arXiv:2611.30299v1 [math.NT] 23 Nov 2026

特殊特征下Drinfeld模的自同态代数

MIHRAN PAPIKIAN

Abstract. 我们分类了特殊特征下给定秩的、不能定义在有限域上的Drinfeld模的自同态代数中出现的除环。分类依据是代数的中心及其局部不变量。结合一般特征下以及有限域上的已知结果，这给出了给定秩的Drinfeld模的自同态代数的完整描述。

1. Introduction

1.1. **背景。** 简单阿贝尔簇的自同态代数是 $\mathbb{Q}$ 上的一个带正定对合的除代数。这类代数由Albert进行了分类；对于给定维数的阿贝尔簇而言，哪些代数会出现是一个经典问题，并在阿贝尔簇的算术和模空间研究中有诸多应用。在特征零情形下，该问题由Albert和Shimura解决；在有限域上则由Honda和Tate解决。在正特征的任意域上，每个这样的代数都会出现，但给定代数出现在哪些维数中，目前仅在特殊情形下已知；参见 [Oor 88], [CO09, (3.5)]。本文研究Drinfeld模的对应问题，并且在此情形下可以得到完整答案。

设 F 是一个常数域为 $\mathbb{F}_q$的全局函数域， ∞ 是 F的一个赋值，$A \subset F$ 是由在 ∞之外处处正则的元素构成的环。设 K 是一个 A-域，即一个配备有 $\mathbb{F}_q$-代数同态 $\gamma\colon A \to K$的域；设 ϕ 是一个秩为 r、定义在 K上的 Drinfeld A-模。自同态代数 $\mathrm{End}^\circ_K(\phi) = \mathrm{End}_K(\phi)\otimes_A F$ 是一个关于 F [的有限维除法代数（参见 Dri74，命题 2.4]的推论）。该代数可能具有的结构取决于 A-特征 $\mathrm{char}_A(K) = \ker(\gamma)$。

若 $\mathrm{char}_A(K) = 0$，则 $\mathrm{End}^\circ_K(\phi)$ 是 F 的一个域扩张，其中 ∞ 不分裂 [（参见 Dri74，命题 2.4], 的推论），且其次数整除 r （见下文命题 3.1）。每个这样的域都能出现；这一点可由该域各阶上的格以及解析一致化[看出（参见 Dri74，命题 3.1], [; Gek83，命题 2.4]）；关于 $A = \mathbb{F}_q[T]$，见 [Pap23， §5。3]

若 K是有限的，则 $\mathrm{End}^\circ_K(\phi)$ 是域 $F(\pi)$ 上由弗罗贝尼乌斯自同态 π生成的中心除代数。其局部不变量由 r 以及 $F(\pi$ 中 π 赋值非零的两个赋值决定。结合本田–泰特定理的类似结果，便可完整描述出现的代数 [Dri77，Gek91

，Yu95], [Lau96，第 2] 章。

剩下的情形，即特征$_A(K) = \mathfrak{p} \neq 0$且 ϕ 不能定义在有限域上，介于这两种情形之间。此时 $\mathrm{End}^\circ_K(\phi)$ 可能是非交换的 [Pin06b，例 5。2], 但根据 Pink 的定理 [Pin06b，定理 6，1], 极大子域在 r 上的次数不可能为 F。Pink 的工作

2020 数学学科分类。 11G09, 11R52, 16K20.关键词与短语。 德林费尔德模、自同态代数、中心除代数、泰特一致化。作者获得西蒙斯基金会（资助编号 MPS-TSM-00008093）的部分资助。

[Pin06a、Pin06b] 以及 Devic 和 Pink 的工作 [DP12]描述了伽罗瓦群在 ϕ 的 Tate 模上的像，具体而言，是通过 ϕ的自同态环以及其在 A的子环上的限制来描述的。另见 [Pin16、KP22], ，其中利用并计算了这些环的结构。在这一情形下，哪些代数可以作为 $\mathrm{End}^\circ_K(\phi)$ 出现这一问题，是在撰写 [Pap23],时提出的，当时人们注意到似乎尚缺乏完整的分类 [Pap23，注 4.1.5 (5)]。据作者所知，这个问题至今仍未解决。本文旨在填补这一空白。

1.2. 主要结果。 如果 ϕ 在某个域扩张上与一个定义在有限域上的 Drinfeld 模同构，我们就称它是等变的 。我们令 $\mathrm{End}^\circ(\phi) := \mathrm{End}^\circ_K(\phi)$。所谓除法 F-代数 ，是指一个除法环D ，它在其中心的某个子域 F 上具有有限维数。对于这样的 D，令 Z 为 D 的中心，并令

$$e(D) := [Z : F], \qquad d(D) := \sqrt{[D : Z]},$$

使得

$$[D : F] = e(D)\, d(D)^2.$$

定理 A。 设 $\mathfrak{p} \lhd A$ 为一个非零素理想，设 $r \geq 1$，并设 D 为一个以 Z 为中心的除法 F-代数。令 $e = e(D)$ 和 $d = d(D)$。存在一个 A-域 K，使得 特征$_A(K)$ $= \mathfrak{p}$，以及一个定义在 K 上、秩为 r 的非等型 ***Drinfeld*** 模 ϕ，满足 $\mathrm{End}^\circ(\phi) \cong D$ 作为 F-代数，当且仅当以下条件成立：

(1) ed 整除 r，且 $[D : F] < r$；*(2)* Z 在 ∞上有唯一的赋值 ∞_Z；*(3)* 存在 Z 在 $\mathfrak{p}$ 上的赋值 $\mathfrak{p}_Z$，使得 D 在除 ∞_Z和 $\mathfrak{p}_Z$之外的 Z 的每个赋值处都分裂；*(4)* 在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$中，$s \cdot \mathrm{inv}_{\infty_Z}(D) = -1/d$，其中 $s = r/(ed)$。

在这种情况下，K 可以取为在 $\mathbb{F}_q$上有限生成。

若 (1)–(4) 成立，则 $\gcd(d, s) = 1$，不变量 $\mathrm{inv}_{\infty_Z}(D) \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$由 s确定，且 $\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}_Z}(D) = -\mathrm{inv}_{\infty_Z}(D)$。因此，$D$由 Z、$\mathfrak{p}_Z$、d和 r唯一确定（相差一个同构）。反过来，给定在 ∞上有唯一赋值的 Z、Z 在 $\mathfrak{p}$上的赋值 $\mathfrak{p}_Z$，以及满足 $ed \mid r$、$ed^2 < r$ 且 $\gcd(d, r/(ed)) = 1$ 的 $d \geq 1$，则具有这些不变量的 Z 上的中心除代数确实存在。

对于 $d = 1$，定理 A 指出，域 Z 出现当且仅当 ∞ 在 Z 中不分裂，且$[Z : F]$ 是 r的真除子。在 $\mathfrak{p}$处没有条件。在一般特征下，出现的域相同，此外还包括次数为 r的域。条件 (1) 强化了 Pink 定理[Pin06b，定理 6。1], 该定理指出 $ed < r$；见推论 7.5。例如，定理 A (1) 蕴含，秩为 ≤ 5 的非等变 Drinfeld 模的自同态代数是交换的，而秩 6 时则会出现四元数代数。

用端同态比 $\mu(\phi) := r/[\mathrm{End}^\circ(\phi) : F]$来表述，定理 A 蕴含，对于非等变的 ϕ，$\mu(\phi) > 1$；每个有理数 > 1 都能出现；并且 $\mu(\phi) \leq 1$ 当且仅当 ϕ 是等变的；见推论 7.7。这回答了 Oort 关于阿贝尔簇的问题 [Oor19, Question 22.2]在 Drinfeld 模中的类似问题。对于特征为 p的阿贝尔簇，答案不同：根据 [Taf26], ，每个正有理数都能出现。

定理A 可由以下判据推导得出。

定理 A′。 设 $\mathfrak{p} \lhd A$ 是一个非零素理想，D 是一个除 F-代数，并且 $r \geq 1$。以下条件等价：

(1) 存在一个 A-域 K，其特征$_A(K) = \mathfrak{p}$，以及一个定义在 K 上、秩为 r 的非等变的 ***Drinfeld*** 模 ϕ，使得 $\mathrm{End}^\circ(\phi) \cong D$ 作为 F-代数。*(2)* 存在一个定义在 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ 上、秩为 $r' < r$ 的 ***Drinfeld*** 模 ψ，以及一个 F-代数的嵌入$D \hookrightarrow \mathrm{End}^\circ(\psi)$，使得 $[D: F]$ 整除 $r - r'$。

在 *(1)* 中，域 K 可以取为在 $\mathbb{F}_q$上有限生成的；在 *(2)* 中，可以取 $r' = r - [D: F]$。此外，若 *(1)* 成立，则每个在 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ 上秩为 r'、满足 $D \hookrightarrow$ 的 $\psi\,\mathrm{End}^\circ(\psi)$，都满足 $r \equiv r'$（模 $[D: F]$）。

为从定理 A′ 过渡到定理 A，我们根据局部不变量描述有限域上 Drinfeld 模的自同态代数中的除法子代数（命题 7.1）。结合本田–泰特定理的类比结果可知，对于某个在 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ 上秩为 r' 的 ψ，当且仅当 ed 整除 r'，且定理 A 的条件 (2)–(4) 在以 r' 替代 r 时成立，D 才嵌入 $\mathrm{End}^\circ(\psi)$（推论 7.2）。定理 A′的证明给出了关于自同态环的相同结论：一个 A-代数 $\mathcal{O}$ 是某个在 K 上的非等变 Drinfeld 模（其秩为 r，特征为 $\mathfrak{p}$）的自同态环，当且仅当对于某个在 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ 上秩为 $r' < r$ 且满足 $r \equiv r'$模 $\dim_F(\mathcal{O} \otimes_A F)$ 的 ψ，$\mathcal{O}$ 作为一个 A-子代数嵌入 $\mathrm{End}^{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}(\psi)$；参见定理 6.2。自同态环不能仅由局部不变量确定，因此我们不尝试给出关于它们的定理 A 类比结果。

定理 A′ 的最后一个断言，以及定理 A中条件 (2)–(4) 的必要性，都是以下结果的特例；该结果在任意特征下均成立。

定理 B. 设 ϕ 是一个秩为 r、定义在任意 A-域 K上的 ***Drinfeld*** 模，并设$D \subseteq \mathrm{End}^\circ(\phi)$ 是一个中心为 Z 的除法 F- 子代数。令 $e = e(D)$、$d = d(D)$ 和 $s = r/(ed)$。

(1) s 是一个整数，Z 在 ∞ 上有唯一的赋值 ∞_Z，且 $D \otimes_Z Z_{\infty_Z}$ 是一个除法代数，其不变量满足

$$s \cdot \mathrm{inv}_{\infty_Z}(D) = -\frac{1}{d} \quad in\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

特别地，$\gcd(d, s) = 1$。

(2) 除 ∞_Z 外，Z 至多有一个赋值使得 D 不分裂，且该赋值位于特征$_A(K)$之上。

(3) 若某个秩为 r'、定义在某个 A-域上的 ***Drinfeld*** 模 ϕ' 也使 D 嵌入 $\mathrm{End}^\circ(\phi')$，则 $r \equiv r'$ (模 $[D: F]$)。

