arXiv:2611.30315v1 [cond-mat.supr-con] 23 Nov 2026

多轨道量子点中的自旋控制热相效应与噪声优化测温

Markus Plautz，[1]，* Jeroen Danon，[1] 和 Jacob Linder[1]，†

[1]量子自旋电子学中心，物理系，挪威科技大学，*NO-7491* 特隆赫姆，挪威

（2026年11月24日）

将温差转换为电信号是热电能量转换和测温的基础，而测温对于管理低温量子技术中的热量至关重要。超导电路通常表现出较弱的热电响应，因为其准粒子能谱几乎具有粒子-空穴对称性。在约瑟夫森结中，温差则可以在开路条件下转换为超导相位差。我们研究了这种热相位效应，所研究的装置中，结由一个具有Rashba自旋轨道耦合（SOC）和塞曼劈裂的双轨道量子点构成。靠近超导相干峰的第二轨道支持在宽栅压范围内的准粒子输运。塞曼劈裂可以通过抑制成对输运来增强热相位效应，而自旋轨道杂化会移动轨道共振，并可能使响应反号。我们利用包含读出噪声和电流噪声，以及轨道能量和磁场涨落的噪声预算，将该结评估为基于相位的温度计。最佳工作点并不使热相位效应最大化，而是在较大的准粒子响应与对参数涨落的灵敏度之间实现平衡。在具有实验依据的噪声假设下，我们得到量级为 $10\,\mu\mathrm{K}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$的预计噪声等效温度，并确定了线性标定保持准确的范围。因此，栅压可调量子点结为在亚开尔文温度下传感超导电路中的温差提供了一种基于相位的途径。

I. 引言

在低温下管理热量是量子技术能量预算的核心问题，因为可用的制冷功率很小 [1, 2]。因此，在纳米尺度测量温度和热流对于低温探测器和热路电路十分重要 [3]。超导电路是执行这一任务的理想候选，因为它们在这一温度范围内运行，并且能够提供对相位敏感的读出 [4–6]。然而，常规超导体近似粒子–空穴对称的准粒子谱会抑制超导结的线性热电响应。类电子激发和类空穴激发携带方向相反的电流，因而在很大程度上相互抵消。要获得显著响应，就需要一种能够区别对待这两类激发的结。

结合自旋劈裂与自旋选择性隧穿的结提供了一种实现这一目标的途径 [7–12]。这种机制近期已使基于超导-铁磁杂化系统的磁控热电热机和自旋阀成为可能 [13, 14]。量子点则可通过易于调节的透射共振实现这一目标 [15–17]。磁性杂质、磁织构或自旋轨道耦合也能调控超导杂化系统中的热电输运 [18, 19]。约瑟夫森结进一步将热输运与超导相位联系起来 [20]。这种联系使相位控制热流成为可能 [21]，同时也使热电能量转换成为可能，前提是粒子-空穴对称性被打破 [22, 23]。

在开路约瑟夫森结中，温度偏置可以产生相位差，而不是电压。热驱动的准粒子电流由超电流补偿，从而建立稳定的热相位 [24, 25]。已有研究预测，铁磁结 [26] 以及栅极可调的单量子点结 [16]中能够产生较大的热相位。量子点尤其适合这一用途。其离散能级使透射率对能量具有很强的依赖性，而栅极电压可以移动这些能级原位 [27–29]。关于双量子点约瑟夫森结的研究进一步表明，额外能级和点间耦合会改变热相位 [30, 31]。

半导体量子点除了能级位置外，还提供了其他可调控的参数。砷化铟或锑化铟纳米线中的量子点通常具有很强的自旋轨道耦合 [32–34]以及较大且依赖能级的 g 因子 [35–37]。自旋轨道耦合使轨道发生杂化，而磁场则使其自旋态分裂，如图1（a）所示。这些因素对约瑟夫森电流的影响已有研究 [38–42]。在半导体量子点结中，也已观测到自旋分辨的安德烈夫态和依赖自旋的相移 [43–46]。然而，据我们所知，迄今尚未有人研究多轨道量子点中的自旋轨道耦合和塞曼劈裂如何影响热相位。

如图1（b）所示，可利用超导干涉仪探测热相位。量子点结与一个热电响应受到抑制的常规参考约瑟夫森结共同置于超导环路中。一个

* markus.plautz@ntnu.no
† jacob.linder@ntnu.no

超导量子干涉器件检测环路中的环流，同时调节外磁通，直至该电流消失。由温度引起的补偿磁通偏移随后可直接给出开路热相位（第IVA节）。相关干涉方案已被用于测量约瑟夫森结的电流-相位关系 [47–49] 和反常相移 [44, 50–52]。超导环路中的热电环流同样已通过磁学方法得到探测 [53, 54]。

然而，对于测温而言，仅有较大的相位响应并不能确保良好的温度分辨率。在干涉测量装置中，分辨率受读出磁通噪声以及结电路中的电流涨落限制。栅极电压或磁场的涨落会使温度计的校准发生偏移，从而引入额外噪声。因此，必须像对待其他超导温度计那样 [5, 55]，权衡响应与这些噪声源。

在这里，我们研究通过双轨道量子点产生热相位的机制。自旋轨道耦合作用于量子点和隧穿振幅，而塞曼场则作用于量子点。我们展示了这些调控手段如何以不同方式影响准粒子输运和约瑟夫森响应，从而改变热相位塞贝克系数的大小和符号。随后，我们利用等效噪声温度评估该结作为温度计的性能；这一指标综合考虑了读出噪声、电流噪声、轨道能量涨落以及磁场涨落。通过比较信号与噪声，我们找到了仅凭最大化塞贝克系数会忽略的工作点。最后，我们确定了局域线性校准仍然准确的范围。在采用受实验启发的噪声假设后，我们发现，优化后的工作点可达到 $10\,\mu\mathrm{K}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$量级的等效噪声温度，与基于超导结的最先进电子温度计相当 [4, 5, 56]。综上，我们的结果表明，自旋多轨道约瑟夫森结可作为一种可调平台，利用热相位响应进行低温测温。

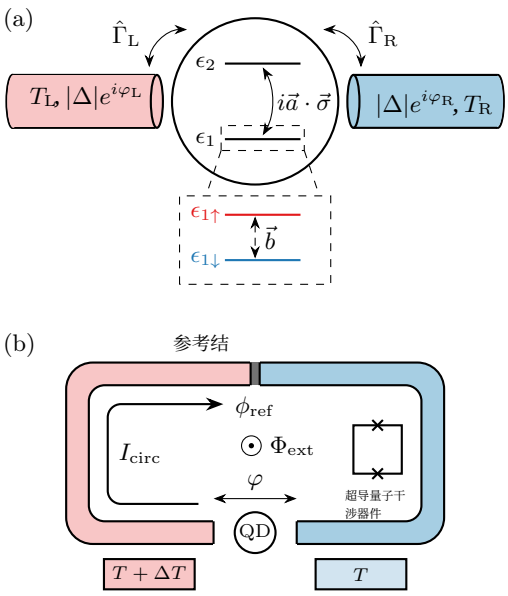


图1。（a）结的示意图。具有两个轨道能级 ϵ_1 和 ϵ_2 的量子点，通过隧穿与左侧（L）和右侧（R） s波超导引线耦合，其序参量为 $|\Delta_\alpha|e^{i\varphi_\alpha}$。结两端施加温差 ΔT，左侧引线温度为 $T_L = T + \Delta T$（红色阴影），右侧引线温度为 $T_R = T$（蓝色阴影）。Rashba自旋轨道相互作用 $i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}$耦合两个轨道。耦合矩阵 Γ_α 包含自旋守恒隧穿以及自旋轨道辅助隧穿。插图显示塞曼场 $\vec{b}$ 如何将轨道 ϵ_1 的自旋简并劈裂为能级 $\epsilon_{1\uparrow}$ 和 $\epsilon_{1\downarrow}$。附录B讨论平均场层次下轨道内和轨道间库仑相互作用的影响。（b）测量方案。量子点结与一个常规参考结构成超导干涉仪，其两臂分别充当（a）图中的引线 L和 R。超导量子干涉器件检测环流 I_{circ} 产生的磁通。热相位由使 I_{circ} 消失时对应的外磁通 Φ_{ext} 确定（第四节A）。

II. 装置与方法

我们考虑一个约瑟夫森结，它由一个具有两个轨道能级的量子点构成，该量子点与左侧（L）和右侧（R） s-波超导引线耦合，如图 1所示。量子点受到 Rashba自旋轨道耦合和外部塞曼场的作用；我们允许量子点与引线之间的隧穿既保持自旋，也不保持自旋。下文将引入量子点上的库仑相互作用，并在附录B中以平均场层次进行处理。完整的哈密顿量为

$$H = H_L + H_R + H_{\mathrm{QD}} + H_T + H_U, \qquad (1)$$

其中， H_α ($\alpha = L,\ R$)描述超导引线， H_{QD} 表示量子点， H_T 表示隧穿， H_U表示库仑相互作用。现在我们逐一介绍这些项。

超导引线。—每条引线均建模为常规的 s波超导体，

$$H_\alpha = \sum_{k,\sigma} \epsilon_\alpha(k) c^\dagger_{\alpha k\sigma} c_{\alpha k\sigma} + \left(\Delta_\alpha c^\dagger_{\alpha k\uparrow} c^\dagger_{\alpha,-k,\downarrow} + \mathrm{h.c.}\right), \quad (2)$$

其中 $\epsilon_\alpha\,(k)$ 表示相对于化学势测量的单粒子色散，$\Delta_\alpha = |\Delta_\alpha|e^{i\phi_\alpha}$ 表示超导序参量。我们采用相位约定 $\phi_L = -\phi_R = \phi/2$，因此 ϕ表示结两端的相位差。

量子点。—该量子点具有两个能量分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 的轨道能级。我们将 Rashba 哈密顿量 $H_{\mathrm{so}} = \alpha_R($ $\sigma_x p_y - \sigma_y p_x)$ 投影到受限量子点的轨道本征

态 $\chi_n(\vec{r}) = \langle \vec{r}|n\rangle$ 上，从而在量子点中引入 Rashba 自旋轨道耦合。所得矩阵元 [38, 39]

$$\langle n|H_{\rm so}|n'\rangle = -i\,\vec{a}_{nn'}\cdot\vec{\sigma} \tag{3}$$

由一个向量$\vec{a}_{nn'}$ 参数化，其分量由Rashba耦合强度 α_R 和轨道波函数的重叠积分决定。时间反演对称性要求 $\vec{a}_{nn'}$ 为实数，而厄米性要求$\vec{a}_{nn'} = -\vec{a}_{n'n}$，因此 $\vec{a}_{nn} = 0$。因此，至少需要两个轨道能级，自旋轨道耦合才能对量子点产生影响。对于两个轨道，我们定义 $\vec{a} \equiv \vec{a}_{12}$。结合外部塞曼场 b，量子点哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_{\rm QD} = &\sum_{j,\sigma}\epsilon_j n_{j\sigma} + \sum_{j,\sigma\sigma'}(\vec{b}\cdot\vec{\sigma})_{\sigma\sigma'} d^\dagger_{j\sigma} d_{j\sigma'} \\ &+ \sum_{\sigma\sigma'}\left[(-i\vec{a}\cdot\vec{\sigma})_{\sigma\sigma'}\, d^\dagger_{1\sigma} d_{2\sigma'} + \text{h.c.}\right], \end{aligned} \tag{4}$$

其中$n_{j\sigma} = d^\dagger_{j\sigma} d_{j\sigma}$ 和 $\vec{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$ 是自旋泡利矩阵向量。我们对两个轨道取相同的塞曼场。两个轨道之间的自旋轨道混合通过 $\vec{a}$显式处理，而 b 则包含远端能带和轨道 [57]对 g 因子的重整化。

隧穿。—量子点与引线之间的耦合既允许自旋守恒跃迁，也允许自旋轨道辅助跃迁 [58],

$$H_T = \sum_{\substack{\alpha,k,j\\ \sigma\sigma'}} \left[t_{\alpha j}\delta_{\sigma\sigma'} + i\eta_\alpha t^{\rm so}_{\alpha j}(\sigma_y)_{\sigma\sigma'}\right] c^\dagger_{\alpha k\sigma} d_{j\sigma'} + \text{h.c.} \tag{5}$$

这里， $t_{\alpha j}$ 和 $t^{\rm so}_{\alpha j}$ 分别是对引线 α 的轨道 j 进行自旋守恒和自旋轨道辅助隧穿过程的实隧穿振幅，而 $\eta_L = -\eta_R = -1$则表示自旋轨道旋转方向随跃迁方向反转。自旋坐标系的选取使得隧穿诱导的、指向引线的自旋旋转绕$\hat{y}$进行。

库仑相互作用。—我们考虑轨道内和轨道间的库仑排斥，

$$H_U = U\sum_{i=1,2} n_{i\uparrow}n_{i\downarrow} + U' n_1 n_2, \tag{6}$$

其中 $n_i = n_{i\uparrow} + n_{i\downarrow}$ 是轨道 i的占据数。在半导体量子点中，轨道间排斥 U' 通常与轨道内排斥 U [59]相当。在平均场层次 [60–62], 这两项都会使量子点参数发生重整化。在平均场层次，这两项主要重整化轨道能量、塞曼场和轨道间耦合，而这些本来就是模型中相互独立的控制参数。在自旋极化态中，相互作用还会产生不同轨道间各异或使轨道相互耦合的交换场。附录B 表明，这些交换场的作用类似于轨道依赖的塞曼场。因此，我们在正文中令 $U = U' = 0$ 。

方法。—我们使用 Keldysh 非平衡格林函数形式体系计算流经该结的电流。总电流为 [16]

$$J = -\frac{e}{h}\int \mathrm{d}\omega\ \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}_p\left[\left(\hat{\Sigma}_L - \hat{\Sigma}_R\right)\hat{G}\right]^<, \tag{7}$$

其中，方括号内的表达式使用 Langreth关系 $[AB]^< = A^r B^< + A^< B^a$进行计算。在此背景下，$\hat{}G^{r、a}$和$^<$分别是量子点的延迟、超前和小于格林函数，而$\hat{}\Sigma^{r、a}$和$^<$则是由引线 α产生的相应自能，它们都是 8×8 南部空间、轨道空间和自旋空间组合而成的矩阵。下标 p表示投影到南部空间的粒子块，因此无需显式引入南部电荷矩阵 τ_3 ，随后对剩余的轨道和自旋指标求迹，$\hat{}$指标为$\mathrm{tr}_p[X] = \sum_{j\sigma} X_{j\sigma,\ j\sigma}$，其中两个指标均限定在粒子扇区内。自能通过在宽带近似下对引线进行积分消去得到 [63]。这些量的显式表达式见附录A。

