arXiv:2611.30340v1 [math.RA] 23 Nov 2026

AS-Gorenstein 霍普夫代数中反 antipode 的四次幂公式

QUANSHUI WU 和 RUIPENG ZHU

摘要。AS-戈伦斯坦霍普夫代数中可以定义同调积分，因此构成了一大类（无限维）霍普夫代数。我们为左 AS-Gorenstein 霍普夫代数建立了一个 S^4 公式，从而推广了 Radford 关于有限维 Hopf 代数的 S^4 公式，并通过在 Hopf 代数 H中确定一个类群共轭元素，改进了 Brown 和 Zhang 的公式。我们的方法是为左同调积分空间$\int_H^\ell$ 赋予一种典范的右 H^*-模结构，使之与其自然的右 H-作用相容。若 H^*-作用是有理的，则 $\int_H^\ell$具有典范的 $(\mathrm{id}_H,\ S^4)$-扭曲右左 Yetter– Drinfeld 模结构。这个一维空间上的右 H-作用和左 H-余作用分别确定了 H 中的一个特征和一个类群元素；于是，扭曲的 Yetter– Drinfeld 相容条件便导出 S^4 公式。若 H 的余根是余自反的，或平凡左模 $\Bbbk$ 具有有限生成投射分解，则 $\int_H^\ell$ 上的 H^*-作用是有理的。特别地，当 H 是左诺特时，后一条件成立。我们还为余根余自反的右 AS-co-Gorenstein 霍普夫代数建立了相应结果。作为应用，我们利用 S^4 公式研究反 antipode 的双射性，并在 H 作为中心右余理想子代数上的模有限且忠实平坦，或作为余中心商上的有限余生成且忠实余平坦时，导出其有限阶的显式界。

1. 引言

有限维 Hopf 代数理论中的一项关键结果是 Radford 公式，它用特征类群元素（） （）表示反 antipode 的四次幂；这些元素分别来自中的右积分和中的左积分：对所有，

$$S^4(h) = g\,(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})\,g^{-1}. \tag{1.1}$$

该公式最初由 Larson 证明 [29, 定理 5。5] 针对有限维幺模 Hopf 代数，随后 Radford 将其推广[43, 命题 6] 至任意有限维 Hopf 代数。Schneider [50, 定理 3。8] 之后基于的 Frobenius结构给出了更具概念性的证明 H，通过比较由和的积分分别得到的 Nakaya ma 自同构的两种表达式，推导出了该公式 H 和 H^*。

此后，Radford 的公式已推广至有限维拟 Hopf 代数 [22, 推论 6.3]，有限维辫 Hopf 代数 [3, 定理 3. 6]，有限维弱霍普夫代数 [39, 定理 5.13]，余 Frobenius Hopf 代数 [2, 定理 2.8]，以及有限张量范畴 [17, 定理 3.3]。

对（诺特）无限维Hopf代数的同调性质的研究，已成为非交换代数和量子群理论中的一个核心主题。在他们的开创性工作中[1], Artin 和 Schelter 提出了如今称为 Artin–Schelter正则代数（简称 AS-正则）的概念，将其视为多项式环的非交换类比，由此开启了非交换射影几何的现代发展。Artin–Schelter

2020年 数学主题分类。 16T05, 16E65, 16E40。关键词和短语。 Radford 的 S^4 公式、Artin–Schelter Gorenstein Hopf代数、同调积分、扭曲Yetter–Drinfeld模。本研究获得国家自然科学基金委员会（资助项目编号：12471032 和 12301052）资助。

戈伦斯坦（简称 AS-Gorenstein）条件随后自然地出现，作为一种推广：它保留了同调对偶结构，同时放宽了有限整体维数这一假设。

诺特霍普夫代数的环论与同调研究可追溯至 Brown 和 Goodearl 的工作 [7, 5]；综述见 [6] 。该领域的一个核心问题是：每个诺特霍普夫代数都是 *AS*-戈伦斯坦的吗？