当 ϕ 定义在有限域上且 $D = \mathrm{End}^\circ(\phi)$ 时，我们有 $s = 1$，并且（1）恢复了已知的值 $\mathrm{inv}_{\infty_Z}(D) = -1/d$。对于非等型 Drinfeld 模，$\phi$ 处的不变量 ∞ 可能与 $-1/d$不同。根据定理A′，$\mathrm{End}^\circ(\phi)$ 嵌入到有限域上某个 Drinfeld 模的自同态代数中。人们或许会认为，$\mathrm{End}^\circ(\phi)$ 本身就是某个定义在同 A-特征有限域上的 Drinfeld 模的自同态代数。下面的结果表明，即使对于交换代数，事实也并非如此。

定理 C。令 $A = \mathbb{F}_q[T]$，使得 $F = \mathbb{F}_q(T)$，且 $1/T$ 是 ∞ 处的一致化元。存在 ϕ 个非等型 ***Drinfeld*** 模，其 A-特征为 (T)，它们的自同态代数并非 A-特征为 (T) 的有限域上 ***Drinfeld*** 模的自同态代数。更准确地说：

(1) 对于奇数 q 和非平方元 $c \in \mathbb{F}_q^\times$，存在一个明确的秩为 4 的 ***Drinfeld*** 模 ϕ，定义在 $\mathbb{F}_{q^2}(x)$ 上，其自同态代数$^\circ(\phi) \cong F(\sqrt{T^+ + c})$。这个域不是有限域上特征为 q 的 ***Drinfeld*** 模的自同态代数，

但对于每个在其中分裂的 A 的素理想 $\mathfrak{q}$，它都是有限域上特征为 A 的 *Drinfeld* 模的自同态代数，其中 $\mathfrak{q}$ 。

（2）存在一个秩为15 的 ϕ，定义在 $\mathbb{F}_{q^3}(x)$ 上，使得$\mathrm{End}^\circ(\phi)$是定义在 F 上的中心除代数，其维数为 9 ，在 (T) 处的不变量为 $-1/3$ ，在 ∞ 处的不变量为 $1/3$ 。这个代数不是任何 A-特征有限域上 *Drinfeld* 模的自同态代数。

在（1）中，∞ 在 $Z=F(\sqrt{T+c})$ 中有唯一一个赋值，(T) 也如此，并且 Z 不是 F的常数域扩张。根据定理 A（2），第一条性质是 Z 能够存在的必要条件。后两条性质则使得 Z 不可能是 A-特征有限域上 Drinfeld 模的自同态代数（T）；参见例 8.1（3）。在（2）中，该代数是超奇异 Drinfeld 模 ψ （其 $\psi_T=\tau^3$）的自同态代数的相反代数。它在 ∞ 处的不变量为 $1/3$；而在有限域上，中心为 F 且维数为 9 的 Drinfeld 模的自同态代数在 ∞ 处的不变量为 $-1/3$；参见例 8.3（1）。

1.3. 方法。证明仅使用 Drinfeld 模理论和中心单代数理论中的标准工具。定理 B (1) 来自 $\mathrm{End}(\phi)\otimes_A F_\infty$ 嵌入由 τ^{-1} 上的扭 Laurent 级数构成、关于 F_∞ 的不变量为 $-1/r$ 的中心除代数。对于定理 A′ 的方向 (1) $\Rightarrow$ (2)，我们在一个离散赋值处对 ϕ 进行退化，此处它不具有潜在良约化，并利用自同态约化映射的单射性 [Gek83，引理 3.3]。接着，我们对 K 的超越次数进行归纳。同余关系由定理 B 得出。对于 (2) $\Rightarrow$ (1)，我们通过 Tate 一致化在 $k((x))$ 上构造 ϕ，它来自 ψ 和一个作为 D 某个整环上的投射模的格。这里我们使用 Drinfeld 的 Tate 一致化 [Dri74, §7]，以及 Gekeler 对 Tate 一致化模自同态的描述 [Gek83，命题 3.8]，；二者在任意特征下均成立。对 $\mathbb{F}_q[T]$ 上秩 2 的 Drinfeld 模而言，证明 [KP22，命题 2.12] 中也采用了相同的退化技巧。对于阿贝尔簇，将 (2) $\Rightarrow$(1) 中的构造类比应用于阿贝尔簇，并以 Mumford–Faltings 退化阿贝尔簇构造取代 Tate 一致化，这一做法归功于 Oort 和 van der Put [OvdP88，定理 (1.1)]。那里的关系 $r=r'+n[D:F]$ 对应于 $\dim(Y)=\dim(Z)+m[D:\mathbb{Q}]$。方向 (1) $\Rightarrow$ (2) 在阿贝尔簇情形下没有对应结论，因为非等型阿贝尔簇可能处处具有潜在良约化，而有限生成域上的非等型 Drinfeld 模则不可能如此（引理 4.2 (4)）。

定理 A 由定理 A′、定理 B、Drinfeld 模的本田–泰特定理 [Yu95，定理 3]，[Lau96，（2.2.2）]，以及关于域嵌入整体域上中心除代数的局部判据 [Lau96，（A.3.4）]。定理 B （2）是一个副产品。本文未使用 [Pin06a、Pin06b、DP12] 中关于伽罗瓦表示的任何结果。

1.4. 记号与约定。全文中，F、∞ 和 A 同上，F_∞ 是 F 在 ∞处的完备化，而 $|\cdot|$ 是 F_∞ 上的绝对值，其标准化满足 $|a|=\#(A/aA)$，其中 $0\neq a\in A$；参见 [Lau96, (1.0)]。设$\deg(a)=\log_q|a|$。对于一个 A-域 K，记 $K\{\tau\}$ 为具有 $\tau c=c^q\tau$的扭多项式环，并令 $\partial\colon K\{\tau\}\to K$ 表示常数项。定义在 K 上的秩为 r 的 Drinfeld 模是一个 $\mathbb{F}_q$-代数同态 $\phi\colon A\to K\{\tau\}$, $a\mapsto\phi_a$，满足 $\partial\phi_a=\gamma(a)$且对所有 $a\in A$ [都有$\deg_\tau\phi_a=r\deg(a)$；参见 §2]Dri74, [Lau96, (1.2.1)]。

对于域扩张 L/K，我们用 $\mathrm{End}_L(\phi)$ 表示定义在 L上的自同态。若$L\supseteq K^{\mathrm{sep}}$，则 $\mathrm{End}_L(\phi)=\mathrm{End}_{K^{\mathrm{sep}}}(\phi)$。这是 [Pap23，定理 3.3。9]，其证明只用到

一个与 $\mathrm{char}_A(K)$ 互素的元素，且 $\#\phi[a]$ 很大，因此适用于任意 A。环 $\mathrm{End}_{K^{\mathrm{sep}}}(\phi)$ 是一个秩至多为 r^2 的投射 A-模，而 $\mathrm{End}_{K^{\mathrm{sep}}}(\phi)\otimes_A F_\infty$ 是一个除法代数 [Dri74，命题 2.4 和推论], [Lau96，（2.1.4）]。因此，对某个有限可分扩张 K'/K，有 $\mathrm{End}_{K^{\mathrm{sep}}}(\phi) = \mathrm{End}_{K'}(\phi)$。特别地，若将 K 替换为一个更大的域，或替换为一个 ϕ 定义其上的子域，则 $\mathrm{End}^\circ(\phi)$ 不变。

局部域上中心单代数的局部不变量取值于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，并按照 [Lau96，（A.2.2）] 和 [Gek91，（2.1）] 中的方式进行归一化。在此归一化下，如果 ϕ 定义在带有 Frobenius π的有限域 k 上，那么 $\mathrm{End}_k^\circ(\phi)$ 是 $F(\pi)$ 上的中心除代数，其次数为 $r/[F(\pi)\colon F]$；域 $F(\pi)$ 在 ∞ 上有唯一的赋值，并且有唯一的赋值整除 π；$\mathrm{End}_k^\circ(\phi)$ 的不变量在这两个赋值中的第一个处为 $-[F(\pi)\colon F]/r$，在第二个处为 $[F(\pi)\colon F]/r$，在其他地方均为 0 [Gek91，定理 2。9], [Yu95，定理 1], [Lau96，（2.2.2）]。

我们所用的关于中心单代数的事实汇集于 §2。

2. Central simple algebras

我们回顾下文所用的关于中心单代数的事实。标准参考文献是 [Rei03，§§7，第 31 条，32]。我们所需形式的陈述见于 [Lau96，附录 A]。本节中，k 是一个域，而 Δ 是一个中心单 k代数。

(C1) 双中心化子。设 $B\subseteq\Delta$ 是一个简单的 k-子代数。那么 $\mathrm{Cent}_\Delta(B)$ 是简单的，并且

$$\mathrm{Cent}_\Delta(\mathrm{Cent}_\Delta(B)) = B,\qquad [\Delta : k] = [B : k]\cdot[\mathrm{Cent}_\Delta(B) : k]$$

[Lau96，(A.1.2)]。若 B 的中心是 k，则 $B\otimes_k \mathrm{Cent}_\Delta(B)$ 是简单的，因此乘法映射到 Δ 是单射；比较维数可得

$$\Delta\cong B\otimes_k \mathrm{Cent}_\Delta(B).$$

(C2)子域。设 Δ 是一个次数为 m 的除法代数，且 $L\subseteq\Delta$ 是一个包含 k 的子域，其中 $\ell = [L : k]$。那么 ℓ 整除 m，并且 $\mathrm{Cent}_\Delta(L)$ 是一个以 L 为中心、次数为 m/ℓ 的中心除代数，使得

$$\Delta\otimes_k L\cong \mathrm{Mat}_\ell(\mathrm{Cent}_\Delta(L))$$

[Lau96, (A.1.4)]。

(C3) 局部不变量。设 k 是一个局部域。不变量是同构 $\mathrm{inv}:\mathrm{Br}(k)\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，而次数为 n的中心除代数的不变量的阶为 n [Lau96，(A.2.2)]。在 (C2) 的情形下，

$$\mathrm{inv}(\mathrm{Cent}_\Delta(L)) = [L : k]\cdot\mathrm{inv}(\Delta)$$

[Lau96, (A.2.4)]。

(C4) 全局不变量。设 k 是一个全局函数域，对于 k 的赋值 v，令 $\mathrm{inv}_v(\Delta)$ =inv($\Delta\otimes_k k_v$)。那么，对除有限多个 v之外的所有 v，$\mathrm{inv}_v(\Delta) = 0$，$\sum_v \mathrm{inv}_v(\Delta) = 0$；$\Delta$ 的布劳尔类由 $\mathrm{inv}_v(\Delta)$ 决定，满足这两个性质的每一族不变量都能实现，并且 Δ 的指标是 $\mathrm{inv}_v(\Delta)$ 的阶的最小公倍数 [Lau96, (A.3.3)]。

(C5) 限制。设 k 为一个全局函数域，L/k 为有限扩张，w 为L 在 k的某个赋值 v 之上的一个赋值。则

$$\mathrm{inv}_w(\Delta\otimes_k L) = [L_w : k_v]\cdot\mathrm{inv}_v(\Delta)$$

[Lau96，（A.3.2）]。

(C6) 域嵌入。设 k 是一个全局函数域， Δ 是一个次数为 m 的除法代数，而 L/k 是一个次数为 ℓ 的有限扩张。那么， L 与 k 同构地嵌入 Δ 的一个子域，当且仅当 ℓ 整除 m 并且

$$\frac{m}{\ell}[L_w : k_v] \cdot \mathrm{inv}_v(\Delta) = 0 \qquad \text{for all places } w \mid v$$

[Lau96, （A.3.4）]。

3. The invariant at ∞

在本节中， K 是一个任意的 A域。

命题 3.1。 设 ϕ 是一个秩为 r 、定义在 K 上的 ***Drinfeld*** 模，并设 $D \subseteq \mathrm{End}^\circ(\phi)$ 是一个中心为 Z 的除法 F-子代数。令 $e = e(D)$ 和 $d = d(D)$。则：

