arXiv:2611.30228v2 [nucl-th] 24 Nov 2026

库仑诱导的 K^-pp分子态

T. Massimino，Z. Papp加利福尼亚州立大学长滩分校物理系，加利福尼亚州长滩，邮编 *90840*

J. R´evai匈牙利布达凯西，邮编 *H-2092*

J.-M. Richard里昂第一大学，里昂双无限物理研究所，*IN2P3-CNRS*，恩里科·费米街 *4* 号，法国维勒班

N.V.Shevchenko *捷克科学院核物理研究所 捷克共和国 *25068 Řež*

(2026年11月25日)

我们研究了一个由一个反 kaon 和两个质子组成的三体系统中的新束缚态。该态主要由 K^- 与两个质子之间的库仑相互作用诱导，并受到强K^-p 和 pp 相互作用的修正。这种空间范围较大的分子态，其结合能和宽度在千电子伏特量级；相比之下，人们广泛研究的准束缚 K^-pp态主要由强相互作用引起，其结合能和宽度则达数十兆电子伏特。

PACS 编号：11.80.Jy,13.75.Jz,21.45.-v

I. 引言

双体反 kaon-质子 K^-p系统是一个值得关注的实验研究系统，其强相互作用和库仑相互作用均具有吸引性，并且各自都能单独支持（准）束缚态。这两种相互作用通常被分别处理，但在自然界中，强相互作用和库仑相互作用是同时发挥作用的。 Λ(1405)共振通常被认为是反 kaon 与核子通过强相互作用形成的准束缚态。在 Λ(1405)的计算中，库仑相互作用通常被忽略。带负电的 K^- 与带正电的质子之间的纯库仑吸引会导致一种奇异原子——kaonic 氢原子的形成。尽管强 KN 相互作用在 kaonic 氢原子中起次要作用，但这种相互作用会使最低原子能级发生位移，并赋予其非零宽度。这些位移已经得到测量，并被用于研究强反 kaon-核子相互作用。

由于反 kaon-核子强相互作用具有吸引性，人们认为三体 KNN 系统和其他少体反 kaon 核系统 [1]中可能存在准束缚态。人们进行了许多理论计算，大多聚焦于最轻的 K^-pp系统。由于计算方法和二体输入不同，预测的准束缚态结合能和宽度差异很大。这些理论预测仅对该准束缚态的存在达成一致

在 K^-pp 系统中。

首次对 $I = 1/2$、 $J^\pi = 0^-$ 系统中的准束缚态进行了Faddeev计算，该态对应于粒子表象中的$KNN - \pi\Sigma N$，这些计算发表于文献 K^-pp–文献 [2–4]。最近对该系统进行的Faddeev计算 [5] 采用三个耦合道 KNN、 $\pi\Sigma N$和 $\pi\Lambda N$，分别以能量无关和能量相关的唯象势以及手征动机势 $KN - \pi\Sigma - \pi\Lambda$ 作为输入。

几项实验暗示了强 K^-pp 准束缚态可能存在，而最近 J-PARC 的 E15 实验 [6] 报告了 KNN准束缚态的首个明确信号。参考文献 [5] 中使用其中一种 KN 相互作用模型得到的理论结果，在准束缚态的结合能和宽度两方面均与实验结果一致；而其他理论预测往往低估了 K^-pp 态的宽度。

通常认为，强相互作用诱导的 K^-pp 态中的库仑相互作用相较于结合能只会带来很小的修正，因此通常将其忽略。然而，众所周知，任何 $m^\pm M^\mp M^\mp$系统都会受到库仑力的束缚，而与质量比 M/m [7]无关。因此，类比于二体 K^-p 情形， K^-pp 系统可以支持一种主要由带负电的 K^- 与两个带正电的质子之间的库仑相互作用诱导的束缚态。强反 kaon–核子相互作用和核子–核子相互作用预计将在这一“分子” K^-pp 态中发挥次要作用，使最低能级发生位移并产生有限宽度，这与 K^-p 系统的情况非常类似。

本文致力于分析 K^-pp 系统中的这一三体“分子”态。针对 $m^\pm M^\mp M^\mp$中库仑相互作用与短程势相结合的三体离子，相关研究相对较少。关于具有超长程和短程相互作用的三体系统的初步研究包括[8, 9]。本文利用库仑-斯图姆基函数基中的Faddeev方程研究 K^-pp 系统，并将强相互作用和库仑相互作用直接纳入考虑。