热电响应。—我们通过设定 ΔT 和 $T_L = T + \Delta T$ 以及 $T_R = T$，如图1所示，在结两端施加温度偏置。在开路超导结中，热诱导的准粒子电流可以由反向流动的超电流抵消。确保总电流为零的相位差称为热相位，记作 $\phi_{\rm th}$ [16]。

$$J(\phi_{\rm th}, \Delta T) = 0. \tag{8}$$

只有当超电流能够补偿热诱导的准粒子电流时，这种稳态解才存在，即对于 $|J_{\rm qp}| < I_c$ ，其中 I_c 为结的临界电流。对于更大的温度差，结两端会产生热电压。随后，相位根据交流约瑟夫森关系 [64], 随时间演化，结不再具有稳态热相位。在全文中，我们始终限于稳态区间。此时，热相位塞贝克系数定义为微分响应

$$S_\phi = \frac{\mathrm{d}\phi_{\rm th}}{\mathrm{d}(\Delta T)}, \tag{9}$$

该量化了稳态相位对温差的响应敏感度。该定义不假设线性响应，并捕捉了 $\phi_{\rm th}$ 对 ΔT 的完整非线性依赖关系。在线性响应区间内，电流分解为 $J(\phi) = J_{\rm sc}(\phi) + \mathcal{L}(\phi)\,\Delta T$，其中 $J_{\rm sc}$ 是平衡超电流，而 $\mathcal{L}$是准粒子输运系数（具体表达式见附录 A4）。在平衡相位 ϕ_0附近，其中 $J_{\rm sc}(\phi_0) = 0$，我们令 $\phi_{\rm th} = \phi_0 + \delta\phi$，并将该表达式展开至一阶。于是得到

$$S_\phi = -\frac{\mathcal{L}(\phi_0)}{K_\phi}, \qquad K_\phi \equiv \partial_\phi J_{\rm sc}\big|_{\phi_0}. \tag{10}$$

这里， K_ϕ 是局域电流-相位斜率。平衡相位 ϕ_0 是平衡超电流的稳定零点，一般不必为零。例如，塞曼场诱导的单占据量子点能级

可以反转约瑟夫森耦合的符号，并将该结转变为 π 结，其 $\phi_0 = \pi$ [60, 65–71]。自旋轨道耦合与塞曼场结合，还可以产生具有任意平衡相位 [39, 41, 42, 44, 50, 72]的 ϕ_0 结。在我们的模型中，这种反常相位还要求存在两个轨道，且它们与两条引线的耦合矩阵不同 [39]。即使隧穿强度相同，自旋轨道辅助隧穿也会带来这种差异，因为它诱导的自旋旋转会随跃迁方向反转。对于本文考虑的相同耦合矩阵，交换引线会将 $\phi \to -\phi$映射为 $\phi \to -\phi$。因此，平衡超电流关于 ϕ为奇函数，这使得 ϕ_0 只能为0或 π。对于第III节研究的所有参数，在 $\phi = 0$ 处 K_ϕ 的符号都对应于稳定的0结，甚至在塞曼场使该结接近0-π 跃迁时也是如此。因此，我们在 $\phi_0 = 0$处计算 $\mathcal{L}(\phi_0)$和 K_ϕ。对于 π 结，式（10）仍然适用，只需在 $\phi_0 = \pi$处计算两个系数即可。除非另有说明，第III节中的数值结果均根据式（10）在线性响应下获得。只有在明确考察有限温差时，尤其是在第IV D节确定线性工作范围时，才使用式（8）和式（9）中的非线性定义。

III. 结果

现在，我们给出结的热电响应数值结果。全文中，能量以超导能隙 $|\Delta|$为单位，温度以 $|\Delta|/k_B$为单位。我们假设引线对称，具有相同的能隙和耦合强度。首先，我们将形式体系与单个自旋简并能级的已有结果进行验证，随后系统地考察第二轨道、自旋轨道耦合和塞曼场的作用。第IV 节将评估该结作为量子传感器测量微小温差的潜力。

在全文中，我们依据式（10）来指导分析，其中 S_ϕ 是准粒子的热响应 $\mathcal{L}$与超电流相位灵敏度之比。分子要求存在粒子-空穴不对称性和热激发准粒子，因此当量子点能级与能隙边缘 [16]上方的 BCS 相干峰对齐时，该比值最大。分母由能隙内的安德烈夫束缚态（ABS）决定，它们对超电流的贡献形式为 [73, 74]

$$J_{\mathrm{ABS}} = -\frac{e}{\hbar}\sum_n f(\omega_n)\,\frac{\partial \omega_n}{\partial \phi}, \tag{11}$$

其中 $\omega_n(\phi)$ 为 ABS 能量，f 为费米函数。求和遍历完整的博戈留波夫–德热纳（BdG）能谱，包括正、负 ABS 能量以及两个自旋扇区。因此，超电流由束缚态的相位色散和热占据控制。由于 $S_\phi = -\mathcal{L}/K_\phi$，一个大的热电响应因此要求抑制成对输运，同时不抑制准粒子通道。

我们将主要通过扫描 ϵ_1 并固定 ϵ_2 、同时改变其他系统参数来展示结果。这应被理解为对底层参数空间的映射，而不一定是由单个实验栅极生成的轨迹，因为单个实验栅极通常会同时影响两个能级。通过这种方式，我们确定实验应通过器件设计和可用的栅极控制实现的相对轨道构型。

A. 第二轨道的影响

我们首先通过将第二轨道置于远离共振的位置，并关闭所有自旋相关耦合，恢复文献 [16] 中的自旋简并单轨道结果。这给出了图2（a）中的参考结果。其热相位塞贝克系数关于 ϵ_1呈奇对称性，因为改变轨道能量的符号会反转 $\mathcal{L}$，同时保持 K_ϕ 不变。

将第二轨道带入相关能量范围 |（图2（a）中的绿色和红色迹线）|会在引线之间打开第二条隧穿路径。对于相等的隧穿振幅，引线仅耦合到两个轨道的对称组合 $(d_1 + d_2)/\sqrt{2}$ 。反对称组合不与引线直接耦合。因此，输运系数仅通过 $g(\omega) = \sum_j t_j^2/(\omega - \epsilon_j)$ 依赖于量子点；该函数是孤立量子点投影到耦合组合上、并由隧穿振幅加权后的格林函数。两个轨道的贡献先在 g 中相加，然后才构成输运系数。当 ω 位于两个能级之上或之下时，它们会相互增强；而当 ω 位于两个能级之间时，它们会部分抵消。具体适用哪种情况取决于主导各个响应的能量窗口。成对响应由子能隙谱中的 g 控制，而准粒子热电响应则由相干峰附近、高于能隙的能量处的 g 控制。

在弱隧穿区域，额外的通路对成对输运的促进大于对热电输运的促进。一个库珀对会通过每个势垒转移两个电子，因此 K_ϕ 大致随隧穿速率的平方增长。热电系数则取决于能隙上方透射的电子-空穴不对称性。靠近相干峰的能级通过顺序隧穿传输准粒子电流，其速率对 $\Gamma \propto t^2$呈一阶关系。离开共振时，电流则通过共隧穿流动，其对 Γ呈二阶关系。在能隙内，同一能级处于非共振状态，只能通过对 Γ呈二阶关系的虚过程转移库珀对。因此，增强耦合对 K_ϕ 的相对提升远大于对 $\mathcal{L}$的提升。当两个能级重合时，对称组合本身就是量子点的一个本征态，因此结

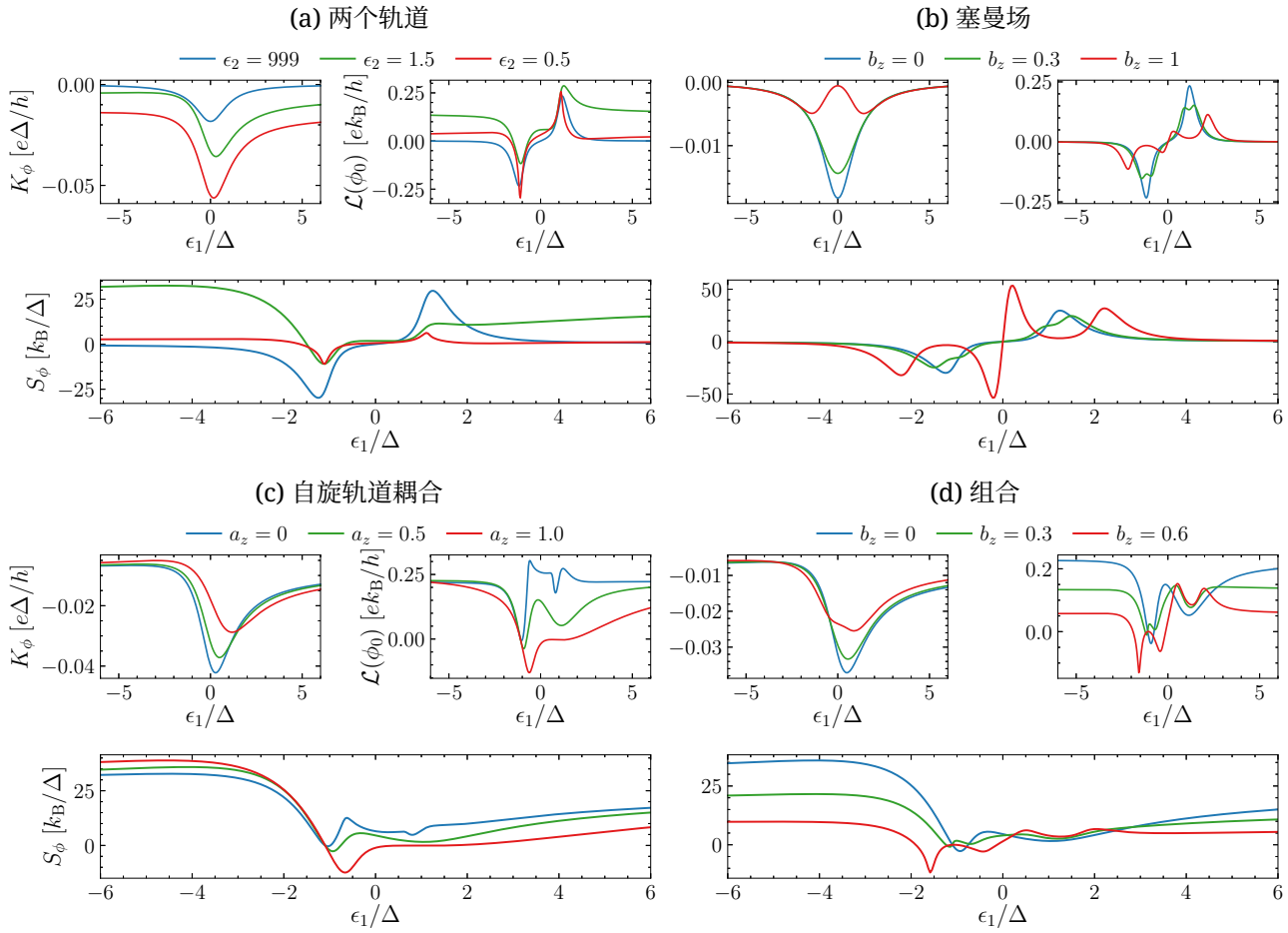


图 2. 结的热电响应随能级位置 ϵ_1 的变化，展示了依次引入模型各项要素的四种情形。每个面板显示局域电流-相位斜率 K_ϕ（左上）、准粒子输运系数 $\mathcal{L}(\phi_0)$（右上）以及由此得到的塞贝克系数 S_ϕ（下方）。每种情形的三个子图共用相同的横轴 ϵ_1 和颜色编码。这里，ϵ_1 和 ϵ_2 表示量子点的裸轨道能量，即自旋轨道杂化和塞曼劈裂发生之前的能量。(a) 第二轨道的影响：降低 ϵ_2，使其接近能隙边缘，同时关闭自旋轨道耦合和塞曼场。$\epsilon_2 = 999$ 对应的曲线为单轨道参考。(b) 塞曼场 $\vec{b} = b_z\hat{z}$ 的影响：仅有一个有效轨道（$\epsilon_2 = 999$）且无自旋轨道耦合。(c) 自旋轨道耦合 $\vec{a} = a_z\hat{z}$ 的影响：两个轨道均有效（$\epsilon_2 = 1.1$）且无塞曼场。(d) 自旋轨道耦合 $\vec{a} = (0.3,\ 0.2,\ 0.35)^\top$ 与塞曼场 b_z 的综合影响：两个轨道均有效（$\epsilon_2 = 1.1$）。所有面板共用参数 $T = 0.3$、$|\Delta| = 1$、$U = U' = 0$、$t_{\alpha j} = \sqrt{0.1}$ 和 $t^{\mathrm{so}}_{\alpha j} = 0$，对应于 $\alpha = \mathrm{L},\ \mathrm{R}$ 和 $j = 1,\ 2$。

看到的是一个隧穿振幅增强了$\sqrt{2}$的单能级。对于劈裂能级，在远离两个能级、与其劈裂相比能量差很大的位置，同样的增强依然存在，此时 $g(\omega) \approx 2t^2/(\omega - \bar{\epsilon})$与 $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$。于是，该结的行为就像参考系统，只是隧穿速率加倍。由于这相对更大程度地增强了 K_ϕ 而非 $\mathcal{L}$，因此得到的 S_ϕ 更小。这就是为什么在 $\epsilon_1 \simeq 1.2$附近，S_ϕ 仍远低于参考系统；此时两个轨道都靠近相干峰。

对于 $|\epsilon_1| \gg |\Delta|$，被扫过的轨道仅为 g 添加了一个小项 $-t_1^2/\epsilon_1$。这一贡献仅按代数规律衰减，因此随着 $1/\epsilon_1$，响应趋近于仅由固定轨道产生的响应。其符号取决于被扫过轨道相对于费米能的位置。对于 $\epsilon_1 > 0$，两个轨道的成对输运振幅会相加，而对于 $\epsilon_1 < 0$，它们则会部分抵消。因此，在绿色迹线中，成对响应在扫描的负值一侧明显较弱，而准粒子响应在相干峰附近仍由固定轨道承载。结果是，S_ϕ 在整个负值区间内都保持较大，甚至略微超过单轨道的最大值。位于能隙内的轨道（红色，$\epsilon_2 = 0.5$）则主要增强成对输运，并在扫描的大部分区间内抑制 S_ϕ。

固定轨道也消除了参考态在 $\epsilon_1 \to -\epsilon_1$ 下的反对称性。粒子-空穴对称性则将 $(\epsilon_1,\ \epsilon_2)$ 映射为 $(-\epsilon_1,\ -\epsilon_2)$，并反转 $\mathcal{L}$。因此，对于此处考虑的相等耦合，$\mathcal{L}$ 和 S_ϕ 在 $\epsilon_1 = -\epsilon_2$处均为零，此时两个能级对称地分布在费米能两侧。

