arXiv:2611.30323v1 [math.CV] 23 Nov 2026

H^p冠定理：具有C^2 边界的有界伪凸域

XU XING

摘要。对于 $0 < p \leq 2$，我们解决了具有 C^2 边界的有界伪凸域 Ω 上的 H^pCorona问题，得到界 $C_\Omega \delta^{-q-1}|\log\ \delta|$，其中 $q = \min\{n, m-1\}$，且 m是生成元的数量。即使在一个有界光滑伪凸域上，只要该域存在光滑多重次调和定义函数且只有一个弱伪凸边界点， p的取值范围仍是最佳的。

数学主题分类（2020）：32A35、32W05、32A10。关键词：
Corona问题、Hardy空间、 $\bar{\partial}$-方程。

1. 引言

Kakutani 在 1941 [11] 中从 Banach代数观点提出了 Corona问题。等价地，这个问题是：在单位圆盘上，联合模有正下界的有界全纯函数 $g_1, \ldots, g_m$，是否存在有界全纯函数 $h_1, \ldots, h_m$ 使得 $\sum_{j=1}^m g_j h_j = 1$。Carleson [8] 于 1962 年利用如今所称的 Carleson测度解决了这个问题。受 Hörmander 方法的启发，Wolff 给出了 Carleson 的 Corona定理的一个简化证明，使用了关于 $\bar{\partial}$-方程的边界 $\bar{L}^\infty$ 估计；参见 [11, p. 4]。Corona定理也适用于有限连通平面域以及某些无限连通域，包括 Denjoy域 [1, 14, 22]。然而，对于任意平面域，Corona问题仍未解决 [11]。相比之下，Cole 构造了一个 Corona定理不成立的开黎曼曲面 [13, 定理 4.2]。

设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为一个区域，且 $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ 是一个赋范函数空间或拟赋范函数空间。按照 [10], $\mathcal{F}$-Corona问题，问题在于：对于每个满足下列条件的 $g = (g_1, \ldots\ldots, g_m) \in H^\infty(\Omega)^m$

$$0 < \delta \leq |g| := \Big(\sum_{j=1}^m |g_j|^2\Big)^{1/2} \leq 1, \tag{1.1}$$

并且对于每个 $f \in \mathcal{F}$，都存在 $h := (h_1, \ldots\ldots, h_m) \in \mathcal{F}^m$使得

$$g \cdot h := \sum_{j=1}^m g_j h_j = f, \quad \max_{1 \leq j \leq m} \|h_j\|_{\mathcal{F}} \leq C(\delta)\|f\|_{\mathcal{F}}.$$

作者受到四川省自然科学基金（编号：2025ZNSFSC0796）和国家自然科学基金（编号：12401103）资助。

这里， $C(\delta)$ 也可能依赖于 Ω、 $\mathcal{F}$ 和 m，但不依赖于 g或 f。Varopoulos [23]在强拟凸域上得到了 BMOA-Corona定理，随后 Andersson–Carlsson [6]对其进行了发展。对于 $1 < p < \infty$， H^p-Corona定理已在单位球和强拟凸域上得到证明 [2, 5]。然而，即使在 $\mathbb{C}^n$、 $n \geq 2$中的单位球上， H^∞-Corona问题仍未解决。另一方面，Sibony [19] 和 Fornæss–Sibony [12]分别构造了 $\mathbb{C}^3$ 和 $\mathbb{C}^2$中的光滑有界拟凸域，在这些域上，H^∞-Corona定理不成立。 [12] 中的域除一个边界点外均为强伪凸。Andersson [3, 4] 证明了一个 H^2-Corona定理，该定理适用于具有多次调和定义函数的光滑有界伪凸域，并且当 $\delta > 0$较小时， $C(\delta) = C_\Omega \delta^{-q-1} |\log \delta|$，其中 $q = \min\{n, m-1\}$。这一结果在 [10]中推广到了 δ-正则域。 [9], 中引入的 δ-正则域这一类包括 D'Angelo有限型的光滑伪凸域，以及具有一个在边界上为多次调和的 C^2 定义函数的域。

我们建立如下 H^p-Corona定理。

定理 1.1. 设 $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ 是一个具有 C^2 边界的有界伪凸域，并设$0 < p \leq 2$。假设 g 满足(1.1)，其中 $0 < \delta \leq e^{-1}$。那么，对于每个 $f \in H^p(\Omega)$，存在 $h \in H^p(\Omega)^m$ 使得

$$g \cdot h = f, \quad \|h\|_{H^p} \leq C_\Omega \delta^{-q-1} |\log \delta| \, \|f\|_{H^p}, \tag{1.2}$$

其中 $q =$最小值$\{n, m-1\}$，且常数 C_Ω与 p、 m、 g、 f和 δ无关。

定理 1.1 中 p 的取值范围是尖锐的。在命题 4.1 中，我们构造了一个 $\mathbb{C}^3$中的有界光滑伪凸域，它具有光滑多重次调和定义函数，并存在三个满足 (1.1) 的有界全纯生成元；对于这些生成元， $g \cdot h = 1$ 对任意$p > 2$都没有 H^p 解。除一个无限型点外，其边界处处强伪凸。Fornæss–Sibony [12] 还表明，对于 $p > 2$，∂-的 L^p 估计在光滑有界拟凸域上可能失效。

接下来，我们采用 Hörmander 的 L^2 方法，运用 [15]，扭曲的 Morrey–Kohn–Hörmander 估计和 [18, 7]，Skoda 不等式 [20] 来证明主定理。关键在于引理 3.1，它通过法向积分分部控制不定的 Levi项，从而消除了δ-正则性假设。

2. 预备知识

在整篇论文中，我们记 $\partial_\nu = \partial/\partial z_\nu$、 $\partial_{\bar{\nu}} = \partial/\partial \bar{z}_\nu$、 $\Delta = 4\sum_{\nu=1}^n \partial_\nu \partial_{\bar{\nu}}$，并用$dV$表示欧几里得体积测度。记作 C_Ω 的常数可能因行而异，且仅依赖于 Ω； $a \lesssim b$ 表示 $a \leq C_\Omega b$，而 $a \asymp b$表示 $a \lesssim b$和 $b \lesssim a$同时成立。

设 $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ 是一个具有 C^2 边界的有界域。对于一个 C^2 定义函数 ρ 和充分小的 $t > 0$，令 $\Omega_t = \{z \in \Omega : \rho(z) < -t\}$.

2.1. Hardy空间。按照 [21, 第 I–II 章]，对于 $0 < p < \infty$ 定义

$$H^p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega) : \|f\|_{H^p}^p := \limsup_{t \downarrow 0} \int_{\partial\Omega_t} |f|^p \, d\sigma_t < \infty \right\},$$

$$H^\infty(\Omega)=\left\{f\in\mathcal{O}(\Omega):\|f\|_{H^\infty}:=\sup_{z\in\Omega}|f(z)|<\infty\right\}.$$

对于 $f=(f_1,\ \ldots\ldots,\ f_m)\in\mathcal{O}(\Omega)^m$，记作 $|f|^2=\sum_{j=1}^m|f_j|^2$，并令

$$\|f\|_{H^p}^p:=\limsup_{t\downarrow0}\int_{\partial\Omega_t}|f|^p\,d\sigma_t.$$

对于 $0<p<1$，$\|\cdot\|_{H^p}$ 是一个拟范数。

引理 2.1（参见 [21, 第一章，§4], 另见 [9]）。设 $p>0$ 且 $h\in\mathcal{O}(\Omega)^m$。假设$|\nabla\rho|=1$在 ∂附近成立Ω。那么

$$\lim_{r\uparrow1}(1-r)\int_\Omega|h|^p(-\rho)^{-r}\,dV=\lim_{t\downarrow0}\int_{\partial\Omega_t}|h|^p\,d\sigma_t\ \in[0,\infty]. \tag{2.1}$$

如果 $0<r_j\uparrow1$且 $h_j\in\mathcal{O}(\Omega)^m$ 满足

$$\liminf_{j\to\infty}(1-r_j)\int_\Omega|h_j|^p(-\rho)^{-r_j}\,dV=c_0<\infty,$$

那么存在一个子列局部一致收敛到 $h\in H^p(\Omega)^m$，且 $\|h\|_{H^p}^p\le c_0$。

证明。对于 $\alpha\ge0$，令 $u_\alpha=(|h|^2+\alpha)^{p/2}$，$m_\alpha(t)=\int_{\partial\Omega_t}u_\alpha\,d\sigma_t$。对于 $\alpha>0$，由于 $\Delta u_\alpha\ge0$，由散度定理和 $|\nabla\rho|=1$ 可得，对充分小的 $t,\ s>0$,

$$\begin{aligned}m_\alpha(t+s)-m_\alpha(t)&=\int_{\{t<-\rho<t+s\}}\operatorname{div}(u_\alpha\nabla(-\rho))\,dV\\&=\int_t^{t+s}\int_{\partial\Omega_x}\big(\nabla u_\alpha\cdot\nabla(-\rho)+u_\alpha\Delta(-\rho)\big)\,d\sigma_x\,dx.\end{aligned}$$

由于 Ω_t 的外单位法向量为 $\nabla\rho$，由格林公式可得

$$m_\alpha'(t)=-\int_{\Omega_t}\Delta u_\alpha\,dV+\int_{\partial\Omega_t}u_\alpha\Delta(-\rho)\,d\sigma_t\le C_\Omega m_\alpha(t).$$

因此,

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-C_\Omega t}m_\alpha(t)\big)\le0.$$

从 om t_1 到 t_2积分，其中 $0<t_1<t_2$ 足够小，并令 $\alpha\downarrow0$，我们得到

$$m_0(t_2)\le e^{C_\Omega(t_2-t_1)}m_0(t_1),\quad m_0(t)=\int_{\partial\Omega_t}|h|^p\,d\sigma_t. \tag{2.2}$$