* shevchenko@ujf.cas.cz

第二节致力于描述三体系统的 K^-p 二体子系统。第三节介绍求解三体问题的方法，第四节讨论三体能量的收敛性。第五节给出并讨论所得结果，随后在第六节总结。

II. THE K^-p 二体（子）系统

反 kaon-核子相互作用模型通常根据（反）kaonic 氢原子的 $1s$ 能级位移和宽度、 K^-p截面以及阈值分支比进行拟合。关于 K^-p 截面的数据相当陈旧且不准确。阈值分支比更加精确，但仅有三项。关于反 kaonic 氢原子的最新数据由 SIDDHARTA 合作组测得 [10]。在文献 [5], 中，构造了不同的 $V_{\bar{K}N}$ 势，其中包含$KN-\pi\Sigma-\pi\Lambda$ 耦合道，并且都能同样良好地再现这些实验数据。它们是具有 Λ(1405)共振单极点或双极点结构的唯象势，以及具有双极点结构的手征驱动势。在本文中，我们使用复数单项可分势对 S波强 K^-p相互作用进行建模

$$v^{K^-p} = |f\rangle\,\lambda\,\langle f|\,, \tag{1}$$

采用 Yamaguchi形状因子 [11], , 其在动量空间中的定义为

$$\langle \mathbf{k}|f\rangle = (k^2+\beta^2)^{-1}, \tag{2}$$

在构型空间中的定义为

$$\langle \mathbf{r}|f\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-\beta r}}{r}. \tag{3}$$

这一强度常数为 $\lambda = -2.460 - i\,0.537\ \ ^{-2}$ Λ 1405 飞米的势，能够重现文献 [5] 中单极点三通道唯象势$V^{1,\ \mathrm{SIDD-A}}_{\bar{K}N-\pi\Sigma-\pi\Lambda}$ 的 ( ) 结合能，且程参数$\beta = 3.95$与其相同，为 $^{-1}$ 飞米。

K^-p 系统的双体束缚态能量是齐次 Lippmann-Schwinger 方程的解，

$$|\psi\rangle = g_l^C(\varepsilon)v^{K^-p}|\psi\rangle, \tag{4}$$

其中， $g_l^C(\varepsilon)$为库仑格林算符， l 为角动量。利用可分离势（式 1）和形状因子（式 2），可以精确求解式（4）。由于我们使用库仑–斯特姆–刘维尔（CS）表象 [12–15], 进行三体计算，因此也使用CS表象求解了 K^-p体系的二体方程，并将二体结果与精确结果进行了比较。

构型空间中的CS基定义为

$$\begin{aligned}\langle r|nl;b\rangle &= \left(\frac{n!}{(n+2l+1)!}\right)^{1/2} e^{-br}(2br)^{l+1}L_n^{(2l+1)}(2br)\\ \langle r|\widetilde{nl;b}\rangle &= \langle r|nl;b\rangle/r,\end{aligned} \tag{5}$$

其中， $L_n^{(\alpha)}$为伴随拉盖尔多项式， b为一个参数。CS 态满足双正交性和完备性关系，

$$\langle nl;b|\widetilde{n'l;b}\rangle = \delta_{nn'}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}|\widetilde{nl;b}\rangle\langle nl;b| = 1, \tag{6}$$

并构成 l 角动量道中的一组基。

在这种求解方法中，我们将势近似为

$$v^{K^-p} \approx \sum_{n,n'=0}^{N}|\widetilde{nl;b}\rangle\,\underline{v}^{K^-p}\,\langle\widetilde{n'l;b}|\,, \tag{7}$$

其中 $\underline{v}^{K^-p} = \langle nl;\ b|v^{K^-p}|n'l;\ b\rangle$。含有 $l=0$ Yamaguchi形状因子的势的 CS 矩阵元可以写成闭式

$$\underline{v}^{K^-p} = \lambda\,\langle n0;b|f\rangle\,\langle f|n'0;b\rangle \tag{8}$$

with

$$\langle n0;b|f\rangle = 2\pi\sqrt{2(n+1)}b(\beta-b)^n/(\beta+b)^{n+2}. \tag{9}$$

这种势的近似使得 Lippmann–Schwinger方程（4）可以写成

$$|\psi\rangle = \sum_{n,n'=0}^{N} g_l^C(\varepsilon)\,|\widetilde{nl;b}\rangle\,\underline{v}^{K^-p}\,\langle\widetilde{n'l;b}|\psi\rangle\,, \tag{10}$$

其中求和在有限的 N 处截断。作用于一组截断的左矢态 a $\widetilde{\ \ \ }$ $\langle ml;\ b|$后，Lippmann–Schwinger方程变为矩阵方程，

$$\underline{\psi} = \underline{g}_l^C(\varepsilon)\underline{v}^{K^-p}\underline{\psi}, \tag{11}$$

这实际上是一个齐次线性代数方程，其解由以下条件给出

$$\det\left((\underline{g}_l^C(\varepsilon))^{-1} - \underline{v}^{K^-p}\right) = 0, \tag{12}$$

with $g_l^C(\varepsilon) = \langle\widetilde{nl;b}|g_l^C(\varepsilon)|\widetilde{n'l;b}\rangle$ and $\psi = \langle\widetilde{nl;b}|\psi\rangle$.