B. 塞曼场的影响

图2（b）展示了无自旋轨道耦合时，塞曼场 b_z 对单个活性轨道（$\epsilon_2 = 999$）的影响。该场将裸自旋能级分裂为 $\epsilon_1 \pm b_z$。我们考虑的塞曼能量最高为 $b_z = |\Delta|$，对于具有代表性铝能隙的铝，对应于 $200\,\mu$eV 。我们假设该场仅作用于量子点；这是一个很好的近似，因为半导体量子点的 g 因子比铝大约高一个数量级 [37]。

随着自旋能级分离，准粒子响应分裂为两个峰 [图2(b)]中的绿色和红色迹线。每个峰出现在一个自旋能级达到 $\epsilon^* \simeq 1.2|\Delta|$ 自旋简并参照的最佳对齐位置时，因此峰位于 $\epsilon_1 \simeq \epsilon^* \mp b_z$附近。每个峰都弱于参照值，因为任一时刻只有一个自旋能级处于对齐状态。

如通常对穿过自旋劈裂区域的自旋单态库珀对所预期的那样，场也会抑制成对响应 [67, 75]。对于主要局域在量子点上的态，它会使每个安德烈夫能级的两个自旋分量朝相反方向移动，移动量接近 b_z 。这种移动几乎不会影响相位依赖性。因此，源自正能量分支的较低分量仍保持与已占据负能量分支相反的相位色散。随着该分量从正能量一侧趋近于零，它会因热激发而被占据，其贡献会抵消已占据负能量分支的贡献。只有当该分量低于零数个 k_BT 时，抑制才会完全。在图2所用的 $k_BT = 0.3|\Delta|$ 下，场 $b_z = 0.3|\Delta|$ 仅使其移动约 k_BT。因此，该分量仍被部分占据，所以 $|K_\phi|$仅适度降低。对于 $b_z = |\Delta|$，在 $\epsilon_1 = 0$附近，该分量远低于零，此时 $|K_\phi|$ 几乎为零。在更强的场下，净约瑟夫森耦合会改变符号，平衡相位也会从0变为 π，这标志着0-π 跃迁 [67, 71]。对于此处所示的场， K_ϕ 保持符号不变，结仍处于0态。对于 $b_z = 0.3|\Delta|$，成对响应的降低不足以抵消较弱的准粒子峰，因此 S_ϕ仍略低于参考值。相反，对于 $b_z = |\Delta|$， S_ϕ 会在正 ϵ_1处形成两个明显的峰，在负 ϵ_1处则出现符号相反的镜像峰。较低的峰出现在上自旋能级与相干峰对齐、而下自旋能级已被占据时。已占据的低能能级对成对响应的贡献与其他已占据能级的贡献符号相反，因此 K_ϕ 几乎被抵消。这使图2中的热相位响应达到最大。较高的峰出现在下自旋能级与相干峰对齐且量子点为空时。在此区域，成对输运也较弱。因此，两个峰都高于自旋简并参考值，尽管准粒子响应本身较小，因为 $S_\phi = -\mathcal{L}/K_\phi$。

C. 自旋轨道耦合的影响

图2(c) 展示了在无塞曼场且两个轨道均处于活跃状态时，拉什巴自旋轨道耦合对量子点的影响。对于具有代表性的能隙 $|\Delta| = 200\,\mu$eV， $a_z = 0.5$和1 分别对应于轨道混合能100 和200 μeV。这些数值与少电子 InSb 纳米线量子点中报道的约 $180\,\mu$eV 的自旋轨道耦合诱导能级混合相当 [37]。

Rashba相互作用使两个轨道发生杂化，并拉开它们的能量。此时孤立量子点的轨道本征能为

$$\epsilon_\pm = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}\right)^2 + |\vec{a}|^2}. \tag{12}$$

对于 $a_z = 0.5$，曲线保留了无自旋轨道耦合时结果的整体形状。对于 $a_z = 1$，变化则更加显著。在 $\epsilon_1 = -5$时，上杂化能级位于 $\epsilon_+ \simeq 1.26$，接近准粒子最佳对齐位置 ϵ^*。这表明在扫描的负值一侧存在显著的准粒子输运。随着 ϵ_1 增大，上能级逐渐偏离这一对齐位置。例如，在 $\epsilon_1 = 0$时，它位于 $\epsilon_+ \simeq 1.69$，而下能级位于能隙内的 $\epsilon_- \simeq -0.59$。因此，该区域的准粒子响应减弱。由此产生的 S_ϕ 在 $\epsilon_1 = -1.1$与 $\epsilon_1 \simeq 1.6$之间为负值。在较大的正 ϵ_1下，下杂化能级从下方接近 ϵ_2 ，准粒子响应随之恢复。

成对输运则更偏好靠近费米能的能级。在扫描的负值一侧，更强的杂化会使两个能级都远离零点，并降低 $|K_\phi|$。随着 ϵ_1 增大，较低能级逐渐接近并穿过费米能。将 $\epsilon_- = 0$ 代入式（12）可得 $\epsilon_1 = a_z^2/\epsilon_2 \simeq 0.23$ 和 0。91 ，分别对应 $a_z = 0.5$ 和 1。由于量子点也与引线耦合， $|K_\phi|$的数值最大值出现在略高的栅极取值处。超过最大值后，较强的 SOC 会使较低的杂化能级保持在更接近费米能的位置，因此成对响应下降得更慢。因此， $a_z = 1$ 曲线在 ϵ_1 =1。5 附近与 SOC 较弱的曲线相交，并在更高的 ϵ_1处具有更大的幅值。

我们还研究了自旋轨道辅助隧穿，其中 $t^{\rm so} \neq 0$。对于单轨道，对引线自旋进行旋转即可消去它，并得到有效振幅 $\sqrt{t^2 + (t^{\rm so})^2}$ [76]。因此，自旋轨道辅助隧穿只是重新分配两个隧穿通道之间的耦合，而不会增强耦合。对于两个轨道，如果 $t^{\rm so}_{\alpha j}$ 与 $t_{\alpha j}$成正比，情况也相同；此时，式（A14）中的 $\Lambda_\alpha = 0$ 。否则，自旋轨道辅助隧穿会改变与引线耦合的轨道组合。在固定的 $t^2 + (t^{\rm so})^2$, 下，这会改变上述轨道之间的干涉，而非整体耦合强度。这些结果未予展示。

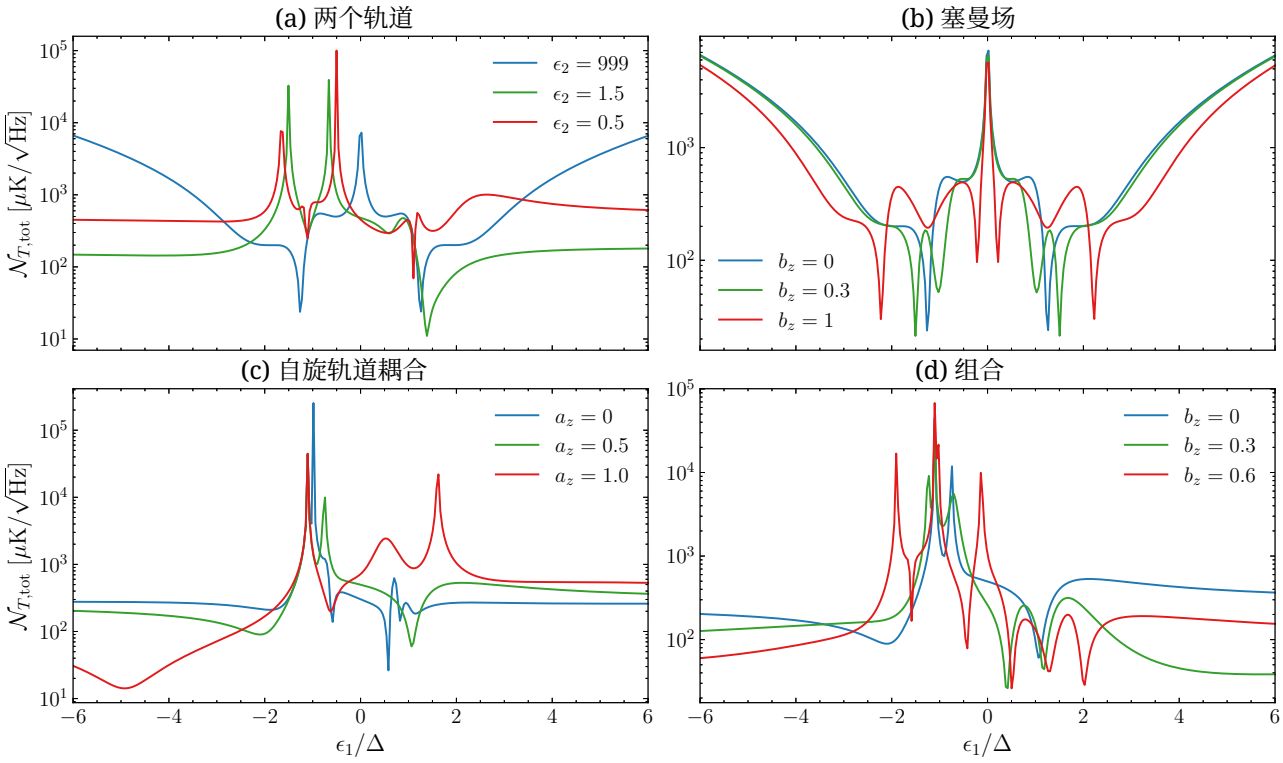


图 3. 图2中各参数族对应的总噪声等效温度。各面板展示了第二轨道、塞曼场、自旋轨道耦合及其组合所产生的影响。值越小，$\mathcal{N}_{T,\ \mathrm{tot}}$ 温度计的灵敏度越高。所有噪声幅度及 ΔT_{op} 均列于表I。

D. 组合效应

图 2(d) 展示了自旋轨道耦合与塞曼场 $\vec{b} = b_z \hat{z}$ 在 $\epsilon_2 = 1.1$下的综合效应。我们选取 $(0.3, 0.2, 0.35)$，其大小与图 $\vec{a} =$中的 2(c) 几乎相同，但方向并不与该场平行。没有场时，只有 $a_z = 0.5$ 起作用，因此 $|\vec{a}|$ 曲线与图 $b_z = 0$中的 2(c) 的曲线重合。 $a_z = 0.5$

当场平行于 $\vec{a}$时，沿$\hat{a}$ 方向的自旋守恒，且量子点能级为 $\epsilon_\pm \pm b_z$。自旋轨道耦合以相对相位 $\pm i$混合轨道。此时，进入杂化能级两个轨道分量的隧穿振幅不会发生干涉，因此当 $t_1 = t_2$时，每个能级与引线的耦合强度都与单轨道相同。在能级位置和耦合均保持不变的情况下，该结在这些能量处的行为与两个独立轨道完全相同。

$\vec{a}$ 中垂直于 b 的分量，反而会耦合两个杂化能级的相反自旋态。在能级 $\epsilon_+ - b_z$ 和 $\epsilon_- + b_z$ 本应交叉的位置（这要求 $b_z > |\vec{a}|$），它们会发生反交叉，并呈现混合自旋特性。于是，本征态不再共享同一自旋轴，因此，即使能级位置相匹配，独立轨道处于塞曼场中的模型也无法重现这种响应。对于 $b_z = 0.6$ ，当 $0.4 \lesssim \epsilon_1 \lesssim 1.8$ 时会发生反交叉。在 $\epsilon_1 = 1.2$附近，反交叉会使两个能级都偏离最佳对准，从而降低 $\mathcal{L}$ 和 S_ϕ ，与场平行于 $\vec{a}$时相比。在 $\epsilon_1 = 0.4$附近，它反而会使一个能级向这一对准方向移动，从而增强响应。成对响应几乎不受影响。对于 $b_z = 0.3$ ，能级不会交叉，而 $\vec{a}$ 的方向只有很小的影响。因此，角度，即 $\vec{a}$ 与 b 之间的夹角，提供了一个额外的控制参数；对于没有自旋轨道耦合的两个轨道，这一参数并不存在。

IV. 传感应用

现在，我们将评估该结作为一种基于相位的温度计，用于测量温差 $\Delta T = T_L - T_R$。我们将把轨道能量、自旋轨道耦合和塞曼场作为控制参数，以选择温度计的工作点。

A. 测量热相位

在实验中，热相位 ϕ_{th} 可以通过以下方式检测：将量子点约瑟夫森结嵌入超导环路，并用附近的超导量子干涉器件（SQUID）以磁性方式检测由此产生的环流。此类相位读出几何结构已在实验中得到充分验证 [49], ，而温度——

