arXiv:2611.30274v2 [math.CA] 24 Nov 2026

OpenAI 对局部平滑猜想的证明：一种调和分析视角

XIANGYU WANG

Abstract. 本文介绍 OpenAI 对波动方程欧几里得局部平滑猜想的证明。本文面向可能不熟悉四元数 Monge–Amp`ère 方程的调和分析学家。我们介绍四元数 Hessian，并说明相关的行列式方程如何导出临界环域估计。

1. Introduction

波动方程的解在较晚时刻可能远大于其在初始时刻的大小：一个起初分布在球面邻域中的波，可能会在中心附近聚焦。因此，固定时刻的 L^p 估计会损失导数。局部平滑问题探讨的是：在时间区间上对L^p 范数取平均时，这种损失能恢复多少。Sogge 在其关于圆形极大函数的研究中，于 [26, 第 4]节提出了欧几里得猜想。其联系在于，在高频下，半径为 t的圆上的弧长测度的傅里叶变换有两个主导相位 $\pm t|\xi|$，它们正是半波传播子的相位。

对于 Schwartz函数 f在 $\mathbb{R}^n$ 上，我们采用约定 $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx$，因此两个半波传播子为

$$e^{\pm it\sqrt{-\Delta}} f(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\cdot\xi \pm t|\xi|)}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

全文采用负号，因此相位为 $x\cdot\xi - t|\xi|$。由于$\underline{e^{it\sqrt{-\Delta}} f = e^{-it\sqrt{-\Delta}} f}$，正号情形也有相同的估计。

对于 $2 \le p < \infty$，Peral 的固定时间估计 [22] 需要 $(n-1)(1/2 - 1/p)$ 个导数。Sogge 猜想预言，当 $p \ge p_c = 2n/(n-1)$ 时，对时间取平均可获得近乎 $1/p$ 个导数的增益。为陈述这一结果，对于 $\varepsilon > 0$，令

$$\sigma_p := \max\left\{0, \frac{n-1}{2} - \frac{n}{p}\right\}, \qquad s_p := \sigma_p + \varepsilon,$$

并使用非齐次Sobolev范数$\|f\|_{W^{s,\,p}} = \|(1-\Delta)^{s/2} f\|_{L^p}$。

定理1.1（欧氏局部平滑）. 设 $n \ge 2$、 $2 \le p < \infty$ 和 $\varepsilon > 0$。对于 $\mathbb{R}^n$ 上的每一个 *Schwartz* 函数 f，

$$\left\| e^{-it\sqrt{-\Delta}} f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times [1,2])} \lesssim_{n,p,\varepsilon} \|f\|_{W^{s_p,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

在 $p = 2$ 处，可以取 $\varepsilon = 0$。

对于 $2 < p \le p_c$，定理只要求 ε 阶导数。对于 $p > p_c$，我们有$\sigma_p = (n-1)(1/2 - 1/p) - 1/p$，因此，与固定时间估计相比，时间平均可多获得 $1/p - \varepsilon$ 阶导数。

欧氏局部平滑猜想长期以来一直被视为调和分析中最重要且最困难的问题之一。它蕴含 Bochner–Riesz猜想 [8, 命题 39], ，正如 Sogge 已在平面情形中指出的那样 [26,(4.5)–(4.6)]。Tao [27] 证明了 Bochner–Riesz猜想蕴含傅里叶限制猜想，而后者又根据 Beckner、Carbery、Semmes 和 Soria 的工作蕴含卡凯亚猜想 [7]。

1.1. **关于局部平滑的早期工作**。Wolff [30] 将频率为 R 的锥面单位厚邻域分割成宽度为 $R^{-1/2}$ 的角扇区，并运用尺度归纳，将它们之和的 L^p 范数控制在各部分 L^p 范数之和的 ℓ^p倍以内，因子为 $R^{1/2-2/p+\varepsilon}$ 。这使得在两个空间维度下，对 $p>74$ 而言，可以获得所有低于 $1/p$ 的增益。 Laba 和 Wolff [18] 将此方法推广到了高维。随后，Bourgain 和 Demeter [9] 提出的尖锐锥面解耦定理，在每个维度下都为 $p\geq 2(n+1)/(n-1)$给出了猜想中的增益。

在两个空间维度下，Guth、Wang 和 Zhang [15] 通过证明 $\mathbb{R}^3$中锥面的反向 L^4 平方函数估计，达到了欧几里得临界指数 $p_c=4$ 。该估计将不同方向传播的波之和控制在其时空平方函数的范围内。结合平方函数关于初始数据的估计，便解决了二维猜想。

Gan、He、Li 和 Wu [13] 在奇数维紧黎曼流形上 $n\geq 3$达到了尖锐的局部平滑范围。他们将适用于洛伦兹重缩放的波包密度与精细解耦、广义估计以及两端约化结合起来。在偶数维中，作者 [29] 利用横向覆盖 L^2 估计改进了他们的方法。这些结果共同给出了所有低于 $1/p$ 的增益，适用于具有正锥曲率的傅里叶积分算子，包括紧黎曼流形上的半波传播子，范围为

$$p\geq\begin{cases}2+\dfrac{8}{3n-3}, & n\geq 3 \text{ odd},\\[2mm] 2+\dfrac{8}{3n-2-4/(n+1)}, & n\geq 4 \text{ even}.\end{cases}$$

1.2. **临界环域估计**。对于 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 和 $R\geq 2$，令 ϕ_R为如下定义的空间傅里叶乘子

$$\widehat{\phi_R f}(\xi)=\phi(\xi/R)\widehat{f}(\xi).$$

定理 1.2 （临界环域估计）。设 $n\geq 2$ 且 $p_c=2n/(n-1)$。对每个 $R\geq 2$,

$$\left\|e^{-it\sqrt{-\Delta}}\phi_R f\right\|_{L^{p_c}(\mathbb{R}^n\times[1,2])}\lesssim_{n,\phi}[\log(2+R)]^{2/p_c}\|f\|_{L^{p_c}(\mathbb{R}^n)}.$$

正号的情形仍可通过复共轭处理，此时 $\phi(\eta)$ 被替换为$\phi(-\eta)$，后者是同一类的截断函数。某种对数损失不可避免：对于适当的ϕ，第 3.5 节末尾回顾的 [21, 命题 8.1], 中的聚焦例子表明，定理 1.2 中的常数至少以 $(\log R)^{1/p_c}$ 的速度增长。

OpenAI 的证明 [21, 第 2–7 节和附录 A] 以定理 1.2 为核心。论证首先在固定的空间环面上进行，此时一个频率环带中包含有限个模态。随后回到 $\mathbb{R}^n$，与 L^2 及定时估计进行插值，并对各环带求和，以证明定理1.1。第 2 节介绍所需工具：由波构造的守恒流、四元数 Hessian 及其行列式和余子式，以及一个狄利克雷问题。

第 3 节将这些工具结合起来，证明这两个定理。

环域估计的证明分为三个部分，下面我们先作非正式的介绍。

一个守恒正张量。沿光线方向对波作虚位移，会在参与其中的频率上加上高斯权重，因此起到滤波器的作用，选出一个频率帽。位移通过波动方程的一个对称一阶形式来选取，并依赖于辅助变量；最终，每个 $n+1$ 时空坐标都对应两个实变量。由此，在扩大的空间上得到一个半正定矩阵场，即流，其各列关于物理变量和辅助变量共同无散。它的 tt分量，也就是时间坐标上的对角分量，测量滤波波的平方。平方是在滤波波相加之后计算的，因此流仍能检测到它们之间的干涉。从这个意义上说，我们下面基于流构造的能量是相干的。

纤维上的行列式方程。令 $\tau \in \mathbb{R}^2$ 为附属于 t的一对辅助变量，并将 $z = (t, \tau)$称为基点。位于 z上方的纤维由其余变量构成：空间点 x 以及附属于空间坐标的 $2n$ 个实辅助变量。在每个纤维的一个定义域上，我们求解 Monge–Amp`ère 方程，其右端为密度 μ的常数倍（即流的tt 分量）；在定义域的边界，也就是纤维壁上，数据为零。该方程中的海森矩阵是第 2.2 节所述的四元数 Hessian，其行列式在纤维上的次数为 n。未知量是对一个固定背景势的修正项 $u \le 0$；该背景势的海森矩阵秩为一，而我们将 $-u$ 称为深度。背景项提供行列式的 n个因子。其余的 $n-1$ 个因子将密度的局部下界 μ 转化为量级为 $\mu^{1/(n-1)}$的深度，差一个依赖于比较球大小的因子。将深度乘以密度得到 $\mu^{n/(n-1)}$，而纤维的能量就是这一乘积的积分。由于密度衡量的是平方波，这便是 $p_c = 2n/(n-1)$发挥作用的方式。

能量不等式与标量比较原理。 由于流在所有变量中均守恒，我们可以计算能量关于三个基变量的拉普拉斯算子 Δ_z。对能量进行修正后，可抵消一个符号不确定的项，即全海森矩阵的行列式。剩下的是一个符号有利的项，以及穿过纤维壁的通量；在纤维壁处，高斯函数很小。因此，修正能量F满足 $\Delta_z F \le V F$，其中有 $V = C|\tau|^{-2} e^{-cR|\tau|}$。在圆上 $|\tau| \asymp 1/R$，能量与给定时刻波的L^{p_c} 范数的 p_c 次方相当，差别仅在于一个归一化因子；而标量不等式的比较原理，则可用时刻 0 的能量控制时刻 $1 \le t \le 2$ 的能量。比较原理从半径 $|\tau| \asymp 1/R$ 向外延伸至半径 1，再返回。两个过程各付出一个对数因子，因为二维中的径向调和函数是半径对数的仿射函数。这两个对数因子出现在范数的 p_c次方估计中。

用更熟悉的术语来说，在辅助半径 $s = |\tau|$ 处，滤波器以角尺度 $(Rs)^{-1/2}$分辨频率方向。当 $s \asymp 1/R$ 时，这是一个固定尺度；而当 $s = 1$时，波包尺度为 $R^{-1/2}$。第3.4节将这些半径之间的转换与尺度归纳进行了比较。

OpenAI 方法之所以有效，一个可能的原因是它或许能比尺度归纳更精确地分析相干能量 方法所关注的

波的干涉。流是滤波波之和的二次函数，因此不同波之间的交叉项属于守恒量的一部分；参见第2.1节中关于干涉的注释。引理 3.2 的能量平衡是一个恒等式，而之后从中舍弃的唯一一项具有确定的符号。相比之下，尺度归纳通过一连串不等式将干涉从一个尺度传递到下一个尺度，而其中每个不等式都可能损失部分有关波之间相消的信息。

1.3. 一个真实模型。 定理 1.2 背后的机制有一个真实的先例，即塞尔的补偿可积性 [23]。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ 为一个有界凸区域，并设 $A = (A_{ab})$ 是 Ω 上取值于半正定对称$n \times n$ 矩阵的光滑场。其列散度是一个向量，其分量为

$$(\operatorname{Div} A)_b = \sum_{a=1}^{n} \partial_{x_a} A_{ab},$$

A各列的散度。假设 $\operatorname{Div} A = 0$。令$\mathbf{n}$ 为外单位法向量，它在 $\partial\Omega$ 的几乎每一点都存在。由 A 的对称性，向量 $A\mathbf{n}$ 的各分量就是各列的向外通量。我们记 $|A\mathbf{n}|$为其欧几里得长度，记 dS 为曲面测度，记 $\mathbb{B}^n = \{x : |x| < 1\}$，并记 $|\mathbb{B}^n|$ 为球的体积。塞尔证明了

$$\int_\Omega (\det A)^{\frac{1}{n-1}}\, dx \leq \left(\frac{1}{n|\mathbb{B}^n|^{1/n}} \int_{\partial\Omega} |A\mathbf{n}|\, dS \right)^{\frac{n}{n-1}}. \tag{1.1}$$

对于 $A = I$，这就是凸区域的尖锐等周不等式。“补偿”一词指的是微分约束所带来的增益：正性单独只能通过 $\operatorname{tr}(A)/n$ 控制 $(\det A)^{1/n}$，而列守恒则通过边界通量控制 (1.1) 中的更高次幂。

该证明将一个密度输运到一个球上。设 $g = (\det A)^{1/(n-1)}$。如果 $\int_\Omega g\, dx = 0$，则估计立即成立。否则，选取 $\rho > 0$，使得 $|\mathbb{B}^n|\rho^n = \int_\Omega g\, dx$，从而 Ω 上的测度 $g\, dx$ 与该球上的勒贝格测度具有相同的质量$\rho\mathbb{B}^n$。在所有将第一个测度推前为第二个测度的映射 T 中，*Brenier* 映射 使 $\int_\Omega |x - T(x)|^2 g(x)\, dx$达到最小。由于源测度具有密度，且两个测度的支集均有界，因此该最优映射存在；它相对于 $g\, dx$几乎处处唯一，并且等于某个凸函数 ψ [10]的 $\nabla\psi$ 。

我们对光滑的 ψ 和正的 g给出计算，并不讨论退化密度或边界迹的极限过程。将密度输运到密度一时的变量替换公式给出 $g = \det DT = \det D^2\psi$。这就是真正的 *Monge–Amp`ere* 方程，它规定了凸函数的海森矩阵的行列式。目标球限制了输运的大小，$|\nabla\psi| \leq \rho$。对 $A^{1/2} D^2\psi A^{1/2}$ 的特征值应用算术—几何平均不等式可得

$$g = (g \det A)^{1/n} = \big(\det(AD^2\psi)\big)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \operatorname{tr}(AD^2\psi).$$

由于 A 的列是无散的，$\operatorname{tr}(AD^2\psi) = \operatorname{div}(A\nabla\psi)$。对$\Omega$积分可得

$$n \int_\Omega g\, dx \leq \int_{\partial\Omega} \nabla\psi \cdot A\mathbf{n}\, dS \leq \rho \int_{\partial\Omega} |A\mathbf{n}|\, dS,$$

这就是 (1.1)，因为 $|\mathbb{B}^n|\rho^n = \int_\Omega g\, dx$。

第 3 节使用了同样的三个要素：一个列为无散列的正张量；一个 Monge–Amp`ere 势，其行列式可从张量中读出；以及一次分部积分，其内部项符号确定，而边界项是通量。该张量是第 2.1 节中的流，密度 $\mu$ 是它的 $tt$项，经过空间平均、截断函数和小的正则化后得到。势在每个纤维上满足一个四元数 Monge–Amp`ere 方程（第 3.1 节）；其中不涉及输运映射。分部积分对应于引理 3.2 的能量平衡，其中 Schur补分离出符号确定的内部项，而边界项则是穿过纤维壁的通量。指数的推导方式也相同：如果 A 与 μI可比，那么 (1.1) 左侧与$\int_\Omega \mu^{n/(n-1)}\,dx = \int_\Omega \mu^{p_c/2}\,dx$可比。

四元数论证与实数论证主要有两点不同。首先，它的守恒律适用于所有变量，而势则定义在纤维上。因此，在纤维上分部积分后，会留下能量关于三个基变量的拉普拉斯算子，于是估计变成一个微分不等式，并由第3.4节通过标量比较加以积分。其次，流与全海森矩阵的配对包含完整行列式，而后者没有固定符号。第 3.2 节中的能量修正项消除了它。

1.4. **阅读指南**。论证的核心包括引理 3.2、能量平衡以及命题 3.3、纤维估计。第 3.2 节中的一条注释在一个含两个实变量的模型中完成了能量平衡。初读时，以下内容可以先作为已知结论接受。

- 命题 2.1 以及公式 (2.4) 中流的 tt 分量。第2.1.2节的 Gram 行计算和命题的证明可以略过。第2.1.4节解释了欧几里得结构在何处发挥作用。
- 四元数线性代数：引理 2.2–2.4 以及边界恒等式 (2.6) 和 (2.7)。
- 狄利克雷问题。它仅通过定理 2.5 后列出的性质发挥作用，其中主要是引理 2.6 的比较原理。该定理的证明见附录 A。

引理 3.4 是一个针对标量椭圆不等式的比较论证，第3.4节则将其与尺度归纳联系起来。从环面到 $\mathbb{R}^n$ 的过渡（见第3.5节）以及第3.6节中的插值都是标准的。第3.5节末尾的聚焦例子检验了定理 1.2 中的对数项。

1.5. **人工智能披露**。 应作者要求，本文在准备过程中使用了 ChatGPT 和 Claude。它们扩充了相关材料的说明，以帮助调和分析学家理解可能不熟悉的内容；将论证中的相关部分与尺度归纳和波包联系起来；润色了行文，并添加了插图。

2. Preliminaries

记 $d = n - 1$。表1列出了主要记号。全文中，字母 i、j、k专用于表示四元数单位，坐标用 a、b进行索引，而坐标的实槽（见第2.1节）用 α、β进行索引。

2.1.**一种能保持波之间干涉的正流**。在本文中，流 是表示守恒律的矩阵场，按列表示：在实坐标中 X 方程为 $\sum_I \partial_{X_I} A^{\mathbb{R}}_{IJ} = 0$，对每个 J 都成立，其中

TABLE 1. 主要记号。

符号	含义
$R, \phi_{R}, p_{\sigma}, \sigma_{p}$	环频率、环乘子、临界指数以及定理1.1中的 Sobolev 阶数。
$_{\bar{x}}^{-t,}$	实零坐标 $(x_n \pm t)/\sqrt{2}$。
κ, v	频率 ξ 的锥坐标：$\kappa = (\xi_n + \lvert\xi\rvert)/\sqrt{2}$ 以及斜率 $v = \xi'/\kappa$。
$w_{\ell}, \widetilde{f}, \mathfrak{q}_{I}$	两个状态（$\ell = 1,2$）、平移系统解和四元数 Gram 行。
$\vartheta, \mathcal{J}_{\Theta}$	$r_0/\lvert r_0\rvert$ 的单位相位和 Θ的绝对实雅可比。
τ, P, Z	附属于 t、x' 和 x_n的辅助变量。
$Y, Z_{\rightarrow}, y$	辅助零坐标 $(Z \pm \tau)/\sqrt{2}$，以及 $y = \lvert\bar{Y}\rvert$。
W, Φ	角坐标 P/Y 和被动坐标。
A_{0}, A_{w}, A	波流、其光滑化及截断版本，以及正则化流。
G, H, C	编码梯度、四元数 Hessian 和 Moore 余子-tor.
g	狄利克雷问题中规定的行列式。
z, s	基点（t，τ）和辅助半径 $\lvert\tau\rvert$。
γ	频率帽 $\lvert v\rvert \le \gamma$ 的孔径。
K, a, Q, χ_0	大常数、纤维尺度 $a = K/R$、归一化坐标 nate Φ/a 及其截断函数。
$_{r}$、Ω_{z}	定义函数及纤维域 $\Omega_z = \{r < 0\}$ 上的 z.
$\mathcal{K}_{\delta}$	空间尺度 δ下的周期化平均核。
λ、μ、B_{0}、u	常数 R^{30n}、密度 A_{tt}、秩一背景势-能 $\lambda\lvert\Phi\rvert^2$ 和狄利克雷修正。
h, Σ	tt 全海森矩阵的元素和舒尔分解中的半正定余项。舒尔分解中的余项。
F_{0}、E、F、$\overline{F}$	原始能量、其修正项、能量 $F = F_0 + E$ 及其圆周平均。
M, Π	命题 3.3 的证明中的平均常数和平均剖面命题 3.3。
b	引理 3.4 中圆柱的内半径；$b = 2a$ 在应用中。
c_{0}、C_{0}、c_{wall}	墙处的环形支集常数和高斯衰减率。

导数既涉及辅助变量，也涉及物理时空。（德拉姆意义上的流，即作用于微分形式的分布，在此处不起作用。）

该构造始于对称双曲系统的二次通量，这是 Friedrichs [12]双线性通量的一种特殊情况。Kaiser 和 Streater [17]使用虚时空平移来分析波；Kaiser [16, 第 4.5 节，式 (36)–(40)] 为正能量克莱因–戈尔登波在物理时空中构造了一个守恒流。OpenAI [21, 第 2]节利用二次通量选择高斯滤波器，随后得到一个具有无散列的正张量，其定义域为

物理变量与辅助变量的组合空间。滤波器中使用的辅助变量也将用于定义纤维。

该构造分为三个步骤。首先，波动方程的矩阵符号在斜率方面提供了一个高斯截断。其次，我们构造一个正实矩阵，使其各列在物理变量和辅助变量的联合意义下具有零散度。第三，我们变换辅助坐标，使得每个物理坐标与两个实辅助坐标共同构成一个四元数坐标。我们将这三个实坐标称为四元数坐标的分槽。在新坐标中，矩阵的 tt项可直接描述为一个傅里叶乘子，而其他项则使我们能够将该项在一个纤维上与一个势进行积分。

2.1.1. 符号及其高斯函数。使用一个正交空间标架 $x = (x',\ x_n)$，其中 $x' \in \mathbb{R}^d$。在零坐标 $\bar{t} = (x_n + t)/\sqrt{2}$ 和 $\bar{x} = (x_n - t)/\sqrt{2}$ 中，波算子 $\Delta_x - \partial_t^2$ 变为 $2\partial_{\bar{t}}\partial_{\bar{x}} + \Delta_{x'}$。事实上，$\partial_{x_n} = (\partial_{\bar{t}} + \partial_{\bar{x}})/\sqrt{2}$ 以及$\partial_t = (\partial_{\bar{t}} - \partial_{\bar{x}})/\sqrt{2}$，因此这两个平方中的对角二阶导数相互抵消。

