arXiv:2611.30311v1 [math.SG] 23 Nov 2026

动量映射奇异点附近等变 Szegő 核的标度极限及其在 Kähler 约化中的应用

Andrea Galasso*

摘要

设紧致连通李群在 Hodge 流形上全纯作用，且该作用可线性化到相应的 Hermitian 充足线丛上。假设零是相应动量映射的奇异值。该线丛各次幂的全局全纯截面空间可按群的有限维不可约表示分解。本文的主要目标是研究动量映射奇异点附近等变 Szegő 核的缩放极限。作为应用，我们讨论奇异约化空间的量子化：不变截面沿奇异分层的行为、Guillemin–Sternberg 映射在奇异分层附近渐近幺正性的失效，以及集中在奇异轨道附近的不变截面的数量。

关键词： Szeg˝o核，动量映射**数学主题分类：**
53D50

*电子邮箱: andrea.galasso@unipegaso.it, andrea.galasso.91@gmail.com,**地址：** 工程系，佩加索大学，中央校区，Centro Direzionale Isola F2，意大利那不勒斯,**ORCID ID：**
0000-0002-5792-1674

目录

1 引言 **3**

2 预备知识 10

2.1 例子.10 2.2 标准形.13 2.3 不变局部坐标.17

3 主定理的证明 19

4 最后的评述和应用 24

4.1 分层约化空间.25 4.2 局部模型与应用.27 4.3 奇异轨道附近不变截面的计数 30

1 引言

设 $(M,\ \omega)$ 是一个 $2n$ 维 Hodge 流形，具有复结构 J 和黎曼度量 g。设 $A\colon\ G\times M\to M$ 是紧致连通李群 G 的哈密顿全纯作用，其维数为 d。设 $\Phi\colon\ M\to\mathfrak{g}^{\vee}$ 是动量映射，其中 $\mathfrak{g}:=\mathrm{Lie}(G)$ 是李群 G 的李代数。

设 $(L,\,h^{L})$ 为量子化线丛。对于每个 $k=1,2,\ldots$，每个全纯整体截面空间 $H^{0}(M,L^{k})$ 上都有自然的厄米结构，并且在 $H^{0}(M,L^{k})$ 上自然诱导出 G 的酉表示。令 $\hat{}G$ 为 G 的酉对偶，我们有

$$H^{0}(M,L^{k})=\bigoplus_{\nu\in\hat{G}}H^{0}(M,L^{k})_{\nu}\,.$$

本文旨在研究当 k 趋于无穷时，固定 ν 下投影到同型分量 $H^{0}(M,L^{k})_{\nu}$ 上的渐近展开。特别地，我们关注动量映射的 0 不是正则值的情形。这里，我们倾向于采用下一段所述的这些空间的一种等价描述。

令 $X\subset L^{\vee}$ 为单位圆丛，其投影为 $\pi\colon\ X\to M$。于是，G 在 $L^{\vee}$ 上的作用保持 X 不变。此外，X 是一个接触柯西-黎曼流形，其CR结构由拉回 J 诱导，接触形式由联络1-形式 α 给出。由于 G 保持厄米度量和全纯结构，它也保持唯一的相容联络，因此它通过 A:
$G\times X\to X$ 在 X 上作为一群 CR ˜ 接触同胚作用。特别地，X 带有一个标准的 G-不变黎曼度量。

众所周知，$L^{\otimes k}$ 的光滑截面空间可与圆作用下X 的 k型 $C^{\infty}(X)_{k}$ 光滑函数空间酉地且等变地识别。令 $H(X)_{k}\subset C^{\infty}(X)_{k}$ 表示在此同构下对应于 $H^{0}(M,\ L^{\otimes k})$的子空间。 $H(X)$的Hardy空间是 X 在 $L^{2}(X)$中的闭包，

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty}H(X)_{k}\,.$$

因此，G 在 $H^{0}(M,\ L^{\otimes k})$上的表示转化为

$$H(X)_{k}\ =\ \bigoplus_{\nu\in\hat{G}}H(X)_{k,\nu}. \tag{1}$$

ˆ其中， G是 G的酉不可约表示空间。

ˆ 现在我们可以更精确地陈述我们的目标。固定一对 (ν, k)，其中 (ν, k) 属于 $G \times \mathbb{N}$。令$\Pi_{k,\nu}$ 为正交投影的分布核

$$\Pi_{k,\nu} : L^2(X) \longrightarrow H(X)_{k,\nu}.$$

已知当 x 不属于动量映射的零点集时，$\Pi_{k,\nu}(x, x)$ 关于 k 趋于无穷时具有快速衰减的渐近展开。本文将研究函数 $\Pi_{k,\nu}(x, x)$ 的渐近性质，其中 $\Phi(\pi(x)) = 0$，当 ν 固定且 $k \to +\infty$，而 0 不是正则值时。这种情形是新的，因为例如在 [P1] 或 [MZ], 0 中，通常假设 0 是正则值。此外，值得一提的是，本文采用的技术基于 [P1] 和 [SZ] 中引入的方法。动量映射奇异点附近的 Szeg˝o 核的渐近性似乎是一个重要的研究案例，例子见第 2 节。

回顾一下用群作用描述动量映射奇异点的方法。无穷小地说，动量映射的定义表明，对于任意 $\xi \in \mathfrak{g}$ 和任意向量 $\mathbf{v} \in T_m M$，我们有

$$\langle \mathrm{d}_m \Phi(\mathbf{v}), \xi \rangle = \omega_m(\xi_M(m), \mathbf{v}). \tag{2}$$

这里，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示李代数 $\mathfrak{g}$ 与其对偶空间 $\mathfrak{g}^\vee$ 之间的配对，而ξ_M 是由 ξ 的作用在 M 上诱导的向量场。

方程 (2) 表明，像 $\mathrm{d}_m\Phi$ 在 $\mathfrak{g}^\vee$ 中的湮灭子 $(\mathrm{Im}\, \mathrm{d}\Phi_m)^\circ$ 满足

$$(\mathrm{Im}\, \mathrm{d}_m \Phi)^\circ = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \xi_M(m) = 0\}. \tag{3}$$

(3) 的右边恰好是 $\mathfrak{g}_m$，即 m 的稳定子群 G_m 的李代数。因此，$\mathrm{d}_m\Phi$ 满射当且仅当 m 的稳定子是离散的。等价地，

$$m \text{ is a singular point of } \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \dim G_m \geq 1 .$$

$\mathrm{d}_m\Phi$ 不满射是研究 $\Pi_{k,\,\nu}$ 渐近展开时遇到的第一个障碍，因为动量映射出现在振荡积分的相位中，且不能直接应用驻相公式。

为表述我们的结果，我们回顾一下关于 M 沿 $\Phi^{-1}(0)$ 的局部几何的一些基本事实，参见 [GGK]。如果 $0 \in \mathfrak{g}^\vee$ 是动量映射 Φ的奇异值，那么 $\Phi^{-1}(0)$ 通常不是子流形。但是，对于任意 $m \in \Phi^{-1}(0)$，我们都可以为 m 在 M中的一个邻域引入局部模型。令 $\mathfrak{g}_M(m) \subseteq T_m M$ 表示经过 m 的轨道的切空间，设 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_M(m)) = s$。那么，作为 G 的紧子流形，G_m 的维数为 $d - s$，其中 $d = \dim_{\mathbb{R}}(G)$。定义 $N_m \subseteq T_m M$ 为黎曼

$\mathfrak{g}_M(m)$ 在 $\mathfrak{g}_M(m)^\omega$中的正交补，见第 2 节。于是， N_m是 T_mM的复辛子空间，实维数为 $2n-2s$。在第 2 节中，我们证明如下正交直和分解:

$$T_mM \;=\; \ker \mathrm{d}_m\Phi \;\oplus\; J_m\left(\mathfrak{g}_M(m)\right), \qquad \ker \mathrm{d}_m\Phi \;=\; N_m \;\oplus\; \mathfrak{g}_M(m). \quad (4)$$

根据 (4) 中的分解，令 $m \in M$ 和 $\mathbf{v} \in T_mM$。我们可以写成

$$\mathbf{v} \;=\; \mathbf{v}_{\mathrm{v}} + \mathbf{v}_{\mathrm{h}} + \mathbf{v}_{\mathrm{t}}\,,$$

其中

$$\mathbf{v}_{\mathrm{v}} \in \mathfrak{g}_M(m), \quad \mathbf{v}_{\mathrm{h}} \in N_m, \quad \mathbf{v}_{\mathrm{t}} \in J_m\big(\mathfrak{g}_M(m)\big).$$

这里，下标 v,h, t 分别表示垂直、水平和横向。

根据 [GGK，推论 B.47]，，假设 M 是连通的，则存在一个闭子群 $H \subset G$，使得集合 $M_{(H)}$ 在 M 中既开又稠密。为避免退化情形，现在假设 G 的作用在 M 的某一点处是局部自由的（因此在一般位置处局部自由）。一般而言，对于任意子群 $H \subseteq G$，其不动点集

$$\mathrm{Fix}(H) \;=\; \{m \in M \;\mid\; h \cdot m = m \text{ for all } h \in H\}$$

是辛子流形（维数可能不同）之并。因此， Φ 的临界点是 M 中形如 Fix(H) 的辛子流形之并，其中 H 是 G 的子群，而 Φ 的奇异值就是这些子流形的像。

分解 (4) 反映了以下几何情形。设$M^m_{(H)}$ 是包含给定元素 $m \in M$ 的 (H) 轨道类型流形的连通分支，且满足 $\Phi(m) = 0$。那么，根据 [Or，定理 8.1.1 (i)]，，集合 $M^m{}_{(H)} \cap \Phi^{-1}(0)$ 是 M 的一个子流形。集合 ($\Phi^{-1}(0) \cap M_{(H)}$)/$G$（若非空）是互不相交的光滑流形，它们对 $H \subset G$ 的并构成 $\Phi^{-1}(0)/G$ 的一个划分。在这一图景中， $\mathfrak{g}_M(m)$ 对应于垂直切向方向（纤维化的纤维），而 N_m 包含水平向量方向：其 G_m-不变部分 $N_m^{G_m}$ 同构且酉地映射到

$$T_{[m]}\big((\Phi^{-1}(0) \cap M_{(H)})/G\big)\,.$$

记为 $N_m = N_m^{G_m} \oplus W_m$，其中 W_m 为 G_m-不变补空间。各向同性表示的二次矩映射 Φ^N （参见 §2）满足

$$\Phi^N(\mathbf{u}+\mathbf{w}) = \Phi^N(\mathbf{w})$$

对于 $\mathbf{u} \in N_m^{G_m}$、$\mathbf{w} \in W_m$，根据局部标准形，$[m]$在 $\Phi^{-1}(0)/G$ 中的一个邻域同胚于

$$N_m^{G_m} \times \big((\Phi^N|_{W_m})^{-1}(0)/G_m\big),$$

参见 [SL]。

在陈述我们的定理之前，还需给出另一个定义。设 $x \in X$,$\pi(x) = m$，且 $\Phi(m) = 0$。设 $g \in G_{\pi(x)}$，则存在 $h_g \in S^1$，使得 $A_g(x) = h_g \cdot x$，因为 $\pi(A_g(x)) = A_g(\pi(x)) = \pi(x)$。现在，我们断言 h_g 是唯一的。事实上，假设存在 $h'_g \in S^1$，使得 $\tilde{A}_g(x) = h'_g \cdot x$。因此，$h_g \cdot x = \tilde{A}_g(x) = h'_g \cdot x$，这意味着 $h'_g \cdot h_g^{-1} = 1$，因为圆作用在 X上是自由的。接下来，我们定义

$$A_{\nu,k}(g,x) := 2^{s/2}\,\frac{\dim(\nu)}{V_{\text{eff}}(x)} \cdot \frac{1}{\operatorname{Vol}(G_{\pi(x)})}\,\overline{\chi_\nu(g)\,h_g^k} \qquad (g \in G_{\pi(x)})\,,$$

其中，χ_ν 是与 ν对应的特征标，$\dim(\nu)$ 是酉不可约表示 ν的维数，$V_{\text{eff}}(x)$ 是 M中经过 $\pi(x)$的轨道的体积，而 $\operatorname{Vol}(G_{\pi(x)})$ 是相对于 G中的哈尔测度而言的 $G_{\pi(x)}$ 的体积。

这里，$\operatorname{Vol}(G_{\pi(x)})$ 是用 G的双不变度量所诱导的黎曼体积计算的。因此

$$\operatorname{Vol}(G_{\pi(x)})^{-1}\,\mathrm{dV}_{G_{\pi(x)}}$$

是 $G_{\pi(x)}$的归一化哈尔测度，且最后的常数不依赖于 $\mathfrak{g}$上的度量。当 $s = 0$ 时，我们令 $V_{\text{eff}}(x) = 1$。

由于 $\Phi(m) = 0$，单位连通分支 G_m^0 在 m上方的X 纤维上平凡作用。事实上，对于 $\xi \in \mathfrak{g}_m$，在 x 处提升作用的生成元是 $\xi_M(m) = 0$ 的水平提升，减去 $\langle \Phi(m)\ \xi\rangle\,\partial_\theta = 0$的一个倍数。因此，$h_g$仅取决于 g 在有限群 G_m/G_m^0中的等价类，且 $k \mapsto h_g^k$ 是周期性的。如果 G_m 是连通的，$A_{\nu,\ k}$ 便不依赖于 k。