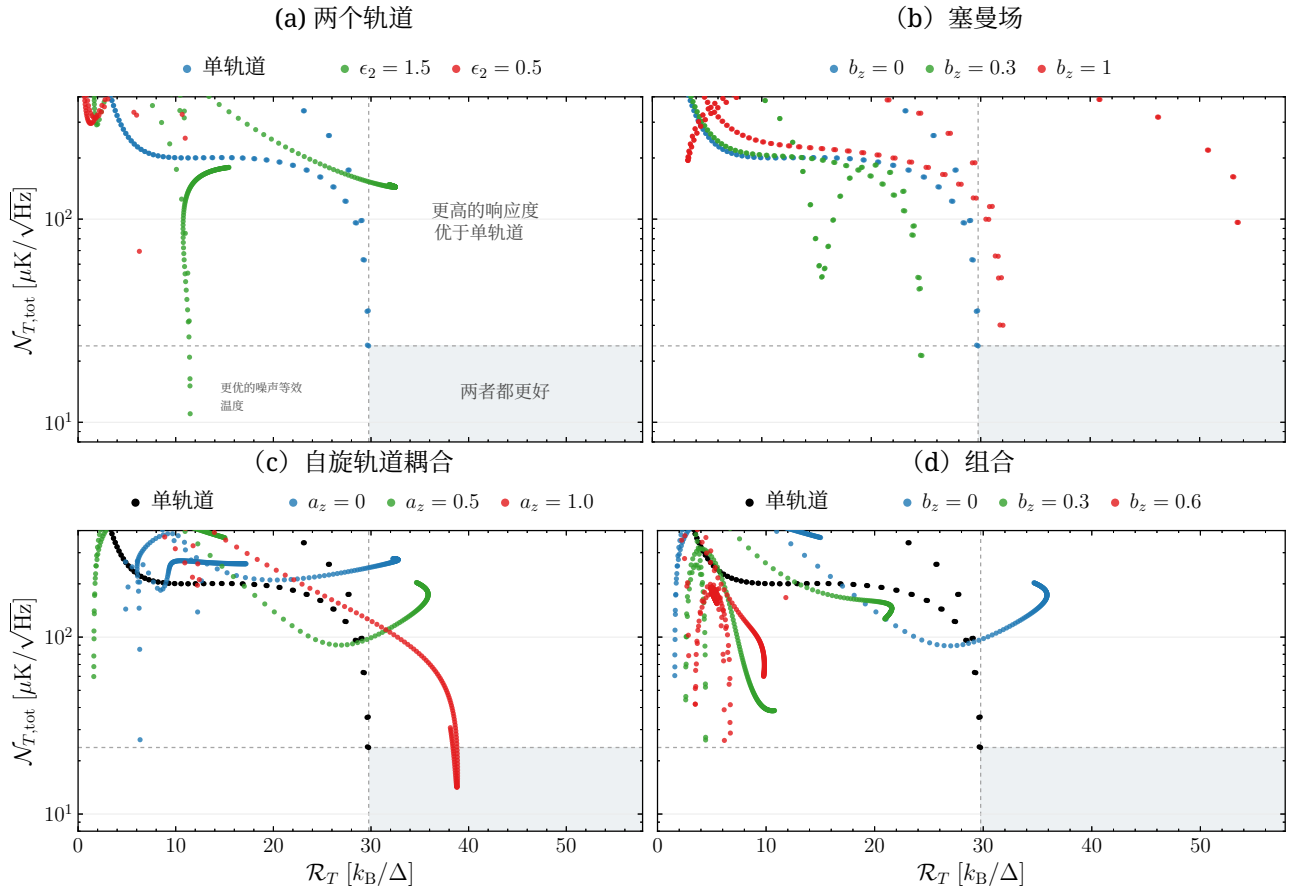


图 4. 图2所示参数族的热相位响应度和预估等效噪声温度。每个点对应一个采样的栅极取值。面板 (c) 和 (d) 中的黑点表示自旋筒并单轨道参照。竖直和水平虚线分别标示其最大响应度和最小噪声等效温度。阴影区域的响应度高于这些参照上限，且噪声等效温度低于这些参照下限。参数和噪声假设与图 3相同。

偏置超导环路中的局部加热和测温已在相位相干热输运实验中得到演示 [21]。

为确定内禀开路热相位，我们考虑一个超导干涉仪，其中一条臂中包含热电量子点结，另一条臂中则包含一个独立的常规参考约瑟夫森结。参考结的热电响应受到抑制，并具有标准的正弦电流-相位关系。当量子点结嵌入该超导环路时，其两端的相位差由两个结的电流-相位关系、电流守恒以及磁通子量子化共同决定。因此，量子点结两端的实际相位未必与其孤立状态下的零电流热相位一致。尽管如此，仍可通过干涉零点测量确定后者。外加磁通控制两条臂之间的相位差，并进行调节，直至环流消失。在这个零点，两结中的电流均为零，而量子点结两端的相位等于其内禀热相位。因此，所需的补偿磁通可用于测量 ϕ_{tho}。

为定量考察这一点，回顾一下，内禀热相位由开路条件 $J(\phi_{\mathrm{th}},\ \Delta T) = 0.$ 定义。当结嵌入超导干涉仪中时，其实际相位 ϕ 通常会受到环流的影响。结电流满足

$$J\left(\phi, \Delta T\right) = I_{\mathrm{circ}}, \qquad J_{\mathrm{ref}}\left(\phi_{\mathrm{ref}}\right) = -I_{\mathrm{circ}}, \tag{13}$$

而磁通子量子化要求

$$\phi - \phi_{\mathrm{ref}} + \frac{2\pi}{\Phi_0}\left(\Phi_{\mathrm{ext}} + LI_{\mathrm{circ}}\right) = 2\pi n. \tag{14}$$

此处， J_{ref} 表示流经干涉仪第二臂中独立的常规参考约瑟夫森结的电流。我们假设该参考结的热电响应受到抑制。此外， L为环路电感， Φ_{ext} 为外加磁通， n 为磁通子数。

为确定开路热相位，将外磁通调节至 $\Phi_{\rm comp}$ 使环流为零的值， $I_{\rm circ}=0$.在此磁通值下，量子点结中没有电流，因此 $\phi=\phi_{\rm th}$. 由于电流守恒，参考结中也没有电流。对于常规0- 结，若其电流-相位关系已知，则其稳定的零电流相位为 $\phi_{\rm ref}=0$。此外，在零点处，自磁通 $LI_{\rm circ}$ 为零。对于固定的温差，方程（14）给出

$$\phi_{\rm th}=-\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi_{\rm comp}+2\pi n. \tag{15}$$

实验中，相关的可观测量是补偿磁通相对于温度偏置为零时取值的变化。我们首先确定 $\Phi_{\rm comp}(0)$，然后施加 ΔT 并调节外磁通，直至 $I_{\rm circ}=0$ 在 $\Phi_{\rm comp}(\Delta T)$处恢复。将两个温度偏置下的式（15）相减，可消去磁通子数和任何静态磁通偏置，

$$\phi_{\rm th}(\Delta T)=-\frac{2\pi}{\Phi_0}\left[\Phi_{\rm comp}(\Delta T)-\Phi_{\rm comp}(0)\right], \tag{16}$$

因为 $\phi_{\rm th}(0)=0$。因此，开路热相位可通过测量环流消失时外磁通随温度变化产生的位移来确定，即使量子点约瑟夫森结处于闭合回路中也是如此。然而在实际操作中，外磁通也会直接耦合到超导量子干涉器件，因此要确定零点，必须仔细校准这种交叉耦合。

B. 等效噪声温度

我们将温差写为 $\Delta T=\Delta T_{\rm op}+\delta T$，其中 $\Delta T_{\rm op}$ 是固定的工作点，而 δT 是其附近的小幅变化。我们取 $\Delta T_{\rm op}$ 位于图5的线性响应区间内，因此工作点处的斜率等于线性响应值。于是，相位信号为 $\delta\phi_{\rm th}=S_\phi\,\delta(\Delta T)$。我们将温度响应度定义为

$$\mathcal{R}_T\equiv|S_\phi|. \tag{17}$$

较大的 $\mathcal{R}_T$ 会将微小的温度变化转换为较大的相位信号，但它本身并不能保证温度计具有高精度。例如，接近 0-π 跃迁的几乎消失的 K_ϕ会大幅提高响应度，但也会使器件更容易受到栅极噪声的影响，正如我们将在下文看到的那样。

因此，我们使用噪声等效温度（NET）作为品质因数，以比较有用的温度响应与相关噪声源。下文中， $\mathcal{N}_x$ 表示噪声源 x的幅度谱密度，即每平方根带宽对应的均方根噪声幅度。NET 将组合输出噪声表示为一种等效的、随时间变化的温度涨落的幅度谱密度，这种温度涨落会产生相同的热相位噪声。

来源	振幅 $\mathcal{N}_x$	噪声等效温度术语	降低幅度
读出	10^{-5}弧度/$\sqrt{\text{赫兹}}$ [77]	$\mathcal{N}_{\phi,\rm ro}/\mathcal{R}_T$	大 $\mathcal{R}_T$
电流	$5-10\,\text{fA}/\sqrt{\text{Hz}}$	$\mathcal{N}_I/\lvert\mathcal{L}\rvert$	大 $\lvert\mathcal{L}\rvert$
Gate	$1\,\mu\text{eV}/\sqrt{\text{Hz}}$ [78, 79]	$\Delta T_{\rm op}\lvert\chi_{\epsilon_i}\rvert\mathcal{N}_{\epsilon_i}$	小 $\lvert\chi_{\epsilon_i}\rvert$
场	$10\,\text{nT}/\sqrt{\text{Hz}}$ [80]	$\Delta T_{\rm op}\lvert\chi_{b_z}\rvert\mathcal{N}_{b_z}$	小 $\lvert\chi_{b_z}\rvert$

表 I。进入方程（18）的示例性低频噪声预算，以及控制各项贡献的输运系数组合。栅极噪声指每个轨道能量 ϵ_i，场噪声指 b_z。这些数值是在 1 Hz 附近针对 $|\Delta|=200\,\mu$eV给出的，其中 $g=15$ [35, 81]。结合工作点

$$\Delta T_{\rm op}=0.01|\Delta|/k_{\rm B}=23.2$$

mK，这些数值完全确定了图 3 和 4中所示的等效温度噪声。它们取决于材料、器件几何结构、读出电路和测量带宽，主要用于比较不同的工作点。

因此，它表示每平方根带宽下推断出的温差所具有的有效不确定性。对于满足 $\phi_0=0$ 的对称结，在小信号区间$\mathcal{N}_{T,\ \rm tot}$ 总 NET 可由下式得出

$$\mathcal{N}_{T,\rm tot}^2=\left(\frac{\mathcal{N}_{\phi,\rm ro}}{\mathcal{R}_T}\right)^2+\left(\frac{\mathcal{N}_I}{|\mathcal{L}|}\right)^2+\Delta T_{\rm op}^2\sum_{x\in\{\epsilon_1,\epsilon_2,b_z\}}\chi_x^2\mathcal{N}_x^2, \tag{18}$$

其中$\mathcal{N}_{\phi,\ \rm ro}$ 是读出的相位噪声幅度， $\mathcal{N}_I$ 是结及其电路中物理电流涨落的幅度， $\mathcal{N}_x$ 表示控制参数 x的噪声幅度。对数灵敏度

$$\chi_x\equiv\frac{\partial\ln\mathcal{R}_T}{\partial x} \tag{19}$$

衡量此类涨落对温度计校准的影响程度。独立噪声源在式（18）中相加。两个轨道能量的相关位移可通过相应的互谱密度纳入。

式（18）的第一项是相位读出极限。如果将SQUID噪声表示为磁通噪声幅度，则通过$\mathcal{N}_{\phi,\ \rm ro}=2\pi\mathcal{N}_{\Phi,\ \rm ro}/\Phi_0$进行换算。第二项源于电流涨落会使相位变化 $\delta\phi=-\delta I/K_\phi$， 而 $\mathcal{R}_T=|\mathcal{L}/K_\phi|$。因此，当将同一涨落折算回等效温度时， K_ϕ 的因子会相互抵消。最后一项描述由温度计响应度涨落产生的噪声，有时也称为增益噪声。它与有限偏置 $\Delta T_{\rm op}$ 成正比，因为此时栅极和场涨落会调制已有的热相位信号。

下文所使用的噪声幅度汇总于表I中。读出值与接近结干涉仪所报告的磁通噪声 [77]处于同一数量级。纳米尺度SQUID可达到更低的磁通

噪声 [82]。电流噪声的下限由结的约翰逊噪声 $\sqrt{4k_BTG}$ 决定，其中 $G=(e^2/h)\int d\omega\,(-\partial f/\partial\omega)\,\mathcal{T}(\omega)$ 是准粒子电导，而 $\mathcal{T}$ 是进入 $\mathcal{L}$的透射迹。在图3 的 NET 极小值处，这给出5至10fA/$\sqrt{\text{Hz}}$。轨道能量噪声对应于半导体量子点中的电荷噪声测量 [78, 79, 83, 84]，，我们将两个轨道能量视为相互独立。场噪声是对超导磁体的保守估计 [80]，并通过 $\mathcal{N}_{b_z}=g\mu_{\mathrm{B}}\mathcal{N}_{B_z}/2$进入。

表I 的最后一列说明了如何降低各项贡献。只有读出贡献会因较小的 K_ϕ而受益，因为约瑟夫森软化会放大温度诱导的相位信号，使其相对于固定的相位读出不精确度更强。电流贡献仅取决于准粒子系数 $\mathcal{L}$，因为电流涨落和热电信号对结相位的作用方式相同。相比之下，增益噪声贡献则倾向于选择校准 S_ϕ 对控制参数不敏感的工作点。因此，约瑟夫森软化只能改善前一项贡献，而较强的准粒子响应和平坦的校准则能改善其他贡献。

C. 投影灵敏度

图3表明，最大的 $|S_\phi|$不一定对应最低的噪声等效温度。理想的工作点必须兼具较大的热电系数 $|\mathcal{L}|$、高于读出噪声且可分辨的相位响应，以及对控制参数依赖较弱的校准。当 $\mathcal{L}$ 或 S_ϕ 为零，或 S_ϕ随栅极电压快速变化时，会出现尖锐的极大值。

对于所示的噪声预算和栅极网格，自旋简并的单轨道参考的噪声等效温度最低约为 24 μK/$\sqrt{\text{Hz}}$。在图 3（a）中，加入能量为 $\epsilon_2=1.5|\Delta|$ 的第二个轨道后，该数值降至约 $1\,\mu$K/$\sqrt{\text{Hz}}$。当两个轨道几乎简并、并以隧穿振幅 $\sqrt{2}\,t$作为单能级发挥作用时，噪声等效温度达到最低值。具有相同隧穿振幅的单轨道可达到相同的噪声等效温度。因此，第二个轨道仅通过调节轨道能量、而无需改变隧穿势垒，便增强了有效耦合。近简并要求两个轨道之间的能量差小于彼此的 $|\Delta|$。轨道之间的库仑排斥在此处被忽略，但会改变这一状态。对于所考虑的噪声预算，$\epsilon_2=0.5|\Delta|$ 的情况表现更差。噪声等效温度的降低并非源于热相位响应超过单轨道最大值，而是源于有效耦合增强以及由此带来的噪声贡献改善。相反，自旋轨道耦合能够同时实现较低的噪声等效温度和较大的响应，下面将对此作进一步讨论。

在图 3（b）中，中等磁场 $b_z=0.3|\Delta|$ 将最低噪声等效温度略微降低至 $21.3\,\mu$K/$\sqrt{\text{Hz}}$。尽管此工作点的电流噪声贡献较大，但增益噪声贡献较小。对于$b_z=|\Delta|$，最低值反而升高至约30 μK/$\sqrt{\text{Hz}}$。因此，强磁场下较大的热相位响应并不能带来最低的温度噪声。

自旋轨道耦合通过轨道能级排斥移动有利的工作区域。在图 3(c) 中，情形 $a_z=1$ 达到约 $14.2\,\mu$K/$\sqrt{\text{Hz}}$，对应负的 ϵ_1。在此，大的热相位响应与小的增益噪声贡献相伴。该情形的表现优于图中所示的两种较弱自旋轨道耦合情形。