在 CS基中，短程势的矩阵元很容易计算，至少可以进行数值计算；而对于 Yamaguchi形状因子，它们可以写成闭式。库仑格林算符的矩阵元可以用 ${}_2F_1$ 超几何函数 [15, 16] 表示。

我们对双体 K^-p 体系的研究结果已在 [17] 中报告，涵盖实强相互作用势和复强相互作用势。表I列出了仅库仑相互作用和复仅强相互作用体系的能量，以及复强相互作用与库仑势体系的最低两个态中的

最低两个态。强相互作用诱导的准束缚态（ε_{1s}^{s+C}）对应于 Λ(1405)共振，而库仑相互作用诱导的原子态（ε_{2s}^{s+C}）对应于kaonic 氢原子的最低能级。图2展示了文献 [17], 中采用实势计算得到的这两个态的波函数，证实kaonic 氢原子的最低能级是 K^-p 谱的一个激发态，因为其在原点附近有一个节点。这两个态ε_{1s}^{s+C}和 ε_{2s}^{s+C}具有截然不同的长度尺度。

表I：采用仅库仑相互作用、仅强相互作用以及强相互作用与库仑势计算的 K^-p 系统二体能量 [17]。

系统	能级	二体能量	
仅强相互作用	ε_0^s	$-5.37-i\,33.50$	MeV
仅库仑相互作用	ε_{1s}^C	-8.64	keV
强相互作用 +库仑相互作用	ε_{1s}^{s+C}	$-7.68-i\,34.40$	MeV
	ε_{2s}^{s+C}	$-8.13-i\,0.25$	keV

在 K^-p系统中观察到了能级重排效应。通过逐渐改变强相互作用的强度参数，我们证明了仅库仑相互作用系统的 $1s$ 态和 $2s$态分别连续转变为Λ(1405)共振态和 kaonic 氢原子的最低态。

III. K^-pp三体系统

对于三体问题，我们在Jacobi坐标系 x_α, y_α中进行研究，其中 $\alpha = 1,2,3$，而 x_α是连接另外两个粒子 β和 γ的坐标， y_α 连接(β,γ)对的质心与 α。我们分别用3表示反核子，用1和2表示两个质子。

在 K^-pp 系统的低能量下，质子-质子子系统处于 S 波、同位旋三重态和自旋单重态。我们用MT-I Malfliet-Tjon势 [18]描述质子之间的强相互作用

$$v^{MT-I}(r) = -V_A\frac{e^{-\mu_A r}}{r} + V_R\frac{e^{-\mu_R r}}{r}, \tag{13}$$

其中 $V_A = 513.968$ 兆电子伏特飞米， $V_R = 1438.720$ 兆电子伏特 飞米，$\mu_A = 1.55$ 飞米$^{-1}$，以及 $\mu_R = 3.11$ 飞米$^{-1}$。完整的 pp 势v_3由排斥性库仑势与 MT-I 核势相加得到，

$$v_3(x_3) = v^C(x_3) + v^{MT-I}(x_3). \tag{14}$$

完整的 K^-p 势 v_1 和 v_2由吸引性库仑项与吸引性强相互作用势相加得到，

$$v_1(x_1) = v^C(x_1) + v^{K^-p}(x_1). \tag{15}$$

虽然 v^{K^-p} 是真正的短程势，但吸引性的库仑势同时具有长程和短程特征。一方面，由于它支持束缚态，因此它是短程势。另一方面，由于它会改变渐近运动并支持无穷多个束缚态，因此它又是长程势。我们将该势分割为短程部分和长程部分， $v_\alpha = v_\alpha^{(s)} + v_\alpha^{(l)}$。只要长程部分包含二体系统的正确渐近形式且不支持束缚态，这种分割的选择可以是任意的。这确保了Faddeev方程中不会出现伪解。我们采用Merkiev分割[19, 20],

$$\begin{aligned} v_1^{(s)}(x_1,y_1) &= v_1^C(x_1)\cdot\zeta(x_1,y_1) + v_1^{K^-p}(x_1),\\ v_1^{(l)}(x_1,y_1) &= v_1^C(x_1,y_1)\cdot[1-\zeta(x_1,y_1)], \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $\zeta(x,y) = 2/\left[1+\exp\left((x/x_0)^\nu/(1+y/y_0)\right)\right]$ 将三体构型空间中的势分隔开来。这里， $\nu > 2$、 x_0 和 y_0 的取值经过选择，以匹配系统的大小。长程势 $v^{(l)}$ 呈谷状；随着 $y\to\infty$，谷变得更宽、更浅，从而确保在该极限下不存在束缚态，因此也不存在二体渐近通道。

由于 pp 系统没有任何束缚态，整个 v_3 势都可以视为长程型。因此，不存在与之对应的渐近道，也无需为此构型 [21, 22]分配一个Faddeev分量。

三体哈密顿量表示为

$$H = H^{(l)} + v_1^{(s)} + v_2^{(s)}, \tag{17}$$

其中长程哈密顿量为

$$H^{(l)} = H^{(0)} + v_1^{(l)} + v_2^{(l)} + v_3. \tag{18}$$

这里， $H^{(0)}$ 是动能算符，而 $v_\alpha^{(l)}(x_\alpha)$和$v_\alpha^{(s)}(x_\alpha)$以及 $\alpha = 1,2$分别是粒子间的长程势和短程势。

因此，Faddeev分解写为

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle, \tag{19}$$

其中

$$|\psi_1\rangle = G^{(l)}(E)v_1^{(s)}|\Psi\rangle \text{ and } |\psi_2\rangle = G^{(l)}(E)v_2^{(s)}|\Psi\rangle, \tag{20}$$

with $G^{(l)}(z) = (z - H^{(l)})^{-1}$.