(1) ed 整除 r。令 $s := r/(ed)$。***(2)*** $Z_\infty := Z \otimes_F F_\infty$ 是一个域，且 $D_\infty := D \otimes_Z Z_\infty$ 是一个以Z_∞为中心域的中心除代数。***(3)*** $s \cdot \mathrm{inv}(D_\infty) = -1/d$ 属于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。特别地， $\gcd(d, s) = 1$。

证明。我们可以假设 K 是代数闭的。同态 ϕ 通过连续性延拓为从 F_∞ 到环 $K((\tau^{-1}))$ 的单射，其中 $K((\tau^{-1}))$ 是关于 τ^{-1} [Yu03、§3 的扭 Laurent 级数环。1]。令 Δ_ϕ 为 $\phi(F_\infty)$ 在 $K((\tau^{-1}))$ 中的中心化子。它是一个以 F_∞ 为中心、次数为 r 且不变量为 $-1/r$ [Yu03、 §1 的中心除代数。4 和引理 2。4], [Zyw16，引理 2。2]; 关于 $A = \mathbb{F}_q[T]$ ，另见 [Pap23，命题 3.4.12、备注 3.4.16 (3)]。每个 $u \in \mathrm{End}(\phi)$ 都与 $\phi(A)$ 交换，因而也与 $\phi(F_\infty)$ 交换，所以 $\alpha \otimes u \mapsto \phi(\alpha)u$ 定义了一个从 F_∞-代数 $F_\infty \otimes_A \mathrm{End}(\phi)$ 到 Δ_ϕ 的同态。由于 $F_\infty \otimes_A \mathrm{End}(\phi)$ 是除法代数，该同态是单射。由于 F_∞ 在 F 上是平坦的，我们得到

$$D \otimes_F F_\infty \hookrightarrow \mathrm{End}^\circ(\phi) \otimes_F F_\infty \cong F_\infty \otimes_A \mathrm{End}(\phi) \hookrightarrow \Delta_\phi. \tag{3.1}$$

(1) 设 M 是 D的极大子域，因此 $[M : F] = ed$。由（3.1）， $M \otimes_F F_\infty$ 是除法代数 Δ_ϕ 的交换子代数，因此是一个次数为 ed 的域，其基域为 F_∞。由（ C2 ）， ed 整除 r。

(2) 由（3.1）， Z_∞ 是除法代数的子环，因此是一个域，并且 $[Z_\infty : F_\infty] = e$。设 $\Delta' := \mathrm{Cent}_{\Delta_\phi}(Z_\infty)$。这是一个以 Z_∞ 为基域、次数为 $r/e = ds$ 、不变量为 $e \cdot (-1/r) = -1/(ds)$ 的中心除代数，由（C2）和（C3）可知。代数 $D_\infty = D \otimes_F F_\infty$ 是以 Z_∞ 为基域、次数为 d的中心单代数，且包含于 Δ'中，因此它是一个除法代数。

(3) 设 $C := \mathrm{Cent}_{\Delta'}(D_\infty)$。由（C1）， C 是以 Z_∞ 为基域、次数为 s的中心除代数，并且 $\Delta' \cong D_\infty \otimes_{Z_\infty} C$。由（C3），

$$\mathrm{inv}(D_\infty) + \mathrm{inv}(C) = -\frac{1}{ds} \qquad \text{and} \qquad s \cdot \mathrm{inv}(C) = 0.$$

将第一个等式乘以 s，得到 $s \cdot \mathrm{inv}(D_\infty) = -1/d$。由于 $\mathrm{inv}(D_\infty)$ 属于 $\frac{1}{d}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$，这表明这个阶为 d 的循环群的生成元 $-1/d$ 是 s 的倍数，因此 $\gcd(d, s) = 1$。 □

推论 3.2. 设 D 是一个除法 F-代数。假设 D 作为 F-子代数嵌入 $\mathrm{End}^\circ(\phi_1)$ ，也嵌入 $\mathrm{End}^\circ(\phi_2)$，其中 ϕ_i 是一个秩为 r_i 、定义在 A-域 K_i 上的 ***Drinfeld*** 模，且 $i = 1, 2$。则 $r_1 \equiv r_2$(模 $[D : F]$)。

证明。命题 3.1 中的不变量 $\iota := \mathrm{inv}(D_\infty)$ 仅取决于 D，并且由 (C3) 可知其阶为 d，因为 D_∞ 是一个次数为 d 的除法代数。令 $s_i = r_i/(ed)$。于是 $s_1\iota = -1/d = s_2\iota$，因此 $(s_1 - s_2)\iota = 0$，且 d 整除 $s_1 - s_2$。故 $r_1 - r_2 = ed(s_1 - s_2)$ 可被 $ed^2 = [D : F]$ 整除。□

注记 3.3. (1) 假设 ϕ 定义在有限域 k' 上，且 $D = \mathrm{End}^\circ_{k'}(\phi)$。那么$r = ed$ [Gek91，定理 2。9], 因此 $s = 1$，命题 3.1 (3) 给出 $\mathrm{inv}(D_\infty) = -1/d$，与 [Gek91，定理 2。9]一致。因此，在 ∞处的不变量不为 $-1/d$的除法代数，不可能是有限域上某个 Drinfeld 模的自同态代数。这就是定理 C 中第二个例子的来源。

(2) 在一般特征下，D 是一个域，$d = 1$，而命题 3.1 只说明 ∞在 Z 中不分裂，并且 $[Z : F]$ 整除 r。证明中的代数 Δ' 于是是一个不变量为 $-e/r$ 的中心除代数，定义在 Z_∞ 上，它出现在 Drinfeld 模的 Sato–Tate 定律中：它是 B_ϕ 的代数 [Zyw16，§1。2]。Yu [Yu03] 则直接使用 Δ_ϕ 它本身。

定理 *B (1)* 和 *(3)* 的证明。第 (1) 部分是命题3.1，而 (3) 是推论 3.2。□

定理 B (2) 在一般特征下是平凡的，此时 D 是交换的。在特殊特征下，它在 §7中得到了证明；参见推论 7.4。

4. Isotriviality and stable reduction

从现在起，K 是一个 A-域，且 $\mathrm{char}_A(K) = \mathfrak{p} \neq 0$。于是 $\gamma(A) \cong A/\mathfrak{p}$ 是一个有限域。取一个非常数的 $a \in A$，并令 $N = r\deg(a)$。记

$$\phi_a = \gamma(a) + g_1\tau + \cdots + g_N\tau^N, \qquad g_N \neq 0,$$

并令

$$J_i(\phi) := \frac{g_i^{q^N-1}}{g_N^{q^i-1}} \in K \qquad (1 \le i \le N-1).$$

对于 $A = \mathbb{F}_q[T]$ 和 $a = T$，这些是 J-不变量，定义见 Potemine [Pot98，定义 2。1]：$J_i(\phi)$ 是其 $q^{\gcd(i,r)} - 1$ 次幂，即他的 j_i-不变量 [Pot98，(2.5)]；另见 [Pap23，第3 节。8]。

设 v 是 K 上的离散赋值，其赋值环为 R，极大理想为 $\mathcal{M}$，剩余域为 k。注意，$\gamma(A) \subset R$。我们称 ϕ 在 v 处具有稳定约化（分别为良约化），如果存在 $c \in K^\times$，使得所有 $c^{-1}\phi_b c$、$b \in A$ 的系数都属于 R，且它们模 $\mathcal{M}$ 的约化构成 k [上的 Drinfeld 模（分别为秩为 r 的 Drinfeld 模）Gek83, §3]。我们称 ϕ 在 v 处具有潜在良约化，如果它相对于 v 的某个扩张，在 K 的某个有限扩张上具有良约化。令

$$e(\phi) = \min_{1\le i\le N} \frac{v(g_i)}{q^i - 1},$$

$$N_v(\phi) = \max\left\{1 \le i \le N \;\middle|\; \frac{v(g_i)}{q^i-1} = e(\phi)\right\},$$

$$r_v(\phi) = \frac{N_v(\phi)}{\deg(a)}.$$

引理 4.1. 设 L/K 是一个有限扩张，w 是 v 到 L的一个扩张。那么，ϕ 在 w 处关于 L 有稳定约化，当且仅当 $e(\phi) \in w(L^\times)$。ϕ的每一个稳定约化，无论是在任意

有限扩张 K 上，还是相对于 v的任意扩张，都具有秩 $r_v(\phi)$。特别地，$r_v(\phi)$ 是一个整数，并且 ϕ 在 v 处有潜在良约化，当且仅当 $r_v(\phi) = r$。

证明。设 R_w 和 k_w 分别为 w的赋值环和剩余域。令 $c \in L^\times$，并设$\psi = c^{-1}\phi c$，于是 $\psi_a = \gamma(a) + \sum_i c^{q^i-1}g_i\tau^i$ 且

$$w(c^{q^i-1}g_i) = (q^i-1)\Big(w(c) + \frac{v(g_i)}{q^i-1}\Big).$$

因此，ψ_a 的系数属于 R_w 且具有非恒定约化，当且仅当 $w(c) = -e(\phi)$；在这种情况下，ψ_a 的约化具有 τ-次数 $N_v(\phi)$。若 ψ 的系数属于 R_w，且其约化 ψ 是一个 Drinfeld 模，则 ψ_a 是非恒定的，因此 $w(c) = -e(\phi)$，并且 ψ 的秩为$N_v(\phi)/\deg(a) = r_v(\phi)$。

反过来，设 $w(c) = -e(\phi)$。对于 $b \in A$，有 $\psi_b\psi_a = \psi_a\psi_b$，其中 $\psi_a \in R_w\{\tau\}$ 具有非恒定约化，因此由 [Gek83，引理 3.3 (i)]可得 $\psi_b \in R_w\{\tau\}$。约化 ψ_b 构成一个 $\mathbb{F}_q$-代数同态 $\psi\colon A \to k_w\{\tau\}$，满足 $\partial\psi_b = \gamma(b)$，且 ψ_a非恒定。这样的同态是一个 Drinfeld 模 [Dri74，命题 2.1 和命题 2.2]的推论。最后，经过适当的分歧扩张后，$e(\phi) \in w(L^\times)$成立，由此得到最后一个断言。□

根据 [Dri74，命题 7。1]，ϕ 经过有限扩张后具有稳定约化；引理 4.1 对此给出了明确描述。

引理 4.2 。*(1)* 如果 $\phi \cong \phi'$ 在 K的某个扩张上，那么对于所有 i，$J_i(\phi) = J_i(\phi')$.