图 3(d) 的组合情形中，场 $b_z=0.3|\Delta|$和 $b_z=0.6|\Delta|$ 给出的最低噪声等效温度相近，约为 $26.2\,\mu$K/$\sqrt{\text{Hz}}$和 $26.1\,\mu$K/$\sqrt{\text{Hz}}$。因此，多轨道和自旋依赖调控能够在响应与噪声之间实现不同的权衡，而非普遍提升灵敏度。这些数值与基于超导结的先进电子温度计的噪声等效温度相当；后者可达到 10 至 90 μK/$\sqrt{\text{Hz}}$ [4, 5, 56]。这些器件以兆赫带宽测量绝对电子温度，而热相位结则直接测量温差。

图4 直接比较了响应度和预期噪声等效温度，每个点对应一个采样的栅极取值。阴影区域要求响应度高于单轨道响应度的最大值，且噪声等效温度低于其最小值。强自旋轨道耦合情形在约 $-5.6\lesssim\epsilon_1/|\Delta|\lesssim-4.3$ 时进入该区域。因此，相较于所选的自旋简并单轨道参照，它同时改善了这两个量。

对于单轨道曲线，噪声等效温度关于栅极电压近似为偶函数。热相位在类电子输运和类空穴输运之间反号，而噪声等效温度取决于幅值和噪声功率。固定的第二轨道会打破这种简单的栅极对称性，并且在扫掠轨道失谐后仍可能留下有限响应。这解释了为什么在负栅极能量以及较大的 $|\epsilon_1|$下也可能出现有用的工作区域。

D. 线性且不受温度影响的工作

噪声等效温度描述校准工作点附近的小幅温度变化。为了确定一个恒定响应度仍能保持准确的范围，我们将完整热相位与局部切线进行比较

$$\phi_{\mathrm{th}}^{\mathrm{lin}}(\Delta T)=\phi_{\mathrm{th}}(\Delta T_{\mathrm{op}})+S_\phi(\Delta T_{\mathrm{op}})\,(\Delta T-\Delta T_{\mathrm{op}})\,. \quad (20)$$

相对偏差定义为

$$\eta(\Delta T)=\frac{\left|\phi_{\mathrm{th}}(\Delta T)-\phi_{\mathrm{th}}^{\mathrm{lin}}(\Delta T)\right|}{\left|\phi_{\mathrm{th}}^{\mathrm{lin}}(\Delta T)-\phi_{\mathrm{th}}(\Delta T_{\mathrm{op}})\right|}. \quad (21)$$

在 $\Delta T=\Delta T_{\mathrm{op}}$、$\eta=0$ 处，由连续性可知。我们将线性工作区间定义为 $\eta<0.05$。我们注意到，这一

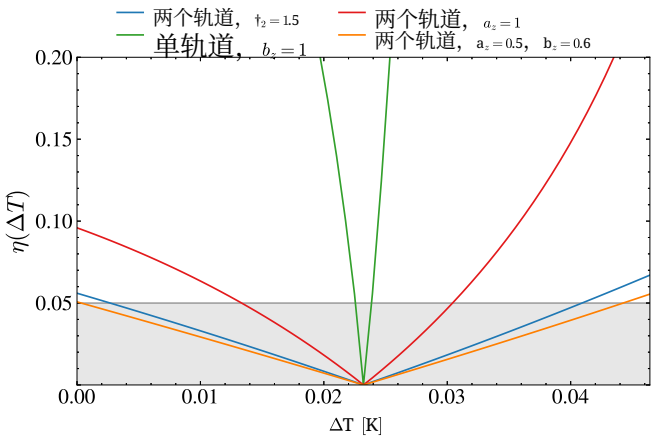


图 5. 四个具有代表性的工作点在 $\Delta T_{\rm op} = 23.2$mK 下相对于局域线性校准的相对偏差。灰色区域标示范围 $\eta < 0.05$。

阈值仅用作实用的校准标准，不应被视为基本边界。

对于具有 $\epsilon_2 = 1.5|\Delta|$ 的双轨道工作点，5% 区间从 2.7 延伸至 41.0 mK。自旋轨道耦合工作点在 13 至 30 mK 之间保持线性，而组合工作点在所示的整个范围内（0 至 46 mK）均符合标准。相比之下，$b_z = |\Delta|$ 处的单轨道工作点仅在 22.6 至 23.9 mK 之间符合相同标准。因此，其增强的局部响应伴随着非常狭窄的校准范围。由此，组合工作点兼具颇具竞争力的等效噪声温度和最宽的校准范围。在所报告的区间之外，仍可使用热相位，但必须根据完整的非线性校准曲线推断温度，而不能使用一个恒定的 S_ϕ。

前述分析讨论的是热相位响应较大的工作点附近的温度范围。同样的分解 $S_\phi = -\mathcal{L}/K_\phi$ 也能识别出相反的情况：此时热相位对温差在一阶近似下不敏感。具体而言，S_ϕ 可以通过两种物理机制截然不同的方式改变符号。接近 0-π 跃迁时，K_ϕ 趋近于零，而S_ϕ 则大幅增大，正如第 III B 节所述。相比之下，$\mathcal{L}$ 在有限的 K_ϕ 处过零，会使热电响应反向，同时保持良好定义的约瑟夫森耦合。图 2 中分别展示 $\mathcal{L}$ 和 K_ϕ，因此可以区分这两种机制；仅凭 S_ϕ 则无法做到这一点。在图 2 所示的所有双轨道构型中，S_ϕ 在 $\epsilon_1 = -\epsilon_2$处为零，此时两个量子点能级关于费米能对称排列，而 K_ϕ 仍为有限值。这将单能级结中 $\epsilon_1 = 0$处的零点推广到双轨道情形，且与此处考虑的自旋轨道耦合和塞曼场无关。在这一点，线性热相位响应消失，因为

$$S_\phi = \left.\frac{\mathrm{d}\phi_{\rm th}}{\mathrm{d}(\Delta \mathrm{T})}\right|_{\rm op} = 0. \tag{22}$$

因此，对于工作温差 $\Delta T_{\rm op}$ 附近的微小变化 δ（ΔT），热相位变为

$$\begin{aligned}&\phi_{\rm th}\left[\Delta T_{\rm op} + \delta(\Delta T)\right] - \phi_{\rm th}(\Delta T_{\rm op}) \\ &\quad = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \phi_{\rm th}}{\partial(\Delta T)^2}\right|_{\rm op} [\delta(\Delta T)]^2 + \mathcal{O}\left([\delta(\Delta T)]^3\right).\end{aligned} \tag{23}$$

因此，热相位对温度变化的一阶响应不敏感，而有限的 K_ϕ 则表明该结仍具有明确的约瑟夫森耦合。因此，同一可由栅极调控的结，既可在高响应度点附近用作热电传感器，也可在 $\epsilon_1 = -\epsilon_2$附近用作对温度不敏感的相位元件。尽管后者并非本文所探讨的测温应用的重点，但它展现了温度到相位转换的广泛可调性。

V. 结论

量子点约瑟夫森结可将温差转换为相位信号，其大小和符号均可通过电学和磁学方式调控。我们研究了具有自旋轨道耦合和塞曼场的双轨道量子点中的这种热相位。将热相位塞贝克系数写作 $S_\phi = -\mathcal{L}/K_\phi$，即可将准粒子响应与结的刚度区分开来，因此每种控制参数的作用都可归因于其中之一。第二轨道主要增强成对输运。不过，当它接近最佳准粒子对准位置时，会将 S_ϕ 的尖锐单能级最大值拓展为一个响应度较大的宽广区域。塞曼场通过软化结而非增强 $\mathcal{L}$，提高了 0-π 跃迁附近的 S_ϕ。自旋轨道耦合通过能级排斥使轨道能级发生偏移。根据栅极位置的不同，它可能抑制响应，也可能使响应超过单轨道最大值。若磁场不平行于自旋轨道矢量，杂化能级在反交叉附近会呈现混合自旋特性，使磁场方向也成为一个控制参数。

因此，该结具有一组异常丰富的调节参数，可原位调节。栅极电压决定能级位置，而场的大小和方向则调节自旋劈裂及其与自旋轨道耦合的相互作用。每个调节参数对准粒子响应和刚度的影响各不相同。因此，无需改变器件的制造工艺，同一器件便可在较大的热相位和稳健的校准之间调节。这种可调性很重要，因为仅有较大的热相位并不足以造就一台优秀的温度计。约瑟夫森软化只能改善等效噪声温度中的读出贡献，并缩小线性校准成立的范围。

最低的噪声等效温度则出现在准粒子响应较大且校准对栅极涨落不敏感的条件下。对于此处假设的噪声水平，其量级为 $10\,\mu\mathrm{K}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$。强自旋轨道耦合可提供较宽的栅压范围，使这类工作点得以存在。

这些预测建立在若干简化假设之上。库仑相互作用仅在平均场层次上纳入处理，在此层次中，它们会重整化模型参数并引入极化诱导交换场。当近藤温度接近超导能隙时，近藤关联会变得重要，但本研究未考虑这些效应。噪声预算采用具有代表性的噪声幅度，而非针对特定读出电路建立模型。我们还考虑了能够保持平衡相位钉扎对称性的耦合。反常相位会使栅极和场的涨落直接改变相位，从而增加一项在 ΔT_{op} 较小时仍不会消失的噪声贡献。自然的后续研究方向包括处理超越平均场的相互作用，以及建立明确的读出电路模型。

带有超导接触的纳米线和平面量子点已经具备所有所需要素。因此，我们预计栅压可调量子点结有望成为可行的基于相位的温度计。这类器件有助于追踪低温量子技术中的耗散和热流；在这些技术中，如何管理微小热负载正成为日益重要的挑战。

致谢

我们感谢 C. Sun 的有益讨论。本工作得到挪威研究委员会通过第353894号资助以及其卓越中心资助计划第262633号资助“QuSpin”的支持。

附录A：格林函数形式主义

在本附录中，我们将第II节的模型改写为矩阵Nambu形式，并推导超导引线的推迟自能、量子点的格林函数以及线性响应区间内的电流。库仑相互作用的平均场处理见附录B。

1. Nambu表示

为处理超导关联，我们引入结合粒子与空穴自由度的 Nambu旋量。对于量子点，八分量旋量

$$\Psi_{\mathrm{QD}} = \left(d_{1\uparrow}, d_{1\downarrow}, d_{2\uparrow}, d_{2\downarrow}, d^{\dagger}_{1\downarrow}, -d^{\dagger}_{1\uparrow}, d^{\dagger}_{2\downarrow}, -d^{\dagger}_{2\uparrow}\right)^{\top} \tag{A1}$$

存在于 Nambu（τ）、轨道（ν）和自旋（σ）空间的张量积中，其对应的泡利矩阵为 τ_i、 ν_i和 σ_i。我们分别用 $\mathbb{1}_\tau$、$\mathbb{1}_\nu$和 $\mathbb{1}_\sigma$表示各空间中的单位矩阵。对于引线，我们使用四分量旋量

$$\Psi_{\alpha k} = \left(c_{\alpha k\uparrow}, c_{\alpha \bar{k}\downarrow}, c^{\dagger}_{\alpha \bar{k}\downarrow}, -c^{\dagger}_{\alpha k\uparrow}\right)^{\top}, \tag{A2}$$

其中 $k \equiv -k$，涵盖 Nambu $\otimes$ 自旋空间。

在这个基底下，引线哈密顿量，式（2），可写成 Bogoliubov-de Gennes 形式

$$H_\alpha = \frac{1}{2}\sum_k \Psi^{\dagger}_{\alpha k} \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha(k)\,\mathbb{1}_\sigma & \Delta_\alpha \mathbb{1}_\sigma \\ \Delta^{*}_\alpha\,\mathbb{1}_\sigma & -\epsilon_\alpha(k)\mathbb{1}_\sigma \end{pmatrix} \Psi_{\alpha k}. \tag{A3}$$

量子点哈密顿量，式（4），可写为

$$H_{\mathrm{QD}} = \frac{1}{2}\Psi^{\dagger}_{\mathrm{QD}}\,\mathcal{H}_{\mathrm{QD}}\Psi_{\mathrm{QD}}, \tag{A4}$$

其中 8×8 矩阵

$$\mathcal{H}_{\mathrm{QD}} = \tau_z \otimes [\mathcal{E}_\nu \otimes \mathbb{1}_\sigma + \nu_y \otimes \vec{a}\cdot\vec{\sigma}] + \mathbb{1}_\tau \otimes \mathbb{1}_\nu \otimes \vec{b}\cdot\vec{\sigma}. \tag{A5}$$

这里， $\mathcal{E}_\nu = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2)$包含轨道能量。该矩阵的结构源于空穴块 [39]的粒子-空穴共轭。单粒子项（轨道能量和自旋轨道耦合）带有 τ_z 前因子，反映它们在共轭下的符号变化；而破坏时间反演对称性的塞曼场则与 $\mathbb{1}_\tau$ 耦合，因为 $\sigma_y\,\vec{\sigma}^{\,*}\sigma_y = -\vec{\sigma}$ 抵消了空穴块带来的整体负号。

隧穿哈密顿量，式（5），可写成 Nambu 形式

$$H_T = \sum_{\alpha,k} \Psi^{\dagger}_{\alpha k}\,\hat{V}_\alpha\,\Psi_{\mathrm{QD}}, \tag{A6}$$

其中， 4×8 耦合矩阵可分解为

$$\hat{V}_\alpha = \tau_z \otimes W_\alpha, \tag{A7}$$

其中 τ_z 作用于南部空间，而 W_α 是轨道 $\otimes$自旋空间中的一个 2×4矩阵，

$$W_\alpha = (t_{\alpha 1}, t_{\alpha 2}) \otimes \mathbb{1}_\sigma + i\eta_\alpha(t^{\mathrm{so}}_{\alpha 1}, t^{\mathrm{so}}_{\alpha 2}) \otimes \sigma_y. \tag{A8}$$

2. 推迟自能

通过对引线 α 的引线自由度进行积分，可以得到由该引线产生的推迟自能，

$$\hat{\Sigma}^r_\alpha(\omega) = \sum_k \hat{V}^{\dagger}_\alpha\,\hat{g}^r_\alpha(k,\omega)\,\hat{V}_\alpha, \tag{A9}$$

其中 $\hat{g}^r_\alpha(k,\omega)$ 是引线 α的裸推迟格林函数。由博戈留波夫-德热讷哈密顿量，式（A3），可得

$$\hat{g}^r_\alpha(k,\omega) = \frac{1}{(\omega+i\eta)^2 - \epsilon^2_\alpha(k) - |\Delta_\alpha|^2} \times \begin{pmatrix} \omega+\epsilon_\alpha(k) & \Delta_\alpha \\ \Delta^{*}_\alpha & \omega-\epsilon_\alpha(k) \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_\sigma, \tag{A10}$$