根据余面积公式，对于充分小的固定 $t_0>0$,

$$(1-r)\int_\Omega|h|^p(-\rho)^{-r}\,dV=(1-r)\int_0^{t_0}x^{-r}m_0(x)\,dx+o(1)\quad(r\uparrow1).$$

由于 (2.2) 蕴含 $\lim_{t\downarrow 0} m_0(t) \in [0,\infty]$ 存在，并且

$$(1-r)\int_0^{t_0} x^{-r}\,dx = t_0^{1-r} \longrightarrow 1,$$

阿贝尔极限给出（2.1）。最后，取一个子列，使得

$$A_j := (1-r_j)\int_\Omega |h_j|^p(-\rho)^{-r_j}\,dV \longrightarrow c_0.$$

由（2.2）可知，我们有 $m_{0,\,j}(x) \geq e^{-C_\Omega t} m_{0,\,j}(t)$，其中 $m_{0,\,j}(t) = \int_{\partial\Omega_t} |h_j|^p\,d\sigma_t$。因此对于 $0<x<t$,

$$A_j \geq (1-r_j)\int_0^t x^{-r_j} m_{0,j}(x)\,dx \geq e^{-C_\Omega t} t^{1-r_j} m_{0,j}(t).$$

对于每个固定的充分小的 $t>0$, $m_{0,\,j}(t)$ 一致有界。次调和估计和蒙特尔定理给出了一个局部一致收敛的子列，其极限为 $h \in \mathcal{O}(\Omega)^m$。由法图引理得到 $m_0(t) \leq e^{C_\Omega t} c_0$；令 $t\downarrow 0$即可证明 $\|h\|_{H^p}^p \leq c_0$。 □

2.2. **Carleson 型不等式**。 根据 [10, 引理 2.1–2.2], ，我们记录如下估计。

引理2.2。 设 $u \in C^2(\Omega)$ 为正函数，且 $\log u$ 是次调和的，并设 $\psi \in C^2(\Omega)$ 有界且次调和。当 $t>0$ 充分小时，

$$\int_{\Omega_t} (-\rho - t)\Delta u\,dV \leq C_\Omega \int_{\partial\Omega_t} u\,d\sigma_t, \tag{2.3}$$

$$\int_{\Omega_t} (-\rho - t)u\big(\|\psi\|_\infty \Delta\psi + |\partial\psi|^2\big)\,dV \leq C_\Omega \|\psi\|_\infty^2 \int_{\partial\Omega_t} u\,d\sigma_t. \tag{2.4}$$

该常数与 u、 ψ 和 t无关。

证明。 根据 [10, 引理2.1], 的构造，取一个负的 C^2 定义函数 ϱ ，使得$\Delta\varrho \geq c_\Omega > 0$ 在 Ω 上成立，并且在 $\partial\Omega$ 附近 $\varrho = \rho + B\rho^2$ ，其中 $B>0$为某个固定值。令 $\varrho_t = \varrho + t - Bt^2$。对于任意非负次调和函数 $\varphi \in C^2(\Omega)$，由格林公式可得

$$\int_{\Omega_t} (-\varrho_t)\Delta\varphi\,dV + \int_{\Omega_t} \varphi\Delta\varrho\,dV = \int_{\partial\Omega_t} \varphi\,\partial_{\mathbf{n}}\varrho_t\,d\sigma_t.$$

由于 $-\varrho_t \asymp -\rho - t$ 在 Ω 上$_t$ 且 $\Delta\varrho \geq c_\Omega > 0$，我们有

$$\int_{\Omega_t} \varphi\,dV + \int_{\Omega_t} (-\rho - t)\Delta\varphi\,dV \leq C_\Omega \int_{\partial\Omega_t} \varphi\,d\sigma_t.$$

取 $\varphi = u$即可证明（2.3）。对于 $M = \|\psi\|_\infty > 0$, 令 $s = (\psi + M)/(2M)$。由于 $\log\ u$是次调和的，且 $0 \leq s \leq 1$, 将同一个不等式应用于 ue^s 和 ue^{s^2} 可得（2.4）。$\|\psi\|_\infty = 0$的情形是显然的。 □

2.3. 基本 ∂ 估计。按照 [16, 18, 10], ，令 $v=\sum_{\nu=1}^n v_\nu\,d\bar z_\nu$ 和 $\omega=\sum_{\nu=1}^n \omega_\nu\,d\bar z_\nu$ 为$\mathbb{C}^m$值的（0，1）形式，其中 $v_\nu=(v_{\nu,\,1},\ \ldots\ldots,\ v_{\nu,\,m})$ 以及 $\omega_\nu=(\omega_{\nu,\,1},\ \ldots\ldots,\ \omega_{\nu,\,m})$。对于一个 $\mathbb{C}^m$值函数 $g=(g_1,\ \ldots\ldots,\ g_m)$ 和一个函数 ψ，我们使用

$$\langle v,\omega\rangle=\sum_{\nu=1}^n\sum_{\mu=1}^m v_{\nu,\mu}\overline{\omega_{\nu,\mu}},\quad \partial\psi\lrcorner\,\omega=\sum_{\nu=1}^n(\partial_\nu\psi)\omega_\nu\in\mathbb{C}^m,\quad \partial g\lrcorner\,\omega=\sum_{\nu=1}^n\sum_{\mu=1}^m(\partial_\nu g_\mu)\omega_{\nu,\mu}\in\mathbb{C}.$$

对于实的 $(1,1)$-形式 $\Theta=i\sum_{\mu,\nu}\Theta_{\mu\bar\nu}dz_\mu\wedge d\bar z_\nu$，记

$$\langle[\Theta,\Lambda]\omega,\omega\rangle:=\sum_{\mu,\nu=1}^n\Theta_{\mu\bar\nu}\langle\omega_\mu,\omega_\nu\rangle,\quad \langle[\Theta,\Lambda]^{-1}v,v\rangle:=\sup_{\langle[\Theta,\Lambda]\omega,\omega\rangle\le1}|\langle v,\omega\rangle|^2.$$

当 $\Theta\ge0$ 时，逆形式有定义。我们还记

$$|\bar\nabla\omega|^2=\sum_{\mu,\nu}|\partial_{\bar\nu}\omega_\mu|^2.$$

设 $D\Subset\Omega$ 是一个具有 C^2 边界且定义函数为 ρ_D的伪凸域。对于$\varphi\in C^2(D)$ 和 $\eta>0$，令

$$(v,\omega)_\varphi=\int_D\langle v,\omega\rangle e^{-\varphi}\,dV,\quad \|\omega\|^2_{\eta,\varphi}=\int_D\eta|\omega|^2e^{-\varphi}\,dV.$$

设 T和 S是由 ∂诱导的闭稠定算子，

$$T:L^2(D,e^{-\varphi})^m\longrightarrow L^2_{(0,1)}(D,e^{-\varphi})^m,\quad S:L^2_{(0,1)}(D,e^{-\varphi})^m\longrightarrow L^2_{(0,2)}(D,e^{-\varphi})^m.$$

设 T^*_φ表示 T的加权伴随算子。对于光滑的 $(0,1)$-形式 $\omega\in\mathrm{Dom}\ T^*_\varphi$，

$$T^*_\varphi\omega=-\sum_{\nu=1}^n(\partial_\nu-\varphi_\nu)\omega_\nu.$$

假设 $g\in\mathcal{O}(\Omega)^m$ 满足 (1.1)。定义

$$\mathcal{H}_j=\{\omega\in L^2_{(0,j)}(D,e^{-\varphi})^m:g\cdot\omega=0\},\quad j=0,1,2,$$

其中 $T_{\mathcal{H}}=\overline{\partial}:\ \mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_1$, $S_{\mathcal{H}}=\overline{\partial}:\ \mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$。令

$$\mathcal{D}_1(D)=\left\{\omega\in C^1_{(0,1)}(\overline{D})^m:g\cdot\omega=0,\ \partial\rho_D\lrcorner\,\omega=0\text{ on }\partial D\right\}.$$

记 $\mathcal{G}_\varphi:=\mathrm{Dom}\,T^*_{\mathcal{H},\,\varphi}\cap\mathrm{Dom}\ S_{\mathcal{H}}$. 对于 $\omega\in\mathcal{H}_1$，令

$$\Phi_g\omega:=\frac{\bar g}{|g|^2}(\partial g\lrcorner\,\omega).\tag{2.5}$$

根据 [18] 和 [10, 引理 4.1–4.2], ，对于 $\omega\in\mathcal{D}_1(D)$，有

$$T^*_{\mathcal{H},\varphi}\omega=T^*_\varphi\omega-\Phi_g\omega,\quad \langle T^*_{\mathcal{H},\varphi}\omega,\Phi_g\omega\rangle=0.$$

此外， $\mathcal{D}_1(D)$ 在图范数下稠密于 $\mathcal{G}_\varphi$。

Lem引理 2.3 ([10, (4.4)])。 对于 $0<r<1$，令 $\eta=(-\rho)^r$。那么对于每个 $\omega\in\mathcal{D}_1(D)$，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-r}\|T^*_{\mathcal{H},\varphi}\omega\|^2_{\eta,\varphi}+\|S_{\mathcal{H}}\omega\|^2_{\eta,\varphi}+\|\Phi_g\omega\|^2_{\eta,\varphi}\\ &\geq\int_D\eta\big(\langle[i\partial\bar\partial\varphi,\Lambda]\omega,\omega\rangle+|\bar\nabla\omega|^2\big)e^{-\varphi}\,dV+r\int_D(-\rho)^{r-1}\langle[i\partial\bar\partial\rho,\Lambda]\omega,\omega\rangle e^{-\varphi}\,dV.\end{aligned}\tag{2.6}$$