这个问题称为 Brown–Goodearl 猜想。该猜想最初针对满足多项式恒等式的诺特仿射 Hopf 代数提出，并由第一作者和 Zhang 在这一情形下证明 [56]。因此，许多单位根处的量子群都是 AS-戈伦斯坦的。AS-戈伦斯坦霍普夫代数这一类十分广泛 [7, 5, 8, 6]。其他例子包括有限维李代数的泛包络代数，以及多循环有限扩张群的群代数 [8, 第 6.3 和 6.7] 节。量子群还提供了重要的非 PI 例子。设 $\mathfrak{g}$为有限维复半单李代数，G 为连通复半单代数群，q 为不定元。那么，Drinfeld–Jimbo 量子化包络代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 和标准量子化坐标代数 $\mathcal{O}_q(G)$ 在 $\mathbb{C}(q)$ 上均为诺特 AS-正则代数，因此也是 AS-戈伦斯坦代数，其整体维数分别为 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ 和 $\dim G$；参见 [8, 第 6.4–6.5] 节。

AS-Gorenstein 性质（定理 2.1）通过 Lu、第一作者和 Zhang 引入的同调积分，与霍普夫代数的对称结构密切相关 [33]。这一不变量将霍普夫代数的同调性质与其表示论联系起来，并编码了有关刚性对偶化复形、Nakayama 自同构[8], 和 Calabi–Yau 性质 [24]的信息。它还在低 Gelfand–Kirillov 维数霍普夫代数的分类中发挥了重要作用 [9, 55, 31]。

Brown 和 Zhang [8] 将反 antipode 四次幂的 Radford 公式从有限维 Hopf 代数推广到诺特 AS-Gorenstein 霍普夫代数。秉承 Schneider 方法，他们的证明比较了 AS-Gorenstein 霍普夫代数 H的 Nakayama 自同构的两种计算方式。设 H 为这样的代数，并令 $\alpha\colon H \to \Bbbk$ 表示由左同调积分空间上的右 H作用所确定的特征。于是，广义 Radford 公式具有如下形式

$$S^4(h) = u\,(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})\,u^{-1}, \tag{1.2}$$

其中，u 是 H中的可逆元素。当 H 为有限维时，α 与 $G(H^*)$中的特征类群元素重合，而 u 可以取为 H中的特征类群元素。该结果为反 antipode 的四次幂提供了同调解释，并已成为研究霍普夫代数的 Nakayama 自同构、同调行列式和扭曲卡拉比–丘性质的基本工具。

以下问题最初由 Brown 和 Zhang 在[8, 问题 4.6]中提出；另见 [34,问题 3.2] 和 [6,问题 4.4]。

问题 1.1。 由 H 中元素 u的共轭所诱导的（1.2）中的哪一个内自同构?

我们通过从同调积分空间构造一个典范类群元素来回答这一问题，从而为 AS- S^4 戈伦斯坦 Hopf 代数获得一个与（1.1）具有相同形式的公式。一个关键的结构性质是，在 H^*-作用下，$\mathrm{Ext}^i_H(\Bbbk_\varepsilon, H)$ 存在一个自然的右 H-作用，并且该作用通过一个 S^4-扭曲恒等式与通常的右作用相容。这些作用利用 Yetter–Drinfeld范畴中的适当分解构造，并且与分解的选择无关。该构造还适用于更一般的 Ext 群（定理 3.5）。

从这些作用过渡到扭曲的Yetter–Drinfeld 模结构（定理 2.4）时，核心问题在于有理性。右 H^*-模若其作用由左H-余作用诱导，则称其为有理的。对于无限维 H，仅凭 H^*-模是一维的，并不

意味着它具有有理性。我们证明，在以下两种假设之一成立时，典范的 H^*-作用在 $\int_H^\ell$ 上是有理的： H 的余根具有自反性，或平凡 H-模满足适当的有限性条件。这两种假设都确保 $\int_H^\ell$ 上的典范作用确定一个（id_H, S^4）扭曲右左 Yetter–Drinfeld 模结构。由此得到的这一维空间上的余作用确定了所需的类群元素。