在补片 $\xi_n + |\xi| > 0$上，锥面有一个有用的参数化。 $x \cdot \xi - t|\xi|$ 中 $\bar{x}$ 和 $\bar{t}$的系数分别为 $(\xi_n + |\xi|)/\sqrt{2}$和 $(\xi_n - |\xi|)/\sqrt{2}$。根据锥面方程 $|\bar{\xi}|^2 = \xi_n^2 + |\xi'|^2$，将它们相乘得到$-|\xi'|^2/2$。因此，我们可以将一个模写成

$$u_{\kappa,v} = c_{\kappa,v}\exp\bigl(i\kappa(\bar{x} + v \cdot x' - \tfrac{1}{2}|v|^2\bar{t})\bigr), \qquad \kappa = \frac{\xi_n + |\xi|}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{\xi'}{\kappa}.$$

在轴 $\xi' = 0$附近， v 是锥面上的一个斜率坐标，而斜率之差与角距离可比。

现在我们将标量波写成一阶系统。其状态有 n个分量，分别由 ρ、$\sigma \in \{0, \dots, d\}$标记，而 $E_{\rho\sigma}$ 表示初等矩阵。令∂_a 表示零标架 $(\bar{t}$、 x'、 $\bar{x})$中第 a 个坐标方向的导数。对称系统 $\mathcal{P} = \sum_a \mathsf{C}^a\partial_a$ 的系数为

$$\mathsf{C}^{\bar{t}} = 2E_{00}, \qquad \mathsf{C}^{x_\rho} = E_{0\rho} + E_{\rho 0} \quad (1 \le \rho \le d), \qquad \mathsf{C}^{\bar{x}} = -\sum_{\rho=1}^{d} E_{\rho\rho}.$$

作用于 $(\partial_{\bar{x}}\psi, \nabla_{x'}\psi)^{\mathsf{t}}$ 时，第一行是 $2\partial_{\bar{t}}\partial_{\bar{x}}\psi + \Delta_{x'}\psi$。对于 $1 \le \rho \le d$，第 ρ 行是 $\partial_{x_\rho}\partial_{\bar{x}}\psi - \partial_{\bar{x}}\partial_{x_\rho}\psi$，它为零。因此，标量波给出了该系统的一个解。

对于余向量为 $p = \kappa(-|v|^2/2, v, 1)$ 的模，去掉公因子 i 后的矩阵符号为

$$\sum_a p_a\mathsf{C}^a = \kappa\begin{pmatrix} -|v|^2 & v^{\mathsf{t}} \\ v & -I \end{pmatrix}.$$

其负二次型是一个平方：

$$-w^{\mathsf{t}}\left(\sum_a p_a\mathsf{C}^a\right)w = \kappa|w' - vw_0|^2 \qquad (w = (w_0, w') \in \mathbb{R}^n).$$

（展开后，左侧为 $\kappa(|v|^2w_0^2 - 2w_0\, v \cdot w' + |w'|^2)$。）特别地，$(1,\ v)^{\mathsf{t}}$ 张成符号核，因此 $f_{\mathrm{sys}} = \sum_{\kappa,\ v}\kappa^{d/2}(1,\ v)^{\mathsf{t}}u_{\kappa,\ v}$ 对于任意有限个模态之和，都是 $\mathcal{P}f_{\mathrm{sys}} = 0$ 的一个完整解。向量 $(1,\ v)^{\mathsf{t}}$ 称为极化，记录了一阶系统各个分量的相对振幅。每个分量都携带相同的标量振荡。

取两个实状态 w_1, w_2，并将物理坐标平移 $-i\mathbf{q}$，其中

$$\mathbf{q}^a = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{2} w_\ell^{\mathsf{t}} \mathsf{C}^a w_\ell.$$

将复坐标代入一个模，会给指数增加 $p\cdot\mathbf{q}$，因为$i(-i)=1$。上面的平方恒等式给出

$$p\cdot\mathbf{q} = -\frac{\kappa}{2}\sum_{\ell=1}^{2}|w'_\ell - v w_{\ell 0}|^2.$$

这种位移具有简单的几何意义。数值 $w^{\mathsf{t}}\mathsf{C}^a w$ 是系统的二次通量 $f\mapsto(f^{\mathsf{t}}\mathsf{C}^a f)_a$在常值态 w处的取值，因此$\mathbf{q}$ 是两个状态的通量之和的一半。对于单个状态 $w=(w_0,w')$，通量的一半是一个向量，其零标架分量为

$$\tfrac{1}{2}\big(w^{\mathsf{t}}\mathsf{C}^{\bar t}w,\,(w^{\mathsf{t}}\mathsf{C}^{x_\rho}w)_\rho,\,w^{\mathsf{t}}\mathsf{C}^{\bar x}w\big) = \big(w_0^2,\,w_0 w',\,-\tfrac{1}{2}|w'|^2\big).$$

由于 $x_n^2 - t^2 = 2\bar t\bar x$，闵可夫斯基型 $|x|^2-t^2$ 在零标架中等于 $|x'|^2+2\bar t\bar x$，且在该向量上为零。因此，每个状态都会沿一条光线产生虚位移。对于 $w_0\neq 0$，这条光线是斜率为$v=w'/w_0$的模对应的光线，因为模的光线 $(t,x)=(1,\xi/|\xi|)$ 的零标架分量与 $(1,v,-\frac{1}{2}|v|^2)$ 成比例。根据平方恒等式，这个模完全不会衰减，而斜率为 v的模则乘以 $\exp(-\frac{1}{2}\kappa w_0^2|v-w'/w_0|^2)$，这是两个斜率之差的高斯函数。对于两个状态，两个权重相乘。

为了将两个平方的和写成单个复范数，我们将这两个状态配对；为了使这种配对区别于傅里叶相位的复结构，我们在四元数中进行配对。回忆一下，四元数是 1、i、j、k 的实线性组合，其中 $i^2=j^2=k^2=-1$、$ij=k$、$jk=i$、$ki=j$，并且反转这后三个乘积中的任意一个都会改变其符号。两个平面$\mathbb{C}_i=\mathbb{R}+i\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}_k=\mathbb{R}+k\mathbb{R}$ 分别都是复数的一份副本，但$ik=-ki$。我们将 i 视为傅里叶相位的虚数单位，并将两个状态配对为 $w_1+kw_2=(r_0,\zeta)\in\mathbb{C}_k\times\mathbb{C}_k^d$。于是每个模态上的乘子为

$$e^{p\cdot\mathbf{q}} = \exp\!\big(-\tfrac{1}{2}\kappa|\zeta - v r_0|^2\big).$$

对于固定的 $r_0\neq 0$，该滤波器以斜率 ζ/r_0 为中心，并选择斜率在其约 $(\kappa|r_0|^2)^{-1/2}$ 范围内的模态。它是一个宽度随辅助坐标变化的帽截断函数。对于固定的模态和固定的 r_0, ζ中的平方权重的积分为

$$\int_{\mathbb{C}_k^d}\kappa^d e^{-\kappa|\zeta-vr_0|^2}\,d\zeta = \int_{\mathbb{C}_k^d} e^{-|\zeta|^2}\,d\zeta,$$

通过代换 $\zeta\mapsto\sqrt{\kappa}(\zeta-vr_0)$。这解释了振幅中的归一化幂次 $\kappa^{d/2}$。

2.1.2. 变量替换前后的守恒。仅高斯函数局部化就能得到一族滤波波。要在证明中使用它们，我们需要一个同时涉及高斯参数和物理~变量的微分恒等式。令 $f=f_{\mathrm{sys}}((\bar t,x',\bar x)-i\mathbf{q})$，并定义向量场

$$D_{\ell\rho} = \partial_{w_{\ell\rho}} + i\sum_a (\mathsf{C}^a w_\ell)_\rho\,\partial_a, \qquad L_\ell = \sum_\rho \overline{\widetilde{f}_\rho}\, D_{\ell\rho}.$$

这些 $D_{\ell\rho}$ 具有与 Baouendi 和 Tr`eves [6, 第 1]节中管坐标相关的复向量场的形式；关于它们所需的一切都将在下文计算。根据 C^a, $\partial_{w_{\ell\rho}}\mathbf{q}^a = (\mathsf{C}^a w_\ell)_\rho$ 的对称性。因此， $D_{\ell\rho}$中的两项作用于 $(\bar{t}, x', \bar{x}) - i\mathbf{q}$ 的第 a个分量时会相互抵消。由于 f_{sys} 在这些平移变量中是全纯的， $D_{\ell\rho} f = 0$。取共轭得到 $D_{\ell\rho}\, f = 0$，因此 $\overline{\overline{}}^{-}$

$$D_{\ell\rho}\widetilde{\overline{f}} = (D_{\ell\rho} - \overline{D_{\ell\rho}})\widetilde{\overline{f}} = 2i \sum_a (\mathsf{C}^a w_\ell)_\rho\, \partial_a \widetilde{\overline{f}}.$$

$D_{\ell\rho}$ 的状态系数是常数，其物理系数与物理变量无关，因此其散度为零。根据乘积法则，

$$\operatorname{div} L_\ell = \sum_\rho D_{\ell\rho}\overline{\widetilde{f_\rho}} = 2i w_\ell^{\mathsf{t}} \mathcal{P} \widetilde{\overline{f}} = 0.$$

对于最后一个等式，请注意，对于固定状态，平移在物理变量中是常数，因此与 $\mathcal{P}$ 可交换；并且 $\mathcal{P}$ 的系数为实数，$\widetilde{}$所以可以对方程 $\mathcal{P} f = 0$ 取共轭。

我们还需要计算 $L_{\ell'}$ 沿 L_ℓ 的导数$\overline{}$这里，$\nabla_{L_\ell} L_{\ell'}$ 表示 $\overline{\widetilde{L_\ell}}$对向量场 $L_{\ell'} = \sum_\sigma f_\sigma D_{\ell'\sigma}$ 的系数求导。振幅 $\widetilde{}$ f_σ 的导数为零。在剩余项中， $D_{\ell\rho}$ 作用于 $D_{\ell'\sigma}$ 的系数$-i(\mathsf{C}^a w_{\ell'})_\sigma$ ，得到 $-i\delta_{\ell\ell'}\mathsf{C}^a_{\sigma\rho}$。因此

$$\nabla_{L_\ell}\overline{L_{\ell'}} = -i\delta_{\ell\ell'} \sum_a (\overrightarrow{\bar{f}}^{\mathsf{t}}\, \mathsf{C}^a \widetilde{f})\, \partial_a.$$

括号中的每个二次型都是实数，因为 C^a 是实对称的；它是平移后解 f 的二次通量的$\sim a$分量。对于实或复矩阵场 B，列散度的第 J 个分量为 $\sum_I \partial_I B_{IJ}$，即由第 J 列给出的向量场的普通散度。因此，外积的列散度为

$$\operatorname{div}(L_\ell \otimes \overline{L_\ell}) = (\operatorname{div} L_\ell)\overline{L_\ell} + \nabla_{L_\ell}\overline{L_\ell}.$$

第一项消失，第二项纯虚。因此，$\mathsf{B} = \operatorname{Re}\sum_{\ell=1}^{2} L_\ell \otimes L_\ell$ 的实列散度为零。它也是半正定的：将一个复场写成其实部加上 i乘以虚部，可以看出它与自身共轭的外积的实部是两个实外积平方之和，因此 B 是四个实外积平方之和。

此时，我们在状态变量中得到一个正的守恒张量。本小节余下部分将检验两点：在新坐标中，这四个平方构成一个单一的四元数外积；并且变量替换不会引入散度误差。结论即为命题 2.1，初读时可以略过这项检验。

为了解释这四个实平方如何组合在一起，写作 $L_\ell = \sum_I L_\ell^I \partial_I$，其中 I遍历所有实坐标，并令 $\mathsf{q}_I = L_1^I + k L_2^I$。系数 L_ℓ^I 属于 $\mathbb{C}_i$。对于四元数上的实内积 $\operatorname{Re}(qq')$，平面 $\mathbb{C}_i$ 和 $k\mathbb{C}_i$ 彼此正交：第一个平面由 1、i张成，第二个平面由 k、j张成，因为$ki = j$。左乘 k 是一个等距变换。在两个四元数 q_I的内积中，两个平面之间的混合项因此消失，于是

$$\operatorname{Re}(\mathsf{q}_I \overline{\mathsf{q}_{I'}}) = \operatorname{Re}\Big(L_1^I \overline{L_1^{I'}} + L_2^I \overline{L_2^{I'}}\Big) = \mathsf{B}_{II'}.$$

因此，B 是四元数 q_I的格拉姆矩阵，我们将 q_I 称为坐标 I的格拉姆行。状态坐标的格拉姆行是

$$(\mathsf{q}_{w_{1\rho}}, \mathsf{q}_{w_{2\rho}}) = (\overline{\widetilde{f_\rho}}, k\overline{\widetilde{f_\rho}}).$$

添加一个被动坐标 $\eta \in \mathbb{C}_k$ ，并设

$$\omega^a = \tfrac{1}{2} w^{\mathsf{t}} \mathsf{C}^a w + \delta_{a,\bar{x}} \eta, \qquad w = w_1 + k w_2.$$

记 Θ 为此映射与实时时空变量上的恒等映射的组合。沿 η 方向的格拉姆行均为零。状态导数满足 $\partial_{w_\rho} \omega^a = (\mathsf{C}^a w)_\rho$，因此每个实时时空坐标对应的格拉姆行是

$$\mathsf{q}_a = \sum_\rho (\partial_{w_\rho} \omega^a)\, i\, \overline{\widetilde{f_\rho}}.$$

要计算两个新辅助坐标相对于某个时空坐标的格拉姆行，回顾一下，在变量替换下，向量场的分量按微分变换。格拉姆行也同样如此：新实坐标 Θ_J 对应的行是 $\sum_I (\partial_I \Theta_J)\, \mathsf{q}_I$。记 $\omega^a = \omega_1^a + k\omega_2^a$，于是 $\omega^a i = \omega_1^a i + \omega_2^a j$。由于 ω^a 是变量 $w_\rho = w_{1\rho} + k w_{2\rho}$ 的全纯多项式，它在 $(w_{1\rho},\ w_{2\rho})$ 变量中的实微分即为乘以 $c = \partial_{w_\rho} \omega^a = c_1 + k c_2$,

$\widetilde{\ }$其对应的实矩阵如下方左侧所示。取 $q = f_\rho$，将此矩$\overline{\text{阵}}$作用于该状态对中的两行格拉姆行，得到

$$\begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ kq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c} q \\ k \bar{c} q \end{pmatrix}.$$

这两个项中的第一个等于 $-i(ciq)$，因为 $-ici = c$对 $c \in \mathbb{C}_k$成立。第二个项等于 $-j(ciq)$，因为 $ki = j$。因此对 ρ 求和，得到实坐标 a 及其两个辅助分槽上的三行 $\mathsf{q}_a, -i\mathsf{q}_a, -j\mathsf{q}_a$ 。换言之，令 $(e_0, e_1, e_2) = (1, i, j)$，则坐标 a的分槽 α 对应的格拉姆行是 $e_\alpha \mathsf{q}_a$。在两个此类行的实格拉姆乘积中，四元数共轭会颠倒因子的顺序，因此分槽 (a, α) 与 (b, β) 对应的格拉姆项为 $\mathrm{Re}(e_\alpha\, \mathsf{q}_a \mathsf{q}_b\, e_\beta)$。一般而言，四元数矩阵$\overline{\ }A = (A_{ab})$ 在三个分槽上的实表示为实矩阵

$$A^{\mathbb{R}}_{a\alpha, b\beta} = \mathrm{Re}(\overline{e_\alpha} A_{ab} e_\beta). \tag{2.1}$$

刚才计算出的 Gram 矩阵各项，正是单个四元数外积 $\big(\mathsf{q}_a \mathsf{q}^b\big)_{a,\ b}$ 的实表示。

$\overline{\ }$

在逆图上，变量替换将一个向量映射为其在 $D\Theta$ 下的像，并将两个向量的外积映射为它们的像的外积。我们还保留源体积元。因此，相对于目标体积的变换后矩阵场为

$$\widetilde{\mathsf{B}} \circ \Theta = \mathcal{J}_\Theta^{-1} D\Theta\, \mathsf{B}\, D\Theta^{\mathsf{t}}, \qquad \mathcal{J}_\Theta = |\det_{\mathbb{R}} D\Theta|.$$

这是 B 作为张量密度的推前。因子 $\mathcal{J}_\Theta^{-1}$ 补偿了积分时体积的变化。散度仍会多出一项，因为新坐标中的一列是旧列的位置依赖线性组合。

为在弱形式中说明这一点，设 φ 为一个支集包含于目标图表中的测试函数，并固定一个实数目标分量 Θ_J。左侧的积分使用目标

坐标，而右侧使用源坐标。链式法则和变量替换给出

$$\int (\operatorname{div}\widetilde{\mathsf{B}})_J\,\varphi\,d\mathrm{vol} = -\int \sum_{I,I'} \mathsf{B}_{II'}\,\partial_I(\varphi\circ\Theta)\,\partial_{I'}\Theta_J\,d\mathrm{vol}.$$

在右侧进行分部积分，得到两项

$$\int (\varphi\circ\Theta)\sum_{I'}(\operatorname{div}\mathsf{B})_{I'}\,\partial_{I'}\Theta_J\,d\mathrm{vol} + \int (\varphi\circ\Theta)\sum_{I,I'}\mathsf{B}_{II'}\,\partial_I\partial_{I'}\Theta_J\,d\mathrm{vol}.$$

第一项积分因源变量中的守恒而消失。在第二项中，只有状态方向上的导数有贡献，因为 Θ 在物理变量中是恒等映射，并且关于被动变量是仿射的。B 的两个状态块都是 $\left(\mathbf{Re}(\widetilde{f}_\rho\widetilde{f}_\sigma)\right)_{\rho\sigma}$，其混合块为零，因此两个分块缩并之和为零。事实上，对于关于 $w = w_1 + kw_2$的全纯函数，在$w_{2\rho}$ 中的导数是 k 乘以在$w_{1\rho}$中的导数。求两次导数会将 k^2 替换为 -1，因此在 Θ的每个实分量上

$$\big(\partial_{w_{1\rho}}\partial_{w_{1\sigma}} + \partial_{w_{2\rho}}\partial_{w_{2\sigma}}\big)\Theta_J = 0.$$

因此，经过变量替换后，该实张量的列仍然是无散的。

2.1.3. 物理坐标中的流。 现在我们将变量替换明确写出。在零标架中，$\omega^{\bar{t}}$、ω^{x_ρ} 和 $\omega^{\bar{x}}$ 的二次表达式分别为 r_0^2、$r_0\zeta_\rho$ 和 $\eta - \frac{1}{2}\zeta\cdot\zeta$，因此辅助映射为

$$(r_0,\zeta,\eta)\longmapsto(Y,P,Z_-) = (r_0^2, r_0\zeta, \eta - \tfrac{1}{2}\zeta\cdot\zeta).$$

在物理标架 $(t,\ x',\ x_n)$ 中，用 $(\tau,\ P,\ Z)$ 表示辅助变量。$Y\neq 0$ 上的单值坐标为

$$Y = \frac{\tau+Z}{\sqrt{2}},\qquad W = \frac{P}{Y},\qquad \Phi = \frac{Z-\tau}{\sqrt{2}} + \frac{P\cdot P}{2Y},\qquad y = |Y|. \tag{2.2}$$

这里，$Z_- = (Z-\tau)/\bar{\sqrt{2}}$，且在全纯公式中，两个 $\mathbb{C}_k$-向量的点积是双线性的。两个局部逆映射分别具有 $r_0 = \pm\sqrt{Y}$、$\zeta = r_0 W$ 和 $\eta = \overline{\Phi}$。按图示顺序排列的复雅可比矩阵是分块下三角矩阵，其对角块为 $2r_0$、$r_0 I$ 和 $\mathbf{1}$，因此其行列式为 $2r_0^{d+1}$。每个复坐标有两个实部，因此实雅可比绝对值是模的平方，且 $\mathcal{J}_\Theta = 4|r_0|^{2d+2}$。从一个逆映射变换到另一个时，$w$ 替换为$\sim -w$，而 η保持不变。平移波 f 保持不变，因为 $\mathbf{q}$ 是关于w的二次函数。导数 $\partial_{w_\rho}\omega^a$ 变号，因此每个 a 上的三行都变号，而其实格拉姆张量和雅可比绝对值保持不变。因此，逐图密度拼接成 $Y\neq 0$ 上的一个张量。

作用于极化的状态导数为

$$\begin{aligned}(\partial_w\omega)(1,v)^{\mathsf{t}} = 2r_0 V_v,\qquad V_v = \left(1, \frac{v+W}{2}, -\frac{W\cdot v}{2}\right)^{\mathsf{t}},\\ (\partial\Phi)V_v = 0,\qquad (\partial W)V_v = \frac{v-W}{2Y}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