定理 1.1. 设 $x \in X$ 满足 $\Phi \circ \pi(x) = 0$，且 $\pi(x) = m$。我们选取一组以$\hat{}x$为中心的 G_m-适配海森堡局部坐标。对于每个 $\nu \in G$ 和 $\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$ $\in T_{\pi(x)}M$，当 k 趋于无穷时，以下渐近展开成立：

$$\Pi_{k,\nu}\Big(x + \tfrac{\mathbf{v}}{\sqrt{k}}, x + \tfrac{\mathbf{w}}{\sqrt{k}}\Big) \sim \Big(\frac{k}{\pi}\Big)^{n-\frac{s}{2}} e^{Q(\mathbf{v}_{\mathrm{v}}+\mathbf{v}_{\mathrm{t}},\,\mathbf{w}_{\mathrm{v}}+\mathbf{w}_{\mathrm{t}})}$$
$$\cdot \int_{G_m} A_{\nu,k}(g,x)\, e^{\psi_2(\mathbf{v}_{g,\mathrm{h}},\,\mathbf{w}_{\mathrm{h}})}\Big(1 + \sum_{j\geq 1} a_{\nu j}(x,g,\mathbf{v},\mathbf{w})\,k^{-\frac{j}{2}}\Big)\,\mathrm{dV}_{G_m}(g),$$

其中 $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}g$ 是 $g \in G_m$的各向同性作用， $a_{\nu j}(x, g, \cdot, \cdot)$ 是关于 $\mathbf{v}$、$\mathbf{w}$ 的多项式，其系数依赖于 x，

$$Q\left(\mathbf{v}_{\mathrm{v}}+\mathbf{v}_{\mathrm{t}},\, \mathbf{w}_{\mathrm{v}}+\mathbf{w}_{\mathrm{t}}\right) = -\|\mathbf{v}_{\mathrm{t}}\|^2 - \|\mathbf{w}_{\mathrm{t}}\|^2 + i\,\left[\omega_m\left(\mathbf{v}_{\mathrm{v}}, \mathbf{v}_{\mathrm{t}}\right) - \omega_m\left(\mathbf{w}_{\mathrm{v}}, \mathbf{w}_{\mathrm{t}}\right)\right],$$

and

$$\psi_2(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) := \mathbf{v}\cdot\overline{\mathbf{w}} - \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2\right).$$

对于 $\|\mathbf{v}\|, \|\mathbf{w}\| \le C$，展开式一致成立。

这些常数对应于 [SZ], [P1], 的归一化，其中 $\Pi_k(x,x) = (k/\pi)^n + O(k^{n-1})$，并且

$$\mathrm{vol}(M) = \frac{\pi^n}{n!}\int_M c_1(L)^n;$$

范数以及 V_{eff} 指的是 $g = \omega(\cdot, J\cdot)$。该公式对每个 $m \in \Phi^{-1}(0)$ 都成立。若 G_m 有限，则 $s = d$，

$$\mathrm{Vol}(G_m)^{-1}\int_{G_m} \cdot\, \mathrm{dV}_{G_m}$$

是对 G_m 的平均，并且可以得到 [P1] 的标度极限。

注 1.1。设 $y \in (\Phi\circ\pi)^{-1}(0)$ 满足 $G_{\pi(y)}$ 有限。那么（参见[P1], ，或定理的 $s = d$ 情形）

$$\Pi_{k,\nu}(y,y) \sim \left(\frac{k}{\pi}\right)^{n-d/2} \frac{2^{d/2}\dim(\nu)}{V_{\mathrm{eff}}(y)} \frac{1}{|G_{\pi(y)}|}\sum_{g\in G_{\pi(y)}} \chi_\nu(g)\, h_g^k.$$

设 $y = x + \mathbf{v}/\sqrt{k}$，且 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{h}} \in N_m$。那么 $G\cdot\pi(y)$ 纤维化于 $G\cdot m$ 上，因此

$$V_{\mathrm{eff}}(y) = V_{\mathrm{eff}}(m)\,\mathrm{Vol}(G_m\cdot\mathbf{v})\, k^{-(d-s)/2}\big(1 + O(k^{-1/2})\big),$$

其中，$\mathrm{Vol}(G_m\cdot\mathbf{v})$ 是 $(d-s)$ 维的 G_m-轨道在 (N_m, g_m) 中的体积。将其形式地代入正则公式可得

$$\left(\frac{k}{\pi}\right)^{n-\frac{s}{2}} \frac{2^{s/2}\dim(\nu)}{V_{\mathrm{eff}}(m)} \cdot \frac{(2\pi)^{\frac{d-s}{2}}}{\mathrm{Vol}(G_m\cdot\mathbf{v})} \cdot \frac{1}{|G_{\pi(y)}|}\sum_{g\in G_{\pi(y)}} \chi_\nu(g) h_g^k, \tag{5}$$

也就是说，幂次与定理中的相同，为 $k^{n-s/2}$。

现在取$\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{v}_{\mathrm{h}} \in N_m$，使得 $\Phi^N(\mathbf{v}_{\mathrm{h}}) = 0$ 且 $(G_m)_{\mathbf{v}_{\mathrm{h}}}$ 有限，从而 $x + \mathbf{v}_{\mathrm{h}}/\sqrt{k}$ 趋近于 $(\Phi\circ\pi)^{-1}(0)$ 的正则部分。由于 G_m 酉地作用于 N_m，

$$\Re\,\psi_2(g^{-1}\mathbf{v}_{\mathrm{h}}, \mathbf{v}_{\mathrm{h}}) = -\frac{1}{2}\|g^{-1}\mathbf{v}_{\mathrm{h}} - \mathbf{v}_{\mathrm{h}}\|^2.$$

因此，当 $\|\mathbf{v}_{\mathrm{h}}\| \to +\infty$ 时，积分集中在 $(G_m)_{\mathbf{v}_{\mathrm{h}}}$ 上。在 $g_0 \in (G_m)_{\mathbf{v}_{\mathrm{h}}}$ 附近，写作 $g = g_0 e^{\zeta}$, $\zeta \in \mathfrak{g}_m$。在适配坐标中

$$\psi_2(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\frac{1}{2}\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 - i\,\omega_m(\mathbf{a},\mathbf{b})\,,$$

且 $\omega_m(\zeta^2\mathbf{u},\ \mathbf{u}) = -\omega_m(\zeta\mathbf{u}\ \zeta\mathbf{u}) = 0$；因此

$$\psi_2(g^{-1}\mathbf{v}_{\mathrm{h}},\mathbf{v}_{\mathrm{h}}) = -\tfrac{1}{2}\|\zeta\cdot\mathbf{v}_{\mathrm{h}}\|^2 + 2i\,\langle \Phi^N(\mathbf{v}_{\mathrm{h}}),\zeta\rangle + O\big(\|\zeta\|^3\|\mathbf{v}_{\mathrm{h}}\|^2\big),$$

其中 $\langle\Phi^N(\mathbf{u})\ \zeta\rangle = \frac{1}{2}\omega_m(\zeta\cdot\mathbf{u},\ \mathbf{u})$。在线性项在零锥上消失。利用

$$\mathrm{Vol}(G_m\cdot\mathbf{v}_{\mathrm{h}}) = \mathrm{Vol}(G_m)\,|\det(\zeta\mapsto\zeta\cdot\mathbf{v}_{\mathrm{h}})|/|(G_m)_{\mathbf{v}_{\mathrm{h}}}|,$$

拉普拉斯方法得到

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(G_m)}\int_{G_m}\overline{\chi_\nu(g)h_g^k}\,e^{\psi_2(g^{-1}\mathbf{v}_{\mathrm{h}},\mathbf{v}_{\mathrm{h}})}\,\mathrm{dV}_{G_m}(g) \sim \frac{(2\pi)^{(d-s)/2}}{\mathrm{Vol}(G_m\cdot\mathbf{v}_{\mathrm{h}})}\cdot\frac{1}{|(G_m)_{\mathbf{v}_{\mathrm{h}}}|}\sum_{g\in(G_m)_{\mathbf{v}_{\mathrm{h}}}}\chi_\nu(g)h_g^k.$$

由于 $G_{\pi(y)}$ 与 $(G_m)_{\mathbf{v}_{\mathrm{h}}}$共轭，定理的首项与（5）一致。若 $\Phi^N(\mathbf{v}_{\mathrm{h}}) \neq 0$，则相位 $2i\langle\Phi^N(\mathbf{v}_{\mathrm{h}})\ \zeta\rangle$会在 $\|\Phi^N(\mathbf{v}_{\mathrm{h}})\|/\|\mathbf{v}_{\mathrm{h}}\|$中产生高斯衰减。这是 $\Pi_{k,\ \nu}$ 远离 $\Phi^{-1}(0)$ 时快速衰减的尺度极限对应情形。模型情形将在例 2.1 中详细讨论。

定理的首项具有简单的解释，详见第 4 节。由于 $N_m/\!\!/G_m$ 是约化空间 $M_0 = \Phi^{-1}(0)/G$ 在 $[m]$ [SL], 处的局部模型，这是在奇异值处“量子化与约化可交换”这一原则的局部形式。在第 4 节中，我们还将回顾 M_0 的分层及相应的（余分层）量子空间 [Sj], [Hue], ，并推导定理的一些结果，例如 Guillemin–Sternberg 映射 [P2], [MZ], [HK], [Li]不具幺正性。对于圆作用，我们定理的整体对应形式是 Delarue、Ioos 和 Ramacher 的黎曼–罗赫公式 [DIR]。

关于量子化与约化可交换这一事实的若干证明都是渐近性的。它们表明，只有当 k 充分大时，Guillemin–Sternberg 映射 σ_k 才是同构；例如参见 [MZ，定理 0.9] 和[HH]（其中假设 0 是正则值），这里的结论是由 G-不变 Szeg˝o（或 Bergman）核的渐近性得出的。在本引言的最后一部分，我们借此指出，如果满足某些代数条件，那么这样的陈述会自动对每个次数都成立：

参见命题 1.1。它只用到截面环的乘法结构和正规性，并不要求 0 是正则值。在我们的 K¨ahler 情形中，Guillemin–Sternberg [GuSt] 和 Sjamaar [Sj]的工作当然已经给出了这一结论。关键在于，这一结论可由该陈述的任何渐近版本推出。类似的思想也可应用于其他已知“量子化与约化可交换”原理渐近版本的情形，例如参见 [GH], ，前提是相关空间构成一个分次环，且约化映射是乘法的；例如，一般 Toeplitz 算子的谱空间就不满足这一点。

回忆一下， $H(X)_k$ 中的元素是 X 上的 CR 函数 s ，满足$s(r_\theta x) = e^{ik\theta}s(x)$，即 L^k 的全纯截面，因此

$$R := \bigoplus_{k\geq 0} H(X)_k, \qquad R^G := \bigoplus_{k\geq 0} H(X)_{k,0},$$

（有限和）是分次的 $\mathbb{C}$-代数。在约化侧，令

$$Z = (\Phi \circ \pi)^{-1}(0),$$

$X_0 = Z/G$和 $p:\ X_0 \to M_0$ 为投影。令 $X_{\rm top} := p^{-1}(M_{\rm top})$，其中$M_{\rm top}$ 是 M_0 的开层（见 §4.1）。定义 $H(X_0)_k$ 为 X_0 上的连续函数 f 所构成的空间，这些函数满足 $f(r_\theta y) = e^{ik\theta} f(y)$，且 $f|_{X_{\rm top}}$ 为 CR 函数。等价地， f 是 M_0 上的 L_0^k 的连续截面，并且在 $M_{\rm top}$上全纯。由于 M_0 是正规复空间 [Sj], ，这些就是射影簇 M_0 上轨形丛 L_0^k 的全纯截面。令

$$R_0 := \bigoplus_{k\geq 0} H(X_0)_k.$$

对于 $s \in H(X)_{k,\,0}$，函数 $s|_Z$ 连续、具有 G 不变性且属于 k 型，因此它下降为 X_0 上的连续函数 $\sigma_k(s)$，并且在 $X_{\rm top}$ 上是 CR 函数。因此 $\sigma_k(s) \in H(X_0)_k$，并且

$$\sigma := \bigoplus_{k\geq 0} \sigma_k :\ R^G \longrightarrow R_0, \qquad \sigma(st) = \sigma(s)\,\sigma(t),$$

是分次环同态，因为限制映射是乘法的 .