为准确陈述该定理，我们回顾相关定义。若余代数 C 是 余反射，则典范嵌入 C ，$\to (C^*)^\circ$ 是同构。环 R 上的模 M 对某个 $d \geqslant 0$ 属于 FP_d 型，当且仅当它具有一个投射分解

$$\cdots \longrightarrow P_{d+1} \longrightarrow P_d \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中 $P_0, P_1, \ldots, P_d$ 是有限生成的。如果 M 具有一个投射分解，其中每个 P_i 都是有限生成的，则称 M 为 FP_∞ 型（在某些文献中也称为伪相干）。

定理 1.2（定理 3.9）。 设 H 是一个维数为 d 且反 antipode 为 S 的左 AS-Gorenstein Hopf 代数。假设 H 的余根是余反射的，或者平凡左 H-模${}_\varepsilon\Bbbk$ 属于 FP_d型。则存在一个类群元素 $g \in G(H)$ 和一个特征 $\alpha\colon\ H \to \Bbbk$，二者均由 H的左同调积分空间所确定，使得对于所有 $h \in H$，

$$S^4(h) = g\left(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1}\right) g^{-1}. \tag{1.3}$$

对于一个维数为 d 的诺特 AS-Gorenstein 霍普夫代数 H ，平凡左 H-模 ${}_\varepsilon\Bbbk$ 是 FP_d 型的。因此，定理 1.2 中的 S^4 公式在此情形下适用，从而细化了 (1.2) 的内自同构版本。不同于 Brown 和 Zhang [8], 依赖 Nakayama 自同构的方法，我们直接在同调积分空间（定理 3.9）上构造了一个规范的扭曲 Yetter–Drinfeld 模结构（定理 2.4）。随后， S^4 公式通过利用扭曲 Yetter–Drinfeld 相容条件进行初等计算即可得到。同样的论证还可得到相应的 S^4 公式：对于一个右 AS-co-Gorenstein 霍普夫代数，其右同调余积分空间是一个有理左 H^*-模；这推广了余 Frobenius Hopf 代数的经典公式。若 H 同时是左 AS-Gorenstein 和右 AS-co-Gorenstein 的，并且具有余自反余根，则同调积分空间和同调余积分空间分别确定了对 (g, α) 和 $(\widetilde{g}, \widetilde{\alpha})$，其中每一对均由一个类群元素和一个特征组成。这两对元素未必相同；参见定理 4.4。

第4节介绍了定理 3.9 和定理 3.16 中建立的 S^4 公式的应用。特别地，每个满足定理 1.2 假设的左 AS-Gorenstein 霍普夫代数都具有双射反 antipode（定理4.7(1)），而每个余根余自反的右 AS-co-Gorenstein Hopf 代数也都具有双射反 antipode（定理4.7(2)）。随后，我们应用这些 S^4 公式来探讨 Brown 和 Zhang 提出的问题 [8, 问题 6.2]：诺特仿射 PI Hopf 代数的 antipode 是否具有有限阶？为此，设 H 是一个作为中心霍普夫子代数上的有限模的 Hopf代数。若 H 是维数为 d 的 AS-戈伦斯坦代数，且其余根余自反，或 ${}_\varepsilon\Bbbk$ 为 FP_d型，则 S^2 具有有限阶（定理4.14）。若 H 是 AS-co-Gorenstein 代数，且其余根余自反，则 S^2 具有有限阶（定理4.15）。这些结果为 Brown 和 Zhang 的问题提供了部分答案。

组织结构。 第 2 节回顾了 AS-Gorenstein 与 AS-co-Gorenstein Hopf 代数、同调积分与余积分、扭曲 Yetter–Drinfeld 模以及扭曲 Drinfeld 中心所需的背景知识。在第 3节中，我们在同调积分空间上构造了一种扭曲的 Yetter–Drinfeld 结构，并证明了 AS-Gorenstein 与 AS-co-Gorenstein Hopf 代数的 S^4 公式。第 4 节给出了一些例子和应用，包括反 antipode 的双射性以及 S^2的阶。