这个扭曲的 Morrey–Kohn–Hörmander 不等式的证明受到 Ohsawa [18] 和 Berndtsson [7]的扭曲估计的启发。

3. 定理 1.1 的证明

从现在起，假设 Ω 是伪凸的。令 $d(z)=\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ 在 Ω 中。取 $A>0$，其值将在下文固定，并令 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ 充分小。设 $U=\{z\in\Omega:\,0<d(z)<\varepsilon_2\}$且$V=\{z\in\Omega:\,0<d(z)<\varepsilon_1\}$，使得

$$d\in C^2(U),\quad |\nabla d|=1,\quad |\nabla^2 d|\leq C_\Omega,\quad 1+2Ad>0\quad\text{on } U.$$

取 Ω 的一个定义函数 $\rho\in C^2(\Omega)$满足 $-\rho\asymp d$ 且

$$\rho=-d-Ad^2\quad\text{on } U.\tag{3.1}$$

固定 $0<\varepsilon_0<\varepsilon_1$，使得 $\varepsilon_0+A\varepsilon_0^2<\min_{\{d\geq\varepsilon_2\}}(-\rho)$。对于 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，函数 $\rho_\varepsilon:=\rho+\varepsilon+A\varepsilon^2$ 定义了 Ω_ε，因为在 U 上，$\rho_\varepsilon=-(d-\varepsilon)(1+A(d+\varepsilon))$。由冈氏引理，$\Omega_\varepsilon$ 是具有 C^2 边界的伪凸域。

取 $\vartheta\in C^\infty(\Omega)$使得 $0\leq\vartheta\leq1,\vartheta=1$ 在 V 上，且 $\vartheta=0$ 在 $\{d\geq\varepsilon_2\}$ 上。对于一个取值于 $\mathbb{C}^m$ 的 (0,1)-形式 ω，在 U 上定义

$$L=\sum_{\lambda=1}^n L_\lambda\partial_\lambda:=\frac{\vartheta}{|\partial\rho|^2}\sum_{\lambda=1}^n\rho_{\bar\lambda}\partial_\lambda,\quad b=-\bar L(\partial\rho)\lrcorner\,\omega=-\frac{\vartheta}{|\partial\rho|^2}\left(\sum_{\lambda=1}^n\rho_\lambda\partial\rho_{\bar\lambda}\right)\lrcorner\,\omega.\tag{3.2}$$

令 $L=b=0$ 在 Ω 上满足 $\setminus U$。则 $L\in C^1$, $|b|\leq C_\Omega|\omega|$，且 $L\rho=\vartheta$ 在 Ω 上。

引理 3.1. 对于充分大的 $A=A(\Omega)>0$，每个取值于 $\mathbb{C}^m$ 的 $(0,1)$-形式 ω 在 Ω 上满足

$$\langle[i\partial\bar\partial\rho,\Lambda]\omega,\omega\rangle\geq2\,\mathrm{Re}\langle\partial(-\rho)\lrcorner\,\omega,b\rangle-C_\Omega(-\rho)|\omega|^2.\tag{3.3}$$

对于每个 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，实值的 $\eta,\varphi\in C^2(\Omega_\varepsilon)$ 且满足 $\eta>0$，以及 $\omega\in\mathcal{D}_1(\Omega_\varepsilon)$，

$$2\,\mathrm{Re}\int_{\Omega_\varepsilon}\langle\partial\eta\lrcorner\,\omega,b\rangle e^{-\varphi}\,dV\geq-\|T^*_{\mathcal{H},\varphi}\omega\|^2_{\eta,\varphi}-\tfrac12\|\bar\nabla\omega\|^2_{\eta,\varphi}-C_0\|\omega\|^2_{\eta,\varphi}.\tag{3.4}$$

常数 $C_0=C_0(\Omega)$ 与 $\eta,\varphi,\varepsilon,g,m$ 无关。

证明。 由冈氏引理可知，在 $U\cap\ker\partial\rho$ 上，

$$i\partial\bar\partial\rho=d(1+2Ad)\,i\partial\bar\partial(-\log d)\geq0.$$

此外，当 $\vartheta = 1$时，

$$\sum_{\mu,\nu} \rho_{\mu\bar{\nu}} L_\mu \overline{L_\nu} = -\frac{1}{1+2Ad} \sum_{\mu,\nu} d_{\mu\bar{\nu}} \frac{d_{\bar{\mu}} d_\nu}{|\partial d|^4} - \frac{2A}{(1+2Ad)^2} \leq 0$$

当 A 足够大且 U 足够小时。

在 V上， $L\rho = 1$。因此， $\omega_\mu^\top = \omega_\mu + L_\mu(\partial(-\rho) \lrcorner \omega)$ 满足 $\partial\rho \lrcorner \omega^\top = 0$，并且

$$\begin{aligned}\langle [i\partial\bar{\partial}\rho, \Lambda]\omega, \omega\rangle &= \langle [i\partial\bar{\partial}\rho, \Lambda]\omega^\top, \omega^\top\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle \partial(-\rho) \lrcorner \omega, b\rangle - \left(\sum_{\mu,\nu} \rho_{\mu\bar{\nu}} L_\mu \overline{L_\nu}\right) |\partial\rho \lrcorner \omega|^2 \\ &\geq 2\,\mathrm{Re}\langle \partial(-\rho) \lrcorner \omega, b\rangle.\end{aligned}$$

在 $\Omega \setminus V$ 上，我们有 $-\rho \geq c_\Omega > 0$。由于 $|\partial\rho| + |\partial\partial\rho| \leq C_\Omega$ 且 $|b| \leq C_\Omega|\omega|$,

$$\langle [i\partial\bar{\partial}\rho, \Lambda]\omega, \omega\rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle \partial(-\rho) \lrcorner \omega, b\rangle \geq -C_\Omega|\omega|^2 \geq -C_\Omega(-\rho)|\omega|^2.$$

这就证明了 (3.3)。

记 x_1，……， x_{2n} 为实坐标。先对 $|\nabla d|^2 = 1$ 关于 z_μ 求导，再关于 $\bar{z}_\nu$求导，得到其分布意义下的表达式:

$$\sum_{j=1}^{2n} d_{x_j} d_{\mu x_j} = 0, \quad (\nabla d \cdot \nabla) d_{\mu\bar{\nu}} = -\sum_{j=1}^{2n} d_{\mu x_j} d_{\bar{\nu} x_j}.$$

由于 $\rho_{\mu\bar{\nu}} = -(1+2Ad)d_{\mu\bar{\nu}} - 2Ad_\mu d_{\bar{\nu}}$ 和 $L + \bar{L} = -2\vartheta(1+2Ad)^{-1}\nabla d \cdot \nabla$,

$$(L+\bar{L})\rho_{\mu\bar{\nu}} = \frac{4A\vartheta}{1+2Ad} d_{\mu\bar{\nu}} - 2\vartheta \sum_{j=1}^{2n} d_{\mu x_j} d_{\bar{\nu} x_j}, \quad \|(L+\bar{L})\rho_{\mu\bar{\nu}}\|_\infty \leq C_\Omega.$$

分布恒等式 $\partial_\mu \rho_{\lambda\bar{\nu}} = \partial_\lambda \rho_{\mu\bar{\nu}}$ 表明，对 λ 求和可得,

$$\partial_\mu(L_\lambda \rho_{\lambda\bar{\nu}}) = (\partial_\mu L_\lambda)\rho_{\lambda\bar{\nu}} + L_\lambda \partial_\lambda \rho_{\mu\bar{\nu}}.$$

对于 $\omega \in \mathcal{D}_1(\Omega_\varepsilon)$，取厄米部分可得

$$\mathrm{Re} \sum_{\mu,\nu,\lambda} \partial_\mu(L_\lambda \rho_{\lambda\bar{\nu}}) \langle \omega_\mu, \omega_\nu\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} ((L+\bar{L})\rho_{\mu\bar{\nu}}) \langle \omega_\mu, \omega_\nu\rangle + O_\Omega(|\omega|^2). \tag{3.5}$$

因此，这些系数导数的厄米部分可表示为一个有界连续矩阵。固定 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$，并取一个标准实值磨光函数 ζ_s，其支集包含于 $\{|x| < s\}$，其中$0 < s < \varepsilon/2$。由于 $\mathrm{dist}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) = \varepsilon$，以下所有卷积在 Ω_ε 上均有定义。令

$$b_s = -\left[\left(\frac{\vartheta}{|\partial\rho|^2} \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \partial\rho_{\bar{\lambda}}\right) * \zeta_s\right] \lrcorner \omega.$$

于是 $g\cdot b_s=0$。由 (3.5)，b_s 在 Ω_ε 上一致收敛，且其界与 s 和ε 无关。由于 $\partial\rho_\varepsilon\lrcorner\omega=0$ 在 $\partial\Omega_\varepsilon$ 上成立，令 $s\downarrow 0$ 并使用 (3.5)，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\int_{\Omega_\varepsilon}\langle\partial\eta\lrcorner\omega,b\rangle e^{-\varphi}\,dV=\mathrm{Re}\int_{\Omega_\varepsilon}\eta\Big(\langle T^*_{\mathcal{H},\varphi}\omega,b\rangle+\sum_{\mu,\nu,\lambda}L_\lambda\rho_{\lambda\bar\nu}\langle\omega_\mu,\partial_{\bar\mu}\omega_\nu\rangle\Big)e^{-\varphi}\,dV\\+\frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon}\eta\sum_{\mu,\nu}((L+\bar L)\rho_{\mu\bar\nu})\langle\omega_\mu,\omega_\nu\rangle e^{-\varphi}\,dV+O_\Omega(\|\omega\|^2_{\eta,\varphi}).\end{aligned}$$