(2) ϕ 是等变的，当且仅当所有 $J_i(\phi)$ 都是 $\mathbb{F}_q$上的代数元素。*(3)* ϕ 在 v 处具有潜在良约化，当且仅当对于所有 i，$v(J_i(\phi)) \geq 0$，当且仅当 $r_v(\phi) = r$。*(4)* 假设 K 在 $\mathbb{F}_q$ 上有限生成，超越次数为 $n \geq 1$，且ϕ 不是等变的。那么在 K上存在一个离散赋值 v，其在 $\mathbb{F}_q$上平凡，剩余域在 $\mathbb{F}_q$ 上有限生成，超越次数为 $n-1$，并且 ϕ在 v 处不具有潜在良约化。

证明。(1) 每个同构都具有 $\phi' = c^{-1}\phi c$ 的形式，它将 g_i 替换为 $c^{q^i-1}g_i$。这一代换不会改变 J_i。

(2) 若 ϕ 与有限域上的一个 Drinfeld 模 ψ 同构，则由 (1) 可知，$J_i(\phi) = J_i(\psi)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上代数。反过来，假设所有 $J_i(\phi)$ 都在 $\mathbb{F}_q$ 上代数。取满足 $c^{q^N-1} = g_N^{-1}$ 的 $c \in K$，并令 $\psi = c^{-1}\phi c$。那么 $\psi_a = \gamma(a) + \sum_i c^{q^i-1}g_i\tau^i$ 的首项系数为 1，且 $(c^{q^i-1}g_i)^{q^N-1} = J_i(\phi)$。因此，$\psi_a$ 的所有系数都属于某个有限域 $k_0 \subset K$。令 $b \in A$ 并写作 $\psi_b = \sum_{j=0}^n u_j\tau^j$。比较 $\psi_b\psi_a = \psi_a\psi_b$ 中 τ^{j+N} 的系数，得到

$$u_j^{q^N} - u_j = P_j(u_{j+1}, \dots, u_n)$$

对于系数在 k_0中的多项式 P_j。通过对 j作下降归纳法，每个 u_j 在 k_0上都是代数的。将此应用于 $\mathbb{F}_q$-代数 A的有限生成元集 b，我们看到 ψ 定义在一个有限域上。

（3）对所有 i 成立的条件 $v(J_i) \geq 0$ 表明，对所有 i有 $v(g_N)/(q^N-1) \leq v(g_i)/(q^i-1)$，即 $N_v(\phi) = N$，即 $r_v(\phi) = r$。根据引理 4.1，这等价于潜在良约化。

(4) 根据(2)，某个 $J := J_i(\phi)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上是超越的。将其扩充为 K 在 $\mathbb{F}_q$ 上的一个超越基 $J, x_2, \dots, x_n$，并令 $E_0 = \mathbb{F}_q(x_2, \dots, x_n)$，使得 K 是 $E = E_0(J)$ 的有限扩张。令 v_0 为 E 的离散赋值，它在 E_0 上平凡，并满足

$v_0(J) = -1$，即对于 $f,\ g \in E_0[J]$，有 $v_0(f/g) = \deg_J(g) - \deg_J(f)$。其剩余域为 $E_{0\circ}$ 令 v 为 v_0 到 K 的任意扩张。则 v 是一个在 $\mathbb{F}_q$ 上平凡的离散赋值，其剩余域是 E_0 的有限扩张，因此在 $\mathbb{F}_q$ 上有限生成，且超越次数为 $n-1$。由于 $v(J) < 0$，根据(3)，模 ϕ 在 v 处不具有潜在良约化。□

注记 4.3. 设 K 是有限生成的，且基于 $\mathbb{F}_q$。那么引理4.2 (2)–(4) 表明， ϕ是等变的，当且仅当它在K 上平凡的每个离散赋值处都具有潜在良约化 $\mathbb{F}_q$。这也是 Drinfeld 模的粗模空间是仿射的一个推论；参见 [Pin06b，命题 3 的证明。6]。对于一般的 K，“若”这一方向可能不成立，因为 K 可能不存在非平凡的离散赋值。

引理 4.4。 假设 ϕ 和 ϕ' 的系数属于 R，且它们的约化 ϕ和ϕ'是定义在 k上的 *Drinfeld* 模。那么 $\mathrm{Hom}_K(\phi, \phi') \subset R\{\tau\}$，并且模 $\mathcal{M}$ 约化给出一个单同态

$$\mathrm{Hom}_K(\phi, \phi') \hookrightarrow \mathrm{Hom}_k(\bar{\phi}, \bar{\phi}').$$

证明。 这是 [Gek83，引理 3.3 (i)、(ii)]，，其中该结论针对任意 A-域及满足以下条件的秩一赋值 $\gamma(A) \subset R$。关于 $A = \mathbb{F}_q[T]$，另见 [Pap23，引理 6.1.9、命题 6.1.10 和 6.1.11]。 □

5. Tate uniformization

设 k 是一个有限的 A-域，且 $\mathrm{char}_A(k) = \mathfrak{p}$。设 $K = k((x))$，其中 $v = \mathrm{ord}_x$, $R = k[\![x]\!]$，且 $|\cdot| = (\#k)^{-v(\cdot)}$，通过 $A \to k \subset K$视为一个 A-域。设 C 是 K的代数闭包的完备化。设 ψ 是 k上的秩为 r' 的 Drinfeld 模。秩为m 的 ψ-格是一个秩为 m的投射 A-子模 $\Lambda \subset {}^{\psi}K^{\mathrm{sep}}$，在 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$作用下保持不变，并且在任意有限半径 [的圆盘内只有有限个元素（ §7]）。令

$$e_\Lambda(x) = x \prod_{\lambda \in \Lambda}{}' \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)$$

为相应的指数函数。其系数属于 K，且 e_Λ 在 $K\{\{\tau\}\}$ 中可逆，因为它的常数项为 1。

Drinfeld 的 Tate 一致化 [Dri74，命题 7。2] 是针对任意完备离散赋值环 A陈述的，因此适用于特殊特征。自同态的描述归功于 Gekeler [Gek83，命题 3。8]，同样没有对特征作任何假设。我们记录所需的结论。

引理 5.1。 *(1)* 存在唯一的 *Drinfeld* 模 ϕ，定义在 K 上，使得对所有 $a \in A$， $e_\Lambda \psi_a = \phi_a e_\Lambda$ 属于 $K\{\{\tau\}\}$。它的秩为 $r' + m$，系数属于 R，并且 $\phi = \psi$。

(2) 映射 $w \mapsto e_\Lambda^{-1} w e_\Lambda$ 是 A-代数的同构

$$\mathrm{End}_C(\phi) \xrightarrow{\sim} \{u \in \mathrm{End}_C(\psi) \mid u\Lambda \subseteq \Lambda\}.$$

证明。 (1) 这是 [Dri74，命题 7 中的构造。2]；另见 [Gek83，(3.6)]。由于每个非零 $\lambda \in \Lambda$都满足 $|\lambda| > 1$，我们有 $e_\Lambda \in 1 + \mathcal{M}\{\{\tau\}\}\tau$，由此得到 $\phi_b \in R\{\tau\}$对所有$b \in A$ 以及 $\phi = \psi$。

(2) 这是 [Gek83，命题 3。8]其中的证明称，右侧包含于 $\mathrm{End}_C(\phi)$ 可由构造得出。为方便读者，我们指出，当 $e_\Lambda u e_\Lambda^{-1}$ 是多项式时，如何看出这一点；这只可能发生在特殊特征下。如果 $\partial u = 0$，则 $\partial u \neq 0$的零点 $e_\Lambda(u(x))$ 是单根，并构成 $u^{-1}\Lambda \supseteq \Lambda$，因此 $e_\Lambda u = w e_\Lambda$

取 $w \in C\{\tau\}$ 依据 [Pap23，引理 5.1。4], 其证明适用于任意特征为 p 的完备代数闭域。一般而言，取 $c \in \{0,1\} \subset \mathbb{F}_q$ 使得 $\partial(u+c) \neq 0$。那么$u+c$ 也保持 Λ，并且 $e_\Lambda u e_\Lambda^{-1} = e_\Lambda(u+c)e_\Lambda^{-1} - c$。□

6. Proof of Theorem A′

6.1. 从 ϕ 到 ψ。设 ϕ 是定义在一个 A-域 K上的秩为 r 的非等变 Drinfeld 模，且 $\mathrm{char}_A(K) = \mathfrak{p}$，并设 $D = \mathrm{End}^\circ(\phi)$。由于 A 是有限生成的 $\mathbb{F}_q$-代数，ϕ 定义在子域 $K_0 \subseteq K$ 上，而该子域在 $\mathbb{F}_q$上有限生成。于是，$\mathrm{End}^\circ(\phi)$在 K 和 K_0上的结果相同，并且根据引理 4.2 (2)，ϕ 在 K_0 上不是等变的。因此，我们可以假设 K 在 $\mathbb{F}_q$上有限生成。我们对 $n = \mathrm{trdeg}_{\mathbb{F}_q} K$进行归纳。若$n = 0$，则 ϕ 定义在有限域上，这种情况已被排除。令 $n \geq 1$。

设 v 是 K 的一个离散赋值，如引理 4.2 (4) 中所述。选取一个有限可分扩张K'/K，使得 $\mathrm{End}_{\overline{K}}(\phi) = \mathrm{End}_{K'}(\phi)$，并将 v 延拓到 K'。于是存在一个有限扩张L/K'、一个将 v 延拓到 L的扩张 w，以及 $c \in L^\times$，使得 $\phi' = c^{-1}\phi c$ 的系数属于赋值环 R_w，且其约化 ϕ' 是定义在秩为$r_1 = r_v(\phi)$的剩余域 k_w 上的 Drinfeld 模。根据引理 4.2 (3)，$r_1 < r$。根据引理 4.4，

$$\mathrm{End}_{\overline{K}}(\phi) = \mathrm{End}_{K'}(\phi) \subseteq \mathrm{End}_L(\phi) \cong \mathrm{End}_L(\phi') \hookrightarrow \mathrm{End}_{k_w}(\bar{\phi}'),$$

因此 D 嵌入到 $D_1 := \mathrm{End}^\circ(\phi')$ 中。这里，k_w 是 v的剩余域的有限扩张，因此它在 $\mathbb{F}_q$ 上有限生成，超越次数为 $n-1$。

如果 ϕ' 是等变的，那么它在 k_w 上同构于一个在 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$上的 Drinfeld 模 ψ，并且 $D_1 \cong \mathrm{End}^\circ(\psi)$。令 $r' = r_1$。否则，对 ϕ' 应用归纳法假设，可得到一个秩为 $r' < r_1$ 的、在 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ 上的 Drinfeld 模 ψ，满足 $D_1 \lneq \mathrm{End}^\circ(\psi)$。在这两种情况下都有 $D \lneq \mathrm{End}^\circ(\psi)$，其中 $r' < r$，并且根据推论 3.2，$r \equiv r'$ （模 $[D:\ F]$）。这就证明了 (1) $\Rightarrow$ (2)。定理 A′ 的最后一个断言就是推论 3.2。在 (2) 中可以取 $r' = r - [D:\ F]$，这一点已在 §7中定理 A 的证明里说明。□

6.2. 从 ψ 到 ϕ。 设 ψ 是一个秩为 $r' < r$、定义在 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ 上的 Drinfeld 模，并具有嵌入$D \lneq \mathrm{End}^\circ(\psi)$，且 $n = (r-r')/[D:\ F] \geq 1$。取一个有限域 $k \supseteq \mathbb{F}_\mathfrak{p}$，使得 ψ 定义在 k 上，且 $\mathrm{End}_k(\psi) = \mathrm{End}^{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}(\psi)$。我们将 D 与其像等同。于是

$$\mathcal{O} := D \cap \mathrm{End}_k(\psi)$$

是 D中的一个 A-整环，是一个秩为 $[D$ 的射影 A-模：$F]$。其元素是系数属于 k的 $\mathbb{F}_q$-线性多项式，因此它们作用于 $K = k((x))$。设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$是与 p不同的互异素数，令 $\omega_i = x^{-\alpha_i}$，并设

$$\Lambda := \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}(\omega_i) \subset K.$$

引理 6.1. 如果 u_1、…、$u_n \in k\{\tau\}$ 不全为零，那么

$$\left|\sum_{i=1}^n u_i(\omega_i)\right| = \max_i |u_i(\omega_i)| > 1.$$

证明。若 $u \in k\{\tau\}$ 为次数为 m 的非零元素，则 $|u(\omega_i)| = |\omega_i|^{q^m} = (\#k)^{\alpha_i q^m}$，因为 $|\omega_i| > 1$以及 u 的非零系数都是单位。对于 $i \neq j$ 以及任意 m，$m' \geq 0$，根据唯一分解我们有 $\alpha_i q^m \neq \alpha_j q^{m'}$。因此，和中的非零项具有两两不同的绝对值。□