波函数的Faddeev分解导出一组耦合Faddeev积分方程

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= G_1^{(l)}(E)v_1^{(s)}|\psi_2\rangle\\ |\psi_2\rangle &= G_2^{(l)}(E)v_2^{(s)}|\psi_1\rangle, \end{aligned} \tag{21}$$

其中 $G_\alpha^{(l)}(z) = (z - H^{(l)} - v_\alpha^{(s)})^{-1}$。

粒子1和2是全同粒子。因此，Faddeev分量 $|\psi_1\rangle$和 $|\psi_2\rangle$在各自的自然Jacobi坐标系中具有相同的函数形式。因此，通过交换全同粒子$|\psi_2\rangle = p\mathcal{P}|\psi_1\rangle$，可以由 $|\psi_1\rangle$ 表示 $|\psi_2\rangle$ 。这里， $\mathcal{P}$ 是置换算符，而

$p = \pm 1$是 $\mathcal{P}$的特征值。这将Faddeev方程简化为一个方程，

$$|\psi_1\rangle = G_1^{(l)}(E) v_1^{(s)} p\mathcal{P} |\psi_1\rangle . \tag{22}$$

我们采用库仑-斯图姆基函数基表象 [23–25] 中的Faddeev方法求解三体问题。对于三体问题，适当的CS基是两个二体希尔伯特空间基的直积

$$\langle xy|n\nu\rangle_\alpha = \langle x|nl\rangle_\alpha \otimes \langle y|\nu\lambda\rangle_\alpha, \tag{23}$$

其中默认包含角动量耦合。式（22）的求解遵循与二体情形相同的思路。我们在三体基中将短程势近似为

$$|\psi_1\rangle = \sum_{n\nu n'\nu'}^{N} G_1^{(l)} |\widetilde{n\nu}\rangle_{11}\langle n\nu|v_1^{(s)} p\mathcal{P}|n'\nu'\rangle_{11}\langle\widetilde{n'\nu'}|\psi_1\rangle. \tag{24}$$

$\widetilde{\ }$与之前一样，我们从左侧作用 ${}_1\langle n''\nu''|$，得到一个矩阵方程，

$$\left(\left[\underline{G}_1^{(l)}(E)\right]^{-1} - \underline{v}_1^{(s)}\right)\underline{\psi}_1 = 0, \tag{25}$$

其中

$$\underline{v}_1^{(s)} = {}_1\langle n\nu|v_1^{(s)} p\mathcal{P}|n'\nu'\rangle_1 = p\cdot {}_1\langle n\nu|v_1^{(s)}|n'\nu'\rangle_2 \tag{26}$$

$$\underline{G}_1^{(l)} = {}_1\langle\widetilde{n\nu}|G_1^{(l)}|\widetilde{n'\nu'}\rangle_1 \tag{27}$$

$$\underline{\psi}_1 = {}_1\langle\widetilde{n\nu}|\psi_1\rangle. \tag{28}$$

我们可以通过在不同组的雅可比坐标 [15, 26] 之间变换 CS态，数值计算 ${}_1\langle n\nu|v_1^{(s)}|n'\nu'\rangle_2$ 。然而，计算 $G_1^{(l)}$ ${}_1\langle\widetilde{n\nu}|G_1^{(l)}|\widetilde{n'\nu'}\rangle_1$ 存在一些困难，因为它是一个相当复杂的三体哈密顿量的预解式

$$G_1^{(l)}(z) = (z - H_1^{(l)})^{-1}, \tag{29}$$

其中

$$H_1^{(l)} = H^{(0)} + v_1 + v_2^{(l)} + v_3. \tag{30}$$

这里，$H^{(0)} = h_{x_1}^{(0)} + h_{y_1}^{(0)}$是三体动能，可用任意一组Jacobi坐标中的二体动能表示。为计算 $G_1^{(l)}(z)$，我们引入另一个三体哈密顿量，

$$\tilde{H}_1(x_1, y_1) = h_{x_1} + h_{y_1}^{(0)}. \tag{31}$$

其中 $h_{x_1} = h_{x_1}^{(0)} + v_1(x_1)$。因此，

$$H_1^{(l)} = \tilde{H}_1(x_1, y_1) + v_2^{(l)}(x_2, y_2) + v_3(x_3). \tag{32}$$

由此关系可得预解方程，

$$G_1^{(l)}(z) = \tilde{G}_1(z) + \tilde{G}_1(z)(v_2^{(l)} + v_3)G_1^{(l)}(z). \tag{33}$$