由于 $|b|\le C_\Omega|\omega|$ 和 $\|(L+\bar L)\rho_{\mu\bar\nu}\|_\infty\le C_\Omega$，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\left|2\,\mathrm{Re}\int_{\Omega_\varepsilon}\langle\partial\eta\lrcorner\omega,b\rangle e^{-\varphi}\,dV\right|\le 2C_1\|\omega\|_{\eta,\varphi}\big(\|T^*_{\mathcal{H},\varphi}\omega\|_{\eta,\varphi}+\|\bar\nabla\omega\|_{\eta,\varphi}+\|\omega\|_{\eta,\varphi}\big).$$

由杨氏不等式 $2ab\le\tau a^2+\tau^{-1}b^2$ 可得

$$\begin{aligned}2C_1\|\omega\|_{\eta,\varphi}\|T^*_{\mathcal{H},\varphi}\omega\|_{\eta,\varphi}&\le\|T^*_{\mathcal{H},\varphi}\omega\|^2_{\eta,\varphi}+C_1^2\|\omega\|^2_{\eta,\varphi},\\2C_1\|\omega\|_{\eta,\varphi}\|\bar\nabla\omega\|_{\eta,\varphi}&\le\tfrac12\|\bar\nabla\omega\|^2_{\eta,\varphi}+2C_1^2\|\omega\|^2_{\eta,\varphi}.\end{aligned}$$

因此，(3.4) 在 $C_0=3C_1^2+2C_1$ 时成立。 □

命题 3.2。存在 $C_\Omega>0$，使得对于 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，任意实数 $\varphi\in C^2(\Omega_\varepsilon)$、$0\le r<1$ 和 $\omega\in\mathcal{D}_1(\Omega_\varepsilon)$，满足 $\eta=(-\rho)^r$，

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_\varepsilon}\eta\left(\langle[i\partial\bar\partial\varphi,\Lambda]\omega,\omega\rangle-|\Phi_g\omega|^2-C_\Omega|\omega|^2+\tfrac12|\bar\nabla\omega|^2\right)e^{-\varphi}\,dV\\&\le\frac{2-r}{1-r}\|T^*_{\mathcal{H},\varphi}\omega\|^2_{\eta,\varphi}+\|S_{\mathcal{H}}\omega\|^2_{\eta,\varphi}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

该估计可推广至 $\mathcal{G}_\varphi$。

证明。首先假设 $0<r<1$。由于 $\partial\eta=r(-\rho)^{r-1}\partial(-\rho)$，由 (3.3) 和 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}r\int_{\Omega_\varepsilon}(-\rho)^{r-1}\langle[i\partial\bar\partial\rho,\Lambda]\omega,\omega\rangle e^{-\varphi}\,dV&\ge 2\,\mathrm{Re}\int_{\Omega_\varepsilon}\langle\partial\eta\lrcorner\omega,b\rangle e^{-\varphi}\,dV-C_\Omega\|\omega\|^2_{\eta,\varphi}\\&\ge-\|T^*_{\mathcal{H},\varphi}\omega\|^2_{\eta,\varphi}-\tfrac12\|\bar\nabla\omega\|^2_{\eta,\varphi}-C_\Omega\|\omega\|^2_{\eta,\varphi}.\end{aligned}$$

于是 (2.6) 得到 (3.6)。对于 $r=0$，取 $r\downarrow 0$，由 (2.6) 即可得出该结论。通过图范数逼近以及 $\nabla\omega$ 的弱下半连续性，可将结论推广到 $\mathcal{G}_\varphi$。 □

引理 3.3（Skoda 不等式 [10, 引理 4.3]）。对于任意 $\mathbb{C}^m$值 (0，1)张量 ω，

$$|g|^2\left|\left\langle\bar\partial\left(\frac{\bar g}{|g|^2}\right),\omega\right\rangle\right|^2\le q\langle[\Theta_g,\Lambda]\omega,\omega\rangle,\tag{3.7}$$

其中 $\Theta_g=i\partial\bar\partial$对数 $|g|^2$。因此，对于 $f\in\mathcal{O}(\Omega)$，

$$\left\langle[\Theta_g,\Lambda]^{-1}\left(f\bar\partial\frac{\bar g}{|g|^2}\right),f\bar\partial\frac{\bar g}{|g|^2}\right\rangle\le q\frac{|f|^2}{|g|^2}.\tag{3.8}$$

定理 *1.1* 的证明。 $f \equiv 0$ 和 $m = 1$ 的情形是显然的。令 $v = f\partial(\bar{g}/|g|^2)$。则 $g \cdot v = 0$ 和 $S_{\mathcal{H}} v = 0$。只需找到 $u \in \mathcal{H}_0$，使得 $\partial u = v$，并令

$$h = \frac{f\bar{g}}{|g|^2} - u, \quad \overline{\partial} h = 0, \quad g \cdot h = f.$$

固定 $0 < p \le 2$ 和 $\alpha > 0$，并设 $s = p/2, \quad \gamma = |\log \delta|^{-1}, \quad \chi_\alpha = (1-s)\log(|f|^2 + \alpha)$.

$$\varphi_\alpha = M|z|^2 + (q+\gamma)\log|g|^2 + \chi_\alpha, \quad \Theta = i\partial\bar{\partial}|z|^2 + \gamma\Theta_g. \tag{3.9}$$

这里 $M = C_\Omega + 1$，其中 C_Ω 是命题 3.2 中的常数。由于 $g \cdot \omega = 0$，我们有

$$\left\langle \overline{\partial}\left(\frac{\bar{g}}{|g|^2}\right), \omega \right\rangle = \frac{\overline{\partial g \lrcorner \omega}}{|g|^2}.$$

因此，由引理 3.3,

$$|\Phi_g \omega|^2 = \frac{|\partial g \lrcorner \omega|^2}{|g|^2} = |g|^2 \left| \left\langle \overline{\partial}\left(\frac{\bar{g}}{|g|^2}\right), \omega \right\rangle \right|^2 \le q\langle [\Theta_g, \Lambda]\omega, \omega\rangle.$$

对于 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 和 $\omega \in \mathcal{D}_1(\Omega_\varepsilon)$，

$$\langle [i\partial\bar{\partial}\varphi_\alpha, \Lambda]\omega, \omega\rangle - |\Phi_g\omega|^2 - C_\Omega|\omega|^2 \ge \langle [\Theta + i\partial\bar{\partial}\chi_\alpha, \Lambda]\omega, \omega\rangle.$$

因此，命题 3.2 给出

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\varepsilon} (-\rho)^r \Big(\langle [\Theta + i\partial\bar{\partial}\chi_\alpha, \Lambda]\omega, \omega\rangle + \tfrac{1}{2}|\bar{\nabla}\omega|^2 \Big) e^{-\varphi_\alpha}\, dV \\ &\qquad \le \frac{2-r}{1-r}\|T^*_{\mathcal{H},\varphi_\alpha}\omega\|^2_{(-\rho)^r,\varphi_\alpha} + \|S_{\mathcal{H}}\omega\|^2_{(-\rho)^r,\varphi_\alpha}, \quad 0 \le r < 1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

对于 $1 \le \lambda \le n$，我们有 $\partial_\lambda \log |g|^2 = \langle \partial_\lambda g, \ g\rangle/|g|^2$. 因此,

$$\sum_{\lambda=1}^n L_\lambda \bar{\partial}\partial_\lambda \log|g|^2 = \sum_{\lambda=1}^n \sum_{k=1}^m L_\lambda(\partial_\lambda g_k)\bar{\partial}\left(\frac{\bar{g}_k}{|g|^2}\right) = (Lg)\cdot\bar{\partial}\left(\frac{\bar{g}}{|g|^2}\right).$$

因此，逐分量地,

$$\begin{aligned} v_{g,\alpha} &:= Lv + \frac{\bar{g}}{|g|^2}(Lg)\cdot v - (L\varphi_\alpha)v \\ &= \left(Lf - fL\log|g|^2 - fL\varphi_\alpha\right)\overline{\partial}\left(\frac{\bar{g}}{|g|^2}\right) \\ &= \left\{Lf - fL\chi_\alpha - fL\left(M|z|^2 + (q+1+\gamma)\log|g|^2\right)\right\}\overline{\partial}\left(\frac{\bar{g}}{|g|^2}\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

第一行中的第二项与 $\omega \in \mathcal{H}_1$ 正交。沿 L 对 $g \cdot v = 0$ 求导也表明 $g \cdot v_{g,\ \alpha} = 0$。结合 $\Theta \ge \gamma\Theta_g$、引理 3.3 和柯西–施瓦茨

不等式可得

$$\left\langle [\Theta,\Lambda]^{-1}\overline{\partial}\left(\frac{\bar{g}}{|g|^2}\right), \overline{\partial}\left(\frac{\bar{g}}{|g|^2}\right)\right\rangle \leq \frac{q}{\gamma|g|^2},$$

其中 $|\partial g|^2 = \sum_\nu |\partial_\nu g|^2$。此外，由于 $\delta \leq |g| \leq 1$ 且 $\chi_\alpha = (1-s)\log(|f|^2+\alpha)$,

$$|g|^{-2\gamma} \leq e^2, \quad e^{-\varphi_\alpha+\chi_\alpha} \leq e^2\delta^{-2q}, \quad |f|^2 e^{-\chi_\alpha} \leq |f|^p.$$

