathbb{C}(t)$ 具有严格序性质，从而证实了稳定域猜想的一个特殊情形。

1. 主要定理

模型论中的一个核心问题是，其驯性条件如何与域理论相互作用。Macintyre [Mac71] 证明，无限域 $(K,\ +,\ \cdot)$ 在环语言中是 ω-稳定的，当且仅当 K 是代数闭的。Cherlin 和 Shelah [CS80] 后来证明，即使 K 仅是超稳定的，结论仍然成立。然而，我们目前尚无对稳定域的刻画。如果 K是可分闭的，那么 $(K,\ +,\ \cdot)$ 是稳定的；稳定域猜想预言，反之亦然。

域 $\mathbb{C}(t)$ 不是可分闭的，因此应当是不稳定的。但证明这一点一直十分困难，近年来 $\mathbb{C}(t)$ 已成为一个引人注目的测试案例。Johnson、Tran、Walsberg 和 Ye [JTWY24] 证明了 大域的稳定域猜想；这类域不包括 $\mathbb{C}(t)$，并提出 $\mathbb{C}(t)$ 可能是一般猜想的反例。$\mathbb{C}(t)$ 中确实存在许多有趣的可定义集合。例如，常数域 $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}(t)$ 是可定义的，因为一个正亏格曲线 $X/\mathbb{C}$ 没有非常数的 $\mathbb{C}(t)$-点。更引人注目的是，椭圆曲线的 **复乘** $\subseteq \mathbb{C}$ 不变量集合（即具有复乘法的椭圆曲线的 j-不变量）是 $\mathbb{C}$ 的一个可数稠密子集，并且是可定义的。但利用与 André-Oort 猜想相关的结果，Scanlon [Sca26] 证明了结构 $(\mathbb{C}, +, \cdot,$**复乘**$)$ 是稳定的（且是可判定的）。

我们的主定理消除了这一不确定性。

定理 1.1. 理论$\mathrm{Th}(\mathbb{C}(t))$是不稳定的。事实上，它具有严格序性质。

证明。本节中，我们描述一个关系 R，它见证了严格序性质，并证明它存在严格无限链。证明 R 可解释需要更加谨慎，因此推迟到下一节进行。

设 $p > 0$ 为素数，并考虑形如 (E, P) 的有序对，其中 $E/\mathbb{C}$ 是椭圆曲线，$P \in E[p]$是一个 p-扭点。按如下方式定义带标记同源关系 R：若存在一个同源，使得$R((E, P), (E', P'))$，则

$$f\colon E \to E', \qquad f(P) = P'.$$

我们将在下一节证明 R 可解释，并且显然 R 是自反且传递的。因此，我们只需给出一个严格无限链。令

$E/\mathbb{C}$是一个非复乘椭圆曲线，令 $\{P, Q\}$ 为 $E[p]$的一组基。记 $Q = Q_0$，并选取一个点列 Q_i，使得$pQ_{i+1} = Q_i$。令 $E_i = E/\langle Q_i \rangle$，并令 $P_i \in E_i[p]$ 表示 P的像。若 $i < j$，则典范投影映射 $\pi\colon\ E_i \to E_j$ 是一个带标记同源。反设

日期：2026年11月9日。

存在反向的带标记同源 f。那么，由于 E_i 不是复乘，复合映射

$$E_i \xrightarrow{\pi} E_j \xrightarrow{f} E_i$$

是乘法映射 $[n]$，其中某个 n。由于 $\deg(\pi)$ 是 p的倍数， n 也是p的倍数。因此 $[n]P_i = 0$，这与 π 和 f 是带标记同源这一事实矛盾。□

接下来要证明标记同源关系是可解释的。Scanlon [Sca26，第3] 节证明了未标记同源关系是可解释的，而且实际上还能得到更多：若 E_s， E_t表示具有 j-不变量 s 和 t的椭圆曲线，则可以一致地解释群

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_s, E_t) = E_t(\mathbb{C}(E_s))/E_t(\mathbb{C}).$$

如果同源的复合是可解释的，那么就可以解释非复乘椭圆曲线的自同态环 $\mathrm{End}(E) \cong \mathbb{Z}$。由此可知， $\mathbb{C}(t)$是不稳定的，甚至是不可判定的。不过，这是否可行尚不清楚：在这种情形下，同源表现为函数域值点，而不是可复合的映射。相反，我们将证明复合在“有限层级上”是可定义的：对于固定的 N，可以一致地解释这些映射

$$E[N] \to E'[N]$$

由同源诱导。这显然足以诠释标记同源关系。

备注 1.2. 要证明定理 1.1，只需在 2-挠点上诠释标记同源关系。可以直接利用 Legendre族上的坐标来做到这一点

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda),$$

但我们不打算进一步探讨。

未来方向。 关于 $\mathbb{C}(t)$，另一个长期悬而未决的问题是其理论是否不可判定，而目前看来，这里的方法不足以解决这一问题。Scanlon[Sca26, Question 5.5] 还曾提出，由单纯的同源关系生成的结构 $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathrm{Isog})$ 是否稳定；这个问题也仍未得到解答。

致谢 。 作者感谢 Ravi Vakil 和 Tom Scanlon 进行富有帮助的讨论 .