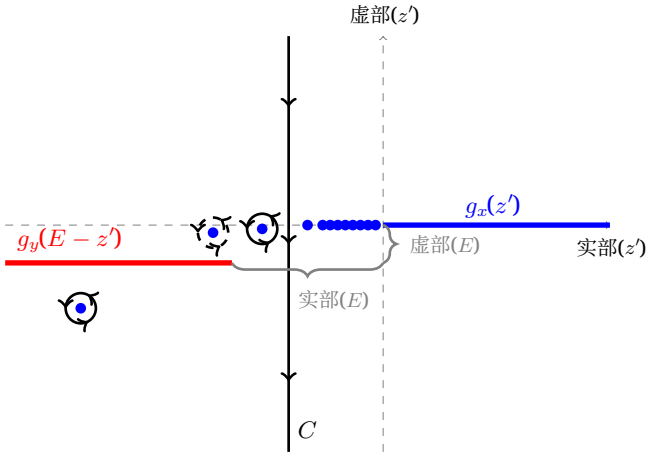


图1：卷积积分式（35）中使用的轮廓 C（黑色）示意图，它对应于三体分子态。g_x 的束缚态谱因复吸收势 v^{K^-p}而发生变形。该轮廓环绕 g_x 的谱（蓝色），但不穿过 g_y 的谱（红色）。g_x 最深的束缚态极点仍位于 g_y 的第一黎曼叶上，而第一个激发态极点则沉入 g_y 的第二黎曼叶中（虚线轮廓）。

为求解Faddeev方程，我们只需要基态之间的 CS 矩阵元 $|n\nu\rangle_1$。因此，最终得到

$$\underline{G}_1^{(l)}(z) = ((\underline{\tilde{G}}_1(z))^{-1} - \underline{U})^{-1}, \tag{34}$$

其中 $\underline{\tilde{G}}_1 = {}_1\langle\widetilde{n\nu}|\tilde{G}_1|\widetilde{n'\nu'}\rangle_1$ 和 $\underline{U} = {}_1\langle n\nu|(v_2^{(l)} + v_3)|n'\nu'\rangle_1$，后者可以通过数值方法求得。

三体哈密顿量 H_1 是两个作用于不同希尔伯特空间、彼此对易的二体哈密顿量之和。因此，其预解算子可以表示为两个二体格林算子的卷积积分 [15, 27]，

$$\tilde{G}_1(E) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C dz' g_y(E - z')g_x(z'), \tag{35}$$

其中，二体格林算子为 $g_x(z) = (z - h_x)^{-1}$和 $g_y(z) = (z - h_y^0)^{-1}$。选取轮廓 C 使其包围 $g_x(z)$ 的谱，且不穿过 $g_y(z)$ 的奇点（图1）。

K^-pp 系统的三体能量和宽度由复平面上弗雷德霍姆行列式的零点给出，

$$\det\left(\left[\underline{G}_1^{(l)}(E)\right]^{-1} - \underline{v}_1^{(s)}\right) = 0. \tag{36}$$

IV. N中三体能量的收敛性

在上述方法中，我们通过保留有限数量的角动量通道并截断库仑-斯图姆基函数基，来近似短程势

至 N。我们使用八个角动量通道，可以将三体纯库仑体系解析到四位有效数字，参见文献 [21]。鉴于 v^{K^-p} 势仅作用于$l = 0$角动量通道，八个角动量通道已经绰绰有余。

通常，如果选择 CS 参数 b，使其与态的有效尺度及相互作用的有效作用程相匹配，截断基组便能分辨该系统，从而使 N 快速收敛。然而，在 K^-pp 系统中，强相互作用和库仑相互作用所作用的长度尺度相差极大。因此，仅强相互作用系统和仅库仑相互作用系统的最优 b 参数相差极大。结果是，需要相当大的基组才能同时处理这两种相互作用。

如图 2a 所示，仅库仑相互作用系统的基态能量 E_0^C 在 N 中迅速收敛；选择 $b^C = 0.005$ 飞米 $^{-1}$ （空心方块）会构造出空间延展的基组。然而，这一基组无法分辨短程强相互作用，并会给出错误的二体强相互作用加库仑能谱 ε_i^{s+C}。因此，它不能用于计算组合系统。另一种选择是 $b^s = 6.0$飞米$^{-1}$ （空心三角形），它会构造出空间紧致基组，使仅强相互作用系统 E_0^s 和强相互作用与库仑相互作用系统 E_0^{s+C} 的基态能量迅速收敛（图 2b）。然而，它无法分辨空间延展的强相互作用与库仑相互作用激发态 E_1^{s+C}。能够正确重现二体能谱的 b 参数最小值为 $b^{s+C} = 0.2$飞米$^{-1}$ （实心圆）。这一中间参数能够分辨两种相互作用，尽管收敛较慢，但可用于计算组合系统 E_i^{s+C} 的能量。

不存在能使 E_1^{s+C}快速收敛的 b。虽然能量随 $b^{s+C} = 0.2$飞米$^{-1}$缓慢收敛，但我们注意到，仅库仑相互作用基态与库仑诱导分子态的能量差，

$$\Delta E_{01}^s = E_0^C - E_1^{s+C} \tag{37}$$

比能级本身更稳定，见图3。因此，我们可以通过将用 b^C 计算的仅库仑相互作用态能量与用 b^{s+C}计算的能量差相加，从两个已收敛的量之差得到强相互作用加库仑体系的激发态能量，