其中 $\eta \to 0^+$。

我们将动量求和转化为能量积分，$\sum_k \to \int d\epsilon\, N(\epsilon)$ 并采用宽带近似，[63], 将态密度替换为其在费米能级处的值，$N(\epsilon) \approx N(0)$，由此得到

$$\hat{g}^r_\alpha(\omega) = -i\pi N(0)\,\rho_\alpha(\omega) \begin{pmatrix} 1 & \Delta_\alpha/\omega \\ \Delta^*_\alpha/\omega & 1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_\sigma. \quad \text{(A11)}$$

这里，我们引入无量纲的 BCS态密度

$$\rho_\alpha(\omega) = \frac{|\omega|\,\theta(|\omega| - |\Delta_\alpha|)}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta_\alpha|^2}} + \frac{\omega\,\theta(|\Delta_\alpha| - |\omega|)}{i\sqrt{|\Delta_\alpha|^2 - \omega^2}}, \quad \text{(A12)}$$

它同时描述了上述能隙以上的准粒子连续谱，以及导致安德烈夫束缚态的亚能隙解析延拓。

将方程（A7）和（A11）代入方程（A9），利用分解 $\hat{V}^\dagger_\alpha(\hat{B} \otimes \mathbb{1}_\sigma)\hat{V}_\alpha = (\tau_z \hat{B}\, \tau_z) \otimes (W^\dagger_\alpha W_\alpha)$ 得到

$$\hat{\Sigma}^r_\alpha(\omega) = -\frac{i}{2}\,\rho_\alpha(\omega) \begin{pmatrix} 1 & -\Delta_\alpha/\omega \\ -\Delta^*_\alpha/\omega & 1 \end{pmatrix} \otimes \hat{\Gamma}^{\text{eff}}_\alpha, \quad \text{(A13)}$$

其中，非对角元的符号翻转源于对 τ_z 的共轭变换，我们将 4×4 有效耦合矩阵定义为

$$\hat{\Gamma}^{\text{eff}}_\alpha = 2\pi N(0) W^\dagger_\alpha W_\alpha = \hat{\Gamma}_\alpha \otimes \mathbb{1}_\sigma - \eta_\alpha \Lambda_\alpha \nu_y \otimes \sigma_y. \quad \text{(A14)}$$

此处，2×2 轨道耦合矩阵 Γ_α 定义为

$$\left(\hat{\Gamma}_\alpha\right)_{nm} = 2\pi N(0)\left[t_{\alpha n} t_{\alpha m} + t^{\text{so}}_{\alpha n} t^{\text{so}}_{\alpha m}\right] \quad \text{(A15)}$$

以及 $\Lambda_\alpha = 2\pi N(0)(t_{\alpha 1} t^{\text{so}}_{\alpha 2} - t^{\text{so}}_{\alpha 1} t_{\alpha 2})$。我们注意到，方程（A14）中的第二项将轨道（$\nu_y$）与自旋（$\sigma_y$）自由度耦合起来；该项在单轨道模型中不存在，且仅当两个轨道的比值 $t^{\text{so}}_{\alpha n}/t_{\alpha n}$ 不同时才非零。

3. 格林函数

量子点的推迟格林函数由Dyson方程确定

$$\hat{G}^r(\omega) = \left[(\hat{g}^r_0)^{-1}(\omega) - \hat{\Sigma}^r_L(\omega) - \hat{\Sigma}^r_R(\omega)\right]^{-1}, \quad \text{(A16)}$$

其中，裸格林函数的逆可直接由Nambu量子点哈密顿量（方程（A5））得到，

$$(\hat{g}^r_0)^{-1}(\omega) = \omega\, \mathbb{1}_8 - \mathcal{H}_{\text{QD}}. \quad \text{(A17)}$$

小于格林函数由 Keldysh 方程 [85] 得出

$$\hat{G}^<(\omega) = \hat{G}^r(\omega)\,\hat{\Sigma}^<(\omega)\,\hat{G}^a(\omega). \quad \text{(A18)}$$

其中，超前格林函数为 $\hat{G}^a = (\hat{G}^r)^\dagger$，总小于自能为 $\hat{\Sigma}^< = \hat{\Sigma}^<_L + \hat{\Sigma}^<_R$，而各引线的小于自能则由涨落耗散定理 [85] 得出

$$\hat{\Sigma}^<_\alpha(\omega) = f_\alpha(\omega)\left(\hat{\Sigma}^a_\alpha(\omega) - \hat{\Sigma}^r_\alpha(\omega)\right), \quad \text{(A19)}$$

其中，$f_\alpha(\omega) = [e^{\omega/k_B T_\alpha} + 1]^{-1}$ 是引线 α的费米函数。

4. 线性响应区间内的电流

通过该结的电荷电流为 [86]

$$J = -\frac{e}{h}\int d\omega\ \text{Re}\ \text{tr}_p\left[(\hat{\Sigma}_L - \hat{\Sigma}_R)\,\hat{G}(\omega)\right]^<, \quad \text{(A20)}$$

其中迹$_p$ 表示仅对南部空间的粒子块取迹，即对指标为 1-4 的对角元素求和，这些指标对应于方程 (A1) 所示基底中的粒子扇区的轨道和自旋自由度。应用朗德雷斯规则 [85, 87][AB]$^< = A^r B^< + A^< B^a$ 可得正文方程 (7) 中给出的表达式。

现在我们专门讨论线性响应区间。结两端施加温差 ΔT，使得 $T_L = T + \Delta T$和 $T_R = T$。将左侧引线的费米函数展开至一阶，

$$f_L(\omega) = f(\omega) + \frac{\partial f}{\partial T}\Delta T, \qquad f_R(\omega) = f(\omega), \quad \text{(A21)}$$

其中，f（ω）是温度为T时的平衡分布，电流可分为平衡贡献（超电流 J_{sc}，与 ΔT无关）和非平衡贡献（准粒子电流 J_{qp}，与 ΔT成线性关系）。

超电流。—将方程（A21）的平衡部分代入电流，并结合 Keldysh 方程（A18）及恒等式

$$\hat{G}^r(\omega)\left[\hat{\Sigma}^a(\omega) - \hat{\Sigma}^r(\omega)\right]\hat{G}^a(\omega) = \hat{G}^a(\omega) - \hat{G}^r(\omega), \quad \text{(A22)}$$

即可得到超电流

$$J_{\text{sc}} = -\frac{e}{h}\int \text{d}\omega\, f(\omega)\,\text{Re}\,\text{tr}_p\left[\hat{D}^a\hat{G}^a - \hat{D}^r\hat{G}^r\right], \quad \text{(A23)}$$

其中 $\hat{D}^r \equiv \hat{\Sigma}^r_L - \hat{\Sigma}^r_R$ 和 $\hat{D}^a = (\hat{D}^r)^\dagger$。这一贡献在物理上可认定为超电流，因为它不依赖于 $f(\omega)$ 中的 ΔT，因此即使在平衡态下也存在。

准粒子电流。—方程（ ΔT中的正比于A21的项会产生准粒子电流

$$\mathcal{L}(\phi)\Delta T = -\frac{e}{h}\int d\omega \frac{\partial f}{\partial T}\ \text{Re}\,\text{tr}_p\left[\hat{D}^r\hat{G}^r\left(\hat{\Sigma}^a_L - \hat{\Sigma}^r_L\right)\hat{G}^a + \left(\hat{\Sigma}^a_L - \hat{\Sigma}^r_L\right)\hat{G}^a\right]\Delta T. \quad \text{(A24)}$$

请注意，方程（A23）和（A24）都涉及 8×8 矩阵乘积的迹，我们通过数值方法计算。对于每种情况，都保留乘积的左上 4×4 粒子块并求其迹，定义见方程（A20）下方。

附录B：平均场层次的库仑相互作用

在本附录中，我们在 Hartree-Fock 近似下处理式（6）中的轨道内和轨道间库仑排斥。我们表明，它会重整化轨道能量、塞曼场和轨道间耦合；在正文中，这些都是彼此独立的控制参数。在自旋极化态中，它还会产生轨道依赖交换场，我们将在第 B3 节讨论其影响。

1. Hartree-Fock解耦

我们用 $a=(\nu,\ \sigma)$ 表示量子点算符，并定义单粒子密度矩阵 $\rho_{ab}=\langle d_b^\dagger d_a\rangle$。其 2×2 自旋块 $\rho_{\nu\nu'}$ 的元素为 $(\rho_{\nu\nu'})_{\sigma\sigma'}=\langle d^\dagger_{\nu'\sigma'}d_{\nu\sigma}\rangle$。对角块 $\rho_{\nu\nu}$ 包含轨道 $n_\nu=$ 的占据数 $\rho_{\nu\nu}$以及自旋极化 $\vec{m}_\nu=\mathrm{tr}(\rho_{\nu\nu}\vec{\sigma})$。非对角块 $\rho_{\nu\bar{\nu}}$，其中 $\bar{\nu}$ 为另一个轨道，描述两个轨道之间的相干性。式（6）的两项在自旋旋转下均保持不变。因此，我们采用常规的 Hartree-Fock 解耦，保留所有自旋和轨道相干性，

$$H_U\approx\sum_{ab}V_{ab}\,d_a^\dagger d_b-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(V\rho)\,, \tag{B1}$$

平均场势的 2×2 自旋块

$$\begin{aligned}V_{\nu\nu}&=U\,(n_\nu\mathbb{1}_\sigma-\rho_{\nu\nu})+U'n_{\bar{\nu}}\,\mathbb{1}_\sigma,\\ V_{\nu\bar{\nu}}&=-U'\rho_{\nu\bar{\nu}},\end{aligned} \tag{B2}$$

其中，$\bar{\nu}$ 表示另一个轨道。与参考文献 [16]一样，这里不包含由相互作用产生的配对场。

将式（B2）加到式（4）的量子点哈密顿量中，可得到形式相同的平均场哈密顿量，

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{QD}}+\sum_{ab}V_{ab}d_a^\dagger d_b=&\sum_\nu d_\nu^\dagger\left(\tilde{\epsilon}_\nu\mathbb{1}_\sigma+\tilde{\vec{b}}_\nu\cdot\vec{\sigma}\right)d_\nu\\&+\left[d_1^\dagger\left(\tilde{t}\,\mathbb{1}_\sigma-i\tilde{\vec{a}}\cdot\vec{\sigma}\right)d_2+\mathrm{h.c.}\right],\end{aligned} \tag{B3}$$

其中 $d_\nu=(d_{\nu\uparrow},d_{\nu\downarrow})^T$。对于 $\rho_{\nu\nu}=(n_\nu\mathbb{1}_\sigma+\vec{m}_\nu\cdot\vec{\sigma})/2$，重整化参数为

$$\tilde{\epsilon}_\nu=\epsilon_\nu+\frac{U}{2}n_\nu+U'n_{\bar{\nu}}, \tag{B4a}$$

$$\tilde{\vec{b}}_\nu=\vec{b}-\frac{U}{2}\vec{m}_\nu, \tag{B4b}$$

$$\tilde{\vec{a}}=\vec{a}-\frac{iU'}{2}\,\mathrm{tr}\,(\rho_{12}\vec{\sigma})\,, \tag{B4c}$$

$$\tilde{t}=-\frac{U'}{2}\,\mathrm{tr}\,\rho_{12}. \tag{B4d}$$

Hartree项会使轨道能量发生偏移。U 的交换项会在每个轨道的塞曼场中 $-U\vec{m}_\nu/2$ 加入一个场。U' 的交换项会加入自旋轨道矢量 $\vec{a}$，并产生一个与自旋无关的隧穿 t，连接两个轨道。后者在式（4）中不存在。通过旋转轨道基底可以将其消去；这种旋转不会改变自旋轨道项，只会重新定义轨道能量和隧穿振幅 $t_{\alpha\nu}$。

因此，在平均场层次，相互作用量子点可由一个参数经过自洽重整化的非相互作用哈密顿量描述。没有自旋极化时，交换场 $-U\vec{m}_\nu/2$ 为零。此外，此时$\mathrm{tr}\,\rho_{12}$ 为实数，且$\mathrm{tr}(\rho_{12}\vec{\sigma})$为虚数，因此 $\tilde{t}$和 $\vec{a}$ 均为实数。此时，相互作用只会重整化第II节模型的参数。自旋极化无论是自发产生还是由塞曼场诱导，都会产生两个真正新的项。第一个是交换场 $-U\vec{m}_\nu/2$对轨道的依赖性。第二个新项源于 $\vec{a}$ 可能变为复数。其虚部仍会重整化自旋轨道耦合，而其实部则表现为交换场，耦合两个轨道的自旋。这些项并不会构成额外的时间反演对称性破缺来源。重整化后的参数取决于占据数。例如，通过项 $U'n_{\bar{\nu}}$，当 ϵ_1 变化时，第二轨道的有效能量会随第一轨道的占据数而变化。

在式（A1）的南部基底中，平均场增加了

$$\delta\mathcal{H}_{\mathrm{HF}}=\begin{pmatrix}V&0\\0&-\mathcal{T}V^*\mathcal{T}\end{pmatrix},\qquad\mathcal{T}=\mathbb{1}_\nu\otimes\sigma_y, \tag{B5}$$

到量子点哈密顿量中，因此式（A17）被替换为

$$(\hat{g}_0^r)^{-1}(\omega)=\omega\,\mathbb{1}_8-\mathcal{H}_{\mathrm{QD}}-\delta\mathcal{H}_{\mathrm{HF}}. \tag{B6}$$

空穴块的形式由旋量的时间反演空穴分量决定。对于沿 $\hat{z}$ 极化且不存在轨道间相干的态，式（B5简化为熟知的重整化能级 $\tilde{\epsilon}_{\nu\sigma}=\epsilon_\nu+U\langle n_{\nu\bar{\sigma}}\rangle+U'n_{\bar{\nu}}$。

2. 自洽性与简并解

密度矩阵由小于格林函数得出，

$$\rho_{ab} = -i \int \frac{d\omega}{2\pi} G^{<}_{ab}(\omega), \tag{B7}$$

其中 a，b 限制在粒子块中。由于 V 取决于 ρ，方程（B2）、（B6）和（B7）必须进行自洽求解。对于处于 $\phi = 0$的对称结，左右对称性使得 ρ 在 ϕ 和 ΔT中均为偶函数。因此，其线性响应为零，对于系数 $\mathcal{L}$ 和 K_ϕ，平衡密度矩阵已足够。我们将其表示为费米马茨巴拉频率上的求和，这在平衡态下等价于方程（B7）。从初始猜测 $\rho^{(0)}$开始，我们进行迭代

$$\rho^{(k+1)} \longleftarrow \alpha\, \rho\big[V(\rho^{(k)})\big] + (1-\alpha)\, \rho^{(k)}, \tag{B8}$$