要验证第一个公式，沿着方向 (1， v) 改变 (r_0， ζ)，并固定 η 。三个分量 (Y， P， Z_{-}) 的导数分别为 $2r_0$、 $\zeta+r_0v$ 和 $-\zeta\cdot v$。除以 $2r_0$ 并利用 $\zeta=r_0W$ ，得到 V_v。由于 $\Phi=\eta$ 保持不变，第二个公式随即成立；它表示与 Φ 的水平集相切。商法则给出

$$(\partial W)V_v=\frac{(v+W)/2-W}{Y}=\frac{v-W}{2Y}.$$

因此，沿某个模的斜率变化与该模的斜率和滤波器中心之间的不匹配成正比。

对于 $e=Y/y$，定义等距变换 $\iota_e(c_1+ic_2)=c_1+eic_2$，作用于 $\mathbb{C}_i$，其中 c_1，c_2 均为实数。对于四元数矩阵， * 表示共轭转置；若矩阵A 满足 $A=A^*$，则称其为厄米矩阵。四元数列与自身的外积 $\chi\chi^*$ 是厄米且半正定的，因为它在列v 上的二次型为 $|\chi^*v|^2$。回顾式 (2.1)， A 在三个分槽中的实表示为 $A^{\mathbb{R}}$ 。

命题 2.1 (波流)。 存在一个半正定流 $A_0=\chi\chi^*$，满足

$$\chi=\sum_{\kappa,v}V_v\,\iota_e(\overline{u_{\kappa,v}})\left(\frac{\kappa}{y}\right)^{d/2}e^{-\kappa y|W-v|^2/2}.$$

它在 $Y\neq0$ 上光滑，$(\partial\Phi)A_0=0$，且 $A_0^{\mathbb{R}}$ 的各列实散度均为零。这些性质在零框架和物理标架中均成立。

用实数术语来说，该命题表述如下。扩展空间具有 3($n+1$) 个实坐标：时空坐标（t、 x）以及每个 $n+1$ 辅助变量的两个实部（τ、 P、 Z）。在开集 $Y\neq0$ 上， $A_0^{\mathbb{R}}$ 是一个大小为 3($n+1$) 的光滑半正定实对称矩阵场。它的每一列都是关于 3($n+1$) 个变量的无散向量场，并且每一列都与 Φ 的两个实部的水平集相切。第二个性质使我们能够在 Φ 中用截断函数乘以流，而不会破坏第一个性质。在物理时间变量 t 对应的列中，守恒律表示 tt 项关于 t 的导数，等于其余 $3n+2$ 个变量中该列其余各项的散度的负值。

证明。 根据 Gram 行计算，在逆图中，变换后的实张量是 $\mathcal{J}_\Theta^{-1/2}$ (q_a)$_a$ 的四元数外平方的实表示。对于每个模，其列是 $V_v\vartheta iu_{\kappa,\,v}$ 乘以命题中的正因子，其中 $\vartheta=r_0/|r_0|$。这使用了 $|\overline{\zeta-vr_0}|^2=y|W-v|^2$ 和 $2|r_0|\mathcal{J}_\Theta^{-1/2}=y^{-d/2}$。将该列的每个项右乘同一个单位四元数（$\vartheta i$）$^{-1}$ 会保持其外平方不变，并将标量因子变为

$$\vartheta i\overline{u_{\kappa,v}}(\vartheta i)^{-1}=\vartheta\overline{u_{\kappa,v}}\,\vartheta^{-1}=\iota_e(\overline{u_{\kappa,v}}).$$

对于第一个等式， i与傅里叶振幅可交换。对于第二个等式，$i\vartheta^{-1}=\vartheta i$ 推出了 $\vartheta i\vartheta^{-1}=\vartheta^2i=ei$。所得公式仅取决于 Y和其他目标空间坐标，因此与局部平方根的选取无关。

相切性质 $(\partial\Phi)A_0=0$ 可由 (2.3) 按模逐一推出。用实变量表述时，这意味着 $A_0^{\mathbb{R}}$ 消去 Φ两个实分量的梯度。为直接说明这一点，注意到在源变量中， L_ℓ的实部和虚部的 η 分量均为零。它们在 $D\Theta$ 下的像与 Φ的水平集相切，因为 $\Phi\circ\Theta=\eta$。变换后的实矩阵是这些像的外积平方乘以一个正雅可比因子的和，因此它会消去这两个梯度。

最后，从零坐标到物理坐标的变换是一个实正交变换，它作用于全部三个分槽中的坐标指标。该变换保持正性和列散度不变。□

在这些估计中，我们使用固定的空间环面 $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(100\mathbb{Z})^n$。其傅里叶频率为 $\xi \in (2\pi/100)\mathbb{Z}^n$，因此有界环域中只包含有限个模态。要在一个帽上使用锥参数化，需选取一个标准正交标架，使其最后一个向量为该帽的轴。于是，ξ_n 是 ξ 沿轴的分量，而 ξ' 由其沿其他标架向量的分量组成。用同一标架表示x 会保持 $x \cdot \xi$，因此每个模态仍关于原来的格 $(100\mathbb{Z})^n$保持周期性。由此，该帽决定用于计算 κ 和 v的坐标，而同一格则为每个帽的傅里叶和提供索引。

取该帽中 $e^{-it\sqrt{-\Delta}} f$ 的模态，其中 $c_0 R \le |\xi| \le C_0 R$、$|v| \le \gamma$ 和$R \ge 2$。那么 $|\xi| = \kappa(1 + |v|^2/2)/\sqrt{2}$ 给出 $\kappa \asymp R$。环带中有 $O(R^n)$ 个频率，因此由帕塞瓦尔恒等式和柯西–施瓦茨不等式可得 $\sum_{\kappa,\,v} |c_{\kappa,\,v}| \lesssim R^{n/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}$.该流继承了这些模态的空间周期。

在固定的辅助点处，在坐标 (2.2) 中，取 V_v 的物理时间分量。由于 $t = (\bar t - \bar x)/\sqrt{2}$，该分量为 $(1 + W \cdot v/2)/\sqrt{2}$。它属于 $\mathbb{C}_k$。令S_0, S_1 为通过取该分量在基 $(1, k)$ 下的两个实系数，并将每个系数乘以 $(\kappa/y)^{d/2} e^{-\kappa y |W - v|^2/2}$ 而得到的空间傅里叶乘子。由命题 2.1，χ 的时间分量于是分解为

$$\chi_t = \iota_e\big(\overline{S_0 e^{-it\sqrt{-\Delta}} f}\big) + k\iota_e\big(\overline{S_1 e^{-it\sqrt{-\Delta}} f}\big).$$

这里的共轭作用于算子的输出上。由于符号为实数，可以将共轭移到求和号外。用 $\vartheta \in \mathbb{C}_k$ 共轭会将两个正交平面 $\mathbb{C}_i$ 和 $k\mathbb{C}_i$ 分别映到 $\iota_e(\mathbb{C}_i)$ 和 $k\iota_e(\mathbb{C}_i)$。这是一个等距变换，因此 $|\chi_t|^2$ 等于两个标量输出的平方和。因此

$$A_{0,tt} = \big|S_0 e^{-it\sqrt{-\Delta}} f\big|^2 + \big|S_1 e^{-it\sqrt{-\Delta}} f\big|^2. \tag{2.4}$$

注记 （两个模态间的干涉）。（2.4）中的每个平方项都是在将滤波后的模态相加之后取的。假设只有两个模态，并令 $\chi^{(1)}$，$\chi^{(2)}$表示它们对命题 2.1 中列的贡献。由于 $A_0 = \chi\chi^{*}$，其 tt项为

$$A_{0,tt} = |\chi_t^{(1)}|^2 + |\chi_t^{(2)}|^2 + 2\,\mathrm{Re}\big(\chi_t^{(1)}\overline{\chi_t^{(2)}}\big).$$

改变第二个波的符号会反转最后一项的符号，同时保持两个平方项不变。在两个滤波时间分量大小相等、符号相反的点上，该项恰好抵消两个平方项。

干涉项本身满足守恒律。将命题 2.1 应用于两个模态之和，再减去各个模态对应的恒等式。两个单模电流相互抵消，剩下

$$\mathrm{div}\Big[\big(\chi^{(1)}(\chi^{(2)})^{*} + \chi^{(2)}(\chi^{(1)})^{*}\big)^{\mathbb{R}}\Big] = 0.$$

此处的散度作用于每一列中的物理变量和辅助变量。在对应于物理时间的那一列中，tt 项恰好就是上面的带符号交叉项。它的时间导数由该列其他项的散度平衡。因此，后文使用的分部积分甚至适用于单对模态之间的干涉。

S_0 的符号包含因子 $(1+\operatorname{Re} W\cdot v/2)/\sqrt{2}$，当 $|W|$ 和 $|v$较小时，该因子远离零。在高斯函数也有正下界的区域，可以在帽上对这个乘子求逆，从而恢复波。在纤维壁的某些部分，中心 W 与输入斜率分离，而高斯函数则带来关于 Ry的指数衰减。我们将利用同一滤波器的这两种性质。 χ 的其他分量具有相同的高斯函数和光滑的偏振因子，而A_0 的各项则是这些分量的两两乘积。

2.1.4. 欧几里得结构从何处发挥作用。 正如第 1.1 节所述，在奇数维中，对于紧黎曼流形， $n\geq 3$ 的范围 $p\geq 2+8/(3n-3)$ 是尖锐的，并且严格高于 p_c。因此，定理 1.2 的证明必定会在某处用到欧几里得结构；了解变系数反例的读者也会想知道它具体体现在哪里。最明显之处在于命题 2.1 的守恒律。对于常系数系统 $\mathcal{P}$，模态是精确的指数函数。因此， f_{sys} 可延拓为复~时空上的整函数，而平移 $-i\mathbf{q}$ 与 $\mathcal{P}$可交换。前一事实给出 $D_{\ell\rho}f=0$，再结合后一事实，便可在第 2.1.2 节得到 $\operatorname{div} L_\ell=0$ 。对于变系数方程，这两条性质都无法以这种形式成立。高斯滤波器同样依赖于第 2.1.1 节中矩阵符号的精确平方恒等式，而tt 项 (2.4) 是作用于波的一个精确傅里叶乘子。第 3.3 节中的恢复步骤对该乘子求逆。

2.2. **四元数 Hessian 及其余子式**。上述构造给出了一个具有无散列的正实张量。现在，我们需要一个与该张量配对且行列式阶数适当的 Hessian。四元数 Hessian 同时满足这两个目的。它与流的配对是一个普通的实散度型算子，而其行列式在每个四元数坐标上各有一个因子。

为什么不采用实 Monge–Amp`ère 算子或复 Monge–Amp`ère 算子？决定因素在于流。在每个物理坐标上，它有三个实槽：坐标本身，以及辅助坐标 in $\mathbb{C}_k$ 的两个实部。（之所以辅助坐标是复数，是因为两个实状态按 w_1+kw_2 配对。）如下面的引理 2.2 所示，写作 $z_a=x_a+P_a i$ with $P_a\in\mathbb{C}_k$ 时，这些实槽由 1、i 和 $j=ki$ 张成。三个实槽不具有复结构，但它们位于四元数之中，而命题 2.1 的实张量正是一个四元数厄米矩阵的实表示。与这种结构相适应的行列式，即下面的 Moore 行列式，在每个四元数坐标上各有一个因子，也就是说，每个物理坐标对应一个因子，而不是每个实变量对应一个因子。因此，在一个纤维上，它的次数为 n，而这一计数正是第 1.2 节所概述的计算中产生 p_c 的原因。

2.2.1. 编码梯度与海森矩阵。 我们先约定四元数线性代数中的记号。记作 $(e_0,e_1,e_2,e_3)=(1,i,j,k)$。共轭会颠倒乘积的顺序， $pq=q\,p$，且 $qq=|q|^2$。实部满足 $\operatorname{Re}(pq)=\operatorname{Re}(qp)$，这可通过展开实部和虚部相乘验证。我们将四元数列视为右向量空间：标量乘法将 v 变为 vq，矩阵 A 从左侧作用，并且 $(Av)_a=\sum_b A_{ab}v_b$，因此由结合律可得 $A(vq)=(Av)q$ 。两列的内积为 $v^*w=\sum_a v_a w_a$，而 $\operatorname{Re}(v^*w)$ 是其对应实坐标的欧几里得内积。这些约定确定了外积 vv^*中因子的顺序：其第 (a,b) 个元素为 $v_a v_b$，且 $w^*vv^*w=|v^*w|^2$。特别是

vv^* 是半正定的，并且对于 $v \neq 0$，具有四元数秩一。厄米矩阵 A定义了形式 v^*Aw，其二次型 v^*Av 是实数，因为它等于自身的共轭。当此形式非负时，我们记作 $A \geq 0$；当它在每个非零 v上都严格为正时，记作 $A > 0$。四元数酉矩阵 U满足 $U^*U = I$，这意味着 Uv和 Uw与 v和 w具有相同的内积。

实表示 (2.1) 表示了 A在实坐标$\widehat{\ }$中的二次型。如果 $\xi_a = \sum_\alpha e_\alpha \xi_{a\alpha}$ 编码了一个位于三个分槽 ξ 中的实向量，展开可得

$$\widehat{\xi}^* A \widehat{\xi} = \xi^{\mathsf{t}} A^{\mathbb{R}} \xi.$$

使用全部四个分槽时，公式 (2.1) 将 A 表示为整个四元数向量空间上的实线性算子。

波流在每个坐标指标下有三个实槽，我们将其打包为 $z_a = z_{a0} + i z_{a1} + j z_{a2}$。狄利克雷定理的证明还将使用第四个槽 $k z_{a3}$。在下面的公式中，指标 α, β 遍历现有的分槽。对于实函数 u，其编码梯度和海森矩阵定义为

$$G_a(u) = \sum_\alpha e_\alpha \partial_{a\alpha} u, \qquad H_{ab}(u) = \sum_{\alpha,\beta} e_\alpha \overline{e_\beta}\, \partial_{a\alpha}\partial_{b\beta} u.$$

因此， $G(u)$ 是按坐标指标分组的普通梯度，而 $H(u)$ 是普通实海森矩阵的一个线性函数。对于具有三个分槽的单个坐标 (x, p_1, p_2)，它是标量 $u_{xx} + u_{p_1p_1} + u_{p_2p_2}$。因此，条件 $H(u) \geq 0$比凸性更弱：例如， $u = -x^2 + p_1^2 + p_2^2$ 具有 $H(u) = 2$，尽管其实海森矩阵是不定的。

引理 2.2。 海森矩阵 $H(u)$ 是厄米的，并且 $\operatorname{tr} H(u) = \Delta u$。它将一个实$\widehat{\ }\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$秩一海森矩阵 $\xi\xi^{\mathsf{t}}$ 映射为 $\xi\xi^*$，其中 $\xi_a = \sum_\alpha e_\alpha \xi_{a\alpha}$ 编码实余向量 ξ。特别地，它保持正性。它满足乘积法则

$$H(uv) = uH(v) + vH(u) + G(u)G(v)^* + G(v)G(u)^*.$$

它在四个分槽中关于四元数酉坐标变换具有协变性，并且在三个分槽中关于坐标指标的实正交变换具有协变性。如果一个函数仅依赖于 $z_a = x_a + P_a i$ 中的复坐标 $P_a \in \mathbb{C}_k$，那么

$$G_a(u) = 2(\partial_{\overline{P}_a} u)i, \qquad H_{ab}(u) = 4\partial_{\overline{P}_a}\partial_{P_b} u.$$

特别地，如果 Ψ 是 P 变量的全纯映射，其复导数为$D\Psi$，那么 $H(|\Psi|^2) = 4(D\Psi)^* D\Psi$。对于 Ψ 的任意光滑实函数，其编码梯度都属于 $(D\Psi)^*$ 的四元数像。

证明。 取 $H_{ab}(u)$ 的共轭会颠倒其两个四元数因子。交换分槽指标后即得 $H_{ba}(u)$。对于 $a = b$，分槽不相等的项按 $\underline{e_\alpha} e_\beta + e_\beta e_\alpha = 0$ 对 $\alpha \neq \beta$ 成对抵消。分槽相等的项给出$H_{aa}(u) = \sum_\alpha \partial^2_{a\alpha} u$，因此对 a 求和即得实拉普拉斯算子。

如果实海森矩阵为 $\xi\xi^{\mathsf{t}}$，则 (a, b) 元可分解为

$$\sum_{\alpha,\beta} e_\alpha \overline{e_\beta}\, \xi_{a\alpha}\xi_{b\beta} = \left(\sum_\alpha e_\alpha \xi_{a\alpha}\right)\left(\sum_\beta \overline{e_\beta}\xi_{b\beta}\right).$$

$\widehat{\ }\widehat{\ }$实系数与每个四元数都可交换，因此这恰好就是 $\xi_a \xi_b^*$。每个这样的外积都是正的，因为 $v^*\widehat{\xi}\widehat{\xi}^* v = |\widehat{\xi}^* v|^2$。将一个正的

实海森矩阵分解为正秩一形式，即可证明正性断言。实乘积法则产生的两个混合项按相同顺序因式分解，从而得到 $H(uv)$ 的显示公式。

对于四槽中的协变性，作变换 $z = Uz'$with $U^*U = I$。此时，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$线性函数 Re$(\xi^* z)$ 对应的余向量为 $U^*\xi$。因此，秩一公式经过与 U^*, U 共轭后变换。实秩一形式张成实对称矩阵，因此这就证明了

$$H(u \circ U)(z') = U^* H(u)(Uz')U.$$

当 U 在坐标指标上为实正交时，三槽中的论证相同。这样的 U 保持三槽子空间不变。

对于复公式，令 $P_a = p_a + kq_a$。那么 $P_a i = ip_a + jq_a$，复导数使用 $2\partial_{P_a} = \partial_{p_a} + k\partial_{q_a}$ 和 $2\partial_{P_a} \equiv \partial_{p_a} - k\partial_{q_a}$。梯度恒等式由 $ki = j$ 得出。对于海森矩阵，剩余两个基元素分别与其共轭元相乘，得到的四个乘积为 $\bar{i}i = jj = 1$、$\bar{i}j = -k$ 和$ji = k$。因此

$$H_{ab}(u) = \partial_{p_a}\partial_{p_b}u - k\partial_{p_a}\partial_{q_b}u + k\partial_{q_a}\partial_{p_b}u + \partial_{q_a}\partial_{q_b}u.$$

这就是所述的复 Hessian。例如，对于 $u = |P_a|^2$，唯一非零的项是 $H_{aa}(u) = 4$，即 p_a, q_a 中两个实二阶导数之和。

对于全纯的 Ψ，对 $\sum_\ell \Psi_\ell \Psi_\ell$ 应用 ∂_{P_b} 只会对 Ψ_ℓ 求导。接着应用 ∂_{P_a}，只会对 Ψ_ℓ 求导。因此

$$H_{ab}(|\Psi|^2) = 4\sum_\ell \overline{\partial_{P_a}\Psi_\ell}\,\partial_{P_b}\Psi_\ell.$$

对于定义在 Ψ 的目标空间上的实值函数 ρ，相同的复链式法则给出 $G(\rho\circ\Psi) = 2(D\Psi)^*((\partial_{\Psi_\ell}\rho) \circ \Psi)_\ell\, i.$。最后一个因子 i 的顺序来自梯度公式。□

2.2.2.行列式与法余子式。对于厄米矩阵，记作A： $B = \text{Re tr}(AB)$。实部使这个配对具有对称性。厄米四元数矩阵的特征值均为实数，并且存在四元数正交归一特征基；引理 2.3 的证明解释了其中的原因。其 ***Moore*** 行列式 是这些特征值按重数计算的乘积 [2, 第 1 节1]。例如，对于 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 和 $q \in \mathbb{H}$,

$$\det\begin{pmatrix} c_1 & q \\ \bar{q} & c_2 \end{pmatrix} = c_1c_2 - |q|^2.$$

全文中，厄米四元数矩阵的行列式均指其 Moore 行列式。它与实行列式的关系由特征值的计数给出：具有实特征值 λ 的四元数特征向量对 Moore 行列式贡献单个因子 λ，而其四元数直线的实维数为四，并对四槽实表示的行列式贡献四个 λ 因子。因此，四槽实表示的行列式是 Moore 行列式的四次幂。

对于上面的格拉姆矩阵（$D\Psi$）$^*D\Psi$，所有元素都属于 $\mathbb{C}_k$。它的复酉对角化也是四元数酉对角化。因此，若 $D\Psi$ 是一个大小为 m的方阵，则在任一域上计算得到的行列式均满足 $\det H$（$|\Psi|^2$）$=4^m|\det_{\mathbb{C}_k} D\Psi|^2$。第 3.1 节中的纤维域由此类平方范数定义。