由引理 6.1，映射 $\mathcal{O}^n \to \Lambda$，$(u_i) \mapsto \sum_i u_i(\omega_i)$ 是 A-模的同构，其中 A 通过 $\psi(A) \subseteq \mathcal{O}$作用。因此，$\Lambda \cong \mathcal{O}^n$ 是秩为 $n[D$ 的射影 A-模：$F]$。它是离散的：若 $|\sum_i u_i(\omega_i)| \le M$ 且 $u_i \in \mathcal{O}$，则根据引理 6.1，对于所有 i 都有 $|u_i(\omega_i)| \le M$，该引理限制了 u_i的次数，而 $k\{\tau\}$ 中次数有界的元素只有有限多个。它在 伽罗瓦作用下稳定，因为 $\Lambda \subset K$。因此，Λ 是秩为 $n[D$ 的 ψ-格：$F]$。令 ϕ 为引理 5.1 (1) 给出的、秩为 $r' + n[D$ 的 Drinfeld 模：$F] = r$，其定义在 K 上。

由于 ϕ 与 $\bar{\psi}$ 的秩为 $r' < r$，我们有 $r_v(\phi) = r' < r$ 由引理 4.1得。由引理 4.2 （3）和（2），ϕ不是等变的。

由于 ψ 定义在 k上，我们有 $\mathrm{End}_C(\psi) = \mathrm{End}_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}(\psi) = \mathrm{End}_k(\psi)$–（见 §1.4），类似地，$\mathrm{End}_C(\phi) = \mathrm{End}_K(\phi)$。设 $u \in \mathrm{End}_k(\psi)$，其中 $u\Lambda \subseteq \Lambda$。则 $u(\omega_1) = \sum_i s_i(\omega_i)$，其中 $s_i \in \mathcal{O}$，即 $(u - s_1)(\omega_1) - \sum_{i\ge 2} s_i(\omega_i) = 0$。由引理 6.1，$u = s_1 \in \mathcal{O}$。反过来，$\mathcal{O}$ 保持 Λ。由引理 5.1（2），$\mathrm{End}_K(\phi) \cong \mathcal{O}$，因此 $\mathrm{End}^\circ(\phi) \cong D$。

最后，ϕ 定义在 K的一个有限生成子域上，并且它在 K 上的自同态代数与在该子域的代数闭包上的自同态代数相同。这证明了 (2) $\Rightarrow$ (1)。□

6.3. 自同态环。 上述论证也对自同态环进行了分类。

定理 6.2。 设 $\mathfrak{p} \lhd A$ 是一个非零素理想，$\mathcal{O}$ 是一个 A-代数，并设 $r \ge 1$。以下条件等价：

(1) 存在一个 A-域 K，使得 特征$_A(K) = \mathfrak{p}$，以及一个秩为 r、定义在 K 上的非等变 *Drinfeld* 模 ϕ，满足 $\mathrm{End}_K(\phi) \cong \mathcal{O}$作为 A-代数。*(2)* 存在一个秩为 $r' < r$、定义在 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ 上的 *Drinfeld* 模 ψ，以及一个 A-代数的单同态 $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}(\psi)$，使得维数$_F(\mathcal{O} \otimes_A F)$ 整除 $r - r'$。

证明。 在 (2) 中，$\mathcal{O}$ 是一个有限生成的无挠 A-模，因此 $D := \mathcal{O} \otimes_A F$ 是除法代数 $\mathrm{End}^\circ(\psi)$ 的有限维 F-子代数，故为一个除法 F-代数，而$\mathcal{O}$ 是 D中的一个 A-整环。

(1) $\Rightarrow$ (2)。定理 A′ 的 (1) $\Rightarrow$ (2) 的证明中所用的映射，是 A-代数 $\mathrm{End}_K(\phi) \hookrightarrow \mathrm{End}_{k_w}(\phi')$ 之间的单同态；在等变情形下，$\mathrm{End}_{k_w}(\phi') \cong \mathrm{End}_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}(\psi)$。由归纳法可得 $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}(\psi)$，其中 $r' < r$，整除性由推论 3.2 得出。

(2) $\Rightarrow$ (1)。取一个有限域 k，使得 ψ 定义在 k 上且 $\mathrm{End}_k(\psi) = \mathrm{End}_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}(\psi)$，并将 $\mathcal{O}$ 与其在 $\mathrm{End}_k(\psi)$ 中的像等同。将定理 A′ 的 (2) $\Rightarrow$ (1) 的证明中的构造应用于这个整环 $\mathcal{O}$，可得到一个秩为 r 的非等变 ϕ，且 $\mathrm{End}_K(\phi) \cong \mathcal{O}$。事实上，该处的论证只用到了 $\mathcal{O}$ 是一个包含于 $\mathrm{End}_k(\psi)$ 中的 A- 整环。□

注记 6.3。 (1) 对于每个秩为 r'、定义在有限域上的 Drinfeld 模 ψ 以及每个 $n \ge 1$，构造中的情形 $\mathcal{O} = \mathrm{End}_k(\psi)$ 给出一个秩为 $r' + n\dim_F \mathrm{End}^\circ(\psi)$ 的非等型 Drinfeld 模，其在 K 上的自同态环同构于 $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}(\psi)$.

（2）定理 A′ 还控制着 K 本身上的自同态代数。若 ϕ 是秩为 r的非等变对象，则 $\mathrm{End}^\circ_K(\phi) \subseteq \mathrm{End}^\circ(\phi)$嵌入到某个秩为 $r' < r$的 ψ over$\mathbb{F}_\mathfrak{p}$的 $\mathrm{End}^\circ(\psi)$ 中，并且根据推论 3.2，有 $r \equiv r' \pmod{[\mathrm{End}^\circ_K(\phi) : F]}$。

7. Subalgebras over finite fields and proof of Theorem A

设 ψ 是一个定义在特征为 $A(k)=\mathfrak{p}$ 的有限域 k 上、秩为 r' 的 Drinfeld 模，并设 π 为其 Frobenius。令

$$\Delta := \mathrm{End}_k^\circ(\psi), \qquad E := F(\pi), \qquad h := [E:F], \qquad m := r'/h.$$

根据 [Gek91，定理 2。9], [Yu95，定理 1], [Lau96，（2.2.2）]，Δ 是定义在E 上的一个次数为 m的中心除代数，域 E 在 ∞_E 上有唯一的赋值 ∞，存在 $\mathfrak{P}$ 的唯一赋值 E整除 π，它位于 $\mathfrak{p}$之上，并且

$$\mathrm{inv}_{\infty_E}(\Delta) = -1/m, \qquad \mathrm{inv}_{\mathfrak{P}}(\Delta) = 1/m, \qquad \mathrm{inv}_v(\Delta) = 0 \quad \text{for } v \neq \infty_E, \mathfrak{P}.$$

每个定义在 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ 上的 ψ 都定义在这样的 k 上，且 $\mathrm{End}^\circ(\psi) = \mathrm{End}_k^\circ(\psi)$。

命题 7.1。设 D 是一个以 Z 为中心的除法 F-代数，并令 $e=e(D)$，$d=d(D)$。那么 D 嵌入 Δ 中成为一个 F-代数，当且仅当存在一个域 L，它是 $Z\otimes_F E$ 的商，并满足以下性质：

(1) L 在 ∞_E 上有唯一的赋值 ∞_L，在 $\mathfrak{P}$上有唯一的赋值 $\mathfrak{P}_L$，且 $[L:F]$ d整除 r'；
(2) $D_L := D\otimes_Z L$ 在除 ∞_L和 $\mathfrak{P}_L$之外的 L 的每个赋值处都分裂，且 $s_L\cdot \mathrm{inv}_{\infty_L}(D_L) = -1/d$ 属于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，其中 $s_L := r'/([L:F]d)$。

证明。对于域 $L\supseteq E$，令 $\ell := [L:E]$。由(C6)，L 与 Δ 的某个子域 E-同构，当且仅当 ℓ 整除 m，并且对 L 和 E的所有赋值 $w\mid v$，都有$\frac{m}{\ell}[L_w:E_v]\mathrm{inv}_v(\Delta) = 0$。由于$[L_w:E_v]\leq \ell$，这成立当且仅当

$$\ell \mid m, \text{ 并且 } L \text{ 在 } \infty_E \text{ 上有唯一的赋值 } \infty_L, \text{ 在 } \mathfrak{P}\text{上有唯一的赋值 } \mathfrak{P}_L。 \tag{7.1}$$

若 $L\subseteq\Delta$，则 $\Delta_L := \mathrm{Cent}_\Delta(L)$ 是 L 上的中心除代数，其次数为 $n := m/\ell = r'/[L:F]$，根据 (C2) 与 $\Delta\otimes_E L$ Brauer 等价。因此，由 (C5) 可知，它在 ∞_L 处的不变量为 $-1/n$，在 $\mathfrak{P}_L$ 处为 $1/n$，在其他地方均为 0。

设 $D\subseteq\Delta$。Δ 的子环 $L := ZE$ 是交换的，且在 F 上有限维，因此是一个域，并且是 $Z\otimes_F E$ 的一个商。它满足 (7.1)。代数 $D_L = D\otimes_Z L$ 是 L 上的中心单代数，因此自然映射 $D_L\to\Delta$ 是单射，其像包含于 Δ_L 中。因此，D_L 是 $\mathrm{End}^\circ(\psi)$ 的一个除 F-子代数，其中心为 L。根据命题 3.1，$[L:F]d$ 整除 r'，$s_L\cdot \mathrm{inv}_{\infty_L}(D_L) = -1/d$，且 $\gcd(d, s_L) = 1$。此外，根据 (C1)，$\Delta_L \cong D_L\otimes_L \mathrm{Cent}_{\Delta_L}(D_L)$，其中第二个因子的次数为 $n/d = s_L$。在 L 的一个赋值 $w\neq\infty_L$ 处，$\mathfrak{P}_L$ 有 $\mathrm{inv}_w(\Delta_L) = 0$，因此 $\mathrm{inv}_w(D_L)$ 同时被 d 和 s_L 湮灭，故为 0。这就证明了 (1) 和 (2)。

反之，设 L 满足 (1) 和 (2)。则 $m/\ell = r'/[L:F] = ds_L$ 是一个整数，因此 (7.1) 成立，并且我们可以将 L 视为 Δ的一个子域。令 $\iota := \text{不变量}_{\infty_L}(D_L)$。由 (2) 和 (C4) 可知，$D_L$ 在 ι 处具有不变量 ∞_L，在 $-\iota$ 处具有不变量 $\mathfrak{P}_L$，而在其他处均为 0。因此，$\Delta_L\otimes_L D_L^{\mathrm{opp}}$ 具有不变量

$$\mp\Big(\frac{1}{ds_L}+\iota\Big) \quad \text{at } \infty_L, \mathfrak{P}_L,$$

在其他地方均为 0。由于 $s_L\big(\frac{1}{ds_L}+\iota\big) = \frac{1}{d}-\frac{1}{d} = 0$，它们全都属于 $\frac{1}{s_L}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$，因此根据 (C4)，代数 $\Delta_L\otimes_L D_L^{\mathrm{opp}}$ 与 $\overline{L}$ 上的中心除代数 B Brauer 等价，且其次数 b 整除 s_L。代数 Δ_L 和 $D_L\otimes_L \mathrm{Mat}_{s_L/b}(B)$ 具有相同的次数 ds_L 和相同的布劳尔类，因此它们同构。因此 $D\subseteq D_L\subsetneq\Delta_L\subseteq\Delta$。□