由于 L 有界 ， $q \leq n$，且 $|\log\ \delta| \geq 1$，我们几乎处处得到以下估计 :

$$\begin{aligned}
&\left(|v|^2 + \langle [\Theta,\Lambda]^{-1} v_{g,\alpha}, v_{g,\alpha}\rangle\right) e^{-\varphi_\alpha} \\
&\leq C_\Omega e^{-\varphi_\alpha}\left[\frac{|f|^2|\partial g|^2}{|g|^4} + \frac{q}{\gamma|g|^2}\left|Lf - fL\chi_\alpha - fL\left(M|z|^2 + (q+1+\gamma)\log|g|^2\right)\right|^2\right] \\
&\leq \frac{C_\Omega q}{\gamma} e^{-\varphi_\alpha}\left[\frac{|\partial f - f\partial\chi_\alpha|^2 + |f|^2}{|g|^2} + (q+2)^2|f|^2\frac{|\partial g|^2}{|g|^4}\right] \\
&\leq C_\Omega \delta^{-2q}|\log\delta|\left[\delta^{-2}|\partial f - f\partial\chi_\alpha|^2 e^{-\chi_\alpha} + \delta^{-2}|f|^p + |f|^p\frac{|\partial g|^2}{|g|^4}\right]. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

令 $u_\alpha = (|f|^2+\alpha)^s$。直接微分可得

$$\partial f - f\partial\chi_\alpha = \frac{\alpha + s|f|^2}{|f|^2+\alpha}\partial f, \quad \Delta u_\alpha = 4s(|f|^2+\alpha)^{s-2}(\alpha + s|f|^2)|\partial f|^2.$$

在 $\{f \neq 0\}$ 上,

$$4s^2(|f|^2+\alpha)^{s-1}|\partial f|^2 \leq \Delta u_\alpha \leq 4s|f|^{2s-2}|\partial f|^2.$$

对于 $0 \leq \zeta \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$4s^2\int_\Omega \zeta(|f|^2+\alpha)^{s-1}|\partial f|^2\, dV \leq \int_\Omega u_\alpha \Delta\zeta\, dV \longrightarrow \int_\Omega |f|^{2s}\Delta\zeta\, dV.$$

对前述不等式应用单调收敛可得 $|f|^{p-2}|\partial f|^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。$\Delta u_\alpha$ 的上界以及控制收敛随后推出

$$\Delta|f|^p = p^2|f|^{p-2}|\partial f|^2 \quad \text{in distributions.}$$

对于 $\psi = \log((|g|^2+\delta^2)/2)$,

$$\|\psi\|_\infty \leq 2|\log\delta|, \quad \Delta\psi \geq \frac{4\delta^2|\partial g|^2}{(|g|^2+\delta^2)^2} \geq \delta^2\frac{|\partial g|^2}{|g|^4}.$$

将引理2.2应用于 u_α 和 ψ，并结合

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u_\alpha\, dV \leq C_\Omega \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u_\alpha\, d\sigma_\varepsilon$$

其证明中的结果，先令 $\alpha \downarrow 0$，再令 $\varepsilon \downarrow 0$，即可得到

$$\int_\Omega d\,\Delta|f|^p\,dV \le C_\Omega \|f\|_{H^p}^p,$$
$$\int_\Omega d\,|f|^p \frac{|\partial g|^2}{|g|^4}\,dV \le C_\Omega \delta^{-2}|\log\delta|\,\|f\|_{H^p}^p,$$
$$\int_\Omega d\,|f|^p\,dV \le C_\Omega \|f\|_{H^p}^p.$$

由于几乎处处有，

$$|\partial f - f\partial\chi_\alpha|^2 e^{-\chi_\alpha} = (|f|^2+\alpha)^{s-3}(\alpha + s|f|^2)^2|\partial f|^2 \le |f|^{p-2}|\partial f|^2,$$

控制收敛定理给出

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\int_\Omega d\,|\partial f - f\partial\chi_\alpha|^2 e^{-\chi_\alpha}\,dV = \frac{1}{4}\int_\Omega d\,\Delta|f|^p\,dV \le C_\Omega\|f\|_{H^p}^p. \tag{3.13}$$

对于 $1/2 \le r < 1$，令

$$E_{r,\alpha} := \int_\Omega d^{2-r}\left(|v|^2 + \langle[\Theta,\Lambda]^{-1}v_{g,\alpha}, v_{g,\alpha}\rangle\right)e^{-\varphi_\alpha}\,dV.$$

由 (3.13)、$d^{2-r} \le C_\Omega d$ 和 (3.12)，

$$\limsup_{\alpha\downarrow 0} E_{r,\alpha} \le C_\Omega \delta^{-2q-2}|\log\delta|^2\|f\|_{H^p}^p, \tag{3.14}$$

其中 C_Ω 与 p、m 和 r 无关。

取 r 和 $\alpha > 0$，使得$E_{r,\,\alpha} < \infty$，并记 $E_{\varepsilon,\,r,\,\alpha}$ 为 Ω_ε 上相同的积分，并设 $\operatorname{div} L = \sum_{\lambda=1}^n \partial_\lambda L_\lambda$。由于 $\rho_\varepsilon = 0$ 在 $\partial\Omega_\varepsilon$上成立，$L\rho_\varepsilon = \vartheta$，且 $1-\vartheta$ 在 $\partial\Omega$ 附近为零，

$$|\rho_\varepsilon| + |1 - L\rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon \operatorname{div} L| \le C_\Omega d. \tag{3.15}$$

对于 $\omega \in \mathcal{D}_1(\Omega_\varepsilon)$，$f$，$g$的全纯性给出 $v \in W^{1,\,2\,(0,\,1)}(\Omega_\varepsilon)^m$；分部积分得到

$$(v,\omega)_{\varphi_\alpha} = \int_{\Omega_\varepsilon}\Big\langle(1 - L\rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon \operatorname{div} L)v - \rho_\varepsilon v_{g,\alpha}, \omega\Big\rangle e^{-\varphi_\alpha}\,dV - \int_{\Omega_\varepsilon}\rho_\varepsilon\langle v, \bar{L}\omega\rangle e^{-\varphi_\alpha}\,dV.$$

由于 $[\Theta,\Lambda] \ge I$、$|L\omega| \le C_\Omega|\nabla\omega|$和 $-\rho \asymp d$，由柯西–施瓦茨不等式、(3.15) 和 (3.10) 得

$$\begin{aligned}|(v,\omega)_{\varphi_\alpha}|^2 &\le C_\Omega E_{\varepsilon,r,\alpha}\int_{\Omega_\varepsilon}(-\rho)^r\left(\langle[\Theta,\Lambda]\omega,\omega\rangle + |\bar\nabla\omega|^2\right)e^{-\varphi_\alpha}\,dV\\ &\le \frac{C_\Omega E_{\varepsilon,r,\alpha}}{1-r}\left(\|T^*_{\mathcal{H},\varphi_\alpha}\omega\|^2_{(-\rho)^r,\varphi_\alpha} + \|S_{\mathcal{H}}\omega\|^2_{(-\rho)^r,\varphi_\alpha}\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

该估计通过图范数稠密性推广到$\mathcal{G}_{\varphi_\alpha}$。令 Π为 $\mathcal{H}_1$到 $\ker\ S_{\mathcal{H}}$上的正交投影。由于 $\operatorname{Ran} T_{\mathcal{H}} \subset \ker\ S_{\mathcal{H}}$且 $v \in \ker\ S_{\mathcal{H}}$，对于每个 $\omega \in \operatorname{Dom} T^*_{\mathcal{H},\,\varphi_\alpha}$，

$$\Pi\omega \in \mathcal{G}_{\varphi_\alpha} \cap \ker S_{\mathcal{H}},\quad T^*_{\mathcal{H},\varphi_\alpha}\Pi\omega = T^*_{\mathcal{H},\varphi_\alpha}\omega,\quad (v,\Pi\omega)_{\varphi_\alpha} = (v,\omega)_{\varphi_\alpha}.$$

将 (3.16) 应用于 $\Pi\omega$,

$$|(v,\omega)_{\varphi_\alpha}|^2 \le \frac{C_\Omega E_{\varepsilon,r,\alpha}}{1-r}\|T^*_{\mathcal{H},\varphi_\alpha}\omega\|^2_{(-\rho)^r,\varphi_\alpha}.$$

哈恩–巴拿赫定理和里斯表示定理给出，乘以 $(-\rho)^r$,$u_{\varepsilon,r,\alpha}$ 后满足

$$(u_{\varepsilon,r,\alpha}, T^*_{\mathcal{H},\varphi_\alpha}\omega)_{\varphi_\alpha} = (v,\omega)_{\varphi_\alpha}, \quad g\cdot u_{\varepsilon,r,\alpha}=0,$$
$$(1-r)\int_{\Omega_\varepsilon}|u_{\varepsilon,r,\alpha}|^2(-\rho)^{-r}e^{-\varphi_\alpha}\,dV \le C_\Omega E_{\varepsilon,r,\alpha}.$$

因此 $\partial\overline{u}_{\varepsilon,r,\alpha}=v_\circ$ 由于 $E_{\varepsilon,r,\alpha}\le E_{r,\alpha}$，局部弱 L^2 紧性和下半连续性$\varepsilon\downarrow 0$ 给出在 Ω 上的 $u_{r,\alpha}$ ，其中 $\partial u_{r,\alpha}=v, g\cdot\overline{u}_{r,\alpha}=0$，并且

$$(1-r)\int_\Omega |u_{r,\alpha}|^2(-\rho)^{-r}e^{-\varphi_\alpha}\,dV \le C_\Omega E_{r,\alpha}.$$

由于 $e^{-\varphi_\alpha}\ge c_\Omega e^{-\chi_\alpha}$ and $(-\rho)^{-r}\asymp d^{-r}$ 对 $1/2\le r<1$一致成立，(3.14) 蕴含

$$\limsup_{\alpha\downarrow 0}(1-r)\int_\Omega |u_{r,\alpha}|^2 e^{-\chi_\alpha}d^{-r}\,dV \le C_\Omega\delta^{-2q-2}|\log\delta|^2\|f\|^p_{H^p}. \tag{3.17}$$