余子式 $C(A)$ 描述了 A发生扰动时行列式的一阶变化。特别地，$v^*C(A)v$ 度量了加上 tvv^*时的变化。在首列为 v的正交归一基下，这只会改变第一个对角元素。对于单位列 v，压缩 $A|_{v^\perp}$ 是A 在四元数正交补 $v^\perp = \{w : \ v^*w = 0\}$上的厄米型矩阵，该矩阵可通过在此基下删除第一行和第一列得到。该补空间不必在 A作用下保持不变。对于上面显示的 2×2 矩阵，引理 2.3 中的定义给出了熟知的公式

$$C\begin{pmatrix} c_1 & q \\ \overline{q} & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & -q \\ -\overline{q} & c_1 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

引理 2.3。对于 $m \times m$ 厄米四元数矩阵，*Moore* 行列式是一个次数为 m 的齐次多项式，其余子式 $C(A)$由下式确定：

$$C(A) : B = \frac{d}{dt}\det(A + tB)\Big|_{t=0}.$$

对于 $A > 0$、$C(A) = (\text{行列式 } A)A^{-1}$，$\log\det A$ 关于矩阵序是凹的且递增。如果 $A \geq 0$，则 $C(A) \geq 0$；如果 A 也是奇异的，则 $C(A)$ 消去其像。

对于任意单位列 v，以及任意厄米 A 和实 t，

$$v^*C(A)v = \det(A|_{v^\perp}), \qquad \det(A + tvv^*) = \det A + t\, v^*C(A)v.$$

如果 $M = \begin{pmatrix} b & e^* \\ c & D \end{pmatrix}$ 满足 $D > 0$，且 e 是第一个单位列，则

$$\det M = (\det D)(b - c^*D^{-1}c), \qquad M - (b - c^*D^{-1}c)ee^* \geq 0.$$

证明。首先，谱定理的通常瑞利商证明可采用实内积 $\mathrm{Re}(v^*w)$。在实单位球面上最大化 v^*Av，由一阶变分得到$Av = \lambda v$，其中 $\lambda = v^*Av \in \mathbb{R}$。由 v 张成的整个四元数直线都是特征子空间，因为 λ 是实数。其四元数正交补空间在 A下保持不变，因为 $v^*Aw = (Av)^*w = 0$ 在那里成立。重复这一论证可得到一个四元数正交归一特征基。在该基下，$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(A^\ell)$ 是特征值的 ℓ 次幂之和。根据迹实部的循环性，这一等式在换基下保持不变。牛顿恒等式将它们的乘积表示为这些幂和的多项式。因此，行列式是 A 的实系数的多项式。

对于 $A > 0$，Moore 行列式的对数等于四个分槽中的实对数行列式的四分之一。沿着$A + tB$ 对实对数行列式求导，并还原为四元数记号，可得

$$\frac{d}{dt}\log\det(A + tB)\Big|_{t=0} = A^{-1} : B,$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\log\det(A + tB)\Big|_{t=0} = -\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(A^{-1}BA^{-1}B).$$

这里用到，四元数线性矩阵的实迹是其四元数迹的实部的四倍。对于一阶导数，若 $B \geq 0$，则 $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \geq 0$。对于二阶导数，$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(A^{-1}BA^{-1}B)$ 是 $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ 的特征值的平方和。这证明了单调性和凹性。对行列式本身求导，得到 $C(A) = (\det A)A^{-1}$。

在 A 的特征基下，余子式因此会将每个对角特征值替换为其他所有特征值的乘积。对于 $A \geq 0$，包括奇异的 A，只需令正定矩阵 $A + \epsilon I$ 收敛到 A，即可得出结论。余子式是多项式的导数，因此连续。若 A 是奇异的，则对应于 A 的每个正特征值的余子式特征值都含有一个零因子。这就是余子式会消去 A 的像的原因。特别地，若 A 的四元数核是一维的，则其余子式支集于该直线上，且该处的特征值等于 A 的正特征值之积。

对于分块公式，令 $q \in \mathbb{H}$ 为列的第一个坐标，w 为其余坐标。配方可得

$$\begin{pmatrix} q \\ w \end{pmatrix}^{*} M \begin{pmatrix} q \\ w \end{pmatrix} = (w + D^{-1}cq)^{*} D (w + D^{-1}cq) + (b - c^{*}D^{-1}c)|q|^{2}.$$

特别地，减去所示的 ee^{*} 倍数后，该形式为非负。实变量替换 $(q, w) \mapsto (q,\ w + D^{-1}cq)$ 是行列式为一的三角变换。因此，对于正的 M，四个分槽中的实行列式为 $(b - c^{*}D^{-1}c)^{4}(\det D)^{4}$。取正的四次方根，得到 Schur 行列式公式。所得恒等式关于 b 是多项式，并且对每个固定的 $D > 0$ 和 c，可推广到所有 b。

最后，在首列为 v 的基底中，加上 tvv^{*} 只会改变 b，因此该公式表明行列式关于 t 是仿射的，且当 $A > 0$ 时斜率为 $\det(A|_{v^{\perp}})$。其在 $t = 0$ 处的导数为 $C(A) : vv^{*} = v^{*}C(A)v$。根据多项式性，这两个恒等式可推广到所有厄米 A。对于 $m = 1$，空压缩的行列式约定为 1，而这些公式由标量行列式得出。□

2.2.3. 散度与边界项。实表示的公式$A^{\mathbb{R}}$ 通过允许 $e_3 = k$扩展到四个分槽。利用实部的循环性并展开定义可得

$$A : H(u) = \sum_{a,b,\alpha,\beta} \operatorname{Re}(\overline{e_\alpha} A_{ab} e_\beta)\, \partial_{a\alpha}\partial_{b\beta} u = A^{\mathbb{R}} : D^{2}u,$$
$$(\nabla v)^{\mathrm{t}} A^{\mathbb{R}} \nabla u = \operatorname{Re}\big(G(v)^{*} A G(u)\big).$$

第一行中的 $D^{2}u$ 以及右侧的配对均为实数。如果$A^{\mathbb{R}}$ 的实列具有零散度，那么实乘积法则给出 A：$H(u) = \operatorname{div}(A^{\mathbb{R}}\nabla u)$。实（$b$，$\beta$）列的散度为

$$\operatorname{Re}\left(\left[\sum_{a,\alpha} \overline{e_\alpha}\, \partial_{a\alpha} A_{ab} \right] e_\beta \right).$$

因此，只要括号中的四元数和为零，就足以保证所有实列均满足条件。乘以实标量 χ_0 在$AG(\chi_0) = 0$时保持实列守恒。对 χ_0 求导产生的额外项是 $\nabla\chi_0$ 与该列的实配对，而 $AG(\chi_0) = 0$ 使所有此类配对均为零。

阿列斯克 [4, 引理 4.6] 证明了当海森矩阵为正定时，线性化的四元数 Monge–Amp`ère 算子可写成散度形式。OpenAI [21, 第 3.3]节中的多项式论证给出了此处所需的三槽恒等式，也适用于奇异和不定海森矩阵。该论证所依据的秩计算，与多重线性常系数算子的符号计算十分相似。

引理 2.4 (余子式散度)。 对于光滑实函数 u, $C(H(u))$ 满足

$$\sum_{a,\alpha} \overline{e_\alpha}\, \partial_{a\alpha} C(H(u))_{ab} = 0 \qquad \textit{for every } b.$$

对于 $m=2$，这个引理可以手工验证。由 (2.5)， $C(H(u))_{11} = H_{22}(u)$ 和 $C(H(u))_{21} = -H_{21}(u)$，因此对于 $b=1$，所要证明的是

$$\sum \overline{e_\alpha}\, \partial_{1\alpha} H_{22}(u) = \sum \overline{e_\alpha}\, \partial_{2\alpha} H_{21}(u).$$

根据海森矩阵的定义，右侧为 $\sum_{\alpha,\beta,\gamma} e_\alpha e_\beta e_\gamma^{\alpha} \partial_{2\alpha}\partial_{2\beta}\partial_{1\gamma} u$。导数关于 α, β 和 $e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}$ 对称，因此右侧等于 $\sum_\gamma e_\gamma \partial_{1\gamma} \sum_\alpha \partial_{2\alpha}^2 u$。这就是左侧，因为 $H_{22}(u) = \sum_\alpha \partial_{2\alpha}^2 u$。情形 $b=2$ 只需交换两个坐标，证明方法相同。下面的证明通过极化一次性处理所有 m。

证明。 对于 $m=1$，余子式是常数。对于 $m>1$，取 $C(\sum_{\ell=1}^{m-1} t_\ell A_\ell)$ 中 $t_1 \cdots t_{m-1}$ 的系数，并将其记为 $\mathcal{C}(A_1, \dots, A_{m-1})$。由于 C 是 $m-1$ 次齐次的，该系数关于这些矩阵是对称的多重线性的。当它们全都等于 A 时，该系数为 $(m-1)!C(A)$。

取 $A_\ell = v_\ell v_\ell^*$ 和 $t_\ell > 0$。矩阵 $\sum_\ell t_\ell A_\ell$ 的核为 $\{w:$ 对于所有 $\ell\}$，$v_\ell^* w = 0$ 均为，因为它的二次型是 $\sum_\ell t_\ell |v_\ell^* w|^2$。它是半正定的，且其像是 v_ℓ 的四元数张成空间，因此其秩至多为 $m-1$。引理 2.3 表明，它的余子式消去每个 v_ℓ。恒等式 $C(\sum_\ell t_\ell A_\ell) v_{\ell'} = 0$ 在所有 $t_\ell > 0$ 所构成的开集上成立。取其 $t_1 \cdots t_{m-1}$ 系数可得，对于每个 ℓ'，都有 $\mathcal{C}(A_1, \dots, A_{m-1}) v_{\ell'} = 0$。

现在在带有实余向量 ξ_ℓ 的 $u_\ell(z) = e^{\xi_\ell \cdot z}$ 上检验极化微分恒等式，其中点积使用 z 的实坐标。根据引理 2.2， $H(u_\ell) = \frown\frown u_\ell \xi_\ell \xi_\ell^*$。 $\mathcal{C}$ 的多重线性将 $\prod_\ell u_\ell$ 提取出来。对该乘积求导，并将其从散度中约去后，四元数散度便是以下行

$$\left(\sum_\ell \widehat{\xi_\ell} \right)^* \mathcal{C}(\widehat{\xi_1}\widehat{\xi_1^*}, \dots, \widehat{\xi_{m-1}}\widehat{\xi_{m-1}^*}).$$

$\widehat{\ }$ 该矩阵是厄米矩阵，并且消去每个 ξ_ℓ，因此所显示的行归零。要理解为何这些检验足够，将极化微分表达式展开为实导数 $\prod_\ell \partial^{\gamma_\ell} u_\ell$ 的乘积。其系数是常数。在指数函数上求值会将每个 $\partial^{\gamma_\ell} u_\ell / u_\ell$ 替换为 $\xi_\ell^{\gamma_\ell}$。所得多项式对所有 ξ_ℓ 均为零，因此其所有系数都必须为零。这证明了光滑函数上的极化恒等式。令所有 $u_\ell = u$ 取值为 $m-1$ 并除以 $(m-1)!$，即可证明余子式恒等式。□

对于光滑区域 $\Omega = \{r<0\}$，记 $\mathbf{n} = \nabla r / |\nabla r|$ 为向外实单位法向量，并以 $\nu = G(r)/|\nabla r|$ 表示其四元数编码。四元数正交补 $\nu^\perp = \{w : \nu^* w = 0\}$ 一般小于实切超平面，后者仅要求与 $\mathbf{n}$ 实正交。若 A 具有无散的实列，则对 $vA^{\mathbb{R}}\nabla u - uA^{\mathbb{R}}\nabla v$ 应用实散度定理。对称性使得分别在 u 和 v 上求导的两项相互抵消。将两个法向分量编码后，得到

$$\int_\Omega (vA : H(u) - uA : H(v)) = \int_{\partial\Omega} \operatorname{Re}\left(v\nu^* A G(u) - u\nu^* A G(v) \right) dS. \tag{2.6}$$

假设 u 在边界上为零。取 r 为最后一个局部坐标，并沿该坐标从 0 积分到 r，对 u 求导，可知 $u = \rho r$，其中 ρ光滑。在边界上，$G(u) = \rho G(r) = \nu \partial_{\mathbf{n}} u$，因此式 (2.6) 中第一个法向项为 $v(\nu^* A \nu)\partial_{\mathbf{n}} u$。乘积法则给出边界上的

$$H(u) = \rho H(r) + G(\rho)G(r)^* + G(r)G(\rho)^*.$$

对于 $\nu^\perp$ 中的向量，最后两项作为二次型均消失，因为 $G(r) = |\nabla r| \nu$。等价地，压缩满足

$$H(u)|_{\nu^\perp} = \rho H(r)|_{\nu^\perp} \qquad \text{on } \partial\Omega. \tag{2.7}$$

对于 $A = C(H(u))$，系数 $\nu^* A \nu$ 因此就是该压缩海森矩阵的行列式，这是由引理 2.3 得出的。能量论证将对 u加入背景势，并使用同样的计算。压缩海森矩阵的一个零方向会使格林公式中的相应边界项消失。

2.3. **周期狄利克雷问题**。在一个纤维上，我们将求解四元数 Monge–Amp`ere 方程 $\det H(B_0 + u) = g$，其中 g是指定密度，B_0 是光滑的背景势。修正项 u在边界处消失，因此总势 $B_0 + u$取边界值 B_0。如果总势的四元数 Hessian 是正定的，我们就称其为可容许。正是这种正性使行列式方程成为椭圆型方程。（如果一个关于四槽变量的光滑函数的四元数 Hessian 是非负的 [2]，则称该函数为四元数多重次调和函数；在三槽情形中，可以在缺失的槽上取其常值延拓来检验这一点。可容许性要求严格不等式。）对于一个四元数坐标，$H(\psi) = \Delta\psi$，因此该方程是泊松方程。在更高维度中，行列式只确定特征值的乘积，而存在性证明必须控制每个特征值。我们将使用理论的两个推论：最大值原理使我们能够将深度 $-u$ 与显式函数进行比较，而移动边界处的光滑性使我们能够对三个基变量中的能量求导。

阿列斯克 [3, 定理 1.4] 证明了该方程在四元数球上的光滑狄利克雷问题可解性。我们给出 OpenAI [21,附录 A]中的周期三槽版本。

定理 *2.5*（周期狄利克雷问题）。设 $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ 为一个满格，设$V \subset \mathbb{R}^{2m}$为一个光滑有界区域，并令 $\Omega = (\mathbb{R}^m/\Lambda) \times V$。在海森矩阵 H的实槽中使用周期坐标，在其两个虚槽中使用 V 的坐标。假设 $r \in C^\infty(V)$ 是 V的定义函数，即 $r < 0$ 在 V内，$r = 0$ 在 ∂V上，且 $dr \neq 0$ 在 ∂V上。假设 $H(r) > 0$ 在 Ω 上。设B_0，$g \in C^\infty(\Omega)$ 为实值函数，并满足 $H(B_0) \geq 0$ 且 $g > \det H(B_0)$ 在 Ω 上。则存在唯一的 $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$，满足

$$\det H(B_0 + u) = g, \qquad H(B_0 + u) > 0, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

对于某些 $b \geq b' > 0$，有 $br \leq u \leq b'r$。对于此类数据和定义域的光滑有限维族，可以在局部一致地选取常数；并且在与固定定义域进行任何光滑局部识别时，解关于参数的依赖关系可光滑延拓至边界。

该问题仅在环面因子中具有周期性；Ω 的边界为 $(\mathbb{R}^m/\Lambda) \times \partial V$。函数 br 和 $b'r$ 是 u的下障碍函数和上障碍函数：由于 $r < 0$ 在内部，较大的常数给出下函数。

后续各节仅通过以下性质使用定理 2.5：可容许解的存在性和唯一性；障碍界 $br \le u \le b'r$，尤其是 $u \le 0$；直到边界的参数的光滑依赖性，这使我们能够在引理 3.2 中对能量求导；以及下述比较原理，命题 3.3 中的两个比较论证正是建立在该原理之上。定理 2.5 的证明见附录 A，采用了 Caffarelli、Nirenberg 和 Spruck 的方法 [11]。

引理 2.6（比较原理）。设 ψ_1、ψ_2 是在Ω上可容许的光滑势函数。若在Ω 内有$\det H(\psi_1) \ge \det H(\psi_2)$，且在 $\partial\Omega$ 上有 $\psi_1 \le \psi_2$，则在 $\psi_1 \le \psi_2$Ω 内有成立。将 Ω 替换为开子集时结论同样成立，例如纤维内部的球。

证明。对于在闭包上可容许的势函数 ψ_1，ψ_2，其海森矩阵之间的整条线段上的矩阵均为正定。应用微积分基本定理以及引理 2.3 中对数行列式的导数公式，得到

$$\begin{aligned}&\log\det H(\psi_1) - \log\det H(\psi_2)\\ &\quad= \left(\int_0^1 \big((1-\theta)H(\psi_2) + \theta H(\psi_1)\big)^{-1}\, d\theta\right) : H(\psi_1 - \psi_2).\end{aligned}$$

对于厄米系数 $A > 0$，实算子 $w \mapsto A : H(w)$ 的符号为 $\xi^* A\xi$，这是由引理 2.2 中的秩一恒等式得到的。将余向量 ξ 编码到其分槽中会保持其欧几里得长度。因此，特征值界 $cI \le A \le CI$ 给出了实现一致椭圆性所需的界 $c|\xi|^2 \le \widehat{\xi}^* A\widehat{\xi} \le C|\xi|^2$。显示式中的平均逆矩阵根据紧性具有这样的界。若 $\det H(\psi_1) \ge \det H(\psi_2)$，则 $\psi_1 - \psi_2$ 对该实椭圆算子是次调和的。因此，边界上的 $\psi_1 \le \psi_2$ 蕴含整个区域内的 $\psi_1 \le \psi_2$。通过双向应用比较原理即可得到唯一性。该论证同样适用于子域，例如纤维内部的比较球。□

3. Proof of the local smoothing conjecture

3.1. 纤维及其狄利克雷势函数。 在固定的空间环面上处理帽 $|v| \le \gamma$ 中的环域数据，其中 $\gamma > 0$ 将取为较小值。我们可以假设 $\|f\|_2 = 1$。设 $a = K/R$，其中 K 是一个较大的固定常数，将在 γ 之后选定，并假设 $4a < 1$。基点 $z = (t,\ \tau)$ 有三个实坐标，其中 $\tau \in \mathbb{C}_k$ 和 $a < s = |\tau| < 4$。位于 z 上方的纤维 是 z 上方的点 $(x,\ P,\ Z)$ 的集合：空间点 x 遍历环面，而 $(P,\ Z)$ 是附属于空间坐标的 $2n$ 个实辅助坐标。在纤维中，我们考虑定义域

$$\Omega_z = \{r < 0\}, \qquad r = 100|W|^2 + 100|Q|^2 - 1, \qquad Q = \Phi/a,$$

其中 x 不受限制。这里，r 是一个定义函数：其负值集是该定义域，而其零集（在此处梯度非零）是 Ω_z 的边界。我们称这个边界为纤维壁。完整的四元数 Hessian 的大小为 $(n+1) \times (n+1)$，而在固定 z 时，其空间块的大小为 $n \times n$。我们用 H_{fib} 和 G_{fib} 表示固定 z 时的海森矩阵和梯度。只有这两个对象不包含基点导数。流在所有变量下守恒；在一个纤维上，空间点 x 是积分变量，与 P 和 Z 一样。

坐标 W 和 Q 各自发挥不同作用。变量 W 是帽变量 v 中高斯函数的中心。坐标 Φ 沿流的方向保持不变，因此我们可以对 $Q = \Phi/a$ 施加截断函数，同时保留守恒律。

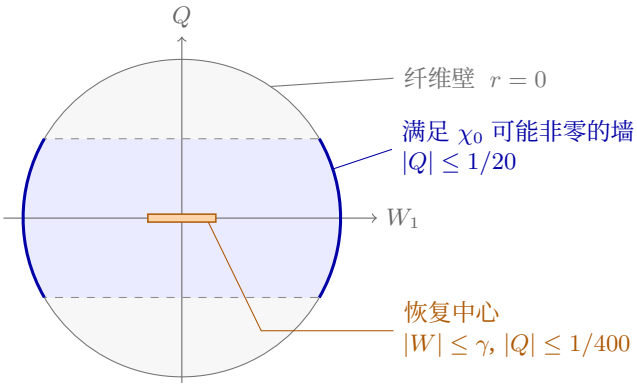

FIGURE 1. 在固定的 (t,τ,x) 处，纤维的一个实截面，其中 W_1 和 Q 为实数，且 W 的其余分量均为零。蓝色弧线满足 $|W| \ge \sqrt{3}/20$，因此对于所选的帽，高斯函数在该处很小。橙色条带标示用于恢复波的中心。其水平宽度为示意性的。

截断函数将承载波通量的墙面部分限制在 $|W| \ge \sqrt{3}/20$，使其与 $|v| \le \gamma$分开。恢复区域具有 $|W| \le \gamma$，此处的高斯函数足够大，可以在 $s = 2a$处求逆。图1展示了这两个区域。

在坐标（W，Q）中很容易看出这种分离。由于 $Z = \sqrt{2}Y - \tau$和 $P = W\bar{Y}$，Φ 的方程写作 $aQ = Y(1 + W \cdot W/2) - \sqrt{2}\,\tau$，因此

$$Y = \frac{\sqrt{2}\,\tau + aQ}{1 + W \cdot W/2}, \qquad P = WY, \qquad Z = \sqrt{2}\,Y - \tau.$$