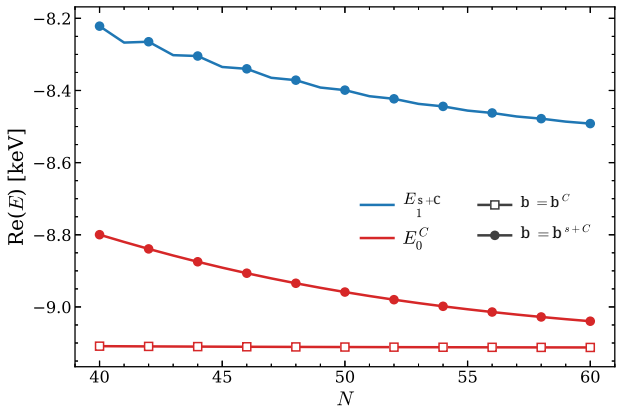
$$E_1^{s+C} \approx E_0^C|_{b=b^C} - \Delta E_{01}^s|_{b=b^{s+C}}. \tag{38}$$

我们可以采用类似的外推方法来获得基态态能量，

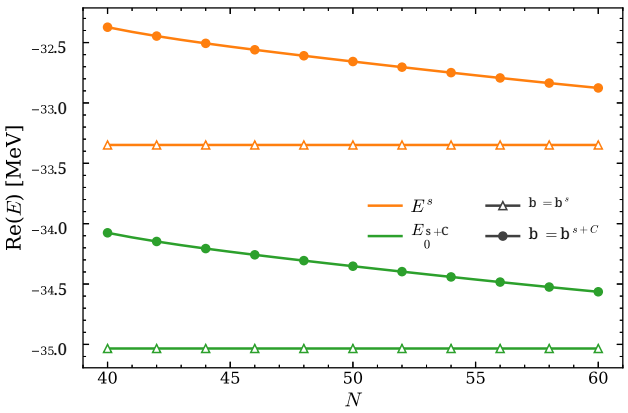
$$E_0^{s+C} \approx E_0^s|_{b=b^s} - \Delta E_0^C|_{b=b^{s+C}}, \tag{39}$$

其中，不含库仑相互作用与加入库仑相互作用后强相互作用诱导的准束缚态之间的能量差为

$$\Delta E_0^C = E_0^s - E_0^{s+C}. \tag{40}$$



（a）仅库仑相互作用系统的基态能量（红色）以及强相互作用与库仑相互作用系统的激发态能量（蓝色）。参数 b^C 不能用于后一个系统，因为它无法再现二体能谱。



（b）仅强相互作用系统的基态能量（橙色）以及强相互作用与库仑相互作用系统的基态能量（绿色）。

图 2： K^-pp 态三体能量实部的收敛性。使用中间CS参数 b^{s+C} （实心圆）计算时，所有态的收敛都较慢。然而， E_0^s 和 E_0^{s+C}使用b^s （空心三角形）时收敛很快，而 E_0^C使用 b^C （空心方块）时收敛很快。

V. 结果与讨论

表II列出了具有仅库仑相互作用（E_0^C）、仅强相互作用（E_0^s）以及强相互作用与库仑相互作用的组合相互作用（E_0^{s+C}和 E_1^{s+C}）的三体 K^-pp 系统的能量和宽度。三体能量 E_0^{s+C}和 E_1^{s+C}分别由公式（39）和（38）得到。

在计算同时考虑强相互作用和库仑相互作用的 K^-pp 系统时，我们发现了一个能量较低、寿命较短的态（E_0^{s+C}），它通常被称为“由强相互作用导致的准束缚K^-pp 态”；此外还发现了一个能量较高、长寿命的激发分子态（E_1^{s+C}）。

主要由强相互作用诱导的准束缚 K^-pp 态，其能量接近仅含强相互作用体系的基态能量

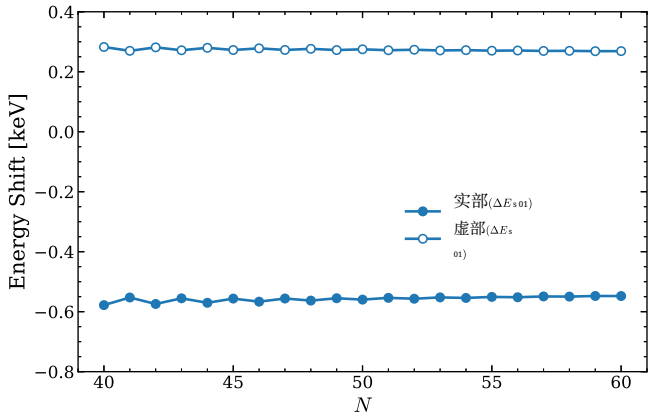


图3：能量差 ΔE^s_{01} 的实部（实心圆）和虚部（空心圆）的稳定性随 N的变化关系，计算时采用了 $b = b^{s+C}$。能量差比能量本身更稳定（图2a、2b）。