现在令

$$I_r=(1-r)\int_\Omega |f|^p d^{-r}\,dV.$$

对每个 $c>0$，当 $0<\alpha<c$ 时有 $e^{-\chi_c}\le e^{-\chi_\alpha}$ 。局部弱 L^2 紧性、下半连续性，然后是单调收敛 $c\downarrow 0$ ，沿着序列 $\alpha\downarrow 0$给出一个极限 u_r ，满足$\partial u_r=v,\ g\cdot u_r=0,$ 并且

$$(1-r)\int_\Omega |u_r|^2|f|^{p-2}d^{-r}\,dV \le C_\Omega\delta^{-2q-2}|\log\delta|^2\|f\|^p_{H^p}.$$

令 $h_r=f\bar{g}/|g|^2-u_{r\circ}$ 则 $\partial\overline{h_r}=0$ 在分布意义下成立。此外， $g\cdot h_r=f$ 并且

$$|h_r|^2=\frac{|f|^2}{|g|^2}+|u_r|^2$$

几乎处处成立，因为 $g\cdot u_r=0_\circ$ 因此

$$(1-r)\int_\Omega |h_r|^2|f|^{p-2}d^{-r}\,dV \le \delta^{-2}I_r + C_\Omega\delta^{-2q-2}|\log\delta|^2\|f\|^p_{H^p}.$$

对于 $p<2$，使用指数为 $2/p$ 和 $2/(2-p)$ 的霍尔德不等式可得

$$\begin{aligned}\left((1-r)\int_\Omega |h_r|^p d^{-r}\,dV\right)^{1/p} &\le \left((1-r)\int_\Omega |h_r|^2|f|^{p-2}d^{-r}\,dV\right)^{1/2} I_r^{1/p-1/2}\\ &\le \left(\delta^{-2}I_r + C_\Omega\delta^{-2q-2}|\log\delta|^2\|f\|^p_{H^p}\right)^{1/2} I_r^{1/p-1/2}.\end{aligned}$$

对于 $p=2$, 同一个不等式可直接得到。应用引理 2.1，并取在 $\partial\Omega$ 附近等于 $-d$ 的定义函数，我们有当 $r\uparrow 1$时 $I_r\to\|f\|_{H^p}^p$，且 h_r 的一个子列局部一致收敛于 $h\in H^p(\Omega)^m$。因此 $g\cdot h=f$ 以及

$$\|h\|_{H^p}\le\left(\delta^{-2}+C_\Omega\delta^{-2q-2}|\log\delta|^2\right)^{1/2}\|f\|_{H^p}\le C_\Omega\delta^{-q-1}|\log\delta|\,\|f\|_{H^p}.$$

Th上述估计关于 p是一致的，因此最终常数 C_Ω 与 p无关 . □

4. H^p-Corona定理对 $p>2$失效的一个例子

设 φ 是 $[0,\infty$上的光滑非减凸函数，在 $[0,1/16]$上为零，并且 $\varphi(1/2)>4$，在 $[1,\infty$上具有恒定的正导数。令

$$\psi(t)=\int_0^t e^{-(16/y)^7}\,dy,\quad t\ge 0.$$

ψ 是凸函数，在零点平坦，并且当 $t>0$时，$0<\psi'(t)\le 1$。令 k_0 为充分大的整数，稍后确定。对 $k\ge k_0$，令 $\xi_k=e^{i/k}$、$a_k=e^{-k^{14}}$，并且

$$Q_k(z_0)=e^{k^{12}(\overline{\xi_k}z_0-1)},\quad P_k(u,v)=(2u)^k\left(1+(2v)^{k^2}\right)-1.$$

定义$\Omega=\{\rho<0\}\subset\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2$ 为

$$\begin{aligned}\rho_0(z_0,z)&=|z_0|^2-1+\psi\left(|1-z_0|^2+|z|^2\right),\\ \rho(z_0,z)&=\rho_0(z_0,z)+\sum_{k\ge k_0}a_k\varphi\left(|Q_k(z_0)P_k(kz)|^2\right).\end{aligned}\tag{4.1}$$

这里（z_0，z）$\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2$，其中 $z=$（z_1，z_2）$\in\mathbb{C}^2$。因此

命题 4.1。当 k_0 充分大时，Ω 是一个边界为 C^∞ 的有界伪凸域，除无限型点 $(1,\ 0,\ 0)$ 外均为强伪凸。存在 $g\in H^\infty(\Omega)^3$ 满足 (1.1)，使得 $g\cdot h=1$ 在 $H^p(\Omega)^3$ 中对任意 $p>2$ 均无解。

证明。由于 φ' 在 $[1,\infty)$ 上为常数，并且对每个紧集 $K\Subset\mathbb{C}^3$ 和 $j\ge 0$,

$$\|Q_k(z_0)P_k(kz)\|_{C^j(K)}\le C_{K,j}e^{C_{K,j}k^{12}},$$

由柯西估计和链式法则可得

$$\sum_{k\ge k_0}\left\|a_k\varphi\left(|Q_k(z_0)P_k(kz)|^2\right)\right\|_{C^j(K)}\le C_{K,j}\sum_{k\ge k_0}e^{-k^{14}+C_{K,j}k^{12}}\longrightarrow 0.$$

因此 ρ 是光滑且多次调和的，并且 $K_0:=\{\rho_0\le 0\}$ 是紧的，且满足 $\{\rho\le 0\}\subset K_0$。由于 ρ_0 是凸的，且 $\rho_0(0)=\psi(1)-1<0$，对于 $(z_0,\ z)\in\{\rho=0\}$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\rho(rz_0,rz)\Big|_{r=1}&=\nabla\rho_0(z_0,z)\cdot(z_0,z)+\nabla(\rho-\rho_0)(z_0,z)\cdot(z_0,z)\\ &\ge 1-\psi(1)-(\rho-\rho_0)(z_0,z)-\sup_{K_0}|(z_0,z)|\,\|\rho-\rho_0\|_{C^1(K_0)}\\ &\ge 1-\psi(1)-\left(1+\sup_{K_0}|(z_0,z)|\right)\|\rho-\rho_0\|_{C^1(K_0)}>0\end{aligned}$$

当 k_0充分大时成立。由于 $\rho(0) < 0$，径向导数估计也表明 Ω 是星形的。因此，Ω 是一个具有 C^∞ 边界和多重次调和定义函数 ρ的有界伪凸域。

由于 $\psi'(t) > 0$ 对于 $t > 0$，ρ 在 $(1, 0, 0)$ 之外是严格多重次调和的。在此点

$$P_k(0) = -1, \quad |Q_k(1)| = e^{-k^{12}(1-\cos(1/k))} < 1/4$$

对于每个 $k \geq k_0$。因此 $\forall k \geq k_0$，$\exists \varepsilon_k > 0$ 使得 $\varphi\big(|Q_k(z_0)P_k(kz)|^2\big) \equiv 0$ 在 $B_{\varepsilon_k}(1, 0, 0)$，

$$D^\alpha(\rho - \rho_0)(1, 0, 0) = 0, \quad |\alpha| \geq 0.$$

由于 $\rho_0(1, \tau, 0) = \psi(|\tau|^2)$ 在 $\tau = 0$ 处是平坦的，$(1, 0, 0) \in \partial\Omega$ 是唯一的弱伪凸边界点，并且具有无限型。

令 B 为 $\mathbb{D}$ 中的布拉施克乘积，其零点为

$$x_{k,\ell} = (1 - a_k)\xi_k e^{10i\ell a_k}, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \quad |10\ell a_k| \leq k^{-8},$$

也就是说，对于 $z_0 \in \mathbb{D}$,

$$B(z_0) = \prod_{k \geq k_0} \prod_{\ell} \frac{|x_{k,\ell}|}{x_{k,\ell}} \frac{x_{k,\ell} - z_0}{1 - \overline{x_{k,\ell}} z_0}.$$

Set

$$J_k := \#\{\ell \in \mathbb{Z} : |10\ell a_k| \leq k^{-8}\} = 2\left\lfloor \frac{k^{-8}}{10a_k} \right\rfloor + 1.$$

由于

$$\sum_{k \geq k_0} \sum_{\ell} (1 - |x_{k,\ell}|) = \sum_{k \geq k_0} J_k a_k \asymp \sum_{k \geq k_0} k^{-8} < \infty,$$

相应的布拉施克乘积 B 定义良好。令

$$Q(z_0) = \sum_{k \geq k_0} k Q_k(z_0) z_0^{L_k}, \quad L_k = \lceil a_k^{-1} \rceil.$$

该级数在 $\mathbb{D}$上局部一致收敛。令

$$g = (g_1, g_2, g_3) := c_0\big(Q(z_0)z_1, Q(z_0)z_2, B(z_0)\big),$$

其中选择 $c_0 > 0$ 使得 $\sup_\Omega |g| = 1$。由于 Q 和 $1/B$ 在 $|z_0| \leq 1/2$ 上有界，只需考虑 $1/2 < |z_0| < 1$。令 $t = 1 - |z_0|$，并设

$$I_k := \left\{ \xi_k e^{i\theta} : |\theta| < \frac{1}{10k^2} \right\} \subset \partial\mathbb{D}.$$