该坐标图将每个定义域 Ω_z 中的（P，Z）部分映射到（W，Q）中的同一个复球。由于 $|W| \le 1/10$，且$|aQ| \le a/10 < s/10$，分母远离零，因此 $|Y| \asymp s$。在 Ω_z 上的积分采用原始实坐标中的 $dx\,dP\,dZ$，每个 $\mathbb{C}_k$ 坐标对应两个实维度。行列式同样取自原始坐标（x，P，Z），而不是坐标图（W，Q）中的行列式。

引理3.1。空间海森矩阵 $H_{\mathrm{fib}}(r)$ 正定，并且

$$H_{\mathrm{fib}}(r) \gtrsim s^{-2} I, \qquad G_{\mathrm{fib}}(r) G_{\mathrm{fib}}(r)^* \le H_{\mathrm{fib}}(r),$$
$$dP\,dZ \asymp a^2 s^{2d}\,dW\,dQ, \qquad \det H_{\mathrm{fib}}(r) \asymp a^{-2} s^{-2d}.$$

全海森矩阵 $H(r)$ 具有一个一维四元数核，该核包含于$G(r)^{\perp}$ 和 核 $H(|\Phi|^2)$ 中。此外，$H_{\mathrm{fib}}(|\Phi|^2)$ 的秩为一，其正特征值与一可比，且 $|G(|W|^2)| \lesssim s^{-1}$。

证明。从 (τ, P, Z) 到 (τ, W, Q) 的完整坐标变换在所考虑的区域上是可逆的。舍弃第一个输出后，复导数$D(10W, 10Q)$ 的秩为 n。引理 2.2 给出

$$H(r) = 4D(10W, 10Q)^* D(10W, 10Q), \qquad G(r) = 2D(10W, 10Q)^* (10W, 10Q)^{\mathrm{t}} i.$$

复秩也就是四元数秩，这是通过在 $\mathbb{C}_k$ 上进行行简化得到的。核是一条四元数直线，其表示为在固定 (W, Q) 时改变 τ。对于这条直线上的向量，其与 $G(r)$ 的内积以及经最后一行作用后的像

$D(10W, 10Q)$ 的行均为零。由于 $\Phi = aQ$， $|\Phi|^2$ 的海森矩阵公式将同一条直线置于 $\ker H(|\Phi|^2)$ 中。

在固定纤维上，逆图给出

$$dY = \frac{a\,dQ - YW \cdot dW}{1 + W \cdot W/2}, \qquad dP = Y\,dW + W\,dY, \qquad dZ = \sqrt{2}\,dY.$$

其导数的列在 W 中的大小为 $O(s)$，而在 Q 中的列大小为 $O(a)$。因此， $D_{\mathrm{fib}}(10W,\ 10Q)$ 的逆的范数为 $O(s)$，因为 $a < s$。将$H(r)$的公式限制在该纤维上，即可得到所需的下界。对于梯度不等式，取任意四元数列 w 进行检验。由柯西–施瓦茨不等式和 $|(10W,\ 10Q)| \le 1$可得

$$|G_{\mathrm{fib}}(r)^* w|^2 \le 4|D_{\mathrm{fib}}(10W, 10Q)w|^2 = w^* H_{\mathrm{fib}}(r) w.$$

为计算体积，将 $dP_1, \ldots, dP_d$ 与 dZ 外积。因子 dP_ℓ 中涉及 dY 的所有项都消失，因为 dZ 是 dY 的倍数。在剩余表达式中，只有 dY 的 dQ 部分保留下来。因此

$$dP_1 \wedge \cdots \wedge dP_d \wedge dZ = \frac{\sqrt{2}\,aY^d}{1 + W \cdot W/2}\, dW_1 \wedge \cdots \wedge dW_d \wedge dQ.$$

复行列式的绝对值平方就是实体积雅可比，因此$dP\,dZ \asymp a^2 s^{2d}\,dW\,dQ$。此外

$$\det H_{\mathrm{fib}}(r) = 4^n |\det{}_{\mathbb{C}_k} D_{\mathrm{fib}}(10W, 10Q)|^2 \asymp a^{-2} s^{-2d}.$$

最后， $\partial_P \Phi = W$, $\partial_Z \Phi = (1 - W \cdot W/2)/\sqrt{2}$，以及 $\partial_\tau \Phi = -(1 + W \cdot W/2)^{-}$ $/\sqrt{2}$。 Φ 的纤维导数有界，且远离零。因此， $H_{\mathrm{fib}}(|\Phi|^2) = 4(D_{\mathrm{fib}}\Phi)^* D_{\mathrm{fib}}\Phi$ 有一个大小与 1 可比的正特征值。对 $W = P/Y$求导得到 $|DW| \lesssim s^{-1}$。 $|W|^2$的梯度公式和 $|W|$的界进而给出 $|G(|W|^2)| \lesssim s^{-1}$。□

对于 $\delta > 0$，令 $\mathcal{K}_\delta$ 为概率核的周期化

$$c_n \delta^{-n} (1 + |x/\delta|^2)^{-n-2}.$$

取一个光滑函数 $0 \le \chi_0 \le 1$ ，使其在 $|Q| \le 1/100$ 处等于 1，在$|Q| \ge 1/20$处等于 0。在 x中将命题 2.1 的流光滑化，在 Q中将其截断，并加上一个小的余子式流：

$$A_w = \chi_0(Q)(\mathcal{K}_{1/R} *_x A_0), \qquad A = A_w + R^{-50n} C(H(r)), \qquad \mu = A_{tt}.$$

我们将 μ 称为密度。 x 中的卷积与列散度中的每个导数均可交换。此外，根据命题 2.1， DQ 与 x 无关，并且 $(DQ)A_0 = 0$。因此，平滑后的矩阵消去了 $(DQ)^*$的像，而该像包含 $G(\chi_0(Q))$。因此，列散度的乘积法则中截断函数的导数为零。

余子式项提供了一个严格为正的 tt 项，即使在波流消失的点也是如此。由引理 2.3 和 2.4， $C(H(r))$是半正定的，且其实列散度为零。作为线性映射，它支撑在 $H(r)$的一维核上，其 tt 项等于空间块的行列式， $\det H_{\mathrm{fib}}(r) > 0$。引理3.1表明，这个核同时包含于 $G(r)^\perp$和 $\ker H(|\Phi|^2)$中，因此正则化既不产生壁面通量，也不与 $H(|\Phi|^2)$配对。波项与 $H(|\Phi|^2) = 4(D\Phi)^* D\Phi$的配对也为零，因为$(D\Phi)A_w = 0$。总之， A 是半正定的，且其实列散度为零， $\mu > 0$，并且A： $H(|\Phi|^2) = 0$。

令 $B_0 = \lambda|\Phi|^2$ 满足 $\lambda = R^{30n}$。 $H_{\mathrm{fib}}(B_0)$的正特征值与 λ可比。为估计 μ，回想帕塞瓦尔定理以及环带内格点的计数可得$\sum_{\kappa,\ v}|c_{\kappa,\ v}| \lesssim R^{n/2}$。流中的每个高斯振幅均为$O(R^d)$，因为 $s \geq a \geq 1/R$，所以 $\|A_0\| \lesssim R^{n+2d}$。余子式对 μ的贡献至多为$CR^{-50n}a^{-2}s^{-2d} \leq CR^{-50n+2+2d}$。当 R充分大时，这两个估计给出密度上界

$$\mu^{1/d} \leq \lambda. \tag{3.1}$$

在每条纤维上应用定理 2.5，其中定义函数为 r，背景项为 B_0，指定密度为 $g = \lambda\mu$。定义函数的海森矩阵严格为正，背景项的海森矩阵 $H_{\mathrm{fib}}(B_0)$ 是非负的，且行列式为零，而指定密度严格为正。于是我们得到一个解，该解在边界处光滑，并且关于 $(t,\ \tau)$ 光滑依赖，其形式为

$$H_{\mathrm{fib}}(B_0 + u) > 0, \qquad \det H_{\mathrm{fib}}(B_0 + u) = \lambda\mu, \qquad u|_{\partial\Omega_z} = 0. \tag{3.2}$$

狄利克雷障碍函数给出 $u \leq 0$。我们将 $-u$ 称为深度：它衡量势低于背景项的程度。

为了了解预期的深度，将秩一矩阵 $H_{\mathrm{fib}}(B_0)$ 对角化，并加上αI。原先为零的特征值变为 α，正特征值变为$\beta + \alpha$，其中 $\beta \asymp \lambda$。因此

$$\det\bigl(H_{\mathrm{fib}}(B_0) + \alpha I\bigr) = (\beta + \alpha)\alpha^d \asymp \lambda\alpha^d \qquad (0 < \alpha \lesssim \lambda). \tag{3.3}$$

因此，阶为 μ 的密度要求阶为 $\mu^{1/d}$的曲率，而根据 (3.1)，该曲率处于这一范围内。这正是背景项所起的作用。它以固定大小 λ 占据行列式的 n个因子，并为曲率留下 d 个因子。没有它，同样的计数会得到阶为 $\mu^{1/n}$ 的曲率，并且在能量中，以密度的 $1 + 1/n$ 次幂代替 $1 + 1/d = p_c/2$。背景项对流也不可见，因为 $A\colon\ H(B_0) = 0$。具有这种曲率且在半径为 $1/R$ 的球的边界上为零的二次函数，在其中心处的深度为 $R^{-2}\mu^{1/d}$ 阶。在命题 3.3 中，当我们控制整个球上的密度下界时，将使用这个二次函数作为比较函数。

3.2. 能量及其通量。 纤维的能量将深度与密度配对。原始能量为

$$F_0(z) = \int_{\Omega_z} (-u)\mu\, dx\, dP\, dZ.$$

根据第 3.1 节末尾的讨论，深度由 $\mu^{1/d}$ 控制，因此 F_0 衡量平方波的功率 $1 + 1/d = p_c/2$。我们希望得到关于基变量中能量的拉普拉斯算子的不等式。写作 $\tau = \tau_1 + k\tau_2$。 $z = (t,\ \tau)$ 的三个实变量承载着拉普拉斯算子

$$\Delta_z = \partial_t^2 + \partial_{\tau_1}^2 + \partial_{\tau_2}^2.$$

这些变量是时间坐标的三个分槽，下标 tt 指明四元数矩阵中相应的对角元素。例如，如果测试函数 η 仅依赖于 z，那么 $H(\eta)$ 只有元素 $H(\eta)_{tt} = \Delta_z\eta$。

A 的实列守恒使我们能够将这些导数从测试函数转移到 u上。正如我们下面将展示的，$\Delta_z F_0$ 中的内部项为 $-\int_{\Omega_z} A\colon\ H(u)\, dx\, dP\, dZ$。将正定无散张量与海森矩阵配对，这在塞尔关于实 Monge–Amp`ere 海森矩阵的补偿可积性中已有先例 [23, 第 5 节1]。这里

纤维黑塞矩阵是正定的。为了提取 A: $H(u)$中具有确定符号的部分，我们采用 Schur补，如同塞尔的对角元估计 [24, 命题 22]。

对 $0 \le \theta \le 1$，令 $D_\theta = H_{\mathrm{fib}}(B_0 + \theta u)$。全海森矩阵具有如下分块分解

$$H(B_0+u) = \begin{pmatrix} h & c^* \\ c & D_1 \end{pmatrix} = (h - c^* D_1^{-1} c) e_t e_t^* + \Sigma, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} c^* D_1^{-1} c & c^* \\ c & D_1 \end{pmatrix} \ge 0.$$

这里， e_t 是第一列坐标，而实标量 $h - c^* D_1^{-1} c$ 是空间块 D_1的 ***Schur***补。它是在空间变量中配方后 tt 项所剩下的部分，并且没有确定的符号。另一方面，余项 Σ 是半正定的：其在时间分量q 和纤维列 v 上的二次型为 $(v + D_1^{-1} c q)^* D_1 (v + D_1^{-1} c q)$，由于$D_1 > 0$，该二次型非负。因此 $A:\ \Sigma \ge 0$，因为在 Σ 的标准正交特征基下，配对 $A:\ \Sigma$ 是 Σ 的非负特征值与 A的非负对角项之积的和。

根据引理 2.3 中的舒尔行列式公式，标量 $h - c^* D_1^{-1} c$ 为 $\det H(B_0+u)/\det D_1$。将 $e_t e_t^*$ 与 A 配对得到 $A_{tt} = \mu$，而方程 $\det D_1 = \lambda\mu$ 随后消去了 μ。由于 $A:\ H(B_0) = 0$，我们得到

$$A : H(u) = A : \Sigma + \lambda^{-1} \det H(B_0+u). \tag{3.4}$$

右侧第一项对 $\Delta_z F_0$的贡献符号有利。完整行列式没有确定的符号，必须将其抵消。

为找到修正项，考虑 $0 \le \theta \le 1$对应的 $H(B_0+\theta u)$的余子式。其tt项是纤维块 D_θ 的行列式，而它与 $H(u)$的缩并为 $\partial_\theta \det H(B_0+\theta u)$。如果从 $u\det D_\theta$的纤维积分开始，那么我们用于 F_0 的同一个格林恒等式便会产生完整行列式的导数。因此，对 θ 积分得到 $\theta = 1$处的完整行列式，因为秩一背景在 $\theta = 0$处的完整行列式为零。这启发我们引入修正项

$$E(z) = \lambda^{-1} \int_{\Omega_z} u \int_0^1 \det D_\theta \, d\theta \, dx \, dP \, dZ, \qquad F = F_0 + E.$$

利用$\det D_1 = \lambda\mu$，我们也可以将修正后的能量写成

$$\lambda F = \int_{\Omega_z} (-u) \left(\det D_1 - \int_0^1 \det D_\theta \, d\theta \right) dx \, dP \, dZ. \tag{3.5}$$

注记 （两个实变量的模型）。 在最简单的实数类比中，可以手动看出这种抵消：一个底变量 z、一个纤维变量 $x \in [-1,1]$，以普通黑塞矩阵 D^2 代替 H，没有背景项，且有 $\lambda = 1$。设 A 是取值于半正定对称 2×2矩阵的光滑场，其列无散，且满足 $A_{zz} > 0$；再设 $u(z,x)$满足纤维方程 $u_{xx} = A_{zz}$，其中 $u(z,\pm 1) = 0$。 θu的纤维黑塞矩阵是标量 θu_{xx}，因此能量的两部分为

$$F_0(z) = \int_{-1}^{1} (-u) A_{zz} \, dx, \qquad E(z) = \int_{-1}^{1} u \int_0^1 \theta u_{xx} \, d\theta \, dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} u_x^2 \, dx.$$

对 E 求两次导数，并在 z 中对 x进行分部积分。由于在 $x = \pm 1$处 $u_{zz} = 0$，边界项消失，于是得到

$$E''(z) = \int_{-1}^{1} \left(u_{zz} u_{xx} - u_{zx}^2 \right) dx = \int_{-1}^{1} \det D^2 u \, dx.$$

另一方面，对于 $e_z = (1,0)^{\mathrm{t}}$，舒尔分解为

$$D^2u = \frac{\det D^2u}{u_{xx}}\, e_z e_z^{\mathrm{t}} + \Sigma, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} u_{zx}^2/u_{xx} & u_{zx} \\ u_{zx} & u_{xx} \end{pmatrix} \geq 0,$$

并将其与 A配对，得到 $A\colon D^2u = A\colon \Sigma + \det D^2u$，因为 $A_{zz} = u_{xx}$。最后，由于 A 的列无散，经过两次分部积分可得

$$F_0''(z) = -\int_{-1}^{1} A : D^2u\, dx + \left[A_{xx}u_x\right]_{x=-1}^{x=1}.$$

将这三个公式相加，行列式项相互抵消：

$$(F_0 + E)'' + \int_{-1}^{1} A : \Sigma\, dx = \left[A_{xx}u_x\right]_{x=-1}^{x=1}.$$

这就是下文引理 3.2 中能量平衡 (3.6) 的模型，其右端是穿过墙 $x = \pm 1$的通量。该模型不包含背景项或指数 p_c；它只展示了这种抵消。

注记 （来自 K¨ahler 几何的能量）。 E 中的线段积分是 Mabuchi 能量公式 [19, (2.2.1)]的四元数版本。从以下意义上说，它是行列式的一个原函数。在固定纤维上，沿着在墙上消失的方向 v 改变 u。λE 的导数包含两项：一项来自改变线段积分外部的 u，另一项来自改变 D_θ。在第二项中，余子式的列散度为零，因此格林公式将 H_{fib} 从 v 移到 u上。两处边界值均为零。于是导数变为

$$\int_{\Omega_z} v \int_0^1 \left[\det D_\theta + \theta\, C(D_\theta) : H_{\mathrm{fib}}(u)\right] d\theta\, dx\, dP\, dZ = \int_{\Omega_z} v \det D_1\, dx\, dP\, dZ,$$

因为括号内是 ∂_θ(θ 行列式 D_θ)。所有这些表达式都延拓到秩一端点 D_0，因为行列式是一个多项式。同理，(3.5) 是 Aubin 的 J-泛函 [5, p 的对应物。 145], 它从参考势处的线性化中减去线段能量。在我们的情形中，参考势是$B_0 + u$，另一个端点是 B_0。

引理 3.2。 能量 F 是光滑的，并且满足

$$\Delta_z F + \int_{\Omega_z} A : \Sigma\, dx\, dP\, dZ = \int \frac{u}{r}\, G(r)^* A_w G(r)\, \delta(r)\, dx\, dP\, dZ. \tag{3.6}$$

这里 u/r 表示其在墙上的光滑延拓。梯度 $G(r)$是全梯度。在右侧的积分中， $\delta(r)$ $dx\, dP\, dZ$ 是固定纤维壁上的曲面测度除以 $|\nabla_{\mathrm{fib}} r|$。此外，

$$\frac{n-1}{n+1} F_0 \leq F \leq \frac{n}{n+1} F_0. \tag{3.7}$$

证明。移动纤维上的分部积分。 设 Ω 为总定义域，其坐标为 (z, x, P, Z)，满足 $(x, P, Z) \in \Omega_z$。在底空间上对光滑且紧支集的 $\eta(z)$ 进行测试。所有边界项均来自墙 $r = 0$，因为测试函数在底定义域两端附近消失。若 $\mathcal{A}$ 是具有散度为零的实列的厄米矩阵场，则在 Ω 上对 $v = \eta$ 应用 (2.6)。在墙上，含 $uG(\eta)$ 的项因 $u = 0$ 而消失。记 $\mathbf{n} = \nabla r/|\nabla r|$ 为

向外的实法向量，并以 $\nu = G(r)/|\nabla r|$ 表示其四元数列，我们在墙上还有$G(u) = \nu\,\partial_{\mathbf{n}} u$ 。因此，重新整理格林恒等式可得

$$\int_{\Omega} u \mathcal{A}_{tt} \Delta_z \eta = \int_{\Omega} \eta\, \mathcal{A} : H(u) - \int_{r=0} \eta\, (\nu^{*} \mathcal{A} \nu)\, \partial_{\mathbf{n}} u \, dS. \tag{3.8}$$

Ω 上的体积测度为 $dz\,dx\,dP\,dZ$，而 dS 是总定义域中墙的曲面测度。

要将边界项转化为对纤维壁的积分，首先在 $r = 0$ 附近写出$u = r(u/r)$。将 r 作为局部法向坐标，并沿该坐标从 0 到 r 对 u 的导数积分，可知该商是光滑的。求导得到，在墙上有 $\partial_{\mathbf{n}} u = (u/r)|\nabla r|$ 。在总定义域中，余面积公式为

$$dS = |\nabla r|\, \delta(r)\, dz\, dx\, dP\, dZ.$$

因此，$|\nabla r|$ 中的两个因子——一个来自法向导数，另一个来自测度——抵消了 $\nu^{*}\mathcal{A}\nu$ 中的分母。边界积分中剩下的密度为

$$\eta\, \frac{u}{r}\, G(r)^{*} \mathcal{A} G(r)\, \delta(r)\, dz\, dx\, dP\, dZ.$$

固定 z 后，仅对纤维变量应用余面积公式，得到

$$\delta(r)\, dx\, dP\, dZ = \frac{dS_{\mathrm{fib}}}{|\nabla_{\mathrm{fib}} r|}.$$

这一步解释了 (3.6) 中两个不同的法向量。流与总定义域中墙的一个法向量作缩并，而积分则是在单个纤维上进行的。

两个拉普拉斯算子。 取 (3.8) 中的 $\mathcal{A} = A$。左端为 $-\int F_0(z) \Delta_z \eta(z)\, dz$。乘以 -1 后，右端的体积项带负号，而墙项带正号。根据引理 3.1，余子式正则化消去了 $G(r)$，因此墙上只出现 A_w 。利用 (3.4)，我们得到分布恒等式

$$\begin{aligned} \Delta_z F_0 = & \int \frac{u}{r}\, G(r)^{*} A_w G(r)\, \delta(r)\, dx\, dP\, dZ \\ & - \int_{\Omega_z} A : \Sigma\, dx\, dP\, dZ - \lambda^{-1} \int_{\Omega_z} \det H(B_0 + u)\, dx\, dP\, dZ. \end{aligned}$$