约定与记号。全文中，$\Bbbk$ 是一个域，所有未加说明的张量积和 Hom 均取自 $\Bbbk$。对于余代数 C，我们使用 Sweedler记号 $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$（默认省略求和符号）。类似地，我们将左余作用写作 $\rho(v) = v_{-1} \otimes v_0$，将右余作用写作 $\rho(v) = v_0 \otimes v_1$。对于 Hopf代数 H，我们将其单位映射记为 η，余单位映射记为 ε，反 antipode 记为 S，其类群元群记为 $G(H)$。对于$h, l \in H$和 $h^* \in H^* := \mathrm{Hom}(H, \Bbbk)$，我们写作 $h \leftharpoonup h^* = \langle h^*, h_1\rangle h_2$, $h^* \rightharpoonup h = h_1\langle h^*, h_2\rangle$,$(h \rightharpoonup h^*)(l) = \langle h^*, lh\rangle$，以及 $(h^* \leftharpoonup h)(l) = \langle h^*, hl\rangle$。设 $\varphi\colon A \to B$是一个代数同态，并设 M 是一个左 B-模。我们将沿 φ对标量作限制后从 M 得到的左 A-模记为 ${}_\varphi M$。对偶地，设 $C \to D$ 是一个余代数同态，并设 N是一个左 C-余模，其余作用为 $\rho\colon N \to C \otimes N$。我们将沿 进行标量余限制后从 N 得到的左 D-余模记为 ${}^\psi N$，其余作用由复合映射$N \xrightarrow{\rho} C \otimes N \xrightarrow{\psi\otimes \mathrm{id}_N} D \otimes N$给出。右模和右余模的情形类似表示。

2. 预备知识

S^4 公式以同调积分和扭曲的 Yetter–Drinfeld 模的形式表述。我们将在此固定这些定义，首先从 AS-戈伦斯坦霍普夫代数开始。

2.1. **AS-戈伦斯坦霍普夫代数及其同调积分**。

我们首先回顾霍普夫代数的 Artin–Schelter条件；参见 [56, 8]。

定义 2.1. 若霍普夫代数 H 被称为 *左 Artin–Schelter Gorenstein*（简称左 AS-戈伦斯坦），维数为 d，则

(1) ${}_H H$ 具有有限内射维数 d；(2) 作为向量空间，$\mathrm{Ext}^i_H({}_\varepsilon\Bbbk, H) \cong \begin{cases} 0, & i \neq d, \\ \Bbbk, & i = d, \end{cases}$，其中 ${}_\varepsilon\Bbbk$ 表示平凡的左 H-模，在该模上，H 通过余单位 ε 作用。

右 AS-Gorenstein 霍普夫代数的定义与此类似。如果一个 Hopf代数同时是左 AS-Gorenstein 和右 AS-Gorenstein，则称其为$AS\text{-}Gorenstein$。如果一个 AS-Gorenstein 霍普夫代数 H具有有限全局维数 d，则称 H 为维数 d的*AS*-正则代数。本文所采用的 AS-正则性定义不要求该代数具有有限的 Gelfand–Kirillov 维数。

Lorenz–Lorenz 引理 [32] 指出，Hopf代数 H的左整体维数等于 ${}_\varepsilon\Bbbk$的投射维数。

设 H 是一个维数为 d的左 AS-Gorenstein 霍普夫代数。一维空间

$$\textstyle\int_H^\ell := \mathrm{Ext}^d_H({}_\varepsilon\Bbbk, H)$$

称为 H的左同调积分空间，而 $\int_H^\ell$ 中的任意非零元素称为左同调积分[33]。空间 $\int_H^\ell$ 具有自然的右 H-模结构，该结构由第二个变量中的右乘法诱导；存在唯一的代数同态$\alpha\colon H \to \Bbbk$，使得 $\int_H^\ell \cong \Bbbk_\alpha$ 作为右 H-模成立。对于右 AS-Gorenstein 霍普夫代数 H，右同调积分空间类似地定义为 $\textstyle\int_H^r := \mathrm{Ext}^d_{H^{\mathrm{op}}}(\Bbbk_\varepsilon, H)$。当 H为有限维时，它是维数为 0 的 AS-Gorenstein 代数，且其同调积分与通常的积分 [33]一致。