这些弧互不相交，并且当 $z_0/|z_0| \notin I_k$ 时，$|Q_k(z_0)| \leq e^{-ck^8}$。因此

$$\sum_{\substack{j \geq k_0 \\ z_0/|z_0| \notin I_j}} j|Q_j(z_0)|\,|z_0|^{L_j} \leq \sum_{j \geq k_0} j e^{-cj^8} < \infty,$$

$$k|Q_k(z_0)|\,|z_0|^{L_k} \leq k e^{-t/a_k}, \quad \frac{z_0}{|z_0|} \in I_k.$$

若 $t > \sqrt{a_k}$，则当 k 充分大时，$ke^{-t/a_k} \le ke^{-1/\sqrt{a_k}} = ke^{-e^{k^{14}/2}} \le 6$。若 $t \le \sqrt{a_k}$，则 $\psi(|z|^2) \le \psi(|1-z_0|^2+|z|^2) \le 1-|z_0|^2 \le 2\sqrt{a_k}$ 在 Ω 上。由于 $\psi(y) \ge (y/2)e^{-(32/y)^7}$，若 $|z| \ge 6/k$，则

$$2e^{-k^{14}/2} \ge \psi(|z|^2) \ge \frac{18}{k^2} e^{-(8/9)^7 k^{14}},$$

对于充分大的 k，这是不可能的，因为 $(8/9)^7 < 1/2$。因此 $k|z| < 6$。于是，$|Q(z_0)|\,|z|$ 在 Ω 上有界。

对于 $x = x_{k,\ell}$ 记 $b_x(z_0) = (z_0 - x)/(1 - \bar{x}z_0)$。对于 $z_0 \ne 0$，令 $\theta_{k,\ell} = |\mathrm{Arg}(z_0\overline{x_{k,\ell}}\,\ell)|$。则

$$1 - |b_{x_{k,\ell}}(z_0)|^2 \le \frac{Ca_k(1-|z_0|)}{(a_k+1-|z_0|)^2 + \theta_{k,\ell}^2}.$$

若 $z_0/|z_0| \notin I_k$，则 $\theta_{k,\ell} \gtrsim k^{-2}$，因此

$$\sum_{\substack{k\ge k_0 \\ z_0/|z_0|\notin I_k}} \sum_{\ell} \big(1 - |b_{x_{k,\ell}}(z_0)|^2\big) \le C \sum_{k\ge k_0} J_k a_k k^4 \lesssim \sum_{k\ge k_0} k^{-4} < \infty.$$

若 $z_0/|z_0| \in I_k$，由于弧 I_k 两两不相交，

$$\#\left\{k \ge k_0 : \frac{z_0}{|z_0|} \in I_k\right\} \le 1.$$

对于可能剩下的指标 k，令 $t = 1-|z_0|$ 且 $A = a_k + t$。由于 $\arg x_{k,\ell+1} - \arg x_{k,\ell} = 10a_k$，选取 ℓ_0 使得 $\theta_{k,\ell_0} = \min_\ell \theta_{k,\ell}$。则

$$\theta_{k,\ell_0 \pm j} \ge (j - \tfrac{1}{2})10a_k, \quad j \ge 1,$$

只要相应的指标存在。$(A^2+y^2)^{-1}$ 关于 $y \ge 0$ 的单调性给出

$$\sum_{\ell} \frac{1}{A^2 + \theta_{k,\ell}^2} \le \frac{1}{A^2} + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{A^2 + (j-\frac{1}{2})^2(10a_k)^2} \le \frac{1}{A^2} + \frac{C}{a_k}\int_0^\infty \frac{dy}{A^2+y^2}.$$

因此，

$$\sum_{\ell} \big(1 - |b_{x_{k,\ell}}(z_0)|^2\big) \le C\left(\frac{a_k t}{(a_k+t)^2} + \int_{\mathbb{R}} \frac{t\,dy}{(a_k+t)^2+y^2}\right) = C\left(\frac{a_k t}{(a_k+t)^2} + \frac{\pi t}{a_k+t}\right) \le C.$$

综合这两种情况，我们得到

$$\sum_{k\ge k_0}\sum_{\ell} \big(1 - |b_{x_{k,\ell}}(z_0)|^2\big) \le C\sum_{k\ge k_0} k^{-4} + C\,\#\left\{k \ge k_0 : \frac{z_0}{|z_0|} \in I_k\right\} \le C.$$

由于 $-\log y \le C(1-y^2)$ 在 $[1/10, 1]$ 上，$|B|$ 当 $|b_x(z_0)| \ge 1/10$ 时有下界。如果 $|b_x(z_0)| < 1/10$，则有 $|z_0 - x| \le 2a_k/9$、$1 - |z_0|^2 < 3a_k$、$|z_0|^{L_k} \ge c$，并且

$$k^{12}\big(1 - \mathrm{Re}(\overline{\xi_k} z_0)\big) = O\big(k^{12}(a_k + k^{-16})\big) = o(1).$$

因此 $|Q(z_0)| \asymp k$。如果还有 $|kz| \le 1/4$，那么 $P_k(kz) = -1 + O(2^{-k})$，所以当 k 足够大时，$|Q_k(z_0)P_k(kz)|^2 > 1/2$。于是 $a_k\varphi(|Q_k(z_0)P_k(kz)|^2) > 4a_k$，而 $\rho_0 \ge -3a_k$，因此 $\rho(z_0, z) > a_k > 0$。所以

$$\{(z_0, z) \in \mathbb{C}^3 : |b_{x_{k,\ell}}(z_0)| < 1/10,\ |kz| \le 1/4\} \cap \Omega = \varnothing.$$

因此，当 $|b_{x_{k,\ell}}(z_0)| < 1/10$ 且 $(z_0, z) \in \Omega$ 时，我们有

$$|Q(z_0)|\,|z| \ge ck|z| > c/4.$$

因此，g 满足(1.1)。

固定 $k \ge k_0$ 和一个可容许指标 ℓ。我们断言

$$|z_0 - x_{k,\ell}| < a_k/8,\ |(kz_1, kz_2)| < 2,\ |P_k(kz_1, kz_2)| < 1/4 \implies (z_0, z) \in \Omega \cap \{d < 2a_k\}. \tag{4.2}$$

事实上，$|1 - z_0| < 2/k$ 和 $|z| < 2/k$，因此

$$\psi\big(|1 - z_0|^2 + |z|^2\big) \le \psi(8/k^2) \le (8/k^2)e^{-128k^{14}} = o(a_k).$$

由于 $|x_{k,\ell}| = 1 - a_k$ 且 $|z_0 - x_{k,\ell}| < a_k/8$，

$$1 - |z_0|^2 \ge 1 - |z_0| \ge \frac{7}{8}a_k, \quad |Q_k(z_0)P_k(kz_1, kz_2)| < \frac{1}{4}.$$

此外，由于 $\arg \xi_k = 1/k$，

$$\left|\arg z_0 - \frac{1}{k}\right| \le |\arg z_0 - \arg x_{k,\ell}| + \left|\arg x_{k,\ell} - \frac{1}{k}\right| \le Ca_k + k^{-8} < \frac{1}{10k^2}$$

当 k 充分大时。因此 $z_0/|z_0| \in I_k$，从而对每个 $j \ne k$，都有 $z_0/|z_0| \notin I_j$。于是，对于 $j \ne k$，

$$1 - \mathrm{Re}(\overline{\xi_j} z_0) \ge cj^{-4}, \quad |P_j(jz_1, jz_2)| \le e^{Cj^2 \log j},$$

and

$$|Q_j(z_0)P_j(jz_1, jz_2)| \le e^{-cj^8 + Cj^2 \log j} < \frac{1}{4} \quad (j \ge k_0,\ j \ne k).$$

由于 $\varphi = 0$ 在 $[0, 1/16]$ 上，$\rho - \rho_0$ 中的每一项都为零。因此，

$$\rho(z_0, z) = \rho_0(z_0, z) \le -\frac{7}{8}a_k + \psi(8/k^2) < 0.$$

由于 $\Omega \subset \{|z_0| < 1\}$，

$$d(z_0, z) \le 1 - |z_0| \le \frac{9}{8}a_k < 2a_k.$$

假设存在 $h \in H^p(\Omega)^3$ 使得 $g \cdot h = 1$。在切片 $\{z_0 = x_{k,\ell}\}$ 上，我们有 $B(x_{k,\ell}) = 0$，因此

$$kz_1 h_1(x_{k,\ell}, z_1, z_2) + kz_2 h_2(x_{k,\ell}, z_1, z_2) = \frac{k}{c_0 Q(x_{k,\ell})}.$$

按照 Oh 对 Cole 构造的改进 [17, 第 300–301], 页，对于每个满足 $2^{-k} \trianglelefteq |\zeta| \le 2^{k^2}$ 的 ζ，考虑 k^3 个解（按重数计）：

$$(2kz_1)^k = \frac{1}{\zeta}, \quad (2kz_2)^{k^2} = \zeta - 1.$$

它们满足 $P_k(kz_1,\ kz_2) = 0$ 且 $|(kz_1,\ kz_2)| < 2$。设 $A(\zeta)$ 是 $kz_1 h_1(x_{k,\ell},\ z_1,\ z_2)$ 在这些根上的平均值，根按重数计。由于解析延拓会置换这些根，A 在 $\{2^{-k} < |\zeta| < 2^{k^2}\} \setminus \{1\}$ 上是单值全纯的。由于 $\zeta \to 1$，这些根始终位于 Ω 的截面中的某个紧子集内，因此 A 局部有界，并由可去奇点定理延拓过 $\zeta = 1$。由于 $z_2 = 0$ 在 $\zeta = 1$ 处，

$$A(1) = \frac{k}{c_0 Q(x_{k,\ell})}, \quad |A(1)| \asymp 1.$$

在 $|\zeta| = 2^{k^2}$ 上，我们有 $|kz_1| = 2^{-k-1}$；在 $|\zeta| = 2^{-k}$ 上，我们有 $|kz_1| = 1$。设 $M_{k,\ell}$ 为这两个圆上方各根处 $|h_1|$ 的最大值。对于任一圆上的 ζ，由三角不等式可得

$$|A(\zeta)| \le \frac{1}{k^3} \sum_{j=1}^{k^3} |kz_1^{(j)}|\, |h_1(x_{k,\ell}, z_1^{(j)}, z_2^{(j)})| \le \frac{1}{2} |\zeta|^{-1/k} M_{k,\ell}.$$