对于 E，在 (3.8) 中使用 $\mathcal{A} = C(H(B_0 + \theta u))$。根据引理 2.4，其实列是无散的。（对于复数情形下固定的乘积域，°Ahag 等人将切片能量的拉普拉斯算子与完整的 Monge–Amp`ère 测度 [1, 定理 3.1]联系起来。）这里定义域随 z 变化，因此我们必须检查余子式不会产生墙项。

系数 $\nu^{*}\mathcal{A}\nu$ 是由引理 2.3 得出的、压缩到四元数正交补 $\nu^{\perp}$ 上的形式 $H(B_0 + \theta u)$ 的行列式。对于 $\nu^{\perp}$中的一个向量，r 的导数与u/r 的导数配对所产生的乘积法则项在压缩中消失。具体而言，(2.7) 给出

$$H(B_0 + \theta u)|_{\nu^{\perp}} = \big(H(B_0) + \theta (u/r) H(r)\big)|_{\nu^{\perp}}.$$

根据引理3.1，$H(r)$的零线位于 $\nu^{\perp}$ 中，并且也属于 $H(|\Phi|^2)$的核。由于 $B_0 = \lambda |\Phi|^2$，该直线上的每个向量都被压缩形式的两项同时消去。因此，压缩的行列式为零。此论证仅用到零线，即使全海森矩阵是不定的，也同样适用。

对于内部项，以 e_t 代替ν 应用相同的余子式限制公式，得到 $\mathcal{A}_{tt} = \det D_\theta$。余子式的导数公式给出 $\mathcal{A}$： $H(u) = \partial_\theta \det H(B_0 + \theta u)$。对(3.8)关于 θ 积分并除以 λ，得到

$$\begin{aligned}\Delta_z E &= \lambda^{-1} \int_{\Omega_z} \int_0^1 \partial_\theta \det H(B_0 + \theta u)\, d\theta\, dx\, dP\, dZ \\ &= \lambda^{-1} \int_{\Omega_z} \det H(B_0 + u)\, dx\, dP\, dZ.\end{aligned}$$

我们在第二个等式中使用了 $\det H(B_0) = 0$。现在，完整行列式在$\Delta_z E$ 和 $\Delta_z F_0$ 中分别带有相反的系数 λ^{-1} 和 $-\lambda^{-1}$，因此在两者之和中抵消了。这一抵消源于行列式的一阶变分，即使只有单个傅里叶模态时也成立。

(W, Q)中的逆图将纤维积分化为固定定义域上的积分，其被积函数和雅可比行列式光滑变化。利用该图中的固定球面，墙积分也同样如此。结合 u直至墙面的光滑依赖性，可知分布恒等式逐点成立。特别地，A： $\Sigma \geq 0$ 给出了壁面通量，它是 $\Delta_z F$的一个上界。

修正项的大小。最后一个问题是，减去行列式能量是否会使 F_0损失过多。在固定纤维上，

$$D_\theta = \theta D_1 + (1-\theta) H_{\mathrm{fib}}(B_0).$$

由于第二项是秩一的，将其加上后， θD_1 的行列式仅改变该方向上的一阶变分。 θD_1 的余子式按 θ^{n-1}缩放，因此

$$\det D_\theta = \theta^n \det D_1 + (1-\theta)\theta^{n-1} C(D_1) : H_{\mathrm{fib}}(B_0).$$

由多项式性，该公式可推广至 $\theta = 0$。对 θ 积分，并利用 $\det D_1 = \lambda\mu$ 和 $F = F_0 + E$, 得到

$$F = \frac{n}{n+1} F_0 - \frac{1}{\lambda n(n+1)} \int_{\Omega_z} (-u) C(D_1) : H_{\mathrm{fib}}(B_0)\, dx\, dP\, dZ.$$

这里， θ^n 和 $(1-\theta)\theta^{n-1}$ 的积分分别为 $1/(n+1)$ 和 $1/[n(n+1)]$,。最后一个缩并中的两个矩阵均为半正定，且 $-u \geq 0$，从而得到上界。

对于下界，利用欧拉恒等式 $C(D_1) : D_1 = n\det D_1$。该恒等式由对 $\det(\theta D_1) = \theta^n \det D_1$ 在 $\theta = 1$ 处求导得到。从欧拉恒等式中减去背景项，并积分，得到

$$\begin{aligned}n\lambda F_0 - \int_{\Omega_z} (-u) C(D_1) : H_{\mathrm{fib}}(B_0)\, dx\, dP\, dZ \\ = \int_{\Omega_z} (-u) C(D_1) : H_{\mathrm{fib}}(u)\, dx\, dP\, dZ \\ = \int_{\Omega_z} G_{\mathrm{fib}}(u)^* C(D_1) G_{\mathrm{fib}}(u)\, dx\, dP\, dZ \geq 0.\end{aligned}$$

在第二个等式中，我们在纤维上分部积分，利用了此处 $C(D_1)$ 的实列散度为零，以及 u 的边界值为零。所得被积函数非负，因为 $D_1 > 0$ 推出 $C(D_1) > 0$。最后两个公式

给出了精确的比较原理

$$F = \frac{n-1}{n+1}F_0 + \frac{1}{\lambda n(n+1)}\int_{\Omega_z} G_{\mathrm{fib}}(u)^{*}C(D_1)G_{\mathrm{fib}}(u)\,dx\,dP\,dZ.$$

这就证明了 (3.7)。 □

3.3. **估计单个纤维**。 我们需要从同一个滤波器得到两类估计。它在墙上的值很小，因此 (3.6) 中的边界项也很小。它在中心附近的倒数则使我们能够从流中恢复原波。这两类估计都使用尺度为 $1/R$ 的空间核。在上界估计中，我们随后在更大的尺度 Ms 上取平均，其中 M 是一个大常数，从而使比较势的导数很小。

命题 3.3。 对于充分小的固定帽口径 γ 和充分大的固定 K，上述构造的能量满足

$$\begin{aligned} F(0,\tau) &\lesssim a^2\|f\|_{p_c}^{p_c} \qquad (|\tau| = 4a),\\ F(t,\tau) &\gtrsim a^2\|e^{-it\sqrt{-\Delta}}f\|_{p_c}^{p_c} \qquad (|\tau| = 2a),\\ \Delta_z F(t,\tau) &\le Cs^{-2}e^{-cRs}F(t,\tau) \qquad (2a \le s = |\tau| \le 3). \end{aligned}$$

这些估计关于 R、帽的方向以及 $t \in \mathbb{R}$ 均一致。

证明。 在整个证明中，$2a \le s \le 3$ 和 N 表示一个固定的非负指数，该指数可以在推导过程中逐行增大。

深度和通量的上界。取一个大常数 M，考虑正的空间平均

$$\Pi(x) = \big(\mathcal{K}_{Ms} *_x |e^{-it\sqrt{-\Delta}}f|^2(x)\big)^{1/d}.$$

$\mathcal{K}_{Ms}$ 的导数逐点受核乘以 $(Ms)^{-1}$ 的相应幂所控制。由链式法则和杨氏不等式可得 (3.9)

$$|\nabla_x \Pi| \lesssim (Ms)^{-1}\Pi, \qquad |\nabla_x^2 \Pi| \lesssim (Ms)^{-2}\Pi, \qquad \int \Pi^{d+1}\,dx \le \|e^{-it\sqrt{-\Delta}}f\|_{p_c}^{p_c}.$$

对于最后一个不等式，卷积上的指数为 $(d+1)/d = p_c/2$。

在波流中，每个标量乘子都带有一个有界的偏振因子，乘以

$$(\kappa/|Y|)^{d/2}\exp\!\left(-\frac{\kappa|Y|}{2}|W-v|^2\right).$$

在 ξ/R 中对符号施加光滑截断函数，使截断函数在数据所在处等于一，并且支集包含于固定的扩张帽 $|v| < 1/30$ 中。至多到 $2n+4$ 阶，符号关于 ξ/R 的导数均受 $C(R/s)^{d/2}(Rs)^N$ 控制，因为 $\kappa \asymp R$ 且 $|Y| \asymp s$。在墙上 $\chi_0(Q)$ 可能非零的部分，$|Q| \le 1/20$ 强制推出 $|W| \ge \sqrt{3}/20$。扩张后的帽在该处仍满足 $|W - v| \ge \sqrt{3}/20 - 1/30 > 0$。对符号求导会产生 Rs 的幂，同时保留高斯函数。这带来额外因子 $e^{-c_{\mathrm{wall}}Rs}$，其中 $c_{\mathrm{wall}} > 0$ 与 γ 无关。

下面对该乘子及其倒数都使用以下核估计。在 ξ/R 中，一个紧支集符号的 $2n+4$ 阶以内导数均由 B 控制，其核由 $CB\mathcal{K}_{1/R}$控制。对傅里叶反演中的 ξ/R 应用 $(1-\Delta)^{n+2}$，再进行周期化，即可得到该结论。利用柯西–施瓦茨不等式与概率核，可以将其输出的平方控制为 $CB^2\mathcal{K}_{1/R} *_x |e^{-it\sqrt{-\Delta}}f|^2$。 A_w 中的额外卷积无关紧要： $\mathcal{K}_{1/R} *$

$\mathcal{K}_{1/R} \lesssim \mathcal{K}_{1/R}$ 可通过将欧氏卷积分解为两部分来证明，其中一部分满足到原点的两个距离之一至少为输出距离的一半；周期化后，该界仍然成立。此外， $\mathcal{K}_{1/R} \leq (MRs)^n \mathcal{K}_{Ms}$。逐分量应用这些事实，得到

$$\begin{aligned} \|A_w\| &\lesssim s^{-2d}(Rs)^N \Pi^d && (r \leq 0), \\ \|A_w\| &\lesssim s^{-2d}(Rs)^N e^{-c_{\mathrm{wall}} Rs} \Pi^d && (r = 0). \end{aligned} \tag{3.10}$$

我们已将固定次幂吸收到 Rs 中，并在必要时减小了 c_{wall}。第一个界也适用于 μ。它的附加项为 $O(R^{-50n} a^{-2} s^{-2d})$，而 $\mathcal{K}_{Ms}$ 中最近的晶格项有下界 $c_M s^{n+4}$，因此 $\Pi^d \gtrsim_M R^{-n-4}$，因为 $s \geq 1/R$ 且 $\|e^{-it\sqrt{-\Delta}} f\|_2 = 1$。

比较函数使用相同的平均值：

$$H_{\mathrm{fib}}(r\Pi) \geq (1 - C/M)\Pi H_{\mathrm{fib}}(r).$$

在四元数列 w 上应用海森矩阵乘积法则即可验证这一点。根据引理3.1， $G_{\mathrm{fib}}(r)$ 与 w 的配对不超过 $(w^* H_{\mathrm{fib}}(r) w)^{1/2}$。根据(3.9)， $G_{\mathrm{fib}}(\Pi)$ 与 w 的配对不超过同一表达式的 $CM^{-1}\Pi$ 倍。这就控制了两个混合项；而项 $rH_{\mathrm{fib}}(\Pi)$ 的相对大小为 $O(M^{-2})$，因为 $|r| \leq 1$。

固定 M 足够大，使得 $1 - C/M \geq 1/2$。加入秩一背景项后， $B_0 + C_1(Rs)^{N_1} r\Pi$ 的海森矩阵的行列式至少为

$$c\lambda\big(C_1(Rs)^{N_1}\Pi s^{-2}\big)^d \geq \lambda\mu$$

对充分大的固定 C_1 和 N_1 成立。第一个不等式利用了行列式计算 (3.3)，以及比较海森矩阵的各向同性下界。两个势具有相同的边界值 B_0。由引理 2.6，较大的行列式使比较函数低于 u，因此除以 $r < 0$ 并利用其在墙上的连续性可得

$$0 \leq u/r \lesssim (Rs)^N \Pi.$$

因此， $-u \lesssim (Rs)^N \Pi$。将此结果以及 (3.10) 中关于 μ 的估计代入 (3.7)。(Ω_z 的（P， Z）维体积为 $O(a^2 s^{2d})$，这与密度估计中的因子 s^{-2d} 相消。利用 (3.9) 得

$$F(t,\tau) \lesssim a^2 (Rs)^N \|e^{-it\sqrt{-\Delta}} f\|_{p_c}^{p_c}. \tag{3.11}$$

对于 (3.6) 中的墙积分，只有 $G(100|W|^2)$ 对 $G(r)^* A_w G(r)$ 有贡献，因为流会消去被动部分 $100|Q|^2$ 的梯度。 $100|W|^2$ 的完整梯度为 $O(s^{-1})$。在固定的（W， Q）椭球上应用余面积公式可知， $\delta(r)\, dP\, dZ$ 质量为 $O(a^2 s^{2d})$。(3.10) 中的墙估计、深度比较以及 (3.9) 现在推出

$$\Delta_z F(t,\tau) \lesssim a^2 s^{-2} (Rs)^N e^{-c_{\mathrm{wall}} Rs} \|e^{-it\sqrt{-\Delta}} f\|_{p_c}^{p_c}. \tag{3.12}$$

恢复内部的波。取中心 (x_0, P_0, Z_0)，满足 $|W| \leq \gamma$ 且 $|Q| \leq 1/400$。在以该点为中心、半径为 $1/R$ 的纤维球上，一旦 $K\gamma$ 和 K 足够大，就有 $|W| \leq 2\gamma$ 和 $|Q| \leq 1/100$，因为在这样的球上， W 的变化量为 $O((Rs)^{-1})$，而 Φ 的变化量为 $O(1/R)$。特别地， $\chi_0(Q)$ 在此处成立。对于 (2.4) 中的第一个乘子 S_0，因子

$$b_0 = \frac{1 + \mathrm{Re}(W) \cdot v/2}{\sqrt{2}}$$

有正的下界。将倒数符号乘以一个光滑截断函数，该函数在数据上等于 1，且支集包含于固定的扩张环带 $|v| \le 2\gamma$ 内。所得符号直到 $2n+4$ 阶的导数均有界，界为

$$C_\gamma (s/R)^{d/2} (Rs)^N e^{C\gamma^2 Rs}.$$

该指数项中的常数与 γ 无关，因为 $|W - v| \le 4\gamma$；截断函数的导数只会影响前因子。在球内任意固定的一对 $(P,\ Z)$ 处，逆乘子与 S_0 复合后，在频率支集上是恒等算子。在 x_0 处应用核估计和柯西–施瓦茨不等式可得

$$|e^{-it\sqrt{-\Delta}} f(x_0)|^2 \le C_\gamma (s/R)^d (Rs)^N e^{C\gamma^2 Rs} \big(\mathcal{K}_{1/R} *_x |S_0 e^{-it\sqrt{-\Delta}} f|^2 \big)(x_0).$$

对于 $|x - x_0| \le 1/R$，$x - y$处的正平均核与 $x_0 - y$处的取值可比较，并且对 y 一致：这些平移对应于重缩放欧氏核中的有界平移，而比较原理在周期化时逐项成立。因此，我们可以将右侧在 x_0 处的取值替换为在 x 处的取值。由 (2.4) 和 $\chi_0(Q) = 1$，所得平均值被 $\mu(x,\ P,\ Z)$ 所界定。因此，中心处的波振幅给出了整个球上密度的下界：在那里 $\mu \ge \mu(x_0)$，其中

$$\underline{\mu}(x_0) = c_\gamma (R/s)^d (Rs)^{-N} e^{-C\gamma^2 Rs} |e^{-it\sqrt{-\Delta}} f(x_0)|^2.$$

如果 $\mu(x_0) > 0$，则与二次函数进行比较

$$c_1 \underline{\mu}(x_0)^{1/d} \big(|x - x_0|^2 + |P - P_0|^2 + |Z - Z_0|^2 - R^{-2} \big).$$

距离是在纤维的局部实坐标中计算的。该二次函数的海森矩阵等于 $6c_1 \mu(x_0)^{1/d} I$。由于 $\mu(x_0)^{1/d} \le \mu^{1/d} \le \lambda$，根据 (3.3)，加入背景项后的行列式对于足够小的固定 $c_1 > 0$ 至多为 $\lambda \mu(x_0)$。比较二次函数在球的边界上为零，此处 $u \le 0$，而解的行列式更大，这是由 (3.2) 得出的。因此，根据引理 2.6，u 低于该二次函数，而在中心处

$$(-u)\mu \ge c_1 R^{-2} \underline{\mu}(x_0)^{1+1/d}.$$

当 $\mu(x_0) = 0$ 时，这同样成立。指数 p_c 正是在此处出现的：平方波振幅取 $1 + 1/d = p_c/2$ 次幂。

中心区域的 (P, Z)-体积与 $a^2 s^{2d} \gamma^{2d}$ 可比较。对上一个界进行积分并利用 (3.7)，得到

$$F(t,\tau) \gtrsim_\gamma a^2 (Rs)^{-N} e^{-C\gamma^2 Rs} \|e^{-it\sqrt{-\Delta}} f\|_{p_c}^{p_c}. \tag{3.13}$$

这里的尺度因子 $R^{-2} s^{2d} (R/s)^n = (Rs)^{n-2}$ 已吸收到多项式因子中。

选取足够小的 γ，使得 $C\gamma^2 < c_{\mathrm{wall}}/2$；然后选取足够大的 K，使半径为 $1/R$ 的球始终处于 $|W| \le 2\gamma$ 和 $|Q| \le 1/100$ 内。固定这些常数后，选取足够大的 R，以满足密度上界 (3.1) 以及 $4a < 1$。用 (3.12) 除以 (3.13)，得到 s^{-2} 乘以一个多项式，再乘以关于 Rs 的衰减指数。将多项式吸收到指数项中，即得命题中的微分不等式。在 $s = 4a$ 和 $s = 2a$ 处，Rs 分别取固定值 $4K$ 和 $2K$，因此由 (3.11) 和 (3.13) 可得两个圆估计。$\square$

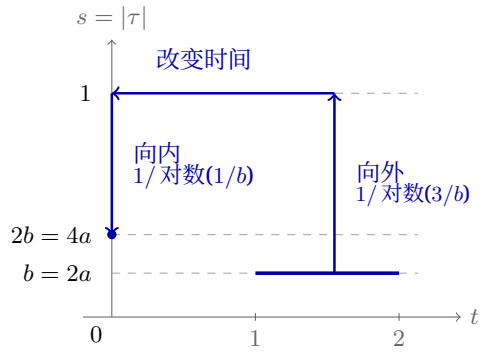

FIGURE 2. 对 τ的角度取平均后，(t, s) 中的比较原理。起始线段表示圆 $s = b$上的 $1 \le t \le 2$ 。端点表示 $t = 0$处的圆 $s = 2b$ 。两次径向比较各产生一个对数因子。时间上的转移使用固定尺度下的局部平均值不等式。半径仅为示意。

3.4. 基变量中的标量比较原理。能量的微分不等式在三个基变量 $(t,\ \tau_1,\ \tau_2)$ 上是椭圆型的。在证明的这一部分，实时间是标量椭圆问题的一个坐标。由于势 V 非负，不等式 $\Delta_z F \le VF$ 使得 F 成为 $-\Delta_z + V$ 的上解，而最大值原理保证， F 不小于边界上低于 F 的任意齐次方程解。我们利用这一比较方向，将 $t = 0$ 处的能量下界估计为 $1 \le t \le 2$ 上的能量。

命题 3.3 中的能量估计涉及 τ 平面上的两个不同圆。在较小的圆上，能量控制 $1 \le t \le 2$处的波。在较大的圆上， $t = 0$ 处的能量由初始数据控制。为连接二者，我们先向外移动到半径 1 处，此时几何结构与 R 无关，并使用局部平均值不等式在实时间上向后移动。然后再向内移动，到达两个小圆中较大的那个，如图2所示。

熟悉 Wolff [30] 以及 Bour-gain 和 Demeter [9]的尺度归纳论证的读者，可能会发现下面的启发式比较很有帮助。在辅助半径 s 处，滤波器以尺度 $(Rs)^{-1/2}$ 分辨角度。在圆 $s = b = 2a$和 $s = 2b$ 上，该尺度与 R无关，而命题 3.3 将那里的能量与波的 L^{p_c} 范数进行比较。在 $s = 1$ 处，它就是波包尺度$R^{-1/2}$，在那里证明过程中进行时间转移而不会产生对数损失。尺度归纳从一个尺度传递到下一个尺度，并在每一步付出代价，这就是此类论证最终会出现 R^{ε}形式损失的原因。这里，每一条径向路径都通过对标量不等式 $\Delta_z F \le VF$进行一次比较，同时经过所有中间角尺度，并付出一个 $\log(1/b) \asymp \log R$因子。

与势的比较是 OpenAI 的圆柱估计 [21, 引理 6.1]。

引理 3.4 （圆柱上的比较）。 设 $0 < b < 1/4$ 且令 $V\colon\ [b, 3] \to [0, \infty)$连续，其中

$$\int_b^3 s \log(s/b) V(s)\, ds \le M_V, \qquad \sup_{1/2 \le s \le 3/2} V(s) \le M_V.$$