与 [8], 定理 2.1 中的定义不同，这里不要求 H 是诺特的。许多已知的 AS-正则 Hopf 代数满足较弱的有限性条件：平凡模 ${}_\varepsilon\Bbbk$ 属于 FP_∞ 型。若群 G 的群代数 $\Bbbk G$ 是 AS-正则的，且平凡 $\Bbbk G$-模 $\Bbbk$ 属于 FP_∞ 型，则称群 G 为 $\Bbbk$ 上的庞加莱对偶群。庞加莱对偶群的群代数为非诺特 AS-正则霍普夫代数提供了丰富的例子。设 X 是一个维数为 d 的闭、连通、定向、非球面光滑流形，且 $G = \pi_1(X)$ 是 X 的基本群。那么 G 是一个维数为 d 的 $\mathbb{C}$ 上的庞加莱对偶群，具有

平凡定向特征 [10, 第 VIII 章]。因此，群代数 $\mathbb{C}G$ 是维数为 d 的 AS-正则代数，事实上还是维数为 d 意义下的卡拉比–丘代数[21]。设 Σ_g 是一个亏格为 $g \geqslant 2$ 的闭定向曲面，并令 $G = \pi_1(\Sigma_g)$。那么 $\mathbb{C}G$ 是维数为 2的 AS-正则代数。由于换位子群 $[G, G]$ 是一个无限秩自由群 [41,定理 B], 群代数 $\mathbb{C}G$ 不是诺特的。

2.2. **AS-余 Gorenstein Hopf 代数及其同调余积分。** 余代数上的右余模范畴是一个格罗滕迪克范畴，但其中可能没有足够的投射对象。因此，余代数的右整体维数 C 定义为所有右 C余模 [38]的内射维数的上确界。

定义 2.2。 若一个 Hopf代数 H 满足以下条件，则称其为维数 d 的右 *AS*-余戈伦斯坦 Hopf代数：(1) 对任意右 H余模 N和 $i > d$，$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^H}(H, N) = 0$；(2) 作为向量空间，$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^H}(H, \Bbbk^\eta) \cong \begin{cases} 0, & i \neq d, \\ \Bbbk, & i = d, \end{cases}$，其中 $\Bbbk^\eta$ 表示平凡的右 H-余模，其余作用由单位元 η诱导。

左 AS-余戈伦斯坦 Hopf 代数的定义类似。若一个 Hopf 代数同时是左 AS-余戈伦斯坦和右 AS-余戈伦斯坦，则称其为 *AS*-余 *Gorenstein* 。如果一个 AS-余戈伦斯坦 Hopf 代数H 作为余代数具有有限全局维数 d ，则称 H 其为维数为 d的 *AS*-余正则 代数。

类似于 Lorenz–Lorenz 引理 [32], ，Hopf 代数H 作为余代数的右整体维数等于平凡右 H-余模 $\Bbbk^\eta$的内射维数；例如参见 [12,定理11]。

注 2.3. 若余代数 C 满足以下条件，则称其为维数为 d [23, 的 *AS*-正则 代数2]： C 具有有限右整体维数；对于每个单右 C-余模 T，对所有 $i \neq d$，$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^C}(C, T) = 0$，且 $\mathrm{Ext}^d_{\mathcal{M}^C}(C, T)$ 是一个单右 C-余模；并且对于左 C-余模，也满足类似条件。

设 H 是一个具有双射反 antipode 的 Hopf代数。经过常规验证可知， H 是维数为 d 的 AS-余正则代数，当且仅当 H 是维数为 d 的 AS-正则余代数。若 H^* 作为代数是诺特的，He、Torrecillas、Van Oystaeyen 和 Zhang 在命题 2.3] 中证明了： H 是 AS-正则余代数，当且仅当 H^* 是 AS-正则代数。令 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 为有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 的包络代数，并假设 $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$。那么，$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^* \cong \Bbbk[\![x_1, x_2, \ldots, x_n]\!]$ 作为代数成立，其中 $n = \dim_\Bbbk \mathfrak{g}$。后者是一个维数为 n 的诺特 AS-正则代数。因此， $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 是维数为 n 的 AS-余正则代数。