Then

$$\max_{|\zeta|=2^{k^2}} |A(\zeta)| \le 2^{-k-1} M_{k,\ell}, \quad \max_{|\zeta|=2^{-k}} |A(\zeta)| \le M_{k,\ell}.$$

对环域 $\{2^{-k} < |\zeta| < 2^{k^2}\}$ 应用柯西公式，得到

$$c \le |A(1)| \le \left(2^{-k-1} \frac{2^{k^2}}{2^{k^2} - 1} + \frac{2^{-k}}{1 - 2^{-k}} \right) M_{k,\ell} \lesssim 2^{-k} M_{k,\ell}.$$

对于每个 (k, ℓ)，在两个圆周之一上选取 ζ_*，并选取相应的根 $(z_{1,*}, z_{2,*})$，使得

$$|h_1(x_{k,\ell}, z_{1,*}, z_{2,*})| = M_{k,\ell}.$$

考虑双圆盘

$$\Delta_{k,\ell} := \big\{ (z_{1,*}(1+\alpha), z_{2,*}(1+\beta)) : |\alpha| < k^{-3}, \quad |\beta| < k^{-3} \min\{1, |\zeta_*|\} \big\}.$$

它位于 $|(kz_1, kz_2)| < 2$ 中。由于 $(2kz_{1,*})^k = \zeta_*^{-1}$ 且 $(2kz_{2,*})^{k^2} = \zeta_* - 1$，在整个 $\Delta_{k,\ell}$ 上

$$P_k(kz_1, kz_2) = (1+\alpha)^k - 1 + (1+\alpha)^k (1 - \zeta_*^{-1}) \big((1+\beta)^{k^2} - 1 \big) = O(k^{-1}).$$

事实上，$(1+\alpha)^k - 1 = O(k^{-2})$ 且 $(1+\beta)^{k^2} - 1 = O(k^2|\beta|)$。由于 $|kz_{1,\ *}| = 1/2 |\zeta_*|^{-1/k}$ 且 $|kz_{2,\ *}| = 1/2 |\zeta_* - 1|^{1/k^2}$，我们有

$$|kz_{1,*}| \min\{1, |\zeta_*|\} = \begin{cases} 2^{-k}, & |\zeta_*| = 2^{-k}, \\ 2^{-k-1}, & |\zeta_*| = 2^{k^2}. \end{cases}$$

此外,

$$|\zeta_* - 1| \asymp \begin{cases} 1, & |\zeta_*| = 2^{-k}, \\ 2^{k^2}, & |\zeta_*| = 2^{k^2}. \end{cases}$$

因此，$|kz_{1,\ *}kz_{2,\ *}|^2$ 最小值$\{1, |\zeta_*|\}^2 \asymp 2^{-2k}$. 于是该多圆盘

$$\mathcal{P}_{k,\ell} := \{z_0 \in \mathbb{C} : |z_0 - x_{k,\ell}| < a_k/8\} \times \Delta_{k,\ell}$$

满足

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{P}_{k,\ell}) = \frac{\pi^3 a_k^2}{64k^{16}} |kz_{1,*}\, kz_{2,*}|^2 \min\{1, |\zeta_*|\}^2 \asymp a_k^2 k^{-16} 2^{-2k}.$$

对于固定的 k，这些多圆盘 $\mathcal{P}_{k,\ \ell}$ 两两不相交，且 ℓ变化时亦如此。此外，由 (4.2) ，

$$\mathcal{P}_{k,\ell} \subset \Omega \cap \{d < 2a_k\}.$$

次平均不等式以及这些多圆盘互不相交可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\cap\{d<2a_k\}} |h_1|^p \, dV &\geq \sum_\ell \int_{\mathcal{P}_{k,\ell}} |h_1|^p \, dV \\ &\geq \sum_\ell \mathrm{Vol}(\mathcal{P}_{k,\ell}) \, |h_1(x_{k,\ell}, z_{1,*}, z_{2,*})|^p \\ &= \sum_\ell \mathrm{Vol}(\mathcal{P}_{k,\ell}) M_{k,\ell}^p \\ &\geq c_p J_k a_k^2 k^{-16} 2^{(p-2)k}. \end{aligned}$$

将余面积公式应用于边界距离 d，并结合 (2.2)，其中定义函数在 $\partial\Omega$ 附近等于 $-d$，我们得到

$$\int_{\Omega\cap\{d<2a_k\}} |h_1|^p \, dV = \int_0^{2a_k} \int_{\{d=s\}} |h_1|^p \, d\sigma_s \, ds \leq C_\Omega a_k \|h_1\|_{H^p(\Omega)}^p.$$

由于 $J_k a_k \asymp k^{-8}$,

$$c_p' a_k k^{-24} 2^{(p-2)k} \leq c_p J_k a_k^2 k^{-16} 2^{(p-2)k} \leq \int_{\Omega\cap\{d<2a_k\}} |h_1|^p \, dV \leq C_\Omega a_k \|h_1\|_{H^p(\Omega)}^p.$$

因此,

$$k^{-24} 2^{(p-2)k} \leq C_p \|h_1\|_{H^p(\Omega)}^p,$$

这对于 $p > 2$ 来说是不可能的，因为 $k \to \infty$。 □

人工智能辅助声明

作者使用 ChatGPT（OpenAI）协助推导和检查证明，以及撰写、修订和校对。特别是，ChatGPT 构思了命题 4.1 中反例的构造。作者审阅并编辑了所有由 AI 生成的内容，并对本文内容承担全部责任。

参考文献

[1] N. L. Alling, 《有限开黎曼曲面上的冠猜想证明》, 《美国数学会通报》70 (1964), 110–112。[2] É. Amar, 《关于冠问题》, 《几何分析杂志》1 (1991), no. 4, 291–305。[3] M. Andersson, 《弱伪凸域中的 H^2 冠问题》, 《美国数学会汇刊》342 (1994), no. 1, 241–255。[4] M. Andersson, 《关于 H^p 冠问题》, 《数学科学通报》118 (1994), no. 3, 287–306。[5] M. Andersson 和 H. Carlsson, 《严格伪凸域中的 Wolff型估计与 H^p 冠问题》, 《阿克塔数学》32 (1994), no. 2, 255–276。[6] M. Andersson 和 H. Carlsson, 《 H^p 及 BMOA冠问题解的估计》, 《数学年刊》316 (2000), no. 1, 83–102。[7] B. Berndtsson, 《Ohsawa–Takegoshi 延拓定理与 Donnelly–Fefferman 定理》, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）46 (1996), no. 4, 1083–1094。[8] L. Carleson, 《有界解析函数插值与冠问题》, 《数学年刊》（第 2 辑）76 (1962), no. 3, 547–559。[9] B.-Y. Chen 和 S. Fu, 《Bergman 核与 Szeg˝o 核的比较》, 《数学进展》228 (2011), no. 4, 2366–2384。[10] B.-Y. Chen 和 X. Xing, 《δ-正则域上的 H^2-冠问题》, 《泛函分析杂志》286 (2024), no. 9, Paper No. 110363, 27 pp。[11] R. G. Douglas、S. G. Krantz、E. T. Sawyer、S. Treil 和 B. D. Wick, 《冠问题史》, 载于《冠问题：算子理论、函数论与几何学之间的联系》, Fields Inst. Commun., vol. 72, Springer, New York, 2014, pp. 1–29。[12] J. E. Fornæss 和 N. Sibony, 《在 $\mathbb{C}^2$ 中冠定理和 L^{p^-}估计不成立的光滑伪凸域》, 载于《复分析与几何》, Univ. Ser. Math., Plenum, New York, 1993, pp. 209–222。[13] T. W. Gamelin, 《一致代数与Jensen测度》, 伦敦数学会讲义系列, vol. 32, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1978。[14] J. B. Garnett 和 P. W. Jones, 《Denjoy域上的冠定理》, 《数学学报》155 (1985), no. 1–2, 27–40。[15] L. Hörmander, 《 L^2 估计与 $\bar{\partial}$ 算子的存在性定理》, 《数学学报》113 (1965), 89–152。[16] L. Hörmander, 《多复变函数分析导论》, 第 3 版, North-Holland出版社, 阿姆斯特丹, 1990。[17] B.-G. Oh, 《冠问题解具有较大界的黎曼曲面的一个显式例子》, 《太平洋数学杂志》228 (2006), no. 2, 297–304。[18] T. Ohsawa, 《多复变函数分析》, Translations of Mathematical Monographs, vol. 211, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2002。[19] N. Sibony, 《具有光滑边界的伪凸域上的冠问题》, 《数学年刊》（第 2 辑）126 (1987), no. 3, 675–682。[20] H. Skoda, 《将 L^2 技术应用于带权全纯函数代数的理想理论》, 《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑）5 (1972), no. 4, 545–579。[21] E. M. Stein, 《多复变全纯函数的边界行为》, Mathematical Notes, vol. 11, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, NJ, 1972。[22] E. L. Stout, 《关于多连通域上全纯函数的两个定理》, 《美国数学会通报》69 (1963), no. 4, 527–530。[23] N. Th. Varopoulos, 《BMO函数与 ∂-方程》, 《太平洋数学杂志》71 (1977), no. 1, 221–273。

(XuXing) 西南民族大学数学学院，中国成都，610041；科隆大学数学与计算机科学系，德国科隆，50931电子邮件地址：xingxu@swun.edu.cn