使用自适应混合参数 $\alpha \in (0, 1]$, ，直到所有元素的变化都小于 10^{-8}。

平均场方程可能有多个解。我们既从非相互作用密度矩阵开始迭代，也从两个轨道沿多个轴具有平行和反平行自旋极化的状态开始迭代。在收敛的解中，我们选择平均场巨正则势最低的解

$$\Omega_{\mathrm{HF}}[\rho] = \Omega_0\big[\mathcal{H}_{\mathrm{QD}} + \delta\mathcal{H}_{\mathrm{HF}}\big] - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(V\rho)\,, \tag{B9}$$

其中 $\Omega_0[\mathcal{H}]$ 表示具有量子点哈密顿量 $\mathcal{H}$的非相互作用结的巨正则势。最后一项用于消除相互作用能的重复计数。

在没有塞曼场时，哈密顿量在时间反演 $\Theta = i\sigma_y K$ 下保持不变 $\phi = 0$，π。因此，一个自旋极化解 ρ 具有一个极化方向相反 $\vec{m}_\nu \to -\vec{m}_\nu$ 且巨正则势相同的简并伴随解 $\mathcal{T}\rho^*\mathcal{T}$。这两个解中的每一个都会破坏时间反演对称性，这是平均场近似产生的人为结果。正如文献 [16], 所强调的，为保持自旋对称性 [88]，因此必须将这两个解都纳入考虑。我们显式构造出该伴随解，验证其满足自洽条件，并对这一对解的电流取平均。随后，将平均电流为零所对应的热相位定义为热相位，并由平均后的系数得到热相位塞贝克系数，

$$S_\phi = -\frac{\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-}{K_{\phi,+} + K_{\phi,-}}, \tag{B10}$$

其中 $\pm$标记两个解。实际上，我们假设两个时间反演的平均场解之间的涨落相对于测量时间足够快，因此实验测得的是它们的系综平均电流，而零电流条件必须在平均之后才施加。若改为对密度矩阵求平均，则会得到一个不自洽的顺磁态，对于这里讨论的对称耦合，两个解给出的 $\mathcal{L}$ 和 K_ϕ相同。对于非对称耦合，平均则至关重要。在这种情况下，单个解在 $\phi = 0$ 处携带平衡电流，这会表现为虚假的反常相位。该电流在两个解之间相互抵消。

3. 轨道依赖交换场

在平均场理论中，库仑相互作用因此会重整化轨道能量、自旋轨道矢量和塞曼场。新增的两个项分别是轨道依赖交换场 $-U\vec{m}_\nu/2$ 以及轨道之间的交换场。轨道依赖交换场与轨道 ν的自旋极化 $\vec{m}_\nu$成正比。$\rho_{\nu\nu}$的本征值（$n_\nu \pm |\vec{m}_\nu|$）/2分别是自旋态沿着和反着 $\vec{m}_\nu$方向的占据数。由于二者都介于零和一之间，极化的绝对值不超过 $|\vec{m}_\nu| \leq \min(n_\nu, 2-n_\nu)$。因此，空轨道或占满的轨道都无法产生自旋极化。尤其是当一个轨道接近半填充，而另一个轨道几乎为空或占满时，两个轨道的交换场会有所不同。在自旋极化态中，U' 的交换项还会使自旋轨道矢量带有虚部。它表现为耦合项 $d_1^\dagger(\vec{c}\cdot\vec{\sigma})d_2 +$ h.c.，其中 $\vec{c}$是一个实矢量。用组合 $d_\pm = (d_1 \pm d_2)/\sqrt{2}$ 表示时，该项写作 $d_+^\dagger(\vec{c}\cdot\vec{\sigma})d_+ - d_-^\dagger(\vec{c}\cdot\vec{\sigma})d_-$。因此，它在-与引线耦合的组合和与引线解耦的组合上产生符号相反的塞曼场。所以，新增的这两个项都是轨道依赖的塞曼场。在图 6 中，我们将它们视为非相互作用模型的独立参数。

图 6(a)-6(c) 表明，轨道选择性场的主要影响取决于其作用轨道在输运中扮演的角色。对于 $\epsilon_1 \lesssim -3|\Delta|$，第一轨道为双占据，而靠近相干峰的第二轨道承载准粒子电流。此时，作用于第一轨道的场基本不会改变任何系数；作用于第二轨道的场则会使其分裂，从而抑制 $\mathcal{L}$，并大幅减小 S_ϕ。在 $\epsilon_1 = 0$附近，第一轨道位于费米能处，并主导成对响应。仅作用于该轨道的场会降低 $|K_\phi|$，而 $\mathcal{L}$仍然较大，从而增强 S_ϕ。共同场则会同时使第二轨道分裂，并抑制 $\mathcal{L}$。因此，轨道依赖场可以软化结，而不降低其准粒子响应。在平均场理论中，这种场出现在接近半填充的轨道上，而该轨道正是控制成对响应的轨道。图 6(d)-6(f) 中的轨道间交换场会使与引线耦合的组合态的自旋态分裂。与塞曼场类似，它会抑制成对响应，并且在 $\epsilon_1 = 0$附近抑制最显著。在负值较大的ϵ_1处，固定的第二轨道主导准粒子系数，数值结果表明，$\mathcal{L}$ 受轨道间交换场的影响很小。同一场对 $|K_\phi|$造成的相对降幅稍大，使得 $|S_\phi| = |\mathcal{L}/K_\phi|$ 随 $|\mathbf{c}|$ 增大。

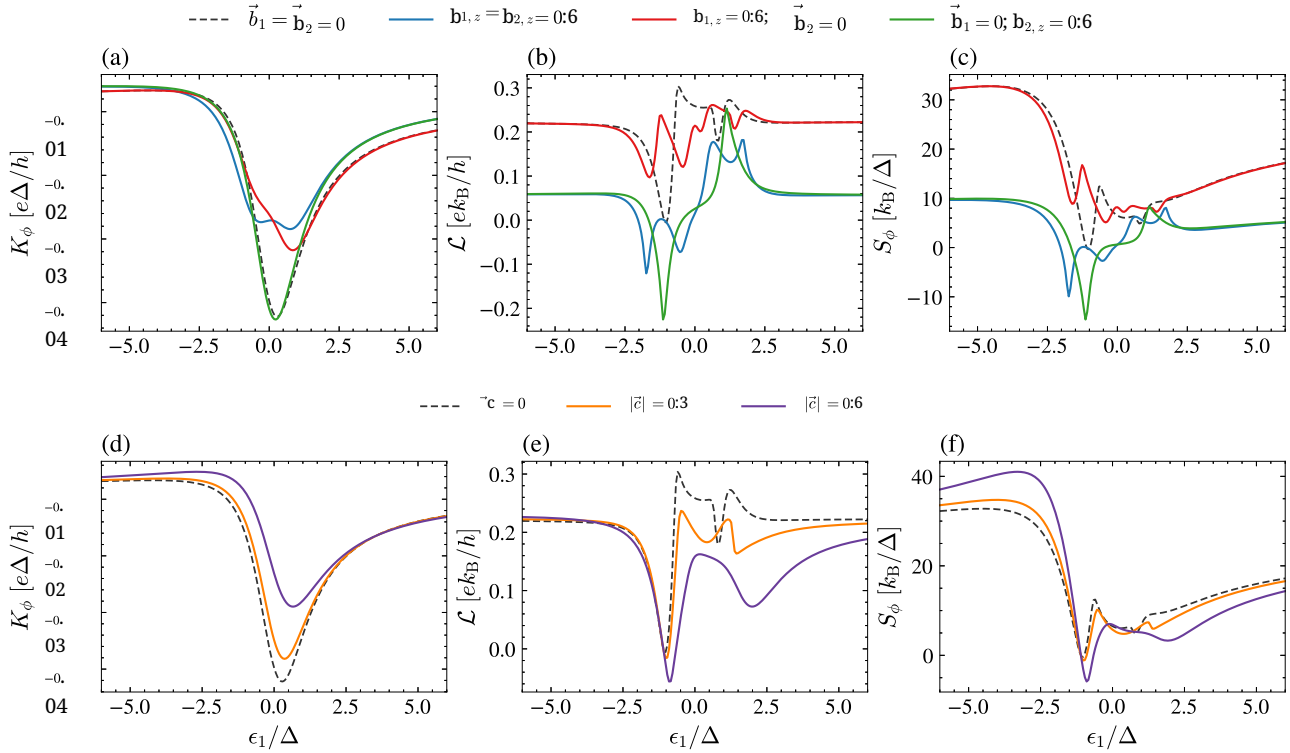


图 6. 将平均场相互作用中的两个新项视为非相互作用模型的独立参数时的影响。(a)–(c) 作用于各个轨道的塞曼场 $\vec{b}_1$ 和 $\vec{b}_2$。(d)–(f) 耦合两个轨道自旋的交换场 $\vec{c}$。各面板从左到右显示 K_ϕ、$\mathcal{L}$ 和 S_ϕ。在没有自旋轨道耦合的情况下，第二轨道位于 $\epsilon_2 = 1.1|\Delta|$。其余参数与图 2相同。

更接近负相干峰时，两个系数都会显著变化，热相位则反映了它们之间的竞争。对于正的 ϵ_1，该场也会降低 $\mathcal{L}$，使 S_ϕ 略微减小。因此，这两项都会作用于类似于限制在特定轨道或轨道组合中的塞曼场的热相位。平均场之外的关联效应，例如库仑阻塞或近藤效应，无法通过这种处理加以描述。

[1] S. Krinner, S. Storz, P. Kurpiers, P. Magnard, J. Heinsoo, R. Keller, J. Lütolf, C. Eichler, and A. Wallraff，面向百量子比特规模超导电路系统的低温装置设计，EPJ Quantum Technol. **6**, 2 (2019)。[2] J. P. Pekola and B. Karimi，专题综述：凝聚态物质系统中的量子热输运，Rev. Mod.Phys. **93**, 041001 (2021)。[3] F. Giazotto, T. T. Heikkilä, A. Luukanen, A. M. Savin, and J. P. Pekola，介观物理在测温与制冷中的机遇：物理学与应用，Rev.Mod. Phys. **78**, 217 (2006)。[4] S. Gasparinetti, K. L. Viisanen, O.-P. Saira, T. Faivre, M. Arzeo, M. Meschke, and J. P. Pekola，用于超灵敏量热探测的快速电子测温，Phys. Rev. Appl. **3**, 014007 (2015)。[5] O.-P. Saira, M. Zgirski, K. L. Viisanen, D. S. Golubev, and J. P. Pekola，利用与谐振器耦合的约瑟夫森结进行色散测温，Phys. Rev. Appl. **6**, 024005 (2016)。

[6] M. Zgirski、M. Foltyn、A. Savin、K. Norowski、M. Meschke 和 J. P. Pekola，使用约瑟夫森结进行纳秒级测温，Phys. Rev. Appl. **10**，044068（2018）。[7] P. Machon、M. Eschrig 和 W. Belzig，三端邻近耦合超导体-铁磁体器件中的非局域热电效应和非局域昂萨格关系，Phys. Rev.Lett. **110**，047002（2013）。[8] A. Ozaeta、P. Virtanen、F. S. Bergeret 和 T. T. Heikkilä，在自旋劈裂磁场存在时铁磁体-超导体结中预测的超大热电效应，Phys. Rev.Lett.**112**，057001（2014）。[9] J. Linder 和 M. E. Bathen，超导体中的自旋热电子学：增强的热电效应、广义昂萨格响应矩阵和热自旋流，Phys. Rev. B **93**，224509（2016）。[10] S. Kolenda、M. J. Wolf 和 D. Beckmann，高场超导体-铁磁体隧道结中热电流的观测，Phys. Rev. Lett. **116**，

097001（2016）。[11] F. S. Bergeret、M. Silaev、P. Virtanen 和 T. T. Heikkilä，综述：具有自旋劈裂场的超导体中的非平衡效应，Rev. Mod. Phys. 90，041001（2018）。[12] T. T. Heikkilä、M. Silaev、P. Virtanen 和 F. S. Bergeret，超导体/铁磁绝缘体结构中的热输运、电输运和自旋输运，Prog. Surf. Sci. 94，100540（2019）。[13] C. I. L. de Araujo、P. Virtanen、M. Spies、C. González-Orellana、S. Kerschbaumer、M. Ilyn、C. Rogero、T. T. Heikkilä、F. Giazotto 和 E. Strambini，超导自旋电子学热机，Nat. Commun. 15，4823（2024）。[14] P. Tuero、J. B. Tjernshaugen、C. Sanchez、C. Gonzalez-Ruano、Y. Lu、J. Linder 和 F. G. Aliev，采用商业可得材料的超导自旋阀中的大型可调谐热电效应，PRX Energy 4，033003（2025）。[15] S.-Y. Hwang、R. Lopez 和 D. Sanchez，正常金属-超导体量子点中的交叉热电耦合，Phys. Rev. B 91，104518（2015）。[16] Y. Kleeorin、Y. Meir、F. Giazotto 和 Y. Dubi，超导体–量子点–超导体约瑟夫森结中的大型可调谐热相位，Sci. Rep. 6，35116（2016）。[17] M. Kamp 和 B. Sothmann，超导体-量子点杂化结构中的相位依赖的热输运和电荷输运，Phys. Rev. B 99，045428（2019）。[18] M. S. Kalenkov、A. D. Zaikin 和 L. S. Kuzmin，掺有磁性杂质的超导体中大型热电效应的理论，Phys. Rev. Lett. 109，147004（2012）。[19] M. E. Bathen 和 J. Linder，具有磁织构或自旋轨道耦合的超导杂化系统中的自旋塞贝克效应和热电现象，Sci. Rep. 7，41409（2017）。[20] A. Fornieri 和 F. Giazotto，迈向超导电路中的相干相位热电子学，Nat. Nanotechnol. 12，944（2017）。[21] F. Giazotto 和 M. J. Martínez-Pérez，约瑟夫森热干涉仪，Nature 492，401（2012）。[22] G. Marchegiani、A. Braggio 和 F. Giazotto，约瑟夫森结中的相位可调谐热电效应，Phys. Rev. Res. 2，043091（2020）。[23] G. Germanese、F. Paolucci、G. Marchegiani、A. Braggio 和 F. Giazotto，双极性热电约瑟夫森热机，Nat. Nanotechnol. 17，1084（2022）。[24] V. L. Ginzburg，超导态中的热电效应，Sov. Phys. Uspekhi 34，101（1991）。[25] G. D. Guttman、B. Nathanson、E. Ben-Jacob 和 D. J. Bergman，约瑟夫森结中的热电效应和热相位效应，Phys. Rev. B 55，12691（1997）。[26] F. Giazotto、T. T. Heikkilä 和 F. S. Bergeret，铁磁约瑟夫森结中的超大热相位，Phys. Rev. Lett. 114，067001（2015）。[27] Y.-J. Doh、J. A. van Dam、A. L. Roest、E. P. A. M. Bakkers、L. P. Kouwenhoven 和 S. De Franceschi，半导体纳米线中的可调谐超电流，Science 309，272（2005）。[28] P. Jarillo-Herrero、J. A. van Dam 和 L. P. Kouwenhoven，碳纳米管中的量子超电流晶体管，Nature 439，953（2006）。[29] S. De Franceschi