AI 声明。 GPT-6 Astra 找到了定理 1.1 的第一个证明。作者在第 2 节提出了“层结构”的观点，简化了证明的其他部分，并撰写了这篇论文。

2. 具有层结构的等ogeny

如果 $N \geq 3$ 是一个整数，那么 模曲线 $Y(N)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的代数簇。它是由二元组 (E, α) 构成的模空间，其中 E 是一条椭圆曲线，并且

$$\alpha \colon (\mathbb{Z}/N)^2 \xrightarrow{\sim} E[N]$$

将其 N-扭点平凡化。由于 $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}(t)$ 是可定义的，集合 $Y(N)(\mathbb{C})$ 是可定义的。存在一个万有族

$$\mathcal{E}(N) \to Y(N)$$

椭圆曲线在 $Y(N)$ 上，其在 (E, α) 上方的纤维是椭圆曲线 E，并且存在典范截面 $Y(N) \to \mathcal{E}(N)$，它们一致地平凡化挠子群 $E[N]$。

命题 2.1。令 a 和 b 遍历 $Y(N)(\mathbb{C})$。存在一个一致可解释的阿贝尔群族 $H_{a,\,b}$，表示 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_a, E_b)$，且映射

$$E_a[N] \to E_b[N]$$

由$H_{a,b}$ 的元素所诱导的是一致可定义的。

我们将在本节末证明命题 2.1。我们首先需要以下引理，它表明凝聚层在一个域上给出可定义族。

引理 2.2. 若 X 是域 k上的代数簇，且 $\mathcal{F}$ 是 X上的相干层，则纤维

$$\{\mathcal{F}(x) : x \in X(k)\}$$

是向量空间的一致可解释族。若 $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$是凝聚层的 $\mathcal{O}_X$-线性映射，则

$$\varphi(x) : \mathcal{F}(x) \to \mathcal{F}'(x)$$

是 k-线性映射的一致可解释族。若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{O}_X$-代数的相干层，则 $\mathcal{A}(x)$ 是 k-代数的一致可解释族。

证明。首先, 设 $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ 是一个仿射簇。那么存在一个整体表示

$$\mathcal{O}_X^n \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X^m \to \mathcal{F} \to 0.$$

映射 f 由一个矩阵 A 表示，其元素是在 x上的多项式函数，而纤维 $\mathcal{F}(x)$ 是 $A(x)$ 的余核。这表明这些纤维构成一个可解释族。若$\mathcal{F}'$ 是另一个相干层，那么它同样具有一个表示

$$\mathcal{O}_X^{n'} \to \mathcal{O}_X^{m'} \to \mathcal{F}' \to 0,$$

由于 X 是仿射的，映射 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 可以提升为映射 $\mathcal{O}_X^m \to \mathcal{O}_X^{m'}$。该映射是多项式的，因此诱导映射 $\mathcal{F}(x) \to \mathcal{F}'(x)$ 是 k-可解释的。

若 X 是一个一般簇，那么它有一个由仿射簇 U_i构成的有限开覆盖，其中带有 k-可定义过渡函数。先前的论证表明，纤维 $\mathcal{F}(x)$ 在每个 U_i上都是一致可解释的，而这些可定义过渡函数使得这些解释在交集上相容。如上所述，映射 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 在每个图表上都有多项式表示，并且这些表示为交集中点 x诱导出相容的映射 $\mathcal{F}(x) \to \mathcal{F}'(x)$。

关于代数结构的陈述可由前述情形应用于凝聚层 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ 以及乘法映射

$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. □得出。

引理 2.3. 设 X、Y 是定义在 $\mathbb{C}$上的簇，并设

$$f\colon Y \to X \times \mathbb{P}^1$$

是一个有限态射，其在 X 中各点上的纤维均为整曲线。函数域

$$\{\mathbb{C}(Y_x) : x \in X\}$$

构成了 $\mathbb{C}(t)$上的一致可解释域扩张族。每个 f-等变自同构 $\sigma \in Aut(Y)$ 都给出一个$\mathbb{C}(t)$上的一致可解释域自同构族。