命题 7.1 取决于 ψ 通过 E 和 $\mathfrak{P}$。令 ψ 变化，我们便得到一个仅以 D 为依据的判据。

推论 7.2. 设 D 是一个中心为 Z的除 F-代数，令 $e = e(D)$， $d = d(D)$，并设 $r' \geq 1$。存在一个秩为 r'、定义在 $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ 上的 ***Drinfeld*** 模 ψ，使得存在 F-代数的嵌入$D \hookrightarrow \overline{\mathrm{End}^{\circ}}(\psi)$，当且仅当满足以下条件：

(i) ed整除 r'；***(ii)*** Z 在 ∞上方有唯一的赋值 ∞_Z；***(iii)*** Z 在 $\mathfrak{p}$ 上方存在一个赋值 $\mathfrak{p}_Z$，使得 D 在 Z 的每个不同于 ∞_Z和 $\mathfrak{p}_Z$的赋值处都分裂；***(iv)*** $s' \cdot \mathrm{inv}_{\infty_Z}(D) = -1/d$ 属于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，其中 $s' = r'/(ed)$。

证明。设 $D \subseteq \mathrm{End}^{\circ}(\psi)$。由命题 3.1 可知 (i)、(ii) 和 (iv) 成立，该命题还给出 $\gcd(d, s') = 1$。取如上所述的 k，使得 $\mathrm{End}^{\circ}(\psi) = \mathrm{End}_k^{\circ}(\psi)$，令 L 如命题 7.1 所述，并设 $\mathfrak{p}_Z = \mathfrak{P}_L \cap Z$, $f = [L\colon Z]$。于是 $s' = fs_L$，故 $\gcd(d, f) = 1$。令 u为 Z 上一个不同于 ∞_Z 和 $\mathfrak{p}_Z$的赋值。L 在 u 上方的任何赋值都不等于 ∞_L 或 $\mathfrak{P}_L$，因此对每个 $w \mid u$，由命题 7.1 (2) 和 (C5) 得 $0 = \mathrm{inv}_w(D_L) = [L_w\colon Z_u] \cdot \mathrm{inv}_u(D)$。对 $w \mid u$ 求和并利用 $\sum_{w|u}[L_w\colon Z_u] = f$，得到 $f \cdot \mathrm{inv}_u(D) = 0$。又因为 $d \cdot \mathrm{inv}_u(D) = 0$ 且 $\gcd(d, f) = 1$，所以我们得出 $\mathrm{inv}_u(D) = 0$。这就证明了 (iii)。

反过来，假设 (i)–(iv)。令 $\mathcal{O}_Z$ 为 Z中 A 的整闭包。其类群有限，因此存在 $j \geq 1$和 $\varpi \in \mathcal{O}_Z$，使得 $\varpi\mathcal{O}_Z = \mathfrak{p}_Z^j$。令 $E = F(\varpi) \subseteq Z$, $h = [E\colon F]$，并令 $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_Z \cap E$。于是 ϖ 在 A 上整，而根据 (ii)，∞ 在 E 中有唯一的赋值。Z中 ϖ的唯一零点是 $\mathfrak{p}_Z$，因为 $\varpi\mathcal{O}_Z = \mathfrak{p}_Z^j$且 ϖ 在 ∞_Z处有极点。因此，E中 ϖ 的唯一零点是 $\mathfrak{P}$；由于 ϖ 在所有这类赋值处都为零，$\mathfrak{P}$上方 Z 的唯一赋值是 $\mathfrak{p}_Z$。设 $N_0 = \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\varpi)\,[\mathbb{F}_{\mathfrak{P}}\colon \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}]$，并令 $k \supseteq \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ 为具有 $[k\colon \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}] = N_0 r'/h$ 的有限域；由于 $h \mid e \mid r'$，这是一个整数。由于 ∞ 在 E 中不分裂，且 $\mathrm{Nr}^{E/F}(\varpi)$ 生成 $\mathfrak{p}^{N_0}$，$|\cdot|$ 到 $E \otimes_F F_\infty$ 的扩张满足

$$|\varpi|^h = \left|\mathrm{Nr}_{E/F}(\varpi)\right| = (\#\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})^{N_0} = (\#k)^{h/r'}.$$

结合 $h \mid r'$，这表明 ϖ 满足 [Yu95 第 165], 页的条件 (1)–(5)，即它是 r' 在 k上的一个秩为 r' 的韦伊数。根据 [Yu95 定理 3]（另见 [Lau96, (2.2.2) (iv)]），存在一个 ψ 在 k 上的秩为 r' 的 Drinfeld 模，其 Frobenius 与 ϖ 在 F上共轭。我们将 $F(\pi)$ 与 E 等同，使得 $\pi = \varpi$。于是 $\mathfrak{P}$ 就是 E 中整除 π 的赋值。命题 7.1 适用于 ψ 和 $L = Z$，其中 $D_L = D$ 和 $s_L = s'$：条件 (1) 由 (i) 及 ϖ 的选取得到，条件 (2) 即为 (iii) 和 (iv)。因此 $D \hookrightarrow \mathrm{End}_k^{\circ}(\psi) \subseteq \mathrm{End}^{\circ}(\psi)$。□

注 7.3。条件 (ii)–(iv) 并不要求 $\mathfrak{p}$ 在 Z中具有唯一的赋值。在命题7.1 中，仅要求 $\mathfrak{P}$ 在 L中不分裂，而 E 在 $\mathfrak{p}$上的其他赋值可以分裂；关于一个具有 8.2 中所述例子的情形，参见注 $L = Z = E$。如果 $\mathfrak{p}$ 确实在 Z中具有唯一的赋值，那么在推论 7.2 的证明中可以取 $\varpi \in A$ 并令 ψ 超奇异。

定理 A 的证明。由定理 A′ 和推论 7.2，存在一个非等变的 ϕ，其秩为r，特征为 $\mathfrak{p}$，且 $\mathrm{End}^{\circ}(\phi) \cong D$ 当且仅当推论 7.2 的条件 (i)–(iv) 对某个整数 r' 成立，其中 $0 < r' < r$ 且 $r' \equiv r$ (模 ed^2)。

假设这样的 r' 存在，并令 $s' = r'/(ed)$。由于 ed 整除 r' 和 $r - r'$，所以它整除 r。此外，$s' \equiv s$ （模 d）且 $d \cdot \mathrm{inv}_{\infty_Z}(D) = 0$，因此 (iv) 等价于 (4)，而 $0 < s' < s$ 蕴含 $s \geq s' + d > d$，即 $[D\colon F] = ed^2 < eds = r$。于是 (1)–(4) 成立。反之，若 (1)–(4) 成立，则 $r' := r - ed^2 = ed(s - d)$ 满足 $0 < r' < r$ 并且

$r'/(ed) \equiv s$（模 d），因此 (i)–(iv) 对于 r'成立。定理 A 的最后一个断言是定理A′的一部分。□

证明表明，若定理 A′ 中的 (1) 成立，则如其中所述，可在 (2) 中取 $r' = r - [D : F]$。

推论 7.4。设 ϕ 是定义在一个 A-域上的特殊特征为 $\mathfrak{p} \neq 0$的 *Drinfeld* 模，并设$D \subseteq \mathrm{End}^\circ(\phi)$ 是一个中心为 F的除 Z-子代数。则存在一个 $\mathfrak{p}_Z$ 上的赋值 Z，其位于 $\mathfrak{p}$之上，使得 D 在 Z 的每个赋值处均分裂，除 $\mathfrak{p}_Z$ 以及位于 ∞之上的赋值外。本结论即为特殊特征情形下的定理B*(2)*。

证明。若 ϕ 是等变的，则 $\mathrm{End}^\circ(\phi) \cong$ 等于 $^\circ(\psi)$，其中 是定义在 ψ 上 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$的 Drinfeld 模。否则，根据定理A′，$\mathrm{End}^\circ(\phi)$ 嵌入到这样的代数中。两种情况下，推论7.2(iii) 均适用于 D。□

推论 7.5。设 ϕ 是特征为 $\mathfrak{p} \neq 0$的 A-域上的秩为 r 的非等变的 *Drinfeld* 模，令 $D = \mathrm{End}^\circ(\phi)$，并置 $e = e(D)$， $d = d(D)$。

(1) $ed^2 < r$。特别地， $ed < r$，即 D 的每个交换子域在 F上的次数均为 $< r$。*(2)* 如果 D 不是交换的，则 $r \geq ed(d+1) \geq 6$。

特别地，秩为 ≤ 5 的非等变的 *Drinfeld* 模的自同态代数是一个域。

证明。(1) 是定理 A (1)。在 (2) 中，我们有 $d \geq 2$，并且 $s = r/(ed)$ 是一个满足$ed^2 < eds$的整数，因此 $s \geq d+1$。□

注 7.6。(1) 不等式 $e(D)d(D) < r$ 见于 [Pin06b，定理 6.1]，，其中该不等式是由秩为一的 Drinfeld 模的模叠的有限性推导出的。由于当 ϕ 为等变的时，$e(D)d(D) = r$，推论 7.5 (1) 表明，$e(D)d(D) = r$ 当且仅当 ϕ 为等变的，这正是 [DP12，命题 6.3]中的等价关系 (a) $\Leftrightarrow$ (e)。

(2) 假设 $R = \mathrm{End}_K(\phi)$的中心为 A，因此 $e = 1$，并记 $r = mn$，其中 $m = d$、 $n = s$ 如 [Pin16, §4] 中所述。对于极大序 R，Pink 将其写作 $R \otimes_A A_\mathfrak{l} \cong \mathrm{Mat}_{n_\mathfrak{l}}(S_\mathfrak{l})$，其中 $S_\mathfrak{l}$ 是 $F_\mathfrak{l}$ 上的一个中心除代数中的极大序，而该中心除代数可能依赖于 $\mathfrak{l}$ [Pin16, §5]。推论 7.4 表明，对每个素理想 $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{p}$，都有 $S_\mathfrak{l} = A_\mathfrak{l}$；命题 3.1 表明 $\gcd(m, n) = 1$。

对于域 A 上秩为 r 的 Drinfeld 模 ϕ，我们称

$$\mu(\phi) := \frac{r}{[\mathrm{End}^\circ(\phi) : F]}$$

端同态比 ϕ。它是简单阿贝尔簇$X)/[\mathrm{End}^0(X) : \mathbb{Q}]$ 的比值的类比 X；Oort 曾研究过这一比值 [Oor19，问题 22。2]。

推论 7.7。设 $\mathfrak{p} \lhd A$ 是一个非零素理想。

(1) 若 ϕ 是等变的，且具有 A-特征 $\mathfrak{p}$，则 $\mu(\phi) = 1/d$，其中 $d = d(\mathrm{End}^\circ(\phi))$。每个$d \geq 1$ 都会出现。*(2)* 若 ϕ 是非等变的，且具有 A-特征 $\mathfrak{p}$，并且 $D = \mathrm{End}^\circ(\phi)$，则 $\mu(\phi) = s/d$，其中$d = d(D)$、 $s = r/(e(D)d)$、$\gcd(s, d) = 1$ 以及 $s > d$。特别地， $\mu(\phi) > 1$。*(3)* 设 $\mu > 1$ 是一个有理数，写成最简形式 $\mu = s/d$，并设 $r \geq$*1*。存在一个秩为 r 且具有 A-特征 $\mathfrak{p}$、端同态比为 μ 的非等型 *Drinfeld* 模，当且仅当 ds整除 r。