引理 1.1. R^G 和 R_0 是整环，且 R^G 在其分式域中是整闭的。

命题 1.1. 假设存在 k_0 使得

$$\sigma_k : H(X)_{k,0} \to H(X_0)_k$$

对每个 $k \geq k_0$ 都是同构。因此，对每个$k \geq 0$， σ_k 都是同构。

证明。若 $k=0$，则 $H(X)_{0,\,0}=\mathbb{C}$，因为 M 是紧致连通的；并且 $H(X_0)_0=\mathbb{C}$，因为 M_0 是紧致连通正规复空间[Sj]。设 $k\geq 1$，并选取满足 $Nk\geq k_0$ 的 $N\geq 1$。

首先证明单射性。设 $s\in H(X)_{k,\,0}$ 且 $\sigma_k(s)=0$。于是 $s^N\in H(X)_{Nk,\,0}$，并且 $\sigma_{Nk}(s^N)=\sigma_k(s)^N=0$，因此 $s^N=0$，从而 $s=0$。

现在证明 σ_k 的满射性。设 $0\neq f\in H(X_0)_k$。根据假设，存在 $a\in H(X)_{(N+1)k,\,0}$ 和 $b\in H(X)_{Nk,\,0}$，使得

$$\sigma(a)=f^{N+1},\qquad \sigma(b)=f^N.$$

由于 R_0 是整环（引理 1.1），$f^N\neq 0$，因此 $b\neq 0$。令 $\varphi:=a/b\in \mathrm{Frac}(R^G)$。元素 a^N 和 b^{N+1} 属于 $H(X)_{N(N+1)k,\,0}$，并且

$$\sigma(a^N)=f^{N(N+1)}=\sigma(b^{N+1}).$$

由于 $N(N+1)k\geq k_0$，该次数上的单射性给出 $a^N=b^{N+1}$，即 $\varphi^N=b$。因此 φ 是首一多项式 $T^N-b\in R^G[T]$ 的根。由于 R^G 在其分式域中整闭（引理 1.1），可得 $\varphi\in R^G$。此外 $\varphi b=a$，其中 a 和 $b\neq 0$ 是齐次的。由于 R^G 是分次整环，比较最高次数项和最低次数项可知，φ 是次数为 $(N+1)k-Nk=k$ 的齐次元素。因此 $\varphi\in H(X)_{k,\,0}$。最后

$$\sigma(\varphi)\,f^N=\sigma(\varphi)\,\sigma(b)=\sigma(a)=f^{N+1},$$

因此 $\big(\sigma(\varphi)-f\big)f^N=0$ 属于 R_0。由于 R_0 是一个整环，且 $f^N\neq 0$，我们得出 $\sigma_k(\varphi)=f$。 □

2 预备知识

2.1 例子

设 K 是一个紧致连通李群，T 是 K 的极大环面。对于这对 $(K,\ T)$，我们定义魏尔群 W 和一组正根 Δ^+。更多细节请参见 [GLS 第 5] 节。

考虑与权 ν 相关联的余伴随轨道 $\mathcal{O}_\nu$，其中该权属于 $\mathrm{Lie}(K)^\vee$。那么，$\mathcal{O}_\nu$ 是一个辛流形，我们用 ω_{KKS} 表示 Kostant-Kirillov-Souriau 辛形式。T 在 $\mathcal{O}_\nu$ 上的作用是哈密顿的，其对应的动量映射记为 $\Phi:\ \mathcal{O}_\nu\to \mathrm{Lie}(T)^\vee$。

现在，令 ν_1、ν_2、……、ν_N 为所有基本权重及其共轭，并令 $\mathrm{Stab}(\nu_i)$ 为它们在 K 的余伴随作用下的稳定子群。群 T 也是 $\mathrm{Stab}(\nu_i)$ 的一个极大环面。将 $(\mathrm{Stab}(\nu_i)\ T)$ 这一对的魏尔群记为 W_i。

定理 2.1 ([GLS]中的定理 5.2.1。 动量映射 $\Phi:\ \mathcal{O}_\nu \to \mathrm{Lie}(T)^\vee$ 的奇异点是这些辛子流形

$$\mathrm{Stab}_K(\nu_i)\cdot w\,\nu$$

其中 $w \in W$和 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ N$。这里 $\mathrm{Stab}_K(\nu_i)$ 表示 K作用的稳定子。 Φ 的奇异值是凸多面体

$$convex\ hull\ of\ W_i\cdot w\,\nu$$

$w \in W,$ 以及 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ N$。

前述定理应能说明我们为何有兴趣研究动量映射的奇异点。在引言的设定中，我们考虑 $M = \mathcal{O}_\nu$ 和 $G = T$。即使 0 不属于动量映射的像，且 0 也不是它的奇异值，我们仍将说明如何借助所谓的移位技巧应用我们的结果；例如可参见 [G，第 2] 节。

若 $G = T$ 是环面，则余伴随轨道 $\mathcal{O}_\nu = \{\nu\}$ 是一个点，移位技巧便简化为用特征标 $-\nu$（当 ν 为整数时）扭曲 L 的线性化。这既不改变 X，也不改变其 Hardy空间；它将Φ 替换为 $\Phi - \nu$，并将 $H(X)_{k,k\nu}$ 与扭曲情形中第 k 级的 T- 不变部分对应起来，因此 $\Pi_{k,k\nu}$ 等于扭曲作用的不变投影算子。将 ν 替换为平凡表示后，定理便适用于 $\Phi^{-1}(\nu)$ 上的点。对于非阿贝尔的 G，则改在$M \times \mathcal{O}_\nu$上进行处理，其中 $\mathcal{O}_\nu$是 G的余伴随轨道，参见 [G，第 2] 节。

例 2.1。 令 $M = \mathbb{CP}^2$、 $L = \mathcal{O}(1)$，并令 S^1 作用为

$$e^{i\vartheta}\cdot[z_0 : z_1 : z_2] = [z_0 : e^{i\vartheta}z_1 : e^{-i\vartheta}z_2]\,.$$

则 Φ 是以下量的正倍数

$$(|z_1|^2 - |z_2|^2)/|z|^2$$

且 $m = [1 : 0 :\ 0] \in \Phi^{-1}(0)$ 是一个不动点： $s = 0$、 $d = 1$、 $G_m = S^1$、 $N_m = T_mM \cong \mathbb{C}^2$ 的权为 $(1,\ -1)$。该作用在 m 的去心邻域上是自由的。对于 $\nu = 0$，定理给出

$$\begin{aligned}\Pi_{k,0}\Big(x + \tfrac{\mathbf{v}}{\sqrt{k}}, x + \tfrac{\mathbf{v}}{\sqrt{k}}\Big) &\sim \Big(\frac{k}{\pi}\Big)^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(e^{-i\vartheta}-1)|v_1|^2+(e^{i\vartheta}-1)|v_2|^2}\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \Big(\frac{k}{\pi}\Big)^2 e^{-\|\mathbf{v}\|^2} I_0\big(2|v_1||v_2|\big),\end{aligned}$$

其中 I_0 是修正贝塞尔函数。

例 2.2。 设 $\boldsymbol{r}=(r_1、\ldots\ldots、\ r_N)$ 为正整数，且 $M=(\mathbb{CP}^1)^N$，其中

$$L=\mathcal{O}(r_1)\boxtimes\cdots\boxtimes\mathcal{O}(r_N),$$

使得 $n=N$。令 ω_{FS}为 $\mathbb{CP}^1$上的 Fubini–Study形式，按照 [SZ], 中的归一化方式，使其成为 $\mathcal{O}(1)$ 的曲率形式。由于 $\mathcal{O}(r)=\mathcal{O}(1)^{\otimes r}$， L 的曲率形式为

$$\omega=\sum_{j=1}^{N} r_j\,\mathrm{pr}_j^*\,\omega_{FS},$$

其中 $\mathrm{pr}_j\colon M\to\mathbb{CP}^1$ 是到第 j 个因子的投影。令 $G=SU(2)$，并令 G 在 M上作对角作用，

$$g\cdot(u_1,\ldots,u_N)=(g\cdot u_1,\ldots,g\cdot u_N),$$

其中 $SU(2)$ 通过其在 $\mathbb{C}^2$上的标准表示作用于每个因子 $\mathbb{CP}^1=\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$；此作用可提升到 L。除一个正的常数因子外，

$$\Phi(u_1,\ldots,u_N)=\sum_{j=1}^{N} r_j u_j$$

其中 $u_j\in S^2\subset\mathbb{R}^3\cong\mathfrak{su}(2)^\vee$。因此， $\Phi^{-1}(0)/SU(2)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中边长为 r_j [KM],的闭合多边形空间，并且

$$H(X)_{k,0}\cong\mathrm{Inv}_{SU(2)}\big(V_{kr_1}\otimes\cdots\otimes V_{kr_N}\big),$$

其中 V_a 是维数为 $a+1$的不可约表示。对于一般的 $\boldsymbol{r}$ ，多边形空间是光滑的，其量子化已由 Charles[Ch]研究；此处我们考察非一般情形。

不包含在一条直线上的闭多边形 u 具有 $G_u=\{\pm e\}$，其中e 是 G的单位元。现在假设 u 包含在一条直线上，因此$u_j=\varepsilon_j\mathbf{n}$ 对于单位向量 $\mathbf{n}\in S^2$ 以及符号 $\varepsilon_j=\pm1$ 满足

$$\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j r_j=0.$$

这类多边形称为退化的 [KM]。那么 $G_u\cong U(1)$ 是 $SU(2)$ 的极大环面，它覆盖绕 $\mathbf{n}$轴的旋转。

这里 $s=2$ 与 G_u 相连，因此 $h_g\equiv1$。 u 的轨道为 $G\cdot u=\{(\varepsilon_j p)_j:$ $p\in S^2\}\cong S^2$，因为 $g\cdot u=(\varepsilon_j\,g\mathbf{n})_j$ 且 $g\mathbf{n}$ 遍历 S^2。嵌入 $p\mapsto(\varepsilon_1 p,\ \ldots\ldots,\ \varepsilon_N p)$ 的每个分量要么是单位元，要么是对踵映射，这两者都是$\mathbb{CP}^1\cong S^2$的等距变换。因此

由 ω 的 K¨ahler 度量在 $G\cdot u$ 上诱导的度量是 Fubini– Study 度量的 R 倍，其中 $R:=\sum_{j=1}^{N} r_j$。由于 $(\mathbb{CP}^1,\ \omega_{FS})$ 的面积为 π，我们得到$V_{\text{eff}}(u) = \text{Vol}(G\cdot u) = \pi R$。最后，$G_u$ 以权 ± 1（相差一个公因子）的方式作用于 $N_u \cong \mathbb{C}^{N-2}$，而该公因子与下文无关。现在，相应地写作$\mathbf{v}_{\mathrm{h}} = \mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-$，其中 $\mathbf{v}_\pm$ 来自满足 $\varepsilon_j = \pm 1$的各边，并模去轨道方向。对于 x 遍历 u的情形，定理给出

$$\Pi_{k,0}\Big(x+\tfrac{\mathbf{v}}{\sqrt{k}}, x+\tfrac{\mathbf{v}}{\sqrt{k}}\Big) = \Big(\frac{k}{\pi}\Big)^{N-1}\frac{2}{\pi R}\, e^{-2\|\mathbf{v}_{\mathrm{t}}\|^2-\|\mathbf{v}_{\mathrm{h}}\|^2}\, I_0\big(2\|\mathbf{v}_+\|\,\|\mathbf{v}_-\|\big)\big(1+O(k^{-1/2})\big).$$

2.2 标准形

首先，我们回顾适当群作用的管状邻域定理，证明参见 [DK，定理 (2.4.1)]。

定理 2.2 (管状邻域定理)。设 $A\colon\ G\times M\to M$ 是紧李群 G 在 M上的光滑作用。那么存在 G-不变开邻域 U，它是 $m\in M$ 的邻域，使得 G在 U 上的作用等价于 G 在 $G\times_{G_m} B$上的作用，其中 B 是 G_m-不变开邻域，包含 $T_mM/\mathfrak{g}_M(m)$中的0，且 G_m 通过无穷小作用模去 $\mathfrak{g}_M(m)$在线性作用。

现在，我们回顾 Marle-Guillemin-Sternberg 标准形，见下文定理 2.3，证明参见 [Or]。从现在起，假设 M 是一个可量化的 K¨ahler 流形，具有 Hodge形式 ω。设 $m\in M$ 满足 $\Phi(m)=0$。令 R为 $\mathfrak{g}_M(m)$的根，即 $\mathfrak{g}_M(m)$与其辛正交补的交集。

下面的引理众所周知；为方便读者，我们重述其证明。

引理 2.1. 设 $m\in M$ 满足 $\Phi(m)=0$，则 $R=\mathfrak{g}_M(m)$。

证明。设 R 是关于 ω_m 的 $\mathfrak{g}_M(m)$ 的根，即

$$R=\mathfrak{g}_M(m)\cap\big(\mathfrak{g}_M(m)\big)^{\omega},$$

其中

$$\big(\mathfrak{g}_M(m)\big)^{\omega}=\{\mathbf{v}\in T_mM:\ \omega_m(\mathbf{v},\mathbf{w})=0\ \ \forall \mathbf{w}\in\mathfrak{g}_M(m)\}.$$

如果 $\Phi(m)=0$，那么对每个 $\xi,\ \eta\in\mathfrak{g}$ 哈密顿作用恒等式给出

$$\omega_m\big(\xi_M(m),\eta_M(m)\big)=\langle\Phi(m),[\xi,\eta]\rangle=0.$$

因此，在 m 处轨道切空间的任意两个生成元都彼此ω_m–正交，这意味着

$$\mathfrak{g}_M(m) \subseteq \big(\mathfrak{g}_M(m)\big)^{\omega},$$

即， $\mathfrak{g}_M(m)$ 是各向同性的。因此

$$R = \mathfrak{g}_M(m) \cap \big(\mathfrak{g}_M(m)\big)^{\omega} = \mathfrak{g}_M(m).$$

□

注意，在引理 2.1 中，若 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的，则对每个 m，同一恒等式都成立，因为对所有 ξ， η， $[\xi,\eta]=0$。

令 N_m 为 $\mathfrak{g}_M(m)^{\omega}$ 中 $\mathfrak{g}_M(m)$ 的补空间，

$$N_m := \mathfrak{g}_M(m)^{\perp_g} \cap \mathfrak{g}_M(m)^{\omega}.$$

注意， N_m 是 $(T_mM,\ \omega_m)$ 的辛子空间，因此 N_m^{ω} 也是辛的。由于 J_m 是与 ω 和 g 均相容的同构，我们有 $J_m(N_m) = N_m$。于是得到 $T_mM = N_m^{\omega} \oplus N_m$。$m$ 处的 Witt-Artin 分解是 G_m-不变的分裂，将 T_mM 分解为

$$T_mM = \mathfrak{g}_M(m) \oplus L_m \oplus N_m \tag{6}$$

其中 L_m 是 N_m^{ω} 中 $\mathfrak{g}_M(m)$ 的拉格朗日补空间，即

$$N_m^{\omega} = \mathfrak{g}_M(m) \oplus L_m, \qquad L_m \text{ Lagrangian in } N_m^{\omega}.$$