，L. Kouwenhoven ，C. Schönenberger ，

和 W. Wernsdorfer，《混合超导体–量子点器件》，《自然·纳米技术》5, 703 (2010)。[30] B. Kumar、S. Verma 和 Ajay，《T形双量子点约瑟夫森结中的相位与热驱动输运》，《超导与新型磁性》36, 831 (2023)。[31] B. Kumar、S. Verma 和 Ajay，《相互作用T形双量子点系统中的约瑟夫森效应与热相位效应》，《物理学E：低维系统与纳米结构》166, 116142 (2025)。[32] C. Fasth、A. Fuhrer、L. Samuelson、V. N. Golovach 和 D. Loss，《双电子InAs纳米线量子点中自旋轨道相互作用的直接测量》，Phys. Rev. Lett. 98, 266801 (2007)。[33] S. Nadj-Perge、S. M. Frolov、E. P. A. M. Bakkers 和 L. P. Kouwenhoven，《半导体纳米线中的自旋轨道量子比特》，《自然》468, 1084 (2010)。[34] L. Han、M. Chan、D. de Jong、C. Prosko、G. Badawy、S. Gazibegovic、E. P. A. M. Bakkers、L. P. Kouwenhoven、F. K. Malinowski 和 W. Pfaff，《通过色散栅极传感表征InSb双量子点中可变且依赖轨道的自旋轨道场方向》，Phys. Rev. Appl. 19, 014063 (2023)。[35] S. Csonka、L. Hofstetter、F. Freitag、S. Oberholzer、C. Schönenberger、T. S. Jespersen、M. Aagesen 和 J. Nygård，《InAs纳米线量子点中g因子的巨大涨落与栅极控制》，《纳米快报》8, 3932 2008( )。[36] H. A. Nilsson、P. Caroff、C. Thelander、M. Larsson、J. B. Wagner、L.-E. Wernersson、L. Samuelson 和 H. Q. Xu，《InSb纳米线量子点中巨大且依赖能级的g因子》，《纳米快报》9, 3151 (2009)。[37] J. Mu、S. Huang、J.-Y. Wang、G.-Y. Huang、X. Wang 和 H. Q. Xu，《InSb纳米线量子点中电子各向异性g因子的测量》，Nanotechnol- ogy 32, 020002 (2020)。[38] L. Dell'Anna、A. Zazunov、R. Egger 和 T. Martin，《具有自旋轨道耦合的量子点中的约瑟夫森电流》，《物理评论B》75, 085305 (2007)。[39] A. Zazunov、R. Egger、T. Jonckheere 和 T. Martin，《自旋轨道耦合量子点中的反常约瑟夫森电流》，Phys. Rev. Lett. 103, 147004 (2009)。[40] J. S. Lim、R. López 和 R. Aguado，《自旋轨道相互作用碳纳米管中的约瑟夫森电流》，Phys. Rev. Lett. 107, 196801 (2011)。[41] A. Brunetti、A. Zazunov、A. Kundu 和 R. Egger，《反常约瑟夫森电流、初现的时间反演对称性破缺以及相互作用多能级量子点中的马约拉纳束缚态》，《物理评论B》88, 144515 (2013)。[42] T. Yokoyama、M. Eto 和 Y. V. Nazarov，《半导体纳米线中由自旋轨道相互作用和塞曼效应引起的反常约瑟夫森效应》，《物理评论B》89, 195407 (2014)。[43] E. J. H. Lee、X. Jiang、M. Houzet、R. Aguado、C. M. Lieber 和 S. De Franceschi，《混合超导体–半导体纳米结构中的自旋分辨安德烈夫能级与宇称交叉》，《自然·纳米技术》9, 79 (2014)。[44] D. Szombati、S. Nadj-Perge、D. Car、S. Plissard、E. Bakkers 和 L. Kouwenhoven，纳米线量子点中的约瑟夫森 φ_0结，《自然·物理》12, 568 (2016)。[45] A. M. Whiticar、A. Fornieri、A. Banerjee、A. C. C. Drach- mann

，S. Gronin ，G. C. Gardner ，T. Lindemann ，M. J.

Manfra 和 C. M. Marcus，安德烈夫量子点中由塞曼效应驱动的宇称跃迁，《物理评论B》103，245308（2021）。[46] A. Bargerbos、M. Pita-Vidal、R. Žitko、L. J. Splitthoff、L. Grünhaupt、J. J. Wesdorp、Y. Liu、L. P. Kouwenhoven、R. Aguado、C. K. Andersen、A. Kou 和 B. van Heck，具有超导引线的量子点中自旋分裂的安德烈夫能级的光谱学，Phys. Rev. Lett. 131，097001（2023）。[47] M. L. Della Rocca、M. Chauvin、B. Huard、H. Pothier、D. Esteve 和 C. Urbina，超导原子接触中电流-相位关系的测量，Phys. Rev. Lett. 99，127005（2007）。[48] E. M. Spanton、M. Deng、S. Vaitiek˙enas、P. Krogstrup、J. Nygård、C. M. Marcus 和 K. A. Moler，少模砷化铟纳米线约瑟夫森结的电流–相位关系，《自然·物理》13，1177（2017）。[49] F. Nichele、E. Portolés、A. Fornieri、A. M. Whiticar、A. C. C. Drachmann、S. Gronin、T. Wang、G. C. Gard-ner、C. Thomas、A. T. Hatke、M. J. Manfra 和 C. M. Marcus，关联安德烈夫束缚态与超电流的关系，Phys. Rev. Lett. 124，226801（2020）。[50] A. Assouline、C. Feuillet-Palma、N. Bergeal、T. Zhang、A. Mottaghizadeh、A. Zimmers、E. Lhuillier、M. Eddrie、P. Atkinson、M. Aprili 和 H. Aubin，Bi_2Se_3 约瑟夫森结中的自旋轨道耦合诱导相移，《自然·通讯》10，126（2019）。[51] W. Mayer、M. C. Dartiailh、J. Yuan、K. S. Wickramas- inghe、E. Rossi 和 J. Shabani，Al/InAs约瑟夫森结中的栅极控制反常相移，《自然·通讯》11，212（2020）。[52] E. Strambini、A. Iorio、O. Durante、R. Citro、C. Sanz-Fernández、C. Guarcello、I. V. Tokatly、A. Braggio、M. Rocci、N. Ligato、V. Zannier、L. Sorba、F. S. Berg-eret 和 F. Giazotto，约瑟夫森相位电池，《自然·纳米技术》15，656（2020）。[53] N. V. Zavaritskii，观察到热流在超导体中激发的超导电流，JETP Lett. 19，126（1974）。[54] D. J. Van Harlingen、D. F. Heidel 和 J. C. Garland，超导铟中热电效应的实验研究，《物理评论B》21，1842（1980）。[55] F. Giazotto、P. Solinas、A. Braggio 和 F. S. Bergeret，基于铁磁绝缘体的超导结作为灵敏电子温度计，Phys. Rev. Appl. 4，044016（2015）。[56] B. Karimi 和 J. P. Pekola，基于超导结零偏压反常的非侵入式温度计，用于超灵敏量热法，Phys. Rev. Appl. 10，054048（2018）。[57] R. Winkler，二维电子和空穴系统中的自旋轨道耦合效应，《现代物理学中的施普林格论丛》，第191卷（Springer，柏林、海德堡，2003）。[58] J. Danon 和 Yu. V. Nazarov，强自旋轨道耦合存在下的泡利自旋阻塞，《物理评论B》80，041301（2009）。[59] L. P. Kouwenhoven、D. G. Austing 和 S. Tarucha，少电子量子点，Rep. Prog. Phys. 64，701（2001）。[60] E. Vecino、A. Martín-Rodero 和 A. Levy Yeyati，穿过关联量子能级的约瑟夫森电流：安德烈夫态与 π 结行为，《物理评论B》68，035105（2003）。[61]T. Meng、S. Florens 和 P. Simon，《约瑟夫森量子点器件中安德烈夫束缚态的自洽描述》，《物理评论B》79，224521（2009）。[62] A. Martín-Rodero 和 A. Levy Yeyati，《超导量子点中的安德烈夫态：平均场与精确数值结果》，J. Phys. Condens. Matter 24，385303（2012）。[63] Q.-f. Sun、B.-g. Wang、J. Wang 和 T.-h. Lin，《介观混合多端共振隧穿系统中的电子输运》，《物理评论B》61，4754（2000）。[64] O. Mansikkamäki、F. Giazotto 和 A. Balatsky，《热电交流约瑟夫森效应》（2025），arXiv:2504.01884。[65] L. I. Glazman 和 K. A. Matveev，《隧道势垒中近藤杂质引起的共振约瑟夫森电流》，JETP Lett. 49，659（1989）。[66] B. I. Spivak 和 S. A. Kivelson，《负局域超流体密度：脏超导体与脏玻色液体的区别》，《物理评论B》43，3740（1991）。[67] Y. Zhu、Q.-f. Sun 和 T.-h. Lin，《超导体/量子点/超导体系统中的安德烈夫束缚态与 π-结转变》，J. Phys. Condens. Matter 13，8783（2001）。[68] J. A. van Dam、Y. V. Nazarov、E. P. A. M. Bakkers、S. De Franceschi 和 L. P. Kouwenhoven，《量子点中的超电流反转》，《自然》442，667（2006）。[69] J.-P. Cleuziou、W. Wernsdorfer、V. Bouchiat、T. Ondarçuhu 和 M. Monthioux，《碳纳米管超导量子干涉器件》，《自然·纳米技术》1，53（2006）。[70] H. I. Jørgensen、T. Novotný、K. Grove-Rasmussen、K. Flensberg 和 P. E. Lindelof，《设计型约瑟夫森量子点结中的临界电流0–π转变》，《纳米快报》7，2441（2007）。[71] A. Martín-Rodero 和 A. Levy Yeyati，《量子点中的约瑟夫森输运与安德烈夫输运》，Adv. Phys. 60，899（2011）。[72] A. Buzdin，《约瑟夫森 φ_0 结中磁性与超导电流的直接耦合》，Phys. Rev. Lett. 101，107005（2008）。[73] C. W. J. Beenakker，《介观约瑟夫森结中临界电流涨落的普适极限》，Phys. Rev. Lett. 67，3836（1991）。[74] A. A. Golubov、M. Yu. Kupriyanov 和 E. Il’ichev，《约瑟夫森结中的电流-相位关系》，Rev. Mod. Phys. 76，411（2004）。[75] A. I. Buzdin，《超导体-铁磁体异质结构中的邻近效应》，Rev. Mod. Phys. 77，935（2005）。[76] C. Padurariu 和 Yu. V. Nazarov，《超导自旋量子比特的理论方案》，《物理评论B》81，144519（2010）。[77] R. N. Jabdaraghi、D. S. Golubev、J. P. Pekola 和 J. T. Peltonen，《基于邻近约瑟夫森结的超导磁通传感器的噪声》，《科学报告》7，8011（2017）。[78] F. Jekat、B. Pestka、D. Car、S. Gazibegović、K. Flöhr、S. Heedt、J. Schubert、M. Liebmann、E. P. A. M. Bakkers、T. Schäpers 和 M. Morgenstern，《剥离六方氮化硼作为锑化铟纳米线量子点的栅介质：改善栅极迟滞与电荷噪声》，Appl. Phys. Lett. 116，253101（2020）。[79] N. W. Hendrickx、D. P. Franke、A. Sammak、M. Kouwenhoven

M. Virgilio、G. Capellini、G. Scappucci 和 M. Veldhorst，《平面锗中的栅控量子点与超导性》，《自然·通讯》**9**，2835（2018）。[80] J. Yoneda、K. Takeda、T. Otsuka、T. Nakajima、M. R. Delbecq、G. Allison、T. Honda、T. Kodera、S. Oda、Y. Hoshi、N. Usami、K. M. Itoh 和 S. Tarucha，《相干性受电荷噪声限制、保真度高于 99.9% 的量子点自旋量子比特》，《自然·纳米技术》**13**，102（2018）。[81] M. T. Björk、A. Fuhrer、A. E. Hansen、M. W. Larsson、L. E. Fröberg 和 L. Samuelson，《砷化铟纳米线量子点中可调的有效 g 因子》，《物理评论B》**72**，201307 2005(R)（）。[82] D. Vasyukov、Y. Anahory、L. Embon、D. Halbertal、J. Cuppens、L. Neeman、A. Finkler、Y. Segev、Y. Mya- soedov、M. L. Rappaport、M. E. Huber 和 E. Zeldov，《具有单电子自旋灵敏度的扫描型超导量子干涉器件》，《自然·纳米技术》**8**，639 2013（）。[83] M. Lodari、N. W. Hendrickx、W. I. L. Lawrie、T.-K. Hsiao、L. M. K. Vandersypen、A. Sammak、M. Veldhorst 和 G. Scappucci，《锗中空穴的低渗流密度与电荷噪声》，Mater. Quantum Tech- nol. **1**，011002（2021）。[84] B. Paquelet Wuetz、D. Degli Esposti、A.-M. J. Zwerver、S. V. Amitonov、M. Botifoll、J. Arbiol、A. Sammak、L. M. K. Vandersypen、M. Russ 和 G. Scappucci，《利用薄硅量子阱降低量子点中的电荷噪声》，《自然·通讯》**14**，1385（2023）。[85] G. Stefanucci 和 R. van Leeuwen，《量子系统的非平衡多体理论：现代导论》（剑桥大学出版社，剑桥，2013）。[86] H. Haug 和 A.-P. Jauho，《半导体输运与光学中的量子动力学》，施普林格固体科学系列，第123卷（施普林格出版社，柏林、海德堡，2008）。[87] D. C. Langreth，《线性与非线性响应理论及其应用》，载于《固体中的线性与非线性电子输运》，J. T. Devreese 和 V. E. van Doren 编（施普林格美国，波士顿，马萨诸塞州，1976），第3–32页。[88]

在零塞曼场下，非限制性哈特里–福克方法可能会得到一对简并的自旋极化解，它们通过时间反演彼此关联。这些解代表平均场层次上的局域磁矩形成，但若选取其中一个，就会赋予有限量子点永久的自旋极化。因此，我们通过纳入两个互为时间反演的解，恢复自旋偶观测量的对称性。相比之下，对于宏观铁磁体，两个扇区之间的反转时间实际上变得无限长，因此在实验时间尺度上会物理地实现单个对称性破缺态。