假设 $F \ge 0$ 在 $\mathbb{R}_t \times \{\tau \in \mathbb{R}^2 :\ b \le |\tau| \le 3\}$ 上光滑，并且在内部满足 $\Delta_z F \le V(|\tau|)\, F$。那么它的圆周平均

$$\overline{F}(t,s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t, s\cos\theta, s\sin\theta)\, d\theta$$

满足

$$\overline{F}(0,s_0) \ge c_{M_V}\,\frac{\log(s_0/b)}{[\log(3/b)]^2}\int_1^2 \overline{F}(t,b)\, dt \qquad (b \le s_0 \le 1). \tag{3.14}$$

证明。 在 τ 平面上的极坐标中，拉普拉斯算子的角向部分积分后为零。因此，取平均可得

$$\partial_t^2 \overline{F} + \partial_s^2 \overline{F} + s^{-1}\partial_s \overline{F} \le V(s)\overline{F}.$$

径向方程。 对于 $S = 1$ 或 3，并固定 $\omega > 0$，考虑边值问题

$$U'' + s^{-1}U' = (V(s) + \omega^2)U \qquad (b < s < S)$$

端点值分别为 0、1，顺序不限。项 ω^2 来自下文实时间变量中的正弦或余弦。仅考虑拉普拉斯算子时，方程为 $(sU')' = 0$，因此边界值为 (0、1) 和 (1、0) 的解分别为

$$\frac{\log(s/b)}{\log(S/b)} \qquad \text{and} \qquad \frac{\log(S/s)}{\log(S/b)},$$

它们分别是平面环域 $[20,$ 上的通常调和函数定理 3.18]。我们证明，非负势至多使每个函数减少一个常数因子，并且这一结论对对数坐标中区间长度 $\log(S/b)$ 一致成立。

令 $x = \log(s/b)$ 和 $D = \log(S/b)$。在这些坐标下，$U''(s) + s^{-1}U'(s) = s^{-2}\partial_x^2 U$，因此变换后方程中 U 的系数为 $q(x) = s^2(V(s)+\omega^2)$，其中 $s = be^x$。求解初值问题 $\psi'' = q\psi$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$。由于只要 $q \ge 0$ 非负，ψ 就是凸的，因此 $\psi(x)$ 在整个 $[0, D]$ 上都满足 $\ge x$ 。对方程进行两次积分可得

$$\frac{\psi(x)}{x} = 1 + \int_0^x \frac{y(x-y)}{x} q(y)\frac{\psi(y)}{y}\, dy.$$

对于 $0 < y < x \le D$，因子 $y(x-y)/x$ 至多为 $\min(y, D-y)$。由假设，$\int_0^D \min(y, D-y)s^2V(s)\, dy$ 受 M_V 控制，因为 $\min(y, D-y) \le y = \log(s/b)$ 且 $dy = ds/s$。对于常数 ω^2 项，使用 $s = Se^{-(D-y)}$ 并对 $\omega^2 S^2(D-y)e^{-2(D-y)}$ 积分，可将其贡献控制在 $\omega^2 S^2/4$ 以内。由 Gronwall不等式 得到 $\psi(D)/D \le C_{M_V,\omega}$，因此解 $\psi(x)/\psi(D)$ 的下界为 $c_{M_V,\omega}x/D$。对于反向边界值，将坐标 $x \mapsto D - x$ 反向。系数的积分界不变，因为 $\min(y, D-y)$ 具有对称性。这给出下界 $c_{M_V,\omega}(D-x)/D$。
向外移动。使用区间 $[0,3]$ 的第一个Dirichlet特征函数，在时间上取加权平均，

$$\mathcal{F}(s) = \int_0^3 \sin(\pi t/3)\overline{F}(t,s)\, dt.$$

该权重在 $[1,2]$上有正下界。在 t中进行两次分部积分，得到

$$\int_0^3 \sin(\pi t/3)\partial_t^2 \overline{F}(t,s)\,dt = -\frac{\pi^2}{9}\mathcal{F}(s) + \frac{\pi}{3}\big(\overline{F}(0,s)+\overline{F}(3,s)\big).$$

边界贡献是非负的。因此，平均微分不等式给出 $\mathcal{F}'' + s^{-1}\mathcal{F}' \le (V+\pi^2/9)\mathcal{F}$。在 $s=b$ 匹配 $\mathcal{F}(b)$ 处，并在 $s=3$ 使用$\mathcal{F}(3)\ge 0$。将其与径向解乘以 $\mathcal{F}(b)$ 进行比较，该径向解的边界值为 $(1,\ 0)$，对于 $S=3$ 和 $\omega=\pi/3$，得到

$$\mathcal{F}(s) \ge c_{M_V}\mathcal{F}(b)\frac{\log(3/s)}{\log(3/b)}.$$

对于 $3/4\le s\le 5/4$，分子与 1 可比较。在此环带上使用极坐标测度 $2\pi s\,ds$ 进行积分。由于正弦函数至多为 1，$F(t,\ |\tau|)$ 在 $[0,3]\times\{3/4\le|\tau|\le 5/4\}$ 上的积分下界为 $c_{M_V}\mathcal{F}(b)/\log(3/b)$。这给出了第一个对数因子。

改变半径一处的时间。在 $-2<t<4$ 中，$1/2<|\tau|<3/2$，我们有 $\overline{\Delta_z F}\le M_V F$。为了得到一个与 b 无关的常数的局部不等式，添加一个实坐标σ。在 $\sigma=0$ 附近的一个小薄层中，函数 $F(t,\ |\tau|)\cos(\sqrt{M_V+1}\,\sigma)$ 为非负函数，其四维拉普拉斯算子为非正，这是因为关于σ 的二阶导数对该函数贡献 $-(M_V+1)$ 倍。根据超调和函数的平均值不等式，其在 $(t,\ \tau,\ 0)$ 处的值不小于以该点为中心的球上的平均值。在该球内一个较小的三维球与 σ 方向短区间的乘积上，余弦函数有正的下界。因此，$F(t,\ |\tau|)$ 不小于其局部三维平均值的某个固定倍数。

用半径固定且足够小、适用于此估计的有限个重叠球覆盖 $[-1,3]\times\{3/4\le|\tau|\le 5/4\}$。至少有一个球承载着刚得到的积分的固定比例。对于相邻球中的一点，以该点为中心、半径为覆盖半径四倍的球包含第一个球。平均值不等式给出该处的下界，其大小由第一个球上的积分控制。沿有限覆盖迭代可得

$$\overline{F}(t,1) \ge c_{M_V}\frac{\mathcal{F}(b)}{\log(3/b)} \qquad (|t|\le 1).$$

半径和球的数量仅取决于 M_V 和固定的环带，因此这一步不会引入额外的对数因子。

向内移动。取定义在 $[b,1]$ 上的径向解 U，满足 $U(b)=0$、$U(1)=1$，且 $\omega=\pi/2$。时间因子 $\cos(\pi t/2)$ 使得

$$c_{M_V}\frac{\mathcal{F}(b)}{\log(3/b)}\cos(\pi t/2)U(|\tau|)$$

在圆柱 $|t|<1, b<|\tau|<1$ 中被 $-\Delta_z+V$ 消去的函数。它在 $|t|=1$ 和 $|\tau|=b$ 上为零，在 $|\tau|=1$ 上则小于 F。由最大值原理以及 $(0,\ s_0)$ 处的径向下界可得

$$\overline{F}(0,s_0) \ge c_{M_V}\frac{\mathcal{F}(b)}{\log(3/b)}\frac{\log(s_0/b)}{\log(1/b)}.$$

在 $s_0=2b$ 处分子 $\log(s_0/b)$ 是一个固定的正数，因此在应用中，这一步会付出第二个对数因子。由于 $\mathcal{F}(b)\gtrsim\int_1^2 F(t,\ b)\,dt$ 且 $\log(1/b)\le\log(3/b)$，这就证明了 (3.14)。□

3.5. 从行列式能量到环域估计。我们先在固定环面 $\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/(100\mathbb{Z})^n$ 上，并在命题 3.3 中的一个帽内进行讨论。由齐次性，不妨设 $\|f\|_2=1$，并取足够大的 R，使得 $b=2a=2K/R<1/4$。势 $V(s)=Cs^{-2}e^{-cRs}$ 满足引理 3.4 的假设，其中常数 M_V 与 R无关：代换 $s=b\rho$ 可得

$$\int_b^3 s\log(s/b)V(s)\,ds\le C\int_1^\infty \frac{\log\rho}{\rho}e^{-2cK\rho}\,d\rho,$$

且 V 在 $[1/2,3/2]$上一致有界。对 τ的角度取平均后，两个圆估计对 $F(t,\ \tau)$仍然成立，因此得到的圆周平均满足

$$\overline{F}(0,2b)\lesssim a^2\|f\|_{p_c}^{p_c},\qquad \overline{F}(t,b)\gtrsim a^2\|e^{-it\sqrt{-\Delta}}f\|_{p_c}^{p_c}.$$

在 $s_0=2b$ 处应用 (3.14)，并约去 a^2。取 p_c次方根后，我们得到单帽估计，其中带有因子 $[\log(2+R)]^{2/p_c}$；齐次性则消去了 L^2归一化。对于有界的 $R\ge 2$，频率落在环面格点的一个固定有限子集中，因此可直接由傅里叶级数得到相同的估计。

现在我们在同一个环面上对帽集求和。将 $\phi=\sum_\theta\phi_\theta$ 表示为固定孔径帽集上的一个光滑划分，因此项数与 R无关。对于任意周期函数 f，符号为 $\phi_\theta(\xi/R)$的乘子会从固定频率格中选出相应帽集内的模态。其欧氏核为 $R^n\phi_\theta(Rx)$。要得到其环面核，将其沿周期格（$100\mathbb{Z}$）的平移求和^n。在一个周期单元上对它们的绝对值积分，至多为 $\|\check{\phi}_\theta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$，因为平移后的单元铺满 $\mathbb{R}^n$。对每个经过滤波的输入应用单帽估计并求和，得到

$$\|e^{-it\sqrt{-\Delta}}\phi_R f\|_{L^{p_c}([1,2]\times\mathbb{T}^n)}\lesssim[\log(2+R)]^{2/p_c}\|f\|_{L^{p_c}(\mathbb{T}^n)}\qquad(R\ge 2).\tag{3.15}$$

定理 *1.2* 的证明。关于 $\mathbb{R}^n$ 的核 $e^{-it\sqrt{-\Delta}}\phi_R$ 是

$$\Gamma_R(t,x)=\frac{R^n}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{iR(x\cdot\eta-t|\eta|)}\phi(\eta)\,d\eta.$$

对于 $1\le t\le 2$ 和 $|x|\ge 3$，$x\cdot\eta-t|\eta|$ 在 η 中的梯度大小至少为 $|x|/3$。沿梯度方向反复分部积分，并利用ϕ 的支集始终远离 0，可得

$$|\Gamma_R(t,x)|\le C_N R^{-N}(1+|x|)^{-N}\qquad(1\le t\le 2,\ |x|\ge 3)\tag{3.16}$$

对每个 $N>0$均成立。只需进行 $N+n$ 次分部积分，即可抵消前面的因子 R^n。

将 $\mathbb{R}^n$ 划分为单位立方体 $\mathcal{Q}$，并令 $10\mathcal{Q}$为与其同心、边长为十的立方体。对于$x\in\mathcal{Q}$，$f\mathbf{1}_{(10\mathcal{Q})^c}$ 的贡献可由一个与 $\mathcal{Q}$无关的单一函数控制，

$$C_NR^{-N}\big((1+|\cdot|)^{-N}*|f|\big)(x),$$

因为对于这一贡献，$|x-y|\ge 9/2$，因此（3.16）适用。利用带有 $N>n$ 的杨氏不等式，可以通过$O(R^{-N})\|f\|_{p_c}$控制所有远处贡献的 L^{p_c} 时空范数。

对于邻近数据，令 $x_{\mathcal{Q}}$ 为 $\mathcal{Q}$ 的中心，并采用平移坐标，使得 $\mathcal{Q}-x_{\mathcal{Q}}=[-1/2,1/2)^n$。在周期单元 $[-50,50)^n$上，定义

$$f_{\mathcal{Q}}(y)=f(x_{\mathcal{Q}}+y)\mathbf{1}_{[-5,5)^n}(y),$$

并将其周期延拓。它的各个副本支集互不相交，因此在周期单元上取勒贝格测度，有 $\|f_{\mathcal{Q}}\|_{L^{p_c}(\mathbb{T}^n)} = \|f\|_{L^{p_c}(10\mathcal{Q})}$。空间截断可能会扩展 $f_{\mathcal{Q}}$的傅里叶支撑，但估计 (3.15) 可直接应用于这个周期输入，因为 ϕ_R 作用在空间截断之后。

为比较这两个输出，将 $\Gamma_R(t,\cdot)$ 周期化。其周期化在每个 $\xi \in (2\pi/100)\mathbb{Z}^n$ 处具有傅里叶系数 $100^{-n}e^{-it|\xi|}\phi(\xi/R)$，这是通过对平移后的周期单元积分得到的。因此，它是关于勒贝格测度的环面卷积核。对于 $x \in [-1/2,1/2)^n$ 环面输出为

$$(e^{-it\sqrt{-\Delta}}\phi_R f_{\mathcal{Q}})(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n}\int_{[-5,5)^n}\Gamma_R(t,x-y+100\ell)f(x_{\mathcal{Q}}+y)\,dy.$$

项 $\ell = 0$ 恰好是将 $f\mathbf{1}_{10\mathcal{Q}}$ 在 $x_{\mathcal{Q}}+x$ 处求值所得的欧几里得输出。对于其余各项，$x-y$ 的每个坐标的绝对值至多为 $11/2$。在 ℓ 非零的每个坐标上，$x-y+100\ell$ 相应坐标的绝对值至少是 ℓ 相应坐标的 $100-11/2 = 94.5$ 倍。对这些坐标平方并求和，得到 $|x-y+100\ell| \geq 94.5|\ell|$。由 (3.16)，非零平移的总贡献因此逐点有界于

$$C_N R^{-N}\|f\|_{L^1(10\mathcal{Q})}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}(1+|\ell|)^{-N} \lesssim_{N,n} R^{-N}\|f\|_{L^{p_c}(10\mathcal{Q})}.$$

这里的 $N > n$ 使求和有限，并且可在固定体积的立方体上应用 H¨older 不等式。由于 $[1,2]\times\mathcal{Q}$ 的测度为 1，同一估计在 L^{p_c} 中也成立。现在对 $f_{\mathcal{Q}}$ 应用 (3.15)，得到

$$\|e^{-it\sqrt{-\Delta}}\phi_R(f\mathbf{1}_{10\mathcal{Q}})\|_{L^{p_c}([1,2]\times\mathcal{Q})} \lesssim [\log(2+R)]^{2/p_c}\|f\|_{L^{p_c}(10\mathcal{Q})}.$$

将此估计提升到 p_c 次方，并对互不相交的输出立方体求和。扩大的输入立方体 $10\mathcal{Q}$ 有有界重叠，因此 $\sum_{\mathcal{Q}}\|f\|^{p_c}_{L^{p_c}(10\mathcal{Q})} \lesssim_n \|f\|^{p_c}_{L^{p_c}(\mathbb{R}^n)}$。结合对远处贡献的估计，证明即告完成。□

我们以引言第一段中的聚焦例子结束本小节，该例子检验定理 1.2 中的对数；比较 [21, 命题-˜8.1]。取 ϕ 为实值、径向且非负的非零函数，并令 Γ_R按如下方式定义：取 Γ_R，并以 ϕ^2 替代 ϕ。对于 $t_0 = 3/2$，函数 $f = \Gamma_R(-t_0,\cdot)$ 满足

$$e^{-it\sqrt{-\Delta}}\phi_R f = \widetilde{\Gamma}_R(t-t_0,\cdot),$$

一个在时间 t_0 聚焦于原点的波。根据驻相法，存在常数˜C，使得对于 $C/R \leq |t| \leq 2$，核 $\Gamma_R(t,\cdot)$ 和 $\Gamma_R(t,\cdot)$ 在球面$|x| = |t|$宽度与 $1/R$ 相当的邻域内，大小与 $R^n(R|t|)^{-d/2}$ 相当，并且在远离该邻域时快速衰减。由于 $p_c d/2 = n$，可得

$$\|\widetilde{\Gamma}_R(t,\cdot)\|^{p_c}_{p_c} \asymp R^{np_c-n-1}|t|^{-1} \quad (C/R \leq |t| \leq 1/2), \qquad \|f\|^{p_c}_{p_c} \asymp R^{np_c-n-1}.$$

现在对 $1 \leq t \leq 2$ 积分。$|t-t_0|$ 在 C/R 与 $1/2$ 之间的每个二进区间贡献相当，且这样的区间约有 $\log R$ 个，因此当 R 足够大时

$$\|e^{-it\sqrt{-\Delta}}\phi_R f\|^{p_c}_{L^{p_c}([1,2]\times\mathbb{R}^n)} \gtrsim \log R\,\|f\|^{p_c}_{p_c}.$$

因此，对于这个 ϕ，定理 1.2 中常数的 p_c 次幂至少按 $\log R$ 增长，而证明给出的这个幂的上界为 $[\log(2+R)]^2$。这个例子表明，至少需要一个对数因子，但无法判定是否需要第二个。

3.6. 插值与频率求和。 对于同一个乘子$e^{-it\sqrt{-\Delta}}\phi_R$，Plancherel 给出关于 R 一致的 $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2([1,2]\times\mathbb{R}^n)$ 界。$L^\infty \to L^\infty$ 界为 $O(R^{d/2})$。为验证这一点，将截断函数分解为 $O(R^{d/2})$ 个部分，它们支集于孔径与 $R^{-1/2}$ 相当的帽集中。在以每个帽集的轴为中心的坐标 $\eta = (R^{-1/2}\eta', \ \rho)$ 中，经过重标度的截断函数支集于一个固定紧集上，其中 ρ 与 0 保持正距离，且各阶导数一致有界。去掉线性项 $-Rt\rho$ 后，波乘子的相位部分为

$$-Rt\big(\sqrt{\rho^2 + R^{-1}|\eta'|^2} - \rho\big) = -\frac{t|\eta'|^2}{\sqrt{\rho^2 + R^{-1}|\eta'|^2} + \rho}.$$

对于 $1 \le t \le 2$，其所有导数在支集上均一致有界。因此，对重缩放后的傅里叶积分进行分部积分，可得每个核的 L^1 范数均一致有界。对频率作线性缩放或对空间核作平移，都不会改变该范数。对各帽集求和，即得所述界。

在 2 与 p_c 之间进行插值时，借助定理 1.2 只需付出指数为 $d(1-2/p)$ 的对数因子。对于 $p \ge p_c$，与 L^∞ 插值时，p_c 界的权重为 p_c/p。因此，R 的幂为 $(d/2)(1-p_c/p) = d/2 - n/p$，而对数的幂为 $2/p$。因此，对于所有 $2 \le p < \infty$，我们有

$$\begin{aligned} &\|e^{-it\sqrt{-\Delta}}\phi_R f\|_{L^p([1,2]\times\mathbb{R}^n)} \\ &\qquad \lesssim_p R^{\sigma_p}[\log(2+R)]^{\min\{d(1-2/p),2/p\}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

定理1.1 的证明。 对于 $2 < p < \infty$，在空间频率上取一个光滑的二进分割统一。在环带 $|\xi| \asymp 2^\ell$, $\ell \ge 1$ 上，取 $R = 2^\ell$ 并使用一个在该环带上恒等于一的扩张截断函数，应用 (3.17)。环带截断函数与 $2^{\ell s_p}(1+|\xi|^2)^{-s_p/2}$ 的乘积具有一致可积的卷积核；将 ξ 按 2^ℓ 缩放至一个固定的紧环带，再进行分部积分即可看出这一点。因此，第 ℓ 项的贡献有如下界：

$$C_{n,p,\varepsilon}\, 2^{-\ell\varepsilon}(1+\ell)^{\min\{d(1-2/p),2/p\}}\|(1-\Delta)^{s_p/2}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

这些系数可求和。对于低频项，符号 $e^{-it|\xi|}$ 乘以原点附近的光滑截断函数，并且 $(1+|\xi|^2)^{-s_p/2}$ 对 $1 \le t \le 2$一致满足 Mihlin 导数界。这可用相同的 Sobolev 范数控制低频。在 $p = 2$ 处，Plancherel 直接给出结果，Sobolev 阶数为零。□

Appendix A. Proof of Theorem 2.5

定理 2.5 的证明。 由引理 2.6 可知唯一性成立。为证明存在性，我们将问题提升到四个分槽，并使用连续性方法。

第四个分槽与连续性路径。 在每个四元数坐标的 k槽中添入一份 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。这样便得到提升域 $\Omega = \Omega \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$，其具有完整四槽位 Hessian。将 r、B_0 和 g 在新增变量上作常值延拓。于是，所有涉及第四个分槽中导数的项都消失，因此其海森矩阵就是原来的三槽海森矩阵。边界仍完全由 ∂V给出。有了全部四个分槽，四元数酉旋转便可在平坦坐标图中作用。它们的无穷小作用有助于估计边界处的混合二阶导数。