设 $\dim\ \mathfrak{g}_M(m) = s$，$\dim\ N_m = 2n-2s$，且 $\dim\ T_mM = 2n$。由于 $N_m \subset \mathfrak{g}_M(m)^{\omega}$，我们有 $\dim\ N_m^{\omega} = 2s.$。现在回顾一下，$(M,\ \omega,\ J,\ g)$ 是一个 K¨ahler 流形，因此我们可以按照以下引理选取拉格朗日补空间 L_m。

引理 2.2. 我们可以选取 $L_m = J_m(\mathfrak{g}_M(m))$。

证明。 由于 $\mathfrak{g}_M(m)$ 是各向同性的（引理 2.1），且 $g_m(\mathbf{v}\ J_m\mathbf{w}) = \omega_m(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 至多相差一个符号，因此有 $\mathfrak{g}_M(m) \perp J_m\mathfrak{g}_M(m)$。由于 N_m 是 J_m-不变的，故 $N_m^{\omega} = N_m^{\perp} = \mathfrak{g}_M(m) \oplus J_m\mathfrak{g}_M(m)$。最后， $J_m\mathfrak{g}_M(m)$ 是各向同性的，因为 $\omega_m(J_m\mathbf{v}\ J_m\mathbf{w}) = \omega_m(\mathbf{v},\mathbf{w})$，且其维数为 s，因此它是 N_m^{ω} 中 $\mathfrak{g}_M(m)$ 的一个拉格朗日补空间。

□

固定 G-不变的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ 于 $\mathfrak{g}$，从而将 $\mathfrak{g}$ 与其对偶空间等同起来。Witt-Artin 分解可以结合管状定理 2.2 和 Φ的性质作进一步分析。事实上，我们有

• 子空间 $J_m(\mathfrak{g}_M(m)) \oplus N_m$ 是 m 处的一个截面，如管状邻域定理所述。

• $\mathfrak{g}_M(m)^\omega = \ker \mathrm{d}_m\Phi$，因此 N_m 可以取为 $\ker \mathrm{d}_m\Phi$ 中相对于 G_m–作用的不变补空间，即任意一个与 $\mathfrak{g}_M(m)$ 互补的子空间。

• 映射 $f\colon\ J_m(\mathfrak{g}_M(m)) \to \mathfrak{g}_m^\circ$ 定义为

$$\langle f(\mathbf{v}), \xi\rangle = \omega_m(\xi_M(m), \mathbf{v})\,, \qquad \mathbf{v} \in J_m(\mathfrak{g}_M(m)),\, \xi \in \mathfrak{g}$$

是一个 G_m-等变线性同构。这里，$\mathfrak{g}_m^\circ$ 是 $\mathfrak{g}^\vee$中$\mathfrak{g}_m$ 的湮灭子。

由于按照构造，N 是 T_mM的辛向量子空间，将其辛形式记为 ω^N。还要注意，由于 G在 M 上的作用是哈密顿的，因此 G_m 以哈密顿方式作用于 N，并伴随一个二次齐次动量映射 Φ^N，见 [或]。

设 $m \in M$ 满足 $\Phi(m) = 0$，并考虑直积

$$G \times (\mathfrak{g}_m^\circ \times N_m)\,,$$

其中 N_m 是 m 处的一个 G_m–不变辛正规空间。定义 G_m 的作用为

$$\begin{aligned} G_m \times (G \times (\mathfrak{g}_m^\circ \times N_m)) &\to G \times (\mathfrak{g}_m^\circ \times N_m) \\ (h, (g, \rho, \mathbf{v})) &\mapsto (gh^{-1},\, \mathrm{Ad}^*_{h^{-1}}\,\rho,\, h\cdot\mathbf{v})\,. \end{aligned}$$

该作用是自由的，并且由于 G_m 是紧的，商空间是一个流形，记作

$$Y = G \times_{G_m} (\mathfrak{g}_m^\circ \times N_m)\ ,$$

其元素为等价类 $[g, \rho, \mathbf{v}],$，其中 $G \times(\mathfrak{g}_m^\circ \times N_m)$ 中的两个元素等价，当且仅当它们属于同一个 G_m-轨道。

G 在 $G \times (\mathfrak{g}_m^\circ \times N_m)$ 上还有一个作用，定义为

$$g' \cdot (g, \rho, \mathbf{v}) = (g'g, \rho, \mathbf{v})\,.$$

G 和 G_m 的作用显然可交换，因此商空间 Y 上诱导出一个 G-作用，定义为

$$g' \cdot [g, \rho, \mathbf{v}] = [g'g, \rho, \mathbf{v}]\,.$$

此外，我们可以按如下方式为 Y赋予微分二形式 ω^Y。首先，记 π 为投影映射

$$\begin{aligned} \pi\ :\ G \times (\mathfrak{g}_m^\circ \times N_m) &\to G \times_{G_m} (\mathfrak{g}_m^\circ \times N_m) \\ (g, \rho, \mathbf{v}) &\mapsto [g, \rho, \mathbf{v}]\,. \end{aligned}$$

我们也使用 TG的左平凡化，其定义为

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{g} &\to TG \\ (g, \xi) &\mapsto g\,\xi := \mathrm{d}_e L_g(\xi) \in T_g G\,, \end{aligned}$$

其中 $L_g : \ G \to G$, $L_g(g') = gg'$ 是左平移。于是，我们可以将 $[g, \rho, \mathbf{v}] \in Y$的切空间刻画为

$$T_{[g,\rho,\mathbf{v}]} Y = \left\{ \gamma_{\xi,\dot\rho,\dot{\mathbf{v}}} := \mathrm{d}_{(g,\rho,\mathbf{v})}\pi(g\cdot\xi, \dot\rho, \dot{\mathbf{v}}) \,:\, \xi \in \mathfrak{g},\, \dot\rho \in \mathfrak{g}_m^\circ,\, \dot{\mathbf{v}} \in N_m \right\}.$$

接下来，定义 $\Phi^N \colon N_m \to \mathfrak{g}_m^\vee$ 为 G_m 在（N_m, ω^N）上的各向同性表示的动量映射。然后，我们定义二形式 ω^Y 如下:

$$\begin{aligned} \omega^Y_{[g,\rho,\mathbf{v}]}\left(\gamma_{\xi_1,\dot\rho_1,\dot{\mathbf{v}}_1}, \gamma_{\xi_2,\dot\rho_2,\dot{\mathbf{v}}_2}\right) = {}& \langle \dot\rho_2 + \mathrm{d}_{\mathbf{v}}\Phi^N(\dot{\mathbf{v}}_2), \xi_1\rangle - \langle \dot\rho_1 + \mathrm{d}_{\mathbf{v}}\Phi^N(\dot{\mathbf{v}}_1), \xi_2\rangle \\ & + \langle \rho + \Phi^N(\mathbf{v}), [\xi_1, \xi_2]\rangle + \omega_m(\xi_{1\,M}(m), \xi_{2\,M}(m)) \\ & + \omega^N(\dot{\mathbf{v}}_1, \dot{\mathbf{v}}_2)\,. \end{aligned}$$

这在 Y上定义了一个良定义的 G不变辛形式。G在（Y, ω^Y）上的作用是哈密顿的，其动量映射为 Φ_Y: $Y \to \mathfrak{g}^\vee$,

$$\Phi_Y([g, \rho, \mathbf{v}]) = \mathrm{Ad}^\vee_{g^{-1}}\left(\rho + \Phi^N(\mathbf{v})\right).$$

现在我们可以陈述本节的主要结果，内容是构造 Marle–Guillemin–Sternberg 标准形。

定理 2.3. 设 $m \in M$ 满足 $\Phi(m) = 0$，其中0 是动量映射的一个奇异值。设 N 是 $\mathfrak{g}_M(m)$ 在$\ker(\mathrm{d}_m\Phi)$中的一个 G_m不变补空间。则二形式 ω^Y在 $[e, 0, 0] \in Y$的一个邻域内是辛的。此外，上文定义的 G在 Y 上的作用是哈密顿的，其动量映射为

$$\Phi^Y([g, \rho, \mathbf{v}]) = \mathrm{Ad}^\vee_{g^{-1}}\big(\rho + \Phi^N(\mathbf{v})\big)\,.$$

存在一个局部辛同胚

$$\phi \,:\, Y \to M$$

它关于 Y上的作用和 M上的原作用是 G-等变的，使得

$$\phi([e, 0, 0]) = m, \qquad \phi\big(G \times_{G_m} (\{0\} \times \{0\})\big) = G \cdot m\,.$$

此外，可以选择 ϕ ，使得$\phi_{[e,0,0]}$ 处的微分 G_m是下文（10）中的等变酉同构 ι 。事实上， ϕ 由一个 G等变嵌入构造而成，该嵌入在 $[e, 0, 0]$处具有上述微分；随后再通过一个等变 Moser 同伦进行修正，该同伦沿 $G \cdot m$ 的一阶展开为单位元，因为两个辛形式在 $TM|_{G\cdot m}$上重合。

2.3 不变局部坐标

本节将简要回顾给定 $x \in X$ 处 [SZ] 的海森堡局部坐标定义，并受 [P1]启发，对前述构造作少许等变调整。

设 U 是 M 中 $\pi(x)$ 的一个足够小的开邻域。回忆一下，以 $\pi(x)$ 为中心的 M 的适配坐标系 $(z_1, \ldots\ldots, z_n)$，是通过半径为 $\delta > 0$ 的足够小的 $\subset \mathbb{C}^n \cong (T_{\pi(x)}M,\ J_{\pi(x)})$ 上的指数映射定义的坐标系，

$$\exp_{TM} : B_{2n}(0, \delta) \to U \subset M$$

当 $\omega_{\pi(x)}$ 用 z_i 表示时，它就是 $\mathbb{C}^n$ 上的标准辛结构。因此，z_i 的选取确定了 $T_{\pi(x)}M \cong \mathbb{C}^n$ 之间的一个酉同构。

此外，回忆一下，根据 [SZ], 的意义，以 $\pi(x)$ 为点的 L 的优选局部标架 $e_L :\ U \to L$，是 $\pi(x)$ 的邻域 U 内的 L 的一个全纯局部截面，满足

$$\|e_L(\pi(x))\| = 1\,, \quad \nabla e_L(\pi(x)) = 0\,, \quad \nabla^2 e_L(\pi(x)) = -\overline{h}_{\pi(x)} \otimes e_L(\pi(x))\,, \tag{7}$$

其中 ∇ 是联络的协变导数，且 $h = g + i\,\omega$。L 的局部全纯标架唯一确定了 $L^\vee$ 的全纯对偶局部标架 $e_L^\vee$，由条件 $\langle e_L^\vee,\ e_L\rangle = 1$ 确定。

于是，对于半径为 $\delta > 0$ 的充分小的 $B_{2n}(0,\ \delta) \subset \mathbb{C}^n \cong (T_{\pi(x)}M,\ J_{\pi(x)})$，我们通过映射定义以 x 为中心的 X 的海森堡局部坐标系

$$\begin{aligned} \rho : (-\pi,\, \pi) \times B_{2n}(0,\, \delta) &\to X \\ (\theta,\, \mathbf{w}) &\mapsto e^{i\,\theta}\, \frac{1}{\|e_L^\vee(\exp_{TM}(\mathbf{w}))\|}\, e_L^\vee(\exp_{TM}(\mathbf{w}))\,. \end{aligned} \tag{8}$$

若 $\mathbf{w} \in T_{\pi(x)}M$，我们将 $x + \mathbf{w}$ 记作 X 中具有海森堡局部坐标 $(0,\ \mathbf{w})$ 的点。从现在起，在诸如 $\exp_{TM}(\mathbf{w})$ 这样的表达式中，我们省略 $\exp_{TM}$，并简单地写作 $\mathbf{w}$。

假设 $x \in X, \Phi \circ \pi(x) = 0$。若 $G_{\pi(x)}$ 是 $\pi(x)$的稳定子子群，则对每个 $g \in G_{\pi(x)}$，存在唯一的 $h_g \in S^1$ 使得 $\tilde{A}_g(x) = h_g \cdot x$，其中 $A_g :\ X \to X$ 是由 g诱导的接触同胚。令 $U \subseteq M$ 为 m的一个G_m-不变开邻域，并假设已在 U 上选取了满足 (7) 的局部全纯标架 $e_L^\vee$。显然，对每个 $g \in G_m$，我们都有 $g^*(e_L^\vee)(m) = A_g \circ e_L^\vee(m)$（回忆一下，$g^*(e_L^\vee) = A_g \circ e_L^\vee \circ A_{g^{-1}}$）。于是我们可以考虑新的标架

$$\widetilde{e}_L^\vee = \frac{1}{\mathrm{vol}(G_m)} \int_{G_m} h_g^{-1}\, g^*(e_L^\vee)\, \mathrm{dV}_{G_m}(g)\,,$$