因此，具有 A-特征 $\mathfrak{p}$的 ***Drinfeld*** 模的端同态比为数$1/d$、 $d \geq 1$以及有理数 > 1 和 $\mu(\phi) \leq 1$，当且仅当 ϕ 是等变的。

证明。（1）这里，对于有限域k上的秩为 r 的 Drinfeld 模 ψ，$\mathrm{End}^\circ(\phi) \cong \mathrm{End}_k^\circ(\psi)$，并且这是一个关于 $F(\pi)$的次数为 $r/[F(\pi)$的中心除代数：$F]$。因此，$r = ed$ 以及$\mu(\phi) = r/(ed^2) = 1/d$，其中 $e = e(\mathrm{End}^\circ(\phi))$。给定 $d \geq 1$，令 D 为关于 F 的中心除代数，其在 ∞处的不变量为 $-1/d$，在 $\mathfrak{p}$处的不变量为 $1/d$，而在其他处均为 0。根据推论 7.2，D 可嵌入某个关于$\mathbb{F}_\mathfrak{p}$的秩为 d 的 Drinfeld 模 ψ 的 $\mathrm{End}^\circ(\psi)$ 中。由于 $[\mathrm{End}^\circ(\psi): F] \leq d^2$，我们得到 $\mathrm{End}^\circ(\psi) = D$ 以及 $\mu(\psi) = 1/d$。

(2) 我们有 $\mu(\phi) = r/(ed^2) = s/d$。这里，$s$ 与 d 的最大公约数 $= 1$ 由定理 B (1) 得出，而 $s > d$ 由定理A (1) 得出。

(3) 如果存在这样的 ϕ，那么由 (2) 可得 $r = e(D)ds$，因此 ds 整除 r。反过来，设 $r = eds$ 满足 $e \geq 1$。令 $u \in F$ 为 ∞ 处的一致化元，并令 $Z = F(u^{1/e})$。多项式 $x^e - u$ 在 ∞ 处是艾森斯坦多项式，因此 $[Z : F] = e$，且 ∞ 在 Z 中完全分歧。取 Z 上方 $\mathfrak{p}_Z$ 的一个赋值。由于 $\gcd(s, d) = 1$，存在唯一的 $\iota \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ 满足 $s\iota = -1/d$，且其阶为 d。令 D 为 Z 上具有如下不变量的中心除代数：在 ∞_Z 处为 ι，在 $\mathfrak{p}_Z$ 处为 $-\iota$，其他处均为 0；参见 (C4)。那么 $d(D) = d$，并且 $[D : F] = ed^2 < eds = r$，因为 $s > d$。由定理 A，$D \cong \mathrm{End}^\circ(\phi)$，其中 ϕ 是一个秩为 r、A-特征为 $\mathfrak{p}$ 的非等变的 ϕ，且 $\mu(\phi) = s/d$。□

注 7.8. (1) 由推论 7.7 (3) 及 $\mu = (d + 1)/d$ 可知，推论 7.5 (2) 中的界 $r \geq ed(d + 1)$ 对所有 $e \geq 1$ 和 $d \geq 2$ 都能达到。关于 $A = \mathbb{F}_q[T]$、$\mathfrak{p} = (T)$ 以及 $e = 1$，参见注 8.4 及 $j = 1$。相比之下，在有限域上，非交换自同态代数出现在每一个秩 ≥ 2 中，而在一般特征下则完全不会出现。(2) 在一般特征下，$\mu(\phi) = r/e$ 是一个正整数，并且每个正整数都会出现。对于特征为 p 的阿贝尔簇，根据 [Taf26], ，每个正有理数都是某个简单阿贝尔簇的端同态比，这正如 Oort[Oor19，第 315] 页所预期的那样。非等变的 Drinfeld 模的这一不等式 $\mu(\phi) > 1$ 源于坏约化素位的存在（引理 4.2 (4)），而阿贝尔簇没有类似的结果。

8. Examples

在本节中，$A = \mathbb{F}_q[T]$，$F = \mathbb{F}_q(T)$ 是 $1/T$ 为一致化元的赋值，并且 $\mathfrak{p} = (T)$，因此 $\mathbb{F}_\mathfrak{p} = \mathbb{F}_q$。对于 A-域 K，记作 $t = \gamma(T)$，并在不变量 J_i 的定义中使用 $a = T$。

例 8.1。设 q 为奇数，$c \in \mathbb{F}_q^\times$ 为非平方元，且 $\beta \in \mathbb{F}_{q^2}$ 满足 $\beta^2 = c$。令 $B = \mathbb{F}_q[y]$，并通过 $T \mapsto y^2 - c$ 将 A 嵌入 B 中。于是 $Z := \mathbb{F}_q(y) = F(\sqrt{T + c})$ 是 F 的可分二次扩张，其常数域为 $\mathbb{F}_q$。素理想 $(T) = (y^2 - c)$ 在 Z 中是惰性的，而 ∞ 在 Z 中分歧。

令 $K = \mathbb{F}_{q^2}(x)$，其中 x 是超越的，并通过 $\gamma(T) = 0$ 视为 A-域。令 $\phi' : B \to K\{\tau\}$ 为由 $\phi'_y = \beta + x\tau + \tau^2$ 定义的秩 2 Drinfeld B-模，并令 $\phi = \phi'|_A$。利用 $\tau\beta = \beta^q\tau = -\beta\tau$ 可计算得到

$$\phi_T = (\phi'_y)^2 - c = (2\beta + x^{q+1})\tau^2 + (x + x^{q^2})\tau^3 + \tau^4.$$

因此，ϕ 是 K 上具有 A-特征（T）的秩 4 Drinfeld 模。元素 $u = \phi'_y$ 属于 $\mathrm{End}_K(\phi)$，且满足 $u^2 = \phi_T + c$，故 $Z \cong F(u) \subseteq \mathrm{End}^\circ(\phi)$。

(1) ϕ 不是等变的。对于赋值 v 的 K 满足 $v(x) = -1$，则有 $v(J_2(\phi)) = -(q+1)(q^4-1) < 0$。因此 ϕ 不具有潜在良约化于 v，由引理4.2 (3)，且 ϕ 不是等变的。

(2) $\mathrm{End}^\circ(\phi) = \mathrm{End}_K^\circ(\phi) = Z$，且 $\mathrm{End}_K(\phi) = \mathbb{F}_q[u] \cong B$。设 $D = \mathrm{End}^\circ(\phi)$。由于 $Z \subseteq D$ 是一个交换子域，$e(D)d(D) \geq 2$。由定理 A (1)，$e(D)d(D)^2 < 4$。因此 $d(D) = 1$ 且 $e(D) = 2$，所以 D 是一个包含 Z的二次域，即 $D = Z$。环 $\mathrm{End}_K(\phi)$ 是 Z 中的一个 A-整环，且包含 $\mathbb{F}_q[u] \cong B = \mathbb{F}_q[y]$；后者是 Z的极大序。因此 $\mathrm{End}_K(\phi) = \mathbb{F}_q[u]$。

(3) 对于任意有限 A-域 k' 上、具有A-特征（T）的 Drinfeld 模 ψ，Z 都不同构于 $\mathrm{End}_{k'}^\circ(\psi)$。假设并非如此。由于 Z是交换的，由 [Pap23, 定理 4.1 可得 $Z = F(\pi)$。3], ，其中 π 是 k'的 Frobenius。此外，π 的赋值仅在 Z 上方的赋值处以及在 (T) 上方的某个赋值处非零。这是 Z在 ∞ 上方和在 (T) 上方的唯一赋值，因此它们在 Z/F 的非平凡自同构 σ 下保持不变。因此 π^σ/π 的除子平凡，故 $\pi^\sigma = \zeta\pi$ 且 $\zeta \in \mathbb{F}_q^\times$；再次应用 σ 可得$\zeta^2 = 1$。若 $\zeta = 1$，则 $\pi \in F$，这与 $F(\pi) = Z$矛盾。若 $\zeta = -1$，则 $\pi^2 \in F$ 的除子支撑在 (T) 和 ∞上，因此 $\pi^2 = c'T^m$ 且 $c' \in \mathbb{F}_q^\times$和 $Z = F(\sqrt{c'T^m})$。若 m 为奇数，则 (T) 在 Z中分歧。若 m 为偶数，则 Z 是常数域扩张。两者均不可能。

域 Z 满足定理 A 关于 $r = 4$的条件。根据定理 A′：由于（T）和 ∞ 在 Z中不分裂，域 Z 嵌入到在（T）和 ∞处分歧的 F 上的四元数代数中；该代数是秩 2 [Pap23，注 4.4.2 (2)]所述超奇异 Drinfeld 模的自同态代数。这里 $r' = 2$ 和 $[Z : F] = 2$ 整除 $4 - 2$。

注 8.2。例 8.1 (3) 中对特征（T）的限制不能省略。令$\mathfrak{q} \lhd A$为在 Z中分裂的一个素理想，令 Ω为 B中位于 $\mathfrak{q}$之上的一个素理想，并令 $\rho: B! H\{\tau\}$为一个秩 1 的 Drinfeld B-模，它定义在 Z 的有限扩张 H 上，并且在 Ω 之上的某个素理想处具有良约化（例如希尔伯特类域上的符号正规化模，参见 [Pap23，第 7]章）。其限制 $\rho|_A$ 是一个秩 2 的 Drinfeld A-模，并且 $\mathrm{End}^\circ(\rho|_A) \supseteq Z$。在 Ω 之上的某个素理想处的约化$\bar{\rho}$ 是一个定义在有限域 k' 上的秩 1 Drinfeld B-模，该有限域具有 B-Ω 特征；$\bar{\rho}|_A$ 具有 $\mathfrak{q}$ - A特征和高度 $[B_\Omega : A_\mathfrak{q}] \cdot H(\bar{\rho}) = 1$。因此，$\bar{\rho}|_A$ 是普通的，并且 $\mathrm{End}_{k'}^\circ(\bar{\rho}|_A)$ 是一个包含 Z [Pap23，推论 4.1.12], 的二次域，即它等于 Z。

例 8.3。对于 $n \geq 1$，令 D_n 为 F 上的中心除代数，使得 $\mathrm{inv}_{(T)}(D_n) = 1/n$ 且 $\mathrm{inv}_\infty(D_n) = -1/n$，并且在所有其他赋值处分裂。根据 [Pap23，注 4.4.2 (2)]，$D_n \cong \mathrm{End}^\circ(\psi_n)$，其中 $(\psi_n)_T = \tau^n$。令 $D = D_3^{\mathrm{opp}}$，于是 $\mathrm{inv}_{(T)}(D) = -1/3$ 且 $\mathrm{inv}_\infty(D) = 1/3$。

令 $K = \mathbb{F}_{q^3}(x)$，其中 x 是超越的，并通过 $\gamma(T) = 0$ 将其视为一个 A-域。令 $u = x\tau^2 + \tau^5 \in K\{\tau\}$，并令 ϕ 为定义在 K 上的 Drinfeld 模，其定义为

$$\phi_T = u^3 = x^{1+q^2+q^4}\tau^6 + \left(x^{1+q^2} + x^{1+q^7} + x^{q^5+q^7}\right)\tau^9 + \left(x + x^{q^5} + x^{q^{10}}\right)\tau^{12} + \tau^{15}.$$