表II：采用仅库仑相互作用、仅强相互作用以及强相互作用与库仑势计算得到的 K^-pp 体系三体能量。

体系	能级	三体能量	
仅强相互作用	E^s_0	$-33.35 - i\,52.73$	MeV
仅库仑相互作用	E^C_0	-9.11	keV
强相互作用 +库仑相互作用	E^{s+C}_0	$-35.04 - i\,53.18$	MeV
	E^{s+C}_1	$-8.56 - i\,0.27$	keV

。这两个态之间的能量差为 $\Delta E^C_0 = (1.69 + i\,0.44)$ 兆电子伏特。 E^{s+C}_0态是受库仑相互作用扰动的 E^s_0 态，因此，ΔE^C_0是由库仑相互作用引起的位移。加入的相互作用使该态变得更宽、束缚更强。

同样，主要由库仑相互作用诱导的分子K^-pp 态，其能量接近仅库仑相互作用系统的基态能量，能量差为 $\Delta E^s_{01} = (-0.55 + i\,0.27)$ 千电子伏特。通常认为， E^{s+C}_1 态是受强相互作用扰动的 E^C_0态；但与二体 K^-p 系统类似，实际上它是相邻能级之间的差异，因为E^C_0是 K^-pp 系统的基态，而 E^{s+C}_1是激发态（参见文献 [17]）。

三体 K^-pp 系统中的能量变化与二体K^-p 系统中的能量变化相似。从表I可以看出，二体准束缚态与仅强相互作用态 $\varepsilon^s_0 - \varepsilon^{s+C}_{1s} = (2.31 + i0.90)$兆电子伏特之间的能量差，其绝对值更大，但方向上与三体位移 ΔE^C_0相似。原子 K^-p 态与库仑 $1s$态 $\varepsilon^C_{1s} - \varepsilon^{s+C}_{2s} = (-0.51 + 0.25i)$ 千电子伏特之间的差异，几乎与相应三体能级之间的能量差相同。通常认为，这一差异就是由反 kaon—核子强相互作用导致的 kaonic 氢原子的 [17], 能级位移。如参考文献 [17], 所示，实际上它是 K^-p 系统相邻能级之间的差异，因为 ε^C_{1s} 是基态，而ε^{s+C}_{2s}是激发态。

我们计算了仅强相互作用、强相互作用与库仑相互作用，以及仅库仑相互作用 K^-pp 系统基态的均方根半径。仅强相互作用系统和强相互作用与库仑相互作用系统的基态半径几乎相同，分别为 r^s_0 =0.92 飞米和$r^{s+C}_0 = 0.92$飞米。仅库仑相互作用态的半径$r^C_0 = 174$飞米则大得多。若假设强相互作用与库仑相互作用系统的激发态大小约与仅库仑相互作用系统的基态相同，即 $r^{s+C}_1 \approx r^C_0$，那么主要由强相互作用诱导的准束缚 K^-pp 态（E^{s+C}_0）就极为紧致，而主要由库仑相互作用诱导的分子态（E^{s+C}_1）则在空间上延展得远得多。

为验证外推方案，我们使用 b^s 直接计算了 E^{s+C}_0，并将其与表 II 中给出的数值进行比较。这些结果相差 $2.42 - i8.33$ 千电子伏特。该数值对应于差值 $\Delta E^C_0|_{b=b^{s+C}} - \Delta E^C_0|_{b=b^s}$，与数值 $\Delta E^C_0 = (1.69 + i\,0.44)$ 兆电子伏特相比可以忽略不计。这表明，尽管能量尚未收敛，位移已几乎收敛。我们无法对 E^{s+C}_1 进行类似比较，但公式（39）的准确性以及图3中所示 ΔE^s_{01} 的稳定性，支持使用公式（38）来获得库仑相互作用诱导分子态的能量和宽度。

在文献 [5], 中，研究者使用 Faddeev 型 AGS$^-$ 方程，计算了不含库仑相互作用的耦合 $KNN - \pi\Sigma N - \pi\Lambda N$ 系统中 K^-pp基态的结合能和宽度，并考察了不同的耦合道$^-$ $KN - \pi\Sigma - \pi\Lambda$ 势模型。下面简要讨论本研究与该工作的差异。最直接的比较对象是采用$V^{1,\ \mathrm{SIDD-A}}_{\bar{K}N-\pi\Sigma-\pi\Lambda}$ 耦合道势所得的结果，该势具有相同的程参数 β，并给出相同的 Λ(1405) 共振能量。文献 [5] 的表 V 中， K^-pp 态的结合能为 44。3 兆电子伏特，大于表 II 中 Re(E^s_0) 的绝对值。相比之下，对应的宽度为 91。4 兆电子伏特，小于 E^s_0 能量虚部的两倍。文献 [28] 及其中引用的文献$^-$已指出， KNN 系统中的耦合道动力学十分重要。主要差异在于三体计算中是否采用耦合道反 kaon-核子势。其他差异还源于采用了不同的核子-核子势，但文献 [29] 指出，$_NN$ 相互作用模型对 KNN 结果的影响很小。