由于 G_m 是紧的，它定义良好。于是 $\widetilde{e}_L^{\vee}(m) = e_L^{\vee}(m)$，并且由于度量和联络都是 G-不变的，$\widetilde{e}_L^{\vee}$ 也满足 (7)。此外，现在我们有

$$g^*(\widetilde{e}_L^{\vee}) = h_g \cdot \widetilde{e}_L^{\vee}\,, \quad \forall g \in G_m\,. \tag{9}$$

等式(9)的证明。令 $l \in G_m$ 并考虑

$$l^*(\widetilde{e}_L^{\vee}) = \frac{1}{\mathrm{vol}(G_m)} \int_{G_m} h_g^{-1}\,(l\,g)^*(e_L^{\vee})\,\mathrm{dV}_{G_m}(g)\,.$$

利用 dV_{G_m} 是左不变的这一事实，并作变量替换 $g \mapsto l^{-1}g$，可得

$$l^*(\widetilde{e}_L^{\vee}) = \frac{1}{\mathrm{vol}(G_m)} \int_{G_m} h_{l^{-1}g}^{-1}\,g^*(e_L^{\vee})\,\mathrm{dV}_{G_m}(g)\,.$$

现在，由于 $h_{l^{-1}g}^{-1} = h_l\,h_g^{-1}$，可得 (9)。 □

下文中，假设定义海森堡局部坐标时所用的底层优选局部全纯标架满足 (9)。

在 $\mathfrak{g}_m^{\perp}$ 上赋予一个 $\mathrm{Ad}(G_m)$-不变内积

$$\langle \eta, \zeta \rangle_m := g_m\big(\eta_M(m), \zeta_M(m)\big)$$

并用它来识别 $\mathfrak{g}_m^{\circ} \cong \mathfrak{g}_m^{\perp}$；于是 §2 中的映射 f 变为 $J_m\zeta_M(m) \mapsto \zeta$。考虑

$$\iota:\ \mathfrak{g}_m^{\perp} \oplus \mathfrak{g}_m^{\perp} \oplus N_m \longrightarrow T_mM, \qquad (\eta, \zeta, \mathbf{u}) \longmapsto \eta_M(m) + J_m\zeta_M(m) + \mathbf{u}. \tag{10}$$

识别

$$\mathfrak{g}_m^{\perp} \oplus \mathfrak{g}_m^{\perp} \cong \mathfrak{g}_m^{\perp} \otimes \mathbb{C}$$

经由 $(\eta,\ \zeta) \mapsto \eta + i\zeta$。于是 ι 是 $\mathbb{C}$-线性的、等距的且 G_m-等变的，因为

$$\mathrm{d}A_g(\eta_M(m)) = (\mathrm{Ad}_g\eta)_M(m)$$

对于 $g \in G_m$。此外，$\iota^*\omega_m$ 是标准辛形式，因为 $\mathfrak{g}_M(m)$ 是各向同性的（引理 2.1），且 $N_m \perp \mathfrak{g}_M(m) \oplus J_m\mathfrak{g}_M(m)$。因此：

(i) $\exp_m \circ \iota$ 是以 m 为中心的适配图表（其中 ω_m、J_m 和 g_m 均为标准形式），且它是 G_m-等变的。结合满足 (9) 的平均标架，它定义了海森堡局部坐标，在这些坐标中，

$$\tilde{A}_g\big(x + (\theta, \mathbf{u})\big) = x + \big(\theta + \theta_g,\ \mathrm{d}A_g\mathbf{u}\big), \qquad g \in G_m,\ \mathbf{u} \in T_mM,$$

因为固定 m 的等距变换与 $\exp_m$ 可交换。

（ii）标准形映射可以选取为具有 $\mathrm{d}\phi_{[e,0,0]} = \iota$，在 $(\eta,\ \rho,\ \mathbf{u}) \mapsto [\exp_{\mathfrak{g}} \eta,\ \rho,\ \mathbf{u}]$ 的坐标中。于是 ϕ 与 $\exp_m \circ \iota$ 在 $O(\|(\eta,\ \rho,\ \mathbf{u})\|^2)$ 阶之前一致。

特别地，下面的所有计算都可以在坐标图 $\exp_m \circ \iota$ 中进行；映射 ϕ 仅用于描述 $\Phi^{-1}(0)$ 及其在 $G \cdot m$ 附近的分层。

3 主要定理的证明

˄ 给定 $H(X)_k$ 按同型分量 $H(X)_{k,\nu}$, $\nu \in G$ 的直和分解，我们考虑正交投影 $\Pi_{k,\nu}$: $L^2(X) \to H(X)_{k,\nu}$。因此，对每个 $x,\, y \in X$

$$\begin{aligned}\Pi_{k,\nu}(x,\, y) &= \dim_{\mathbb{C}}(V_\nu) \cdot \int_G \chi_\nu\left(g^{-1}\right)\, \Pi_k\left(\widetilde{A}_{g^{-1}}(x),\, y\right) \mathrm{dV}_G(g) \\ &= \frac{\dim_{\mathbb{C}}(V_\nu)}{2\,\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_G e^{-ik\,\theta}\, \chi_\nu\left(g^{-1}\right)\, \Pi\left(\widetilde{A}_{g^{-1}} \circ r_\theta(x),\, y\right)\, \mathrm{dV}_G(g)\, \mathrm{d}\theta\,. \quad (11)\end{aligned}$$

其中 r_θ 表示 X 上的圆作用（这里我们可以取 $\mathrm{Vol}(G) = 1$；在最后的计算中，我们保留 $\mathrm{Vol}(G)$，以说明结果不依赖于 $\mathfrak{g}$ 上的度量）。

设 $x \in X \setminus (\Phi \circ \pi)^{-1}(0)$，则容易看出，在 x 的充分小开邻域 U 上，$\Pi_{k,\nu}$ 具有快速衰减的渐近展开。特别地，通过迭代分部积分即可按标准方法得出这一结论。

现在，证明的第一部分是将式 (11) 中的被积函数更明确地改写，并引入适当的截断函数。这一过程是标准的，因此我们将略作简述。

从现在起，我们固定 $x \in (\Phi \circ \pi)^{-1}(0)$、 $m = \pi(x)$，并考虑重标度位移 $x_{1,\ k}$， $x_{2,\ k}$ （其中 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$、$\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$ 采用定理中的记号）：

$$x_{j,k} = x + \frac{\mathbf{v}_j}{\sqrt{k}} \qquad j = 1,\, 2\,.$$

那么，同样地，按照 [P1], 中的标准论证，$\Pi_{k,\nu}(x_{1,k},\, x_{2,k})$ 的渐近行为不变，即使将 (11) 中的被积函数乘以 $\varrho_k(g)$，其中 ϱ_k： $G \to \mathbb{R}$ 是一个截断函数，在 $G_{\pi(x)}$ 的一个逐渐缩小的管状邻域 $\mathcal{T}_k(G_{\pi(x)})$ 之外恒为零。更确切地说，令

$$\mathcal{T}_k(G_{\pi(x)}) := \left\{ g \in G\,:\, \mathrm{dist}_G(g,\, h) < 2\,k^{\epsilon - 1/2},\, h \in G_{\pi(x)} \right\}\,.$$

于是我们有

$$\Pi_{k,\nu}(x_{1,k},\, x_{2,k}) \sim \frac{\dim_{\mathbb{C}}(V_\nu)}{2\,\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathcal{T}_k(G_{\pi(x)})} \mathrm{dV}_G(g)\,\mathrm{d}\theta \\ \left[e^{-ik\,\theta}\, \chi_\nu\left(g^{-1}\right)\, \Pi\left(\widetilde{A}_{g^{-1}} \circ r_\theta(x_{1,k}),\, x_{2,k}\right)\, \varrho_k(g) \right], \quad (12)$$

令 $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ 为指数映射。为简便起见，我们记 $\exp_G(\xi) = e^{\xi}$。现在，令 k 足够大，使得 $\exp_G$ 在 $\mathcal{T}_k(G_{\pi(x)})$ 上限制为一个微分同胚。于是，我们可以将其参数化为

$$g' \in \mathcal{T}_k(G_{\pi(x)}) \text{ as } g' = g\, \exp_G(\xi/\sqrt{k})\,, \quad \xi \in \mathfrak{g}^{\perp}_{\pi(x)}\,.$$

因此，我们可以利用指数坐标图来表示在 $\mathrm{dV}_G(g)$ 中的积分 .

为此，固定 $\mathfrak{g}^{\perp}_{\pi(x)}$ 的一个标准正交基，从而将 $\mathfrak{g}^{\perp}_{\pi(x)}$ 酉地识别为 $\mathbb{R}^s$。令 ξ 为 $\mathfrak{g}$ 上相应的线性坐标。我们用 $H_{G_{\pi(x)}}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ 表示哈尔测度 dV_G 在指数坐标图下的局部坐标表达式。

然后进行变量替换 $\xi \mapsto \xi/\sqrt{k}$，得到

$$\Pi_{k,\nu}(x_{1,k},\, x_{2,k}) \sim k^{-s/2}\, \frac{\dim_{\mathbb{C}}(V_\nu)}{2\,\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbb{R}^s} \int_{G_{\pi(x)}} \mathrm{dV}_{G_{\pi(x)}}(g)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\theta \\ \left[e^{-ik\,(\theta+\theta_g)}\, \chi_\nu\left(e^{-\xi/\sqrt{k}} g^{-1}\right)\, \Pi\left(\widetilde{A}_{e^{-\xi/\sqrt{k}} g^{-1}} \circ r_{\theta+\theta_g}(x_{1,k}),\, x_{2,k}\right)\, \varrho_k(\xi) \right],$$

其中，对于每个 $g \in G_{\pi(x)}$，都有 $h_g = e^{i\theta_g}$，并且

$$\varrho\left(g\, e^{\xi/\sqrt{k}}\right) = \varrho\left(e^{\xi/\sqrt{k}}\right) =: \varrho_k(\xi)$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $g \in G_{\pi(x)}$，因为可以选择 ϱ 使其为 $G_{\pi(x)}$-不变的。

我们再引入一个截断函数。固定一个足够小的 $\delta > 0$，并令 $\gamma_0 + \gamma_1 = 1$ 为 $(-\pi, \pi)$ 上的单位分解，其中 $\mathrm{supp}(\gamma_0) \subseteq (-\delta, \delta)$，且 $\mathrm{supp}(\gamma_1) \subseteq (-\pi, -\delta/2) \cup (\delta/2, \pi)$。作此选择后，核 $\Pi_{k,\nu}(x_{1,k}, x_{2,k})$ 分解为两项，

$$\Pi_{k,\nu}(x_{1,k}, x_{2,k}) = \sum_{j=0}^{1} \Pi_{k,\nu}(x_{1,k}, x_{2,k})_j\,,$$

其中每个 $\Pi_{k,\nu}(x_{1,k}, x_{2,k})_j$ 均由式 (12) 给出，但被积函数乘以 γ_j, $j = 0, 1$。类似于 [P1，利用引理 4.2]，可证明，$\Pi_{k,\nu}(x_{1,k}, x_{2,k})_1$ 关于 $k \to +\infty$ 具有快速衰减的渐近展开。

接下来，回顾 [BS] 中构造的 Szeg˝o 核的参数子。忽略不影响渐近展开的平滑项后，我们可以将 Π表示为如下形式的复傅里叶积分算子：

$$\Pi(x,y) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{it\,\psi(x,y)}\, s(x,y,t)\,\mathrm{d}t \qquad (x,y\in X)\,, \tag{13}$$

其中 ψ 是复相位函数，振幅 s是具有渐近展开的半经典符号

$$s(x,y,t) \;\sim\; \sum_{j=0}^{+\infty} t^{\,n-j}\, s_j(x,y) \qquad (x,y\in X)\,.$$

根据（12），将（13）代入（12），并将被积函数乘以γ_0，我们得到

$$\begin{aligned}\Pi_{k,\,\nu}(x_{1,k},\,x_{2,k}) \sim & k^{-s/2+1}\,\frac{\dim_{\mathbb{C}}(V_\nu)}{2\,\pi}\cdot\int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}^s}\int_{G_{\pi(x)}} \mathrm{dV}_{G_{\pi(x)}}(g)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ & \Big[e^{i\,k\,\Upsilon_k(x,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,g,\xi,\theta,t)}\,\mathcal{A}_k(x,\,\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\,g,\,\xi,\,\theta,t)\Big]\,.\end{aligned} \tag{14}$$

其中我们进行了坐标变换 $t\mapsto k\,t$,

$$\Upsilon_k(x,\,\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\,g,\,\xi,\,\theta,t) = -\theta_g-\theta+t\,\psi\left(\widetilde{A}_{e^{-\xi/\sqrt{k}}g^{-1}}\circ r_{\theta+\theta_g}(x_{1,k}),\,x_{2,k}\right)$$

and

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_k(x,\,\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\,g,\,\xi,\,\theta,t)\\ &\qquad=\gamma_0(\theta)\,\chi_\nu\left(e^{-\xi/\sqrt{k}}g^{-1}\right)\,s\left(\widetilde{A}_{e^{-\xi/\sqrt{k}}g^{-1}}\circ r_{\theta+\theta_g}(x_{1,k}),\,x_{2,k},\,k\,t\right)\\ &\qquad\qquad\cdot\varrho_k\left(\xi\right)\,H_{G_{\pi(x)}}\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)\,.\end{aligned}$$

接下来，我们将依据 [SZ]中的（64）和（65），按 $k^{1/2}$的降幂对 Υ_k 进行泰勒展开。为此，我们需要.....的海森堡局部坐标

$$\tilde{A}_{e^{-\xi/\sqrt{k}}}\circ r_{e^{i(\theta+\theta_g)}}\left(\tilde{A}_{g^{-1}}\left(x+\tfrac{\mathbf{v}}{\sqrt{k}}\right)\right)\quad\text{when } g\in G_{\pi(x)}\,.$$