设 H 是一个维数为 d 的右 AS-余戈伦斯坦 Hopf代数。这个一维空间

$$\int_r^H := \mathrm{Ext}^d_{\mathcal{M}^H}(H, \Bbbk^\eta)$$

称为右同调余积分空间的 H，而 $\int_r^H$ 中的任意非零元素称为右同调余积分。此外， $\int_r^H$ 具有自然的左 H^*-模结构，该结构由第一变量中 H上的左 H -余模结构诱导（见定理3.13 和定理 3.16）。对于左 AS-余戈伦斯坦霍普夫代数 H，左同调余积分空间类似地定义为 $\int_\ell^H := \mathrm{Ext}^d_{H\mathcal{M}}(H, {}^\eta\Bbbk)$。

Hopf代数 H 的 AS-余 Gorenstein 维数为 0，当且仅当它是余 Frobenius；也就是说，存在非零元素 $\lambda \in H^*$，使得对于任意 $f \in H^*$，都有 $\lambda * f = \langle f, 1_H \rangle \lambda$。在这种情况下，任何这样的非零元素都是如上定义的右同调余积分。

2.3. **扭曲 Yetter–Drinfeld 模。** Yetter–Drinfeld 模的概念由 Yetter 提出 [57], ，他称之为交叉双模；Radford 和 Towber 随后在 [47]中为其赋予了现在的名称。Yetter–Drinfeld 模结构自然给出 Yang–Baxter 方程的一个解 [47, 命题 3]。它们在范畴论上的重要性源于

Hopf代数上的 Yetter–Drinfeld 模范畴H 与 H-(余)模范畴的 Drinfeld 中心之间的等价 [26, 16]。Panaite 和 Staic 提出了 Yetter–Drinfeld 模的一个扭曲概念 [40]。在本小节中，我们给出 Panaite 和 Staic 的扭曲概念的一个变体 [40]，其中 Yetter–Drinfeld 相容条件由两个 Hopf 代数自同态而非自同构进行扭曲。

设 H 是一个 $\Bbbk$-双代数，且 σ 和 τ 是 H的两个双代数自同态。

定义 2.4. [40, 定义 2.1] 一个 (σ,τ)-扭曲左-右 *Yetter–Drinfeld* 模 是一个三元组 $(V,\triangleright,\rho)$，由一个向量空间 V构成，该空间带有左 H-模结构 $(V,\triangleright)$ 和右 H-余模结构 (V,ρ)，使得对所有 $v\in V$和 $h\in H$，

$$h_1\triangleright v_0\otimes\tau(h_2)v_1 \;=\; (h_2\triangleright v)_0\otimes(h_2\triangleright v)_1\sigma(h_1). \tag{2.1}$$

我们将 (σ,τ)-扭曲左-右 Yetter–Drinfeld 模所成的范畴记为 ${}_H\mathcal{YD}^H(\sigma,\tau)$，其态射是同时为 H-线性且为 H-余线性的映射。

类似地， ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}^{H}(\sigma,\tau)$、 ${}^{H}\mathcal{YD}_{H}(\sigma,\tau)$ 以及 ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}(\sigma,\tau)$ 的 (σ,τ)-扭曲右-右、右-左和左-左 *Yetter–Drinfeld* 模范畴分别定义为：将（2.1）替换为相容条件

$$v_0\triangleleft h_1\otimes v_1\sigma(h_2)=(v\triangleleft h_2)_0\otimes\tau(h_1)(v\triangleleft h_2)_1, \tag{2.2}$$
$$v_{-1}\sigma(h_1)\otimes v_0\triangleleft h_2=\tau(h_2)(v\triangleleft h_1)_{-1}\otimes(v\triangleleft h_1)_0, \tag{2.3}$$
$$\tau(h_1)v_{-1}\otimes h_2\triangleright v_0=(h_1\triangleright v)_{-1}\sigma(h_2)\otimes(h_1\triangleright v)_0. \tag{2.4}$$

当 $\sigma=\tau=