证明。 由于 Spec($\mathbb{C}(t)$) 是 $\mathbb{P}^1$ 的泛点，存在一个自然映射

$$i\colon X \times_{\mathbb{C}} \operatorname{Spec} \mathbb{C}(t) \to X \times \mathbb{P}^1.$$

由于 f 是有限的， $i^*f_*\mathcal{O}_Y$ 是 $X \times_{\mathbb{C}} \operatorname{Spec}\mathbb{C}(t)$ 上的相干层。 根据引理 2.2，其纤维

$$(i^*f_*\mathcal{O}_Y)(x), x \in X(\mathbb{C})$$

构成一个一致可解释 族。由于 f 是有限的，我们有如下拉回图 :

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Spec}\mathbb{C}(Y_x) & \longrightarrow & Y_x & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \operatorname{Spec}\mathbb{C}(t) & \longrightarrow & \{x\}\times\mathbb{P}^1 & \longrightarrow & X\times\mathbb{P}^1 \end{array}$$

但 f 也是仿射态射，因此我们有

$$i^*f_*\mathcal{O}_Y(x) = \mathbb{C}(Y_x).$$

类似地，由于一个 f-等变的 $\sigma \in \mathrm{Aut}(Y)$ 给出一个自同构 σ： $i^*f_*\mathcal{O}_Y \to i^*f_*\mathcal{O}_Y$，引理 2.2 给出了一个自同构的一致可解释族 $\sigma(x)$： $\mathbb{C}(Y_x) \to \mathbb{C}(Y_x)$。□

命题 *2.1* 的证明。假设 $N > 2$. 考虑模曲线 $Y(N)$，以及泛椭圆曲线 $\mathcal{E}(N) \to Y(N)$。令 (P, Q) 为由层结构给出的 $E[N]$ 的指定基。于是存在一个典范映射

$$\mathcal{E}(N) \to Y(N) \times \mathbb{P}^1.$$

事实上，除以 $[-1]$ 得到一个映射到 $Y(N)$ 上的 $\mathbb{P}^1$-丛，该丛通过将 (O, P, Q) 映至 $(0, 1, \infty)$ 而平凡化。此映射是适当的且具有零维纤维，因此是有限的。与乘以 N 的映射复合，得到映射

$$\mathcal{E}(N) \xrightarrow{[N]} \mathcal{E}(N) \to Y(N) \times \mathbb{P}^1,$$

对所有由 N-挠点给出的平移都保持等变性。根据引理 2.3，我们可以将这一族中的域 $\mathbb{C}(E)$ 一致地解释为 $\mathbb{C}(t)$ 的扩张，并且可以一致地解释由 $P \in E[N]$ 的平移所产生的域自同构 σ_P。

现在取 $a, b \in Y(N)(\mathbb{C})$，并将 $f \in E_b(\mathbb{C}(E_a))$ 视为一个映射 $f: E_a \to E_b$. 如果 σ_P 是由点 $P \in E_a[N]$ 的平移所产生的自同构，而 f 是作为 f 的 $E_b(\mathbb{C})$-平移所产生的唯一同态，那么我们有

$$\sigma_P(f) - f = \overline{f}(P) \in E_b(\mathbb{C})[N] \subseteq E_b(\mathbb{C}(E_a)).$$

令 $H_{a,\,b} = E_b(\mathbb{C}(E_a))/E_b(\mathbb{C})$，我们得到所需的映射 $H_{a,\,b} \to \mathrm{Hom}(E_a[N], E_b[N])$. □

推论 2.4。对于 $a, b \in Y(N)(\mathbb{C})$，带标记同源关系 $R((E_a, P_a), (E_b, P_b))$ 是可解释的。

参考文献

[CS80] Gregory L. Cherlin 和 SaharonShelah。“超稳定域与群”。载于：《数学逻辑年刊》18.3（1980），第 227–270 页。doi：10.1016/0003-4843(80)90006-6。

[JTWY24] Will Johnson 等。“étale-开拓扑与稳定域猜想”。载于：《欧洲数学学会杂志》26.10（2024），第 4033–4070 页。doi：10.4171/JEMS/1345。

[Mac71] Angus Macintyre. “域的 ω_1-范畴理论”。载于：《基础数学》71.1 (1971), 第 1–25 页。

[Sca26] Thomas Scanlon. “ $\mathbb{C}(t)$中某些复杂结构的可判定性”。载于：《符号逻辑杂志》(2026)。已接收稿，2026年10月30日在线发表。doi: 10.1017/jsl.2026.10279。