考虑各向同性表示

$$G_{\pi(x)}\longrightarrow \mathrm{GL}(T_{\pi(x)}M),\qquad g\longmapsto \mathrm{d}_{\pi(x)}A_g.$$

对于每个 $g \in G_{\pi(x)}$ 以及$\mathbf{v} \in T_{\pi(x)}M$，令

$$\mathbf{v}_g := \mathrm{d}_{\pi(x)} A_{g^{-1}}(\mathbf{v}) \in T_{\pi(x)}M\,.$$

鉴于我们对海森堡局部坐标的选取，可得以下引理，其证明与 [P1，引理 4.3]类似。

引理 3.1. 设 $x \in X$ 满足 $\Phi \circ \pi(x) = 0$, $\pi(x) = m$，并固定一组以 x为中心的海森堡局部坐标系。对于任意$\mathbf{v} \in T_{\pi(x)}M$,$g \in G_m$和 $\xi \in \mathfrak{g}_m^{\perp}$，当 $k \to +\infty$时，有

$$\tilde{A}_{e^{-\xi/\sqrt{k}}} \circ \left(r_{e^{i\,\theta_g}} \circ \tilde{A}_{g^{-1}} \left(x + \tfrac{\mathbf{v}}{\sqrt{k}} \right) \right) = x + (\Theta_k(\xi,\, \mathbf{v}),\, \mathbf{V}_k(\xi,\, \mathbf{v}))\,.$$

其中

$$\Theta_k(\xi,\, \mathbf{v}) = \frac{1}{k}\,\omega_m(\xi_M(m),\, \mathbf{v}_g) + O\left(\left\| \left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{k}} \right) \right\|^3 \right)\,,$$

and

$$\mathbf{V}_k(\xi,\, \mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,(\mathbf{v}_g - \xi_M(m)) + O\left(\left\| \left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{k}} \right) \right\|^2 \right)\,.$$

现在令 $\psi_2(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - (\|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2)/2$，其中 $\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{C}^n$。由 [SZ, （63）–（65）], 可得

$$\begin{aligned}
\Upsilon_k(x,\, \mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2,\, g,\, \xi,\, \theta, t) &= i\,t\,(1 - e^{i\,\theta}) - \theta - \theta_g \\
&\quad + \frac{t}{k}\,e^{i\theta}\,[\omega_m(\xi_M(m),\, \mathbf{v}_{1,g}) - i\,\psi_2\,(\mathbf{v}_{1,g} - \xi_M(m),\, \mathbf{v}_2)] \\
&\quad + t\,e^{i\,\theta}\,R_g\left(\frac{\xi_M(m)}{\sqrt{k}},\, \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{k}},\, \frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{k}} \right)
\end{aligned}$$

其中 R_g 是一个在原点处三阶消失的光滑函数。

与 [P1], 中的做法类似，我们得到如下分解:

$$i\,\omega_m(\xi_M(m),\, \mathbf{v}_{1,g}) + \psi_2\,(\mathbf{v}_{1,g} - \xi_M(m),\, \mathbf{v}_2) = T_{\mathrm{h}}^g + T_{\mathrm{t}}^g + T_{\mathrm{v}}^g + T_{\mathrm{tv}}^g$$

其中

$$T_{\mathrm{h}}^g := \psi_2\left(\mathbf{v}_{1,\mathrm{h}}^g,\, \mathbf{v}_{2,\mathrm{h}}\right)\,,$$

$$T_{\mathrm{t}}^g := -\frac{1}{2}\,\|\mathbf{v}_{1,\mathrm{t}}^g - \mathbf{v}_{2,\mathrm{t}}\|^2\,,$$

$$T_{\mathrm{v}}^g := -\frac{1}{2}\,\|\mathbf{v}_{1,\mathrm{v}}^g - \xi_M(m) - \mathbf{v}_{2,\mathrm{v}}\|^2\,,$$

$$T^g_{\mathrm{tv}} := -\,i\,\omega_m\left(\mathbf{v}^g_{1,\mathrm{v}} - \xi_M(m) - \mathbf{v}_{2,\mathrm{v}},\, \mathbf{v}^g_{1,\mathrm{t}} + \mathbf{v}_{2,\mathrm{t}}\right) + i\left[\omega_m(\mathbf{v}^g_{1,\mathrm{v}}, \mathbf{v}^g_{1,\mathrm{t}}) - \omega_m(\mathbf{v}_{2,\mathrm{v}}, \mathbf{v}_{2,\mathrm{t}})\right].$$

现在，我们将参数子中出现的经典符号s 的渐近展开代入（14），并分别对 $\xi/\sqrt{k}$、$\mathbf{v}_1/\sqrt{k}$ 和$\mathbf{v}_2/\sqrt{k}$ 使用关于 $k^{1/2}$的降幂泰勒展开，以定义

$$\tilde{\mathcal{A}}_k(x,\,\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\,g,\,\xi,\,\theta,t) \sim \sum_{l\geq 0} a^g_l(x,\,\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\,\xi,\,\theta,t)\,k^{n-l/2},$$

其中每个系数的形式为

$$a^g_l(x,\,\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\,\xi,\,\theta,t) = e^{t\,e^{i\theta}\,(T^g_{\mathrm{h}}+T^g_{\mathrm{t}}+T^g_{\mathrm{v}}+T^g_{\mathrm{tv}})}\,p^g_l(x,\,\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\,\xi,\,\theta,t),$$

且每个 p^g_l 都是关于$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$, 和 ξ 的多项式，其系数取决于x、 t、 θ 及其他参数。特别地，首项系数为

$$a^g_0(x,\,\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\,\xi,\,\theta,t) = e^{t\,e^{i\theta}\,(T^g_{\mathrm{h}}+T^g_{\mathrm{t}}+T^g_{\mathrm{v}}+T^g_{\mathrm{tv}})}\,\gamma_0(\theta)\,\chi_\nu\left(e^{-\xi/\sqrt{k}}g^{-1}\right) \cdot \varrho_k\left(\xi\right)\,s_0(x,x)\;t^n. \quad (15)$$

因此，显然（14）可以写成

$$\Pi_{k,\,\nu}(x_{1,k},\,x_{2,k}) \sim k^{-s/2+1}\,\frac{\dim_{\mathbb{C}}(V_\nu)}{2\,\pi}\cdot\int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}^s}\int_{G_{\pi(x)}} \mathrm{dV}_{G_{\pi(x)}}(g)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \left[e^{i\,k\,\Psi_g(t,\theta)}\,\tilde{\mathcal{A}}_k(x,\,\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\,g,\,\xi,\,\theta,t)\right]. \quad (16)$$

其中

$$\Psi_g(t,\theta) := i\,t(1-e^{i\,\theta}) - (\theta+\theta_g)\,. \quad (17)$$

为确定 (16) 的首项渐近行为，我们按照 [P1] 中的方法进行。首先对 (15) 关于 ξ 积分。该振荡积分的相位为 Ψ_g，见式 (17)，这与非等变 Szeg˝o 核 [SZ] 的缩放渐近性中的相位一致。该相位的虚部非负，并且在 $(t,\ \theta) = (1,\ 0)$ 处有唯一驻点。在此点， Ψ_g 的海森矩阵非退化。因此，根据复振荡积分的驻相法（ [H] 的定理 7.7.5），经过一些常规计算，我们得到定理中所述的渐近展开。

Set

$$\mathbf{a} := \mathbf{v}^g_{1,\mathrm{v}} - \xi_M(m) - \mathbf{v}_{2,\mathrm{v}}$$

and

$$\mathbf{b} := \mathbf{v}^g_{1,\mathrm{t}} + \mathbf{v}_{2,\mathrm{t}}.$$

通过 ι，确定 $\mathfrak{g}_M(m) \cong \mathbb{R}^s$和 $J_m\mathfrak{g}_M(m) \cong i\mathbb{R}^s$，使得 $\omega_m(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。由于 $g \mapsto g \cdot m$ 是一个以 G_m 为纤维的纤维化 $G \to G \cdot m$，映射

$$\mathfrak{g}_m^{\perp} \ni \xi \mapsto \xi_M(m) \in \mathfrak{g}_M(m)$$

具有雅可比行列式

$$\mathcal{J} = \frac{V_{\mathrm{eff}}(m)\,\mathrm{Vol}(G_m)}{\mathrm{Vol}(G)}.$$

在临界点 $(t,\ \theta) = (1,\ 0)$ 处，有

$$T^g_{\mathrm{v}} + T^g_{\mathrm{tv}} = -\frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2 - i\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\big[\omega_m(\mathbf{v}^g_{1,\mathrm{v}}, \mathbf{v}^g_{1,\mathrm{t}}) - \omega_m(\mathbf{v}_{2,\mathrm{v}}, \mathbf{v}_{2,\mathrm{t}})\big],$$

因此

$$\int_{\mathfrak{g}_m^{\perp}} e^{T^g_{\mathrm{v}}+T^g_{\mathrm{tv}}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{(2\pi)^{s/2}}{\mathcal{J}}\,e^{-\frac{1}{2}\|\mathbf{b}\|^2 + i[\omega_m(\mathbf{v}^g_{1,\mathrm{v}},\mathbf{v}^g_{1,\mathrm{t}}) - \omega_m(\mathbf{v}_{2,\mathrm{v}},\mathbf{v}_{2,\mathrm{t}})]},$$

and

$$-\frac{1}{2}\|\mathbf{b}\|^2 + T^g_{\mathrm{t}} = -\|\mathbf{v}_{1,\mathrm{t}}\|^2 - \|\mathbf{v}_{2,\mathrm{t}}\|^2.$$

现在 G_m 保持不变 ω_m、 g_m 以及 g_m 的每一项

$$T_mM = \mathfrak{g}_M(m) \oplus J_m\mathfrak{g}_M(m) \oplus N_m.$$

因此，指数等于 $Q(\mathbf{v}_{1,\ \mathrm{v}} + \mathbf{v}_{1,\ \mathrm{t}},\ \mathbf{v}_{2,\ \mathrm{v}} + \mathbf{v}_{2,\ \mathrm{t}})$，它不依赖于 g，因此可以提出 G_m上的积分号外。对于一般的 $(t,\ \theta)$，相同的高斯积分（其中二次型乘以 $t\,e^{i\theta}$）给出 $(2\pi/(te^{i\theta}))^{s/2}$ 倍的相应指数项。随后，对 $(t,\ \theta)$ 应用驻相法，恰如 [SZ], ，得到因子 $(k/\pi)^n$。合并各常数，

$$\frac{\dim(\nu)}{\mathrm{Vol}(G)} \cdot k^{-s/2} \cdot \frac{(2\pi)^{s/2}}{\mathcal{J}} \cdot \Big(\frac{k}{\pi}\Big)^n = \Big(\frac{k}{\pi}\Big)^{n-s/2} \frac{2^{s/2}\dim(\nu)}{V_{\mathrm{eff}}(m)\,\mathrm{Vol}(G_m)},$$

这就是 $A_{\nu,\ k}$ 中出现的常数。

4 最后的评论与应用

本节从辛商 $M_0 := \Phi^{-1}(0)/G$ 的角度阐释定理 1.1。首先，我们注意到，$\Pi_{k,\ 0}$ 在奇异点 m 处的缩放极限是局部模型 $N_m/\!\!/G_m$的 Bargmann–Fock量子化，其中 M_0 （见命题 4.1）。由此可得不变截面沿奇异分层的行为，以及集中在奇异轨道附近的不变截面的数量。

4.1 分层约化空间

通过 [SL], 这些集合的连通分支

$$(\Phi^{-1}(0)\cap M_{(H)})/G\,,$$

其中 H 遍历 G的闭子群，构成 M_0的一个分层；记作

$$M_0=\bigsqcup_{l\in\mathcal{L}} M_l\,.$$

更准确地说，赋予 M_0以 $\Phi^{-1}(0)\subseteq M$的商拓扑后，它是一个紧豪斯多夫空间。每个分层 M_l 在 M_0 中都是局部闭的，并且是一个光滑辛流形。由于 M 是紧的，因此只有有限种轨道类型，所以 $\mathcal{L}$ 是有限的。

若 $M_l\cap\overline{M_{l'}}\neq\emptyset$，则 $M_l\subseteq\overline{M_{l'}}$。因此， $l\preceq l'$ 当且仅当 $M_l\subseteq M_{l'}$在 $\mathcal{L}$ 上定义一个偏序，并且

$$\overline{M_{l'}}=\bigsqcup_{l\preceq l'} M_l.$$

此外，回想一下，若 $[m]\in M_l$，则 $[m]$ 的一个邻域与 $N_m^{G_m}\times C_m$中 $(0,\ o)$ 的一个邻域同胚，其中

$$C_m:=(\Phi^N|_{W_m})^{-1}(0)/G_m$$

且 o 是它的顶点。由于 Φ^N 是齐次二次的， C_m 是以紧分层空间为底的锥

$$\big((\Phi^N|_{W_m})^{-1}(0)\cap S(W_m)\big)/G_m,$$

其中 $S(W_m)$ 是单位球面。经过 $[m]$ 的分层对应于 $N_m^{G_m}\times\{o\}$；特别地，$\dim M_l=\dim N_m^{G_m}$。存在唯一的开层M_{top}，它是连通且稠密的。