VI. 结论

我们研究了主要由库仑相互作用引起的 K^-pp 分子态，以及同一系统中由“强”相互作用形成的准束缚态。我们在库仑–斯图姆–刘维尔基组中求解了 Faddeev–Merkuriev 积分方程，并在复能量

平面上定位了三体极点。库仑相互作用和强相互作用均被纳入考虑。我们用复数单项可分离势对 K^-p强相互作用进行建模，同时用 MT-I Malfliet-Tjon势对 pp 核相互作用进行建模。

主要由库仑相互作用诱导的分子 K^-pp态的结合能和宽度为千电子伏特量级，而主要由强相互作用诱导的准束缚 K^-pp态的结合能和宽度为几十兆电子伏特量级。三体 K^-pp系统中仅强相互作用基态与强相互作用加库仑相互作用基态之间的能量位移与二体 K^-pp系统中相应的能量位移相近，但二体系统中的能量位移绝对值更大。三体 K^-pp 系统中仅库仑相互作用基态与强相互作用加库仑相互作用激发态之间的能量差，与二体 K^-p 系统中的相应能量差几乎相同。主要由强相互作用产生的准束缚 K^-pp 态是极其紧致的基态，而分子态则是空间范围大得多的激发态。

[1] T. Yamazaki 和 Y. Akaishi, 《Physics Letters B》**535**, 70（2002）。[2] N. V. Shevchenko、A. Gal 和 J. Mareˇs, 《Physical Review Letters》**98**, 082301（2007）。[3] N. V. Shevchenko、A. Gal、J. Mareˇs 和 J. Revai, 《Physical Review C—Nuclear Physics》**76**, 044004（2007）。[4] Y. Ikeda 和 T. Sato, 《Physical Review C—Nuclear Physics》**76**, 035203（2007）。[5] N. V. Shevchenko, 《物理评论C》**112**, 064007（2025）。[6] S. Ajimura、H. Asano、G. Beer、C. Berucci、H. Bhang、M. Bragadireanu、P. Buehler、L. Busso、M. Cargnelli、S. Choi、等, 《Physics Letters B》**789**, 620（2019）。[7] R. N. Hill, 《Journal of Mathematical Physics》**18**, 2316（1977）。[8] J.-M. Richard 和 C. Fayard, 《Phys. Lett. A》**381**, 3217（2017）, arXiv:1609.09350 [cond-mat.quant-gas]。[9] H. Moriya、W. Horiuchi 和 J. M. Richard, 《SciPost Phys. Proc.》**3**, 051（2020）, arXiv:1911.05972 [nucl-th]。[10] M. Bazzi、G. Beer、L. Bombelli、A. Bragadireanu、M. Cargnelli、G. Corradi、C. Curceanu、C. Fiorini、T. Frizzi、F. Ghio、等, 《Physics Letters B》**704**, 113（2011）。[11] Y. Yamaguchi, 《Physical Review》**95**, 1628（1954）。[12] Z. Papp, 《物理评论C》**38**, 2457（1988）。[13] Z. Papp, 《物理评论A》**46**, 4437（1992）。[14] B. K´onya、G. L´evai 和 Z. Papp, 《Phys.Rev.》**C61**, 034302（2000）, arXiv:nucl-th/9908018 [nucl-th]。

[15] Z. Papp, 《量子力学精通》（施普林格，2026）。[16] F. Demir、Z. T. Hlousek 和 Z. Papp, 《物理评论A》**74**, 014701（2006）。[17] T. Massimino、N. V. Shevchenko、Z. Papp 和 J. Revai, arXiv 预印本 arXiv:2606.21261（2026）。[18] R. A. Malfliet 和 J. A. Tjon, 《核物理A》**127**, 161（1969）。[19] S. P. Merkuriev, 《物理学年鉴》**130**, 395（1980）。[20] L. D. Faddeev 和 S. P. Merkuriev, 《多粒子系统的量子散射理论》, 第 11 卷（施普林格科学与商业媒体，2013）。[21] Z. Papp、J. Darai、C.-Y. Hu、Z. T. Hlousek、B. K´onya 和 S. L. Yakovlev, Physical Review A **65**, 032725（2002）。[22] Z. Papp、J. Darai、A. Nishimura、Z. T. Hlousek、C.-Y. Hu 和 S. L. Yakovlev, 《物理学快报A》**304**, 36（2002）。[23] Z. Papp 和 W. Plessas, 《物理评论C》**54**, 50（1996）。[24] Z. Papp, 《物理评论C》**55**, 1080（1997）。[25] Z. Papp、C.-Y. Hu、Z. T. Hlousek、B. K´onya 和 S. L. Yakovlev, 《物理评论A》**63**, 062721（2001）。[26] R. Balian 和 E. Br´ezin, 《新物理学杂志B》（-）**()**。[27] L. Bianchi 和 L. Favella, 《新物理学杂志》（1955**34**, 1825 1965 1964 -）**()**。[28] N. V. Shevchenko, 《少体系统》**58**, 6（2017）。[29] N. V. Shevchenko, 《物理评论C》**85**, 034001（2012）。

403 1969 1965 1970 **61**,