它的秩为 15，且 A-特征（T）；参见 [Pin06b，例 5.2 (c)] 以及 [Pap23，例 4.1。6] 另有一个秩为 6 的类似例子。

(1) D 不与任何有限 A域k'上、任意 A特征下的 Drinfeld 模 ψ 的 $\mathrm{End}_{k'}^\circ(\psi)$ 同构。D的中心是 F，因此这样的 ψ会有 $F(\pi) = F$。于是 $\mathrm{rank}(\psi) = 3$，而根据 Pap23 定理 4.1.3、注 4.1.5 (2)], $\mathrm{End}_{k'}^\circ(\psi)$ 在 ∞ 处的不变量为 $-1/3$。但是 $\mathrm{inv}_\infty(D)$ 在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$中为 $= 1/3 \neq -1/3$。

(2) ϕ 不是等变的。对于赋值 v 在 K 满足 $v(x) = -1$，有 $v(J_{12}(\phi)) = -q^{10}(q^{15}-1) < 0$。因此，$\phi$ 在 v 处不具有潜在良约化，这是由引理4.2得出的。(3)，并且 ϕ不是等变的。

(3) $\mathrm{End}^\circ(\phi) = \mathrm{End}^\circ_K(\phi) \cong D$，且 $\mathrm{End}_K(\phi) = \mathbb{F}_{q^3}[u]$。对于 $\alpha \in \mathbb{F}_{q^3}$，我们有 $u\alpha = \alpha^{q}u^{2}$，因为 $\alpha^{q^5} = \alpha^{q^2}$。因此 α 与 $\phi_T = u^3$可交换，且 $\mathcal{O} := \mathbb{F}_{q^3}[u]$ 是 $\mathrm{End}_K(\phi)$ 的子环。映射 $\alpha \mapsto \alpha$，$u \mapsto \tau$ 是从 $\mathcal{O}$ 到 $\mathbb{F}_{q^3}\{\tau\} = \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(\psi_3)$ 的反同构，它将 ϕ_T 映射为 $(\psi_3)_T = \tau^3$。因此 $\mathcal{O} \otimes_A F \cong D_3^{\mathrm{opp}} = D$，并且根据 [Gek91，定理 4.3]，$\mathcal{O}$是该代数中的极大$A$-整环。于是 D 嵌入到 $D' := \mathrm{End}^\circ(\phi)$ 中，且 $[D' : F]$是 $[D : F] = 9$ 的倍数。由于根据定理 A (1)，$[D' : F] < 15$，我们得到 $D' = D$，随后由极大性可知 $\mathrm{End}_K(\phi) = \mathcal{O}$。

（4）退化。令 v 如（2）中所述，并令 $c \in K$ 使得 $c^{q^2-1} = x^{-1}$。则 $c^{-1}uc = \tau^2 + c^{q^5-1}\tau^5$约化为 τ^2，因此 $c^{-1}\phi c$ 约化为 ψ_6，而引理 4.4 的约化映射将 $\mathcal{O}$ 映到 $\mathbb{F}_{q^3}[\tau^2] \subset \mathbb{F}_{q^6}\{\tau\} = \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(\psi_6)$ 上。这是一个嵌入 $D \hookrightarrow$ 令 D_6 如定理 A′ 中所述，其中 $r' = 6 = 15 - [D : F]$。作为检验，命题 3.1 给出 $s = 5$，事实上 $5 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ 属于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

更一般地，定理 A 连同 $e = 1$、$d = 3$ 和 $\mathfrak{p}_Z = (T)$ 表明，D_3，其 $\mathrm{inv}_\infty = -1/3$，是秩为 r 的非等型 Drinfeld 模的自同态代数，当且仅当 $r \equiv 3$（模 9）且 $r \geq 12$。类似地，D_3^{opp}，其 $\mathrm{inv}_\infty = 1/3$，当且仅当 $r \equiv 6$（模 9）且 $r \geq 15$ 时出现。因此，ϕ 的秩是可能的最小值；参见备注 8.4。

注 8.4. 例 8.3 的构造适用于每个在 F 上恰好于 (T) 和 ∞ 处分歧的中心除代数。设 $d \geq 2$ 和 $1 \leq j < d$ 满足 $\gcd(j, d) = 1$。令 $K = \mathbb{F}_{q^d}(x)$，通过 $\gamma(T) = 0$ 将其视为一个 A-域；设 $u = x\tau^j + \tau^{j+d} \in K\{\tau\}$，并令 ϕ 为定义在 K 上、由 $\phi_T = u^d$ 定义的秩为 $r = d(j+d)$ 的 Drinfeld 模。则 ϕ 不是等变的，$\mathrm{End}_K(\phi) = \mathbb{F}_{q^d}[u]$，且 $\mathrm{End}^\circ(\phi)$ 是定义在 F 上、维数为 d^2 的中心除代数 D，它在 (T) 和 ∞ 之外分裂，并满足 $j \cdot \mathrm{inv}_\infty(D) = -1/d$ in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

事实上，ϕ_T 中 τ^{r-d} 的系数是 $\sum_{i=0}^{d-1} x^{q^{i(j+d)}}$，因此对于满足 $v(x) = -1$ 的赋值 v，有 $v(J_{r-d}(\phi)) < 0$；由引理 4.2 (3)，ϕ 不是等变的。对于 $\alpha \in \mathbb{F}_{q^d}$，我们有 $u\alpha = \alpha^{q^j}u$，所以 $\mathcal{O} := \mathbb{F}_{q^d}[u]$ 是 $\mathrm{End}_K(\phi)$ 的一个子环。它是 $\mathbb{F}_{q^d}$ 上关于 u 的扭多项式环，在 $\phi(A) = \mathbb{F}_q[u^d]$ 上是秩为 d^2 的自由模；其中心为 $\mathbb{F}_q[u^d]$，因为 $\alpha \mapsto \alpha^{q^j}$ 生成 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q)$。因此，$D := \mathcal{O} \otimes_A F$ 是 $D' := \mathrm{End}^\circ(\phi)$ 的一个除法子代数，其中心为 F，且 $[D : F] = d^2$。现在，$[D' : F]$ 是 d^2 的倍数，并且由定理 A (1)，$[D' : F] < r < 2d^2$，故 $D' = D$。由定理 B (1)（取 $s = j + d$）、推论 7.4 以及求和公式，可得 D 的不变量。最后，令 $w \in \mathrm{End}_K(\phi)$，并选取一个非零的 $f \in A$，使得 $\phi_f w \in \mathcal{O}$。由于 ϕ_f 在 $\mathcal{O}$ 中是中心元素，且其首项系数属于 $\mathbb{F}_q^\times$，在 $\mathcal{O}$ 中进行带余除法可得 $\phi_f w = \phi_f h + \rho$，其中 h，$\rho \in \mathcal{O}$，且 $\deg_u(\rho) < \deg_u(\phi_f)$。在 $\mathcal{O}$ 上，我们有 $\deg_\tau = (j+d)\deg_u$，因此只有当 $w = h$ 时，才可能有 $\phi_f(w-h) = \rho$。所以 $w \in \mathcal{O}$。

根据定理 A，D 是秩为 r'、具有 A-特征（T）的非等型 Drinfeld 模的自同态代数，当且仅当 $r' = d(j + dn)$ 且 $n \geq 1$。因此，ϕ 的秩可能达到的最小值。若 $c \in K$ 满足 $c^{q^j-1} = x^{-1}$，则 $c^{-1}\phi c$ 在 v处约化为 ψ_{dj}，且 $dj = r - [D : F]$，这与定理 A′一致。对于 $d = 3$，由 $u = x\tau + \tau^4$可得秩 12 的 D_3，由 $u = x\tau^2 + \tau^5$可得秩 15 的 D_3^{opp}。对于 $d = 2$ 和 $j = 1$，记 $T = y^2$，模 ϕ 是 Drinfeld $\mathbb{F}_q[y]$-模 $y \mapsto$在 $A = \mathbb{F}_q[y^2]$ 上的限制！秩为 3 的 $x\tau + \tau^3$。对于 $q = p$，这是 Pink [Pin06b，例 5.2 (c)]中的例子。

定理C的证明。第 (1) 部分是例 8.1 和注记 8.2，第 (2) 部分是例8.3。□

References

[CO09] Ching-Li Chai 和 Frans Oort，《阿贝尔簇模空间与 p-可除群》，《算术几何》，Clay 数学会议录，第 8 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2009 年，第 441–536 页。[DP12] Anna Devic 和 Richard Pink，《特殊特征下 Drinfeld 模的阿代尔开性》，《数论杂志》132（2012），第 7 期，1583–1625 页。[Dri74] V. G. Drinfeld，《椭圆模》，《数学文集》（新系列）94(136)（1974），594–627 页，656 页；英文译本：《苏联数学文集》23（1974），561–592 页。[Dri77] ，《椭圆模 II》，《数学文集》（新系列）102(144)（1977），第 2 期，182–194 页，325 页；英文译本：《苏联数学文集》31（1977），159–170 页。[Gek83] Ernst-Ulrich Gekeler，《Drinfeld 模的算术》，《数学年刊》262（1983），第 2 期，167–182 页。[Gek91] ，《有限 Drinfeld 模》，《代数杂志》141（1991），第 1 期，187–203 页。[KP22] Nikolas Kuhn 和 Richard Pink，《寻找 Drinfeld 模的自同态》，《数论杂志》232（2022），118–154 页。[Lau96] G´erard Laumon，《Drinfeld 模曲面的上同调》第一部分，《剑桥高等数学研究》，第 41 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1996 年；几何、点计数与局部调和分析。[Oor88] Frans Oort，《阿贝尔簇的自同态代数》，《代数几何与交换代数：为 Masayoshi Nagata 祝寿》，第二卷，纪伊国屋，东京，1988 年，第 469–502 页。[Oor19] Frans Oort（编），《算术代数几何中的公开问题》，《高级讲座数学》，第 46 卷，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2019 年，附录 3：算术代数几何问题，第 295–331 页。[OvdP88] Frans Oort 和 Marius van der Put，《构造具有给定自同态代数的阿贝尔簇》，《数学汇编》67（1988），第 1 期，103–120 页。[Pap23] Mihran Papikian，《Drinfeld 模》，《数学研究生教材》，第 296 卷，施普林格，2023 年。[Pin06a] Richard Pink，《特殊特征下与 Drinfeld 模相关的伽罗瓦表示 I：Zariski 稠密性》，《数论杂志》116（2006），第 2 期，324–347 页。[Pin06b] ，《特殊特征下与 Drinfeld 模相关的伽罗瓦表示 II：开性》，《数论杂志》116（2006），第 2 期，348–372 页。[Pin16] ，《Drinfeld 模的 Kummer 理论》，《代数与数论》10（2016），第 2 期，215–234 页。[Pot98] Igor Yu. Potemine，《Drinfeld 粗模空间概形的极小终端 $\mathbb{Q}$-阶乘模型》，《数学物理分析与几何》1（1998），171–191 页。[Rei03] I. Reiner，《极大序》，《伦敦数学会专著》（新系列），第 28 卷，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，牛津，2003 年；1975 年版的修订重印本，附 M. J. Taylor 序。[Taf26] Saeed Tafazolian，《具有指定自同态比的单阿贝尔簇》，2026 年，预印本，arXiv:2611.20040。[Yu95] Jiu-Kang Yu，《有限域上 Drinfeld 模的同源》，《数论杂志》54（1995），第 1 期，161–171 页。[Yu03] ，《Drinfeld 模的 Sato–Tate 定律》，《数学汇编》138（2003），第 2 期，189–197 页。[Zyw16] David Zywina，《Drinfeld 模的 Sato–Tate 定律》，《美国数学会会刊》368（2016），第 3 期，2185–2222 页。

Department of Mathematics, Pennsylvania State University, University Park, Pennsyl-vania, United States of America电子邮箱地址: papikian@psu.edu