在我们的全纯情形中， M_0 与 M 关于 $G^{\mathbb{C}}$ 的几何不变量理论商同胚；该商是正规射影簇 [Sj], ，而 M_0 是 Huebschmann 意义下的分层 K¨ahler 空间：每个分层都带有 K¨ahler 结构 [Hue]。

例4.1. 在例 2.1 中，不变环由 z_0 andz_1z_2 生成，因此 M_0 是加权射影直线 $\mathbb{P}(1,\ 2)$。共有三个分层。第一层是点 $[m]$, $m=[1:0:\ 0]$。第二层是由轨道表示的点

$$\{[0:1:e^{i\varphi}]\},$$

其稳定子为 $\{\pm 1\}$，因此它是一个轨形点。第三层是开分层。靠近 $[m]$ 处，局部模型为

$$C_m = \{|v_1| = |v_2|\}/S^1,$$

并且 $w = v_1 v_2$ 将 C_m 与 $\mathbb{C}$对应起来。作为复空间， M_0 在$[m]$处是光滑的。然而，约化的K¨ahler结构在那里是奇异的。事实上

$$\omega_m = \sum_j r_j \, \mathrm{d}r_j \wedge \mathrm{d}\vartheta_j$$

在极坐标 $v_j = r_j e^{i\vartheta_j}$下， C_m 上的约化辛形式为

$$\frac{1}{2}\, \mathrm{d}|w| \wedge \mathrm{d}\arg w,$$

该形式在 $w = 0$处不光滑，而 C_m 上的约化度量是总角度为 π的平坦圆锥度量。

现在定义约化空间的Hardy空间。令

$$Z := (\Phi \circ \pi)^{-1}(0) \subseteq X\,,$$

$X_0 := Z/G$，并令 $p\colon\ X_0 \to M_0$ 为投影。正如在 $A_{\nu,k}$的定义之后所观察到的，群 $\{h_g\colon\ g \in G_m\}$ 是有限的，因此纤维

$$p^{-1}([m]) \cong S^1/\{h_g\}$$

是一个圆。对于每个分层， $X_l := p^{-1}(M_l)$是一个带有联络的圆（orbifold）丛，其曲率为约化辛形式。因此 X_l 是严格拟凸的CR orbifold流形；一般而言，它并不紧。

限制到 Z 后再进行下降，定义了 Guillemin–Sternberg 映射

$$\sigma_k\colon\ H(X)_{k,0} \longrightarrow C^0(X_0)_k.$$

根据正则情形下的 [GuSt] 以及奇异情形下的 [Sj]， σ_k 是单射，其像是射影簇 M_0 上下降线丛的 k 次幂的全纯截面空间（另见 [Li]）。因此，我们可以将约化空间的 Hardy空间定义为

$$H(X_0) := \overline{\bigoplus_{k\geq 0} \sigma_k\big(H(X)_{k,0}\big)} \subseteq L^2(X_0, \mu_0),$$

其中， μ_0 是 M_{top} 的 Liouville测度与 $\mathrm{d}\theta/2\pi$的乘积。低维层的测度为零，并且 $\mu_0(X_0) < \infty$。我们将相应的 Szeg˝o投影算子记为 Π^0 ，将其第 k个分量记为Π^0_k 。

因此，向量空间 $H(X_0)_k = \sigma_k(H(X)_{k,0})$带有两种厄米结构：一种是 $L^2(X_0, \mu_0)$所具有的结构，即约化后量子化；另一种是通过 σ_k从 $L^2(X)$传递而来的结构，即量子化后约化。

单个分层的Hardy空间并非典范的，因为 M_l 通常不是紧的。对于 $l \in \mathcal{L}$，令 $Z_l \subseteq Z$ 为 M_l的原像。按照 [HRS第3.3] 节及其中的参考文献，定义

$$H_{l,k}(X) := \big\{ s \in H(X)_{k,0} : \ s|_{Z_l} = 0 \big\}^{\perp} \subseteq H(X)_{k,0},$$

其中，正交补是在 $H(X)_{k,0}$中，关于$L^2(X)$内积取得的。若 $l \preceq l'$，则 $Z_l \subseteq Z_{l'}$，从而$H_{l,k}(X) \subseteq H_{l',k}(X)$；此外，由于 σ_k 是单射且 M_{top} 稠密，$H_{\mathrm{top},k} = H(X)_{k,0}$。带有正交投影的系统 $(H_l, {}_k(X))_{l\in\mathcal{L}}$，按照 [HRS第3.3], 节（另见 [Hue]）的意义，是一个余分层希尔伯特空间。特别地，$H(X)_{k,0}$并不是附属于各分层的空间的直和；这些分层给出了一个由偏序集 $(\mathcal{L}, \preceq)$ 索引的滤子。恒等Szeg″o核描述了这一滤子。

引理 4.1。 对于任意 $l \in \mathcal{L}$ 和 $k \geq 0$,

$$H_{l,k}(X) = \operatorname{span}\big\{ \Pi_{k,0}(\cdot, x) : \ x \in Z_l \big\}.$$

证明。 对于 $s \in H(X)_{k,0}$和 $x \in X$，我们有 $s(x) = \langle s, \Pi_{k,0}(\cdot, x) \rangle_{L^2(X)}$。因此，$s$ 在 Z_l 上为零，当且仅当它与右侧张成的空间正交。由于 $H(X)_{k,0}$ 是有限维的，故结论成立。 □

4.2 局部模型与应用

令 $m \in \Phi^{-1}(0)$。令 $\mathfrak{F}(N_m)$ 为 Bargmann–Fock空间

$$(N_m, J_m, g_m) \cong \mathbb{C}^{n-s},$$

它是由满足以下条件的整函数 f 构成的空间

$$\int |f(\mathbf{u})|^2 e^{-\|\mathbf{u}\|^2} \mathrm{d}\mathbf{u} < \infty.$$

乘以 $e^{-\|\mathbf{u}\|^2/2}$ 后，将 $L^2(N_m, \mathbf{du})$ 正交投影到 $\mathfrak{F}(N_m)$ 上所得投影算子的核为

$$\pi^{-(n-s)} e^{\psi_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}')}.$$

群 G_m 在 N_m 上酉地作用，因此也在 $\mathfrak{F}(N_m)$ 上通过 $(g \cdot f)(\mathbf{u}) = f(g^{-1}\mathbf{u})$ 作用。由于 $g \mapsto h_g$ 是 G_m 的特征标，$\mathfrak{F}(N_m)$ 到子空间$\mathfrak{F}(N_m)^{(k)}$ 上的投影算子（在该子空间上，G_m 通过特征标 h^k 作用）的核为

$$P_m^{(k)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') := \frac{\pi^{-(n-s)}}{\operatorname{Vol}(G_m)} \int_{G_m} \overline{h_g^k} \, e^{\psi_2(g^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{u}')} \, \mathrm{dV}_{G_m}(g).$$

若 G_m 连通，则 $h \equiv 1$ 和 $P_m := P_m^{(k)}$ 是到不变福克空间 $\mathfrak{F}(N_m)^{G_m}$ 上的投影算子。后者是由不变多项式构成的环$\mathbb{C}[N_m]^{G_m}$ 的完备化，也就是仿射商 $N_m /\!\!/ G_m^{\mathbb{C}}$ 的坐标环的完备化。根据 Kempf–Ness 定理 [KN], ，该仿射簇同胚于

$$(\Phi^N)^{-1}(0)/G_m = N_m^{G_m} \times C_m,$$

§4.1 中 M_0 在 $[m]$ 处的局部模型。

命题 4.1。若 $\nu = 0$，当 $k \to +\infty$

$$\Pi_{k,0}\Big(x + \tfrac{\mathbf{v}}{\sqrt{k}}, x + \tfrac{\mathbf{w}}{\sqrt{k}}\Big) = \Big(\frac{2k}{\pi}\Big)^{\frac{s}{2}} \frac{e^{Q(\mathbf{v}_{\mathrm{v}}+\mathbf{v}_{\mathrm{t}},\, \mathbf{w}_{\mathrm{v}}+\mathbf{w}_{\mathrm{t}})}}{V_{\mathrm{eff}}(m)}\; k^{n-s}\, P_m^{(k)}(\mathbf{v}_{\mathrm{h}}, \mathbf{w}_{\mathrm{h}}) + O\big(k^{\,n-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\big),$$

对于 $\|\mathbf{v}\|$、$\|\mathbf{w}\| \le C$，该结论一致成立。此外，相对于 $N_m = N_m^{G_m} \oplus W_m$，$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$, ，我们有

$$P_m^{(k)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \pi^{-n_l}\, e^{\psi_2(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0')} \cdot P_{W_m}^{(k)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1'),$$

其中 $n_l :=$维数$_{\mathbb{C}}\, N_m^{G_m} =$维数$_{\mathbb{C}}\, M_l$，且 $P_{(k)W_m}$ 定义为 $P_{(k)m}$，其中以 W_m 代替 N_m。

证明。 第一条结论即为定理，因为

$$(k/\pi)^{n-s/2}\, 2^{s/2}\, \pi^{n-s} = (2k/\pi)^{s/2} k^{n-s}.$$

第二条成立，因为 ψ_2 对于分解为复子空间的正交分解具有可加性，且 G_m 在 $N_m^{G_m}$ 上的作用平凡。 □

注意，因子

$$\pi^{-n_l} k^{n_l} e^{\psi_2(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0')}$$

是维数为 n_l 的 K¨ahler 流形在分层 M_l上的第 k 级 Szeg˝o 核的普适缩放极限 [SZ] 。因子 P_{W_m} 是锥 C_m 的投影算子。从这个意义上说，在尺度 $k^{-1/2}$ 下，量子化与约化在局部可交换：约化量子空间 $H(X)_{k,\,0}$ 在$[m]$ 处的缩放极限，是约化空间局部模型 $N_m /\!\!/ G_m$ 的量子化 $\mathfrak{F}(N_m)^{G_m}$ 。

可以将 Guillemin–Sternberg 映射修正为如 [HH], 所示的全纯映射，使其渐近酉。在正则情形中，阻碍在于有效体积 V_{eff} [P2], [HK], [MZ，定理 0.10]。即使没有 [HK],

对 M_0 [Li] 的正则性假设，经半经典修正的映射仍渐近酉。当 $\Phi^{-1}(0)$中的点具有正维稳定子时， d维轨道体积在 M_0中相应的分层上消失，而 [MZ] 的加权内积在那里退化。命题 4.1 描述了在此类分层附近的尺度 $k^{-1/2}$ 上会发生什么。

注 4.1. 对于一般的 ν，同样的计算给出以下核，以代替 $P_m^{(k)}$:

$$\sum_{\tau} \frac{\dim(\nu)}{\dim(\tau)} \, [\nu|_{G_m} \otimes h^k : \tau] \, P_{m,\tau} \, ,$$

其中， τ遍历 G_m 的不可约表示； $\tau]$ 表示重数，而 $P_{m,\ \tau}$ 是投影到 $\mathfrak{H}($ $N_m)$ 的 τ-同型分量上的投影算子。特别是，当 $\nu|_{G_m} \otimes h^k$ 不包含平凡表示时， $\mathbf{v} \ = \mathbf{w} \ = 0$ 处的首项为零。

令 $[m] \in M_{\underline{l}}$，并为简单起见，假设 G_m 连通。若 $\mathbf{u} \in N_m^{G_m}$， 则 $\exp_m(\mathbf{u}/\sqrt{k})$ 在$_ G_m$ 的作用下保持不变，且距 $\Phi^{-1}(0) \cap M_{(G_m)}$ 不超过 O (k^{-1})，因此 $x+\mathbf{u}/\sqrt{k}$ 是分层上方的一点，误差在尺度 $k^{-1/2}$ 下可忽略。

推论 4.1. 对于 $\mathbf{u}$， $\mathbf{u}' \in N_m^{G_m}$， 在有界集上一致成立，

$$\Pi_{k,0}\Big(x + \tfrac{\mathbf{u}}{\sqrt{k}}, x + \tfrac{\mathbf{u}'}{\sqrt{k}}\Big) = \frac{(2/\pi)^{\frac{s}{2}}}{\pi^c \, V_{\mathrm{eff}}(m)} \; k^{\frac{s}{2}+c} \cdot \Big(\frac{k}{\pi}\Big)^{n_l} e^{\psi_2(\mathbf{u},\mathbf{u}')} \, \big(1 + O(k^{-1/2})\big),$$

其中 $c: \ =$维$_{\mathbb{C}} \, W_m = n - s - n_l$。

证明。 将$\mathbf{v} \ = \mathbf{u}$ 和 $\mathbf{w} \ = \mathbf{u}'$代入命题 4.1；于是 $Q \ = \ 0$， 并且 $P_{W_m}(0, \ 0)$ $= \pi^{-c}$。 □

例 4.2。 假设 $M_l \ = \ \{[m]\}$ 是一个点， $N_m^{G_m} \ = \ 0$， 并令$x \in \pi^{-1}(m)$。由引理 4.1， $H_{l,\ k}(X)$是由$\Pi_{k,\ 0}(\cdot, \ x)$张成的直线，而由推论 4.1

$$\big\|\Pi_{k,0}(\cdot, x)\big\|^2 = \Pi_{k,0}(x,x) \sim \Big(\frac{2k}{\pi}\Big)^{\frac{s}{2}} \Big(\frac{k}{\pi}\Big)^{n-s} \frac{1}{V_{\mathrm{eff}}(m)}.$$