从已知的修正项 $u = r$ 开始，沿着密度变化

$$g_\theta = (1-\theta)\det H(B_0 + r) + \theta g, \qquad 0 \le \theta \le 1.$$

对于每个 θ，我们都寻找一个可容许解，使其满足 $\log\det H(B_0+u)=\log g_\theta$，并且$u=0$ 在边界上；我们证明，存在此类解的 θ 构成的集合在 $[0,1]$ 中既是开集也是闭集。开性来自线性化方程的可逆性，闭性则来自一致估计。

开性。在解 $\psi=B_0+u$处，方程沿着一个在边界上消失的函数 w 的方向的导数为

$$\mathcal{L}w=H(\psi)^{-1}:H(w),\qquad \text{with real symbol } \widehat{\xi}^*H(\psi)^{-1}\widehat{\xi}.$$

在这个固定解处，海森矩阵在定义域的闭包上为正，因此 $\mathcal{L}$ 是一致椭圆的。使用由平坦内部坐标图和将边界展平的坐标图组成的有限覆盖，其中后者位于 V 因子中。第 6] 章中的局部 Schauder 估计 [14, 给出全局估计

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}}\lesssim\|\mathcal{L}w\|_{C^\alpha}+\|w\|_{C^0},\qquad w|_{\partial\widetilde{\Omega}}=0.$$

沿着从 Δ到 $\mathcal{L}$的线性路径，这个估计中的常数可以一致选取，因为椭圆性和系数界都是一致的。此外，$\Delta r=\operatorname{tr}H(r)>0$且 $\mathcal{L}r>0$，因此路径上的每个算子都会将 r 映射为一个有正下界的函数。对于右端项为 f的解 w，对 $\pm w+C\|f\|_{C^0}r$ 应用最大值原理。这给出 $\|w\|_{C^0}\lesssim\|f\|_{C^0}$，并消去估计中的最后一项。通过变分构造再结合 Schauder 正则性，可知起始的狄利克雷拉普拉斯算子可逆。在每个固定的环面变量取值下，此处使用的 Poincar´e 不等式在 V中成立。线性连续性方法现在表明，$\mathcal{L}$ 是从在边界上消失的 $C^{2,\alpha}$ 函数到 C^α的同构。隐函数定理给出邻近的可容许解，其光滑性则由椭圆正则性推出。

障碍函数与内部导数。密度路径的两个端点都严格大于 $\det H(B_0)$。在 $\theta=0$，这是通过将正定矩阵$H(r)$加到 $H(B_0)\geq 0$上得到的。该差距在闭域上一致存在。当 $b'>0$ 较小时，$\det H(B_0+b'r)$与 $\det H(B_0)$一致接近。当 b较大时，$H(B_0+br)\geq bH(r)$的行列式至少以 b^m的速度增长。因此，我们可以选择 $0<b'<1<b$ 使得

$$\det H(B_0+b'r)<g_\theta<\det H(B_0+br)$$

在定义域内以及沿路径均成立。这三个势的边界值都是 B_0。比较原理给出 $br\leq u\leq b'r$。在边界附近，对于光滑商 ρ，有 $u=\rho r$，因为 r 是横截于 ∂V的一个局部坐标。将障碍函数除以$r<0$ 并取边界极限，得到 $b'\leq\rho\leq b$。因此，$\nabla u=\rho\nabla r$ 在那里有界。

不等式 $H(r)\geq cI$ 和 $\det H(\psi)=g_\theta$ 给出

$$\mathcal{L}r\geq c\operatorname{tr}\big(H(\psi)^{-1}\big),\qquad \operatorname{tr}\big(H(\psi)^{-1}\big)\geq mg_\theta^{-1/m}\gtrsim 1.$$

迹估计就是逆海森矩阵的正特征值的算术—几何平均不等式。海森矩阵与沿任意常实单位方向 e的微分运算可交换。对方程求一次导数得 $\mathcal{L}\psi_e=(\log g_\theta)_e$。再求一次导数得

$$(\log g_\theta)_{ee}=\mathcal{L}\psi_{ee}+D^2(\log\det)\big|_{H(\psi)}[H(\psi_e),H(\psi_e)]\leq\mathcal{L}\psi_{ee},$$

由 log det 的凹性。$\log g_\theta$ 的导数一致有界。因此，对于一个足够大的固定 C，$\mathcal{L}(\pm\psi_e+Cr)\geq 0$，且 $\mathcal{L}(\psi_{ee}+Cr)\geq 0$。最大值原理将这些函数的上界限制在其边界最大值内。第一个应用给出一个

在整个定义域内的梯度界。第二个则将海森矩阵上界归结到边界上。

接下来需要在边界上对实海森矩阵进行一致于 θ 的估计。接下来的两个步骤先处理切向分量和混合分量，然后利用行列式求出最后一个法向分量。

切向和混合二阶导数。 在平坦坐标图中取一个边界点作为原点，并记$\mathbf{n}$为该点的实向外单位法向量， ν 为其四元数列。若 e, w 是原点处的实切向量，对 $u = \rho r$ 求导可得 $D^2u(e, w) = \rho D^2r(e, w)$。 ρ的导数乘以 r 或 r 的切向导数，而这两者在该点都为零。

为控制混合分量 $D^2u(\mathbf{n}\ e)$，我们改编 Caffarelli、Nirenberg 和 Spruck 在 [11, 第 2 节，(2.11)–(2.14)] 中的切向微分论证。我们需要一个刚体运动，其在原点处的速度为 e，且其法向分量沿边界的一阶变化为零。令 v 为 $D^2r\, e/|\nabla r|$ 在原点处的实切向投影，并将其视为四元数列，设

$$A = v\nu^* - \nu v^* - \nu(\nu^* v)\nu^*.$$

标量 $\nu^* v$ 是纯虚数，因为 v 是实切向量。取伴随并乘以 ν，得到 $A^* = -A$ 和 $A\nu = v$。实向量场 $\mathcal{V} = (e + Ax) \cdot \nabla$ 在 $\mathcal{V}r(0) = 0$ 处取值，对于任意实切向量 w,

$$\partial_w(\mathcal{V}r)(0) = D^2r(w, e) + |\nabla r|\, \mathbf{n} \cdot Aw = D^2r(w, e) - |\nabla r|\, w \cdot v = 0.$$

最后一个等式由 v 的定义得出。边界上的泰勒定理给出 $\mathcal{V}r = O(|x|^2)$，因此 $\mathcal{V}u = \rho\mathcal{V}r = O(|x|^2)$。

$\mathcal{V}$ 的局部流由平移和四元数酉旋转构成。根据引理 2.2 中的协变性，将 ψ 沿此流拉回，会在平移后的点处用一个酉矩阵对其海森矩阵进行共轭。因此，其行列式就是 g_θ 的拉回。在流时间为零处求导，得到 $\mathcal{L}(\mathcal{V}\psi) = \mathcal{V} \log g_\theta$。减去已知的 $\mathcal{L}(\mathcal{V}B_0)$，得到 $|\mathcal{L}(\mathcal{V}u)| \lesssim \operatorname{tr}(H(\psi)^{-1})$。

在定义域与一个小坐标图球的交集上，取障碍函数$C_1|x|^2 - C_2 r$。根据二次估计，使 C_1 在真实边界上大于 $|\mathcal{V}u|$ ，并根据梯度估计，使其在球面上大于 $|\mathcal{V}u|$ 。在四个分槽中， $H(|x|^2) = 8I$。当 C_2 足够大时， $\mathcal{L}r$ 的下界使得 $\mathcal{L}(C_1|x|^2 - C_2 r \pm \mathcal{V}u) \le 0$。两个函数在两部分边界上都非负，因此根据极小值原理，它们在内部也非负。二者在原点处都为零。取原点处的向内导数，可得 $|\partial_{\mathbf{n}}\mathcal{V}u(0)|$。最后，

$$\partial_{\mathbf{n}}\mathcal{V}u(0) = D^2u(\mathbf{n}, e) + \nabla u(0) \cdot A\nu = D^2u(\mathbf{n}, e),$$

因为 ∇u 是法向的，而 $A\nu = v$ 是实切向的。所有坐标图半径和常数都可以在紧边界上统一选取。

最后一个法向导数。实切空间作为实向量与$\mathbf{n}$正交。为使用行列式，我们将其压缩到四元数正交补$\nu^\perp = \{w :\ \nu^* w = 0\}$。在 $r = 0$上，乘积法则给出

$$H(u) = \rho H(r) + G(\rho)G(r)^* + G(r)G(\rho)^*, \qquad G(r) = |\nabla r|\nu.$$

最后两项在压缩到 $\nu^\perp$ 时消失，与 (2.7) 中的情形相同。因此， $H(\psi)$ 的压缩下界为 $b' H(r)|_{\nu^\perp} \gtrsim I$。我们仍需考虑的 ψ 的唯一一个实海森矩阵项是 $\psi_{\mathbf{nn}}$。根据秩一恒等式，它对 $H(\psi)$ 的贡献为 $\psi_{\mathbf{nn}}\nu\nu^*$ 。在

以 ν 开始的四元数正交归一基下，海森矩阵因此具有如下形式

$$H(\psi) = \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{nn}} + b_1 & c^* \\ c & D \end{pmatrix}.$$

此处 b_1, c, D 仅涉及实海森矩阵中已有界的元素，且$D \gtrsim I$。当 $m > 1$时，引理 2.3 中的舒尔行列式公式给出

$$\psi_{\mathbf{nn}} = \frac{g_\theta}{\det D} + c^* D^{-1} c - b_1.$$

右侧的每一项都有界。当 $m = 1$时，方程为 $\psi_{\mathbf{nn}} + b_1 = g_\theta$。此前的最大值原理论证现在给出了定义域内每个单位方向二阶导数的上界。由于 $\Delta\psi = \operatorname{tr} H(\psi) > 0$, 每个实海森矩阵特征值都不小于其他特征值上界之和的相反数。因此，沿路径可得完整的 C^2 上界。

闭性与光滑依赖性。 C^2 估计给出了$H(\psi)$特征值的上界。这些特征值均为正，且其乘积为 g_θ，并且一致地远离零。选取 $0 < \lambda_- < \lambda_+$ ，使得沿整个路径，这些特征值都严格位于 $[\lambda_-, \lambda_+]$内部，并且在两端都留有固定的余量。

为了应用埃文斯–克雷洛夫理论，我们将标量算子扩展到所有实对称矩阵；此前它仅在编码后的海森矩阵为正时有定义。在四槽提升的平坦坐标图中，令 S 为任意实对称 $4m \times 4m$ 矩阵。引理 2.2 中的编码是如下线性映射

$$\mathcal{H} : \operatorname{Sym}(4m, \mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Herm}(m, \mathbb{H}), \qquad \mathcal{H}(S)_{ab} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} e_\alpha \overline{e_\beta}\, S_{a\alpha, b\beta},$$

使得 $H(\psi) = \mathcal{H}(D^2\psi)$。映射 $\mathcal{H}$ 远非单射：当 $m = 1$ 时，它将实 4×4 矩阵映射为其迹，因此会丢失所有无迹方向。我们从不需要对它求逆。在锥面 $\mathcal{H}(S) > 0$ 上，我们只需进行复合，定义$F(S) = \log\det \mathcal{H}(S)$，其中行列式是编码矩阵的 Moore 行列式。

记 $\mathcal{E} = \{Q \in \operatorname{Herm}(m, \mathbb{H}) : \lambda_- I \le Q \le \lambda_+ I\}$。在每个 $Q \in \mathcal{E}$处，取 log det 的切平面，并在 $\mathcal{H}(S)$ 处对其求值。由此得到关于 S的实仿射函数，即使 $\mathcal{H}(S)$ 并非正定。定义

$$\ell_Q(S) = \log\det Q + Q^{-1} : \big(\mathcal{H}(S) - Q\big), \qquad \widetilde{F}(S) = \inf_{Q \in \mathcal{E}} \ell_Q(S).$$

由于 $\mathcal{E}$ 是紧集，下确界有限。由凹性可知，每个切平面都在正锥上 log det 的图像之上。当 $\mathcal{H}(S) \in \mathcal{E}$ 时，取 $Q = \mathcal{H}(S)$ 即可取等号，因此 $\widetilde{F} = F$。在所有实对称矩阵上， F 是仿射函数的下确界，故为凹函数；可与 [28, 引理 4.1] 中的构造比较。

$\mathcal{H}$ 的核不会破坏椭圆性，因为实椭圆性只检验正增量。对于秩一增量，引理 2.2 给出

$$\ell_Q(S + \xi\xi^{\mathsf{t}}) - \ell_Q(S) = Q^{-1} : \widehat{\xi}\widehat{\xi}^* = \widehat{\xi}^* Q^{-1} \widehat{\xi}.$$

由于 $|\widehat{\xi}| = |\xi|$, 该值位于 $|\xi|^2/\lambda_+$ 和 $|\xi|^2/\lambda_-$之间，与 Q无关。将任意实 $P \ge 0$ 分解为秩一增量并求和。所得界限对具有相同常数的每个 ℓ_Q 均成立，因此取下确界仍保持这些界限：

$$\frac{1}{\lambda_+} \operatorname{tr} P \le \widetilde{F}(S + P) - \widetilde{F}(S) \le \frac{1}{\lambda_-} \operatorname{tr} P \qquad (P \ge 0).$$

这就是整个实矩阵空间中的一致椭圆性。此外，在路径上， $\widetilde{F}(D^2\psi) = \log g_\theta$，因此该延拓并未改变任何解处的方程。

右端项 $\log g_\theta$ 具有一致的光滑界，而狄利克雷值是固定的光滑函数 B_0。现在可以对凹算子 [28, 定理 3.4] 使用内部 Evans–Krylov 估计，以及边界 $C^{2,\alpha}$ 估计 [25, 定理 1.2]。这些版本不要求包络函数在解的海森矩阵之外二次可微。将边界展开与半径和到边界距离相当的球上的内部估计相结合，再使用有限坐标覆盖，可得到某个 $\alpha > 0$下的一致 $C^{2,\alpha}$ 界。对于趋于某个极限的一列可解参数，其子列在$C^{2,\beta}$ 中收敛。方程、边界值和严格正性都可传递到极限。

为进行自举论证，我们回到原始的 F，它在包含解的海森矩阵的开锥面上是光滑的。将边界展平，并对切向导数应用 Schauder 估计，同时使用其给定的边界值。这些估计可以获得涉及切向方向的额外导数。一致椭圆性使我们能够局部地将方程求解为纯法向二阶导数关于其他各项及低阶导数的光滑函数。反复迭代即可得到直到边界的光滑性。因此，可解集合是闭的，并且包含 $\theta = 1$。

新增环面中的平移保持数据和方程不变。由唯一性可知，提升后的解在这些平移下保持不变，因此可下降到三槽定义域。对于光滑变化的定义域族，可利用其与固定定义域的局部同一化，将提升后的方程拉回。系数和边界数据光滑依赖于参数。其线性化与用于证明开性的狄利克雷同构共轭。逐步在更高阶的 H¨older 空间中应用隐函数定理，可得解直至边界的光滑依赖性。用于选取 b, b' 的严格行列式不等式对邻近参数仍成立，因此局部范围内可使用相同的常数。□

References

[1] P. ˚Ahag, U. Cegrell, S. Ko

Partial pluricomplex energy and lodziej, H. H. *integrability exponents of plurisubharmonic functions* **222** 2009 2036 2058 Pham 和 A. Zeriahi, Adv. Math ( ), doi:10.1016/j.aim.2009.07.002. [2] S. Alesker, *Non-commutative linear algebra and plurisubharmonic functions of quaternionic variables* **127** 2003 1 35 10 1016 0007 4497 02 00004 0 , Bull. Sci. Math. ( ), – . doi: . /S - ( ) - . [3] S. Alesker, *Quaternionic Monge–Ampère equations*, J. Geom. Anal. **13** (2003), 205–238. doi:10.1007/BF02930695. [4] S. Alesker, *Solvability of the quaternionic Monge–Ampère equation on compact manifolds with a flat hyperKähler metric* **241** 2013 192 219 , Adv. Math. ( ), – . doi:10.1016/j.aim.2013.03.021. [5] T. Aubin, *Réduction du cas positif de l'équation de Monge–Ampère sur les variétés kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité* **57** 1984 143 , J. Funct. Anal. ( ), – 153. doi:10.1016/0022-1236(84)90093-4. [6] M. S. Baouendi 和 F. Tr`eves, *A microlocal version of Bochner's tube theorem*, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 885–895. doi:10.1512/iumj.1982.31.31060. [7] W. Beckner、A. Carbery、S. Semmes 和 F. Soria, *A note on restriction of the Fourier transform to spheres* **21** 1989 394 398 10 1112 21 4 394 , Bull. London Math. Soc. ( ), – . doi: . /blms/ . . . [8] D. Beltran, J. Hickman 和 C. D. Sogge, *Sharp local smoothing estimates for Fourier integral operators* **45**, , 收录于《调和分析的几何方面》, Springer INdAM Ser. Springer, Cham, 2021, 29–105. doi:10.1007/978-3-030-72058-2 2. [9] J. Bourgain 和 C. Demeter, *The proof of the ℓ^2 decoupling conjectūre*, Ann. of Math. (2) **182** (2015), 351–389. doi:10.4007/annals.2015.182.1.9.

[10] Y. Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions*, Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991), 375–417. doi:10.1002/cpa.3160440402. [11] L. Caffarelli、L. Nirenberg 和 J. Spruck, *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge–Ampère equation* **37** 1984 369 402 , Comm. Pure Appl. Math. ( ), – . doi:10.1002/cpa.3160370306. [12] K. O. Friedrichs, *Symmetric hyperbolic linear differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), 345–392. doi:10.1002/cpa.3160070206. [13] S. Gan、D. He、X. Li 和 S. Wu, *On local smoothing estimates for wave equations*, 预印本，2026年。arXiv:2502.05973.[14] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 第2版，数学经典丛书，Springer，柏林，2001年。doi:10.1007/978-3-642-61798-0. [15] L. Guth、H. Wang 和 R. Zhang, *A sharp square function estimate for the cone in* $\mathbb{R}^3$, Ann. of Math. (2) 192 (2020), 551–581. doi:10.4007/annals.2020.192.2.6. [16] G. Kaiser, *Quantum physics, relativity, and complex spacetime: Towards a new synthesis*, North-Holland Math. Stud. 163, North-Holland, 阿姆斯特丹，1990年。arXiv:0910.0352.[17] G. Kaiser 和 R. F. Streater, *Windowed Radon transforms, analytic signals, and the waveequation*, 收录于《小波：理论与应用教程》, Academic Press，波士顿，1992年，399–441。arXiv:math-ph/0108010. [18] I. Łaba 和 T. Wolff, *A local smoothing estimate in higher dimensions*, J. Anal. Math. 88 (2002), 149–171. doi:10.1007/BF02786576. [19] T. Mabuchi, *K-energy maps integrating Futaki invariants*, Tohoku Math. J. (2) 38 (1986), 575–593. doi:10.2748/tmj/1178228410. [20] P. M¨orters 和 Y. Peres, *Brownian motion*, Cambridge Ser. Stat. Probab. Math. 30, Cambridge University Press，2010年。doi:10.1017/CBO9780511750489. [21] OpenAI, *Local smoothing for the Euclidean wave equation*, 预印本，2026年10月25日。预印本 PDF。[22] J. C. Peral, *L^p estimates for the wave equation*, J. Funct. Anal. 36 (1980), 114–145. doi:10.1016/0022-1236(80)90110-X. [23] D. 塞尔, *Divergence-free positive symmetric tensors and fluid dynamics*, Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire 35 (2018), 1209–1234. doi:10.1016/j.anihpc.2017.11.002. [24] D. 塞尔, *Mixed determinants compensated integrability and new a priori estimates in gas dynamics* **81** 2023 281 295 10 1090 1640 Quart. Appl. Math. ( ), – . doi: . /qam/ .[25] L. Silvestre 和 B. Sirakov, *Boundary regularity for viscosity solutions of fully nonlinear elliptic equations* **39** 2014 1694 1717 , Comm. Partial Differential Equations ( ), – . doi:10.1080/03605302.2013.842249. [26] C. D. Sogge, *Propagation of singularities and maximal functions in the plane*, Invent. Math. 104 (1991), 349–376. doi:10.1007/BF01245080. [27] T. Tao, *The Bochner–Riesz conjecture implies the restriction conjecture*, Duke Math. J. 96 (1999), 363–375. doi:10.1215/S0012-7094-99-09610-2. [28] V. Tosatti 、 Y. Wang 、 B. Weinkove 和 X. Yang, *$C^{2,\alpha}$ estimates for nonlinear elliptic equations in complex and almost complex geometry* **54** Calc. Var. Partial Differential Equations (2015), 431–453. arXiv:1402.0554. [29] X. Wang, *Wave packet density in local smoothing: refinements and limitations*, 预印本，2026年。arXiv:2609.34675.[30] T. Wolff, *Local smoothing type estimates on L^p for large p*, Geom. Funct. Anal. 10 (2000), 1237–1288. doi:10.1007/PL00001652.

Department of Mathematics, University of Illinois Urbana-Champaign
Email address: xw70@illinois.edu