Let

$$e_{m,k} := \frac{\Pi_{k,0}(\cdot, x)}{\Pi_{k,0}(x,x)^{1/2}}.$$

如果 $[m'] \neq [m]$ 是另一个点分层，那么

$$\big|\langle e_{m,k}, e_{m',k}\rangle\big|^2 = \frac{|\Pi_{k,0}(x,x')|^2}{\Pi_{k,0}(x,x) \, \Pi_{k,0}(x',x')} = O(k^{-\infty}),$$

因为

$$\Pi_{k,0}(x,x') = \int_G \Pi_k(\tilde{A}_{g^{-1}}(x),x')\,\mathrm{dV}_G(g)$$

并且当 dist($\pi(y)$, $\pi(y')$) $\geq \delta > 0$ 时， $\Pi_k(y,y') = O(k^{-\infty})$ 一致成立。量 $|\langle e_{m,k},e_{m',k}\rangle|^2$ 在我们的情形中类似于 HRS] 中针对余分层希尔伯特空间所考察的分层之间的隧穿概率；我们已证明，对于不同的点分层，该量为 $O(k^{-\infty})$。在例 2.1 中，$e_{m,k}$ 是归一化截面 z_0^k。在例 2.2 中，点分层就是退化多边形。

4.3 奇异轨道附近不变截面的计数

我们来考察集中在奇异轨道附近的不变截面有多少个。设 $m \in \Phi^{-1}(0)$，且 G_m 连通，对于 $R>0$，令

$$T_k(R) := G\cdot \exp_m\left\{\mathbf{u}_{\mathrm{t}}+\mathbf{u}_{\mathrm{h}} \in J_m\mathfrak{g}_M(m)\oplus N_m :\ \|\mathbf{u}_{\mathrm{t}}\| \leq \tfrac{R}{\sqrt{k}},\ \|\mathbf{u}_{\mathrm{h}}\| \leq \tfrac{R}{\sqrt{k}}\right\}$$

为 $G\cdot m$ 周围相应的 G-不变管状邻域。令 $h_q(m)$ 表示 N_m 上次数为 q 的线性无关 G_m- 不变多项式的个数。令

$$\mathrm{P}(a,t) := \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^t \tau^{a-1}e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau,$$

为正则化不完全伽马函数，且

$$\gamma_s(R) := \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{s}{2}} \int_{\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^s:\,\|\mathbf{t}\|\leq R\}} e^{-2\|\mathbf{t}\|^2}\mathrm{d}\mathbf{t}$$

为半径为 R 的球上的高斯函数，因此 $\gamma_0 \equiv 1$ 和 $\gamma_s(R) \to 1$ 当$R\to+\infty$。

推论 4.2。 对于每个 $R>0$，当 $k\to+\infty$ 时，

$$\int_{\pi^{-1}(T_k(R))} \Pi_{k,0}(x,x)\,\mathrm{dV}_X(x) = \mathcal{N}_m(R) + O(k^{-1/2}),$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_m(R) &:= \gamma_s(R)\int_{\{\mathbf{u}\in N_m:\,\|\mathbf{u}\|\leq R\}} P_m(\mathbf{u},\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u}\\ &= \gamma_s(R)\sum_{q\geq 0} h_q(m)\ \mathrm{P}\big(q+n-s,\,R^2\big).\end{aligned}$$

证明。 指数映射

$$(g,\mathbf{u})\mapsto g\cdot \exp_m(\mathbf{u})$$

当 $k\gg 0$时，诱导出一个从 $G\times_{G_m} B_k(R)$到 $T_k(R)$的微分同胚，其中$B_k(R)\subseteq J_m\mathfrak{g}_M(m)\oplus N_m$ 是定义 $T_k(R)$时出现的集合，即两个半径为 $R/\sqrt{k}$的球的乘积。

对于一个 G-不变函数 f，这给出

$$\int_{T_k(R)} f\,\mathrm{dV}_M=\int_{B_k(R)} f(\exp_m \mathbf{u})\,\mathcal{D}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u},$$

其中 $\mathcal{D}$ 是光滑的，且 $\mathcal{D}(0)=V_{\mathrm{eff}}(m)$是 $G\cdot m$的体积。现在，函数$x\mapsto \Pi_{k,0}(x,\ x)$在 G 和 S^1作用下不变。令$\mathbf{u}=\mathbf{v}/\sqrt{k}$，于是 $\mathbf{du}=k^{-(2n-s)/2}\mathbf{dv}$，并对$\mathbf{v}=\mathbf{w}$、$\mathbf{v}_{\mathrm{v}}=0$应用命题 **4.1**。 k 的幂相消， $V_{\mathrm{eff}}(m)$也相消，最后得到

$$(2/\pi)^{s/2}\int_{B_k(R)} e^{-2\|\mathbf{v}_{\mathrm{t}}\|^2}P_m(\mathbf{v}_{\mathrm{h}},\mathbf{v}_{\mathrm{h}})\,\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{h}}+O(k^{-1/2}).$$

选取 $\mathfrak{F}(N_m)^{G_m}$ 的一组标准正交基$(p_j)_{j\ge 1}$，由齐次多项式组成，使得

$$P_m(\mathbf{u},\mathbf{u})=\sum_{j\ge 1}|p_j(\mathbf{u})|^2 e^{-\|\mathbf{u}\|^2},$$

该级数局部一致收敛。如果 p_j 的次数为 q，则在极坐标中

$$\int_{\|\mathbf{u}\|\le R}|p_j|^2e^{-\|\mathbf{u}\|^2}\mathrm{d}\mathbf{u}=\mathrm{P}(q+n-s,R^2).$$

对 j 求和，由单调收敛性可得结论。 □

因此，位于奇异轨道的距离 $R/\sqrt{k}$ 以内的不变截面数量在 $k\to+\infty$ 时保持有界，其极限是各向同性表示的不变环的希尔伯特函数 $q\mapsto h_q(m)$ 的平滑计数函数。

设 $N:=\dim_{\mathbb{C}} N_m$，且

$$F_m(\lambda):=\int_{\{\|\mathbf{u}\|^2\le\lambda\}}P_m(\mathbf{u},\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u}=\sum_{q\ge 0}h_q(m)\,\mathrm{P}(q+N,\lambda),$$

从而

$$\mathcal{N}_m(R)=\gamma_s(R)\,F_m(R^2).$$

函数 F_m 是不变多项式计数的平滑版本。事实上，$\mathrm{P}(a,\ \lambda)$ 是均值为 λ 的泊松随机变量至少为 a 的概率。因此，当 $a \ll \lambda$ 时它接近 1，而当 $a \gg \lambda$ 时它接近 0，过渡窗口的宽度为 $O(\sqrt{\lambda})$。这反映了这样一个事实：次数为 q 的归一化不变多项式，其高斯质量集中在球面 $\|\mathbf{u}\|^2 = q + N$ 附近。因此，

$$\begin{aligned} F_m(\lambda) &\approx \#\{\text{个线性无关的次数为 } q \le \lambda - N\} \text{ 的不变多项式} \\ &= \sum_{q \le \lambda - N} h_q(m), \end{aligned}$$

而 $\mathcal{N}_m(R)$ 计数的是质量落在半径为 R 的球内的不变多项式，但需除以由轨道切向方向带来的因子 $\gamma_s(R)$。

例 4.3. 在例 2.1 中，$\mathbb{C}[N_m]^{G_m} = \mathbb{C}[v_1 v_2]$，因此当 q 为偶数时，$h_q = 1$；当 q 为奇数时，$h_q = 0$。由于 $\mathrm{P}(a,\ t)$ 是均值为 t 的泊松随机变量不小于 a 的概率，我们得到

$$\mathcal{N}_m(R) = \sum_{b \ge 0} \mathrm{P}(2b + 2, R^2) = \frac{R^2}{2} - \frac{1 - e^{-2R^2}}{4}.$$

设 $\Sigma \subseteq \Phi^{-1}(0)$ 是轨道类型分层的一个紧致连通分支，且当 $m \in \Sigma$ 时 G_m 连通；设 $T_k(R;\Sigma)$ 是 Σ 周围半径为 $R/\sqrt{k}$ 的管状邻域。定理 1.1 证明中的估计对 $m \in \Sigma$ 一致成立，因为 Σ 是紧致的，轨道类型沿着 Σ 保持不变，而且证明中用到的数据（标准形、海森堡坐标、各向同性表示）都依赖于 m 光滑变化。仿照推论 4.2 的论证，并由命题 4.1，可得

$$\int_{\pi^{-1}(T_k(R;\Sigma))} \Pi_{k,0}(x,x)\, \mathrm{dV}_X(x) \sim \left(\frac{k}{\pi}\right)^{n_l} \int_{\Sigma/G} \mathcal{N}_{W_m}(R)\, \mathrm{dV}_{\Sigma/G}([m]),$$

其中 $n_l = \text{维数}_{\mathbb{C}}\, \Sigma/G$，且 $\mathcal{N}_{W_m}(R)$ 定义为 $\mathcal{N}_m(R)$，其中用 W_m 替代 N_m。因此，奇异分层 M_l 会以 $k^{\dim_{\mathbb{C}} M_l}$ 阶影响 $\dim H(X)_{k,\,0}$。

工具和计算资源披露。作者在文档的最后阶段使用了人工智能助手（Anthropic 的 Claude，2026年11月），就若干应用进行了探索性讨论。作者对论证和结果的正确性与充分性，以及对先前工作的准确归属承担全部责任。

致谢。 作者是 INdAM（“弗朗切斯科·塞韦里”国家高等数学研究所）下属 GNSAGA（国家代数、几何结构及其应用研究组）的成员，并衷心感谢其提供的支持。

参考文献

[BS] L. Boutet de Monvel, J. Sj¨ostrand, 关于 Bergman 核与 Szeg ˝o 核的奇异性，《Ast´erisque》34-35，123–164（1976）[Ch] L. Charles, 关于多边形空间的量子化，《亚洲数学杂志》14，第 1 期，109–152（2010）[DIR] B. Delarue, L. Ioos, P. Ramacher, 圆作用下奇异约化的黎曼–罗赫公式，arXiv:2302.09894[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk,《李群》，Universitext丛书，Springer Berlin, Heidelberg，（ISBN 978-3-540-15293-4），（1999）[G] A. Galasso, 哈密顿环面作用下的等变不动点公式与 Toeplitz 算子，以及关于等变渐近展开的评注，《国际数学杂志》33，第 2 期，文章编号 2250011，35 页（2022）[GH] A. Galasso, C.-Y. Hsiao, CR流形上 Toeplitz 算子的函数演算与量子化与约化可交换，《数学杂志》308（2024），第 1 期，第 5 号论文，40 页。[GGK] V. Guillemin, V. Ginzburg, Y.Karshon，《动量映射、配边与哈密顿群作用》，《数学调查与专著》98。普罗维登斯，罗得岛：美国数学学会（AMS）（ISBN 0-8218-0502-9/hbk）。viii，350 页。（2002）[GLS] V. Guillemin, E. Lerman, S. Sternberg，《辛纤维化与重数图》，剑桥大学出版社，（1996）[GuSt] V. Guillemin and S. Sternberg，群表示的几何量子化与重数，《数学发明》67，515-538，（1982）[HK] B. C. Hall, W. D. Kirwin，“量子化与约化可交换”中的幺正性，《数学物理通讯》275，401–422（2007）[H] L. H¨ormander，《偏微分算子分析 I》，Springer-Verlag，（1990）[HH] C.-Y. Hsiao, R.-T. Huang，G-不变 Szeg ˝o 核的渐近性与 CR约化，《变分法与偏微分方程》60，第 1 期，（2021）

[Hue] J. Huebschmann，K ¨ahler 量子化与约化，《纯粹与应用数学杂志》591，75–109（2006）[HRS] J. Huebschmann、G. Rudolph、M. Schmidt，分层空间上量子力学的规范模型，《数学物理通讯》286，459–494（2009）[KM] M. Kapovich、J. J. Millson，欧几里得空间中多边形的辛几何，《微分几何杂志》44，479–513（1996）[KN] G. Kempf、L. Ness，表示空间中向量的长度，载于：《代数几何》（哥本哈根，1978），《数学讲义》732，Springer，233–243（1979）[Li] H. Li，“量子化与约化可交换”中的奇异幺正性，《几何与物理杂志》（2008），doi:10.1016/j.geomphys.2008.01.006；勘误，《几何与物理杂志》（2014），doi:10.1016/j.geomphys.2013.10.006[MZ] X. Ma、W. Zhang，Bergman核与辛约化，Ast´erisque 318，viii+154页，（2008）[Or] Ortega，J.-P.；Ratiu，T. S.，《动量映射与哈密顿约化》，《数学进展》（波士顿，马萨诸塞州）222。波士顿，马萨诸塞州：Birkh ¨auser（ISBN 0-8176-4307-9/hbk），xxxiv，497页（2004）[P1] R. Paoletti，等变 Szeg ¨o 核的标度极限，《辛几何杂志》6，第1期，9–32，（2008）；以及《等变 Szeg ¨o 核标度极限》勘误，《辛几何杂志》11，第2期，317–318，（2013）[P2] R. Paoletti，辛商的 Szeg ¨o 核，（英文）《数学进展》197，第2期，523-553（2005）[SZ] B. Shiffman、S. Zelditch，辛流形上丰线丛的近全纯截面的渐近性，《纯粹与应用数学杂志》544，181-222（2002）[Sj] R. Sjamaar，全纯切片、辛约化与表示的重数，《数学年刊》141，87–129（1995）[SL] R. Sjamaar、E. Lerman，分层辛空间与约化，《数学年刊》134，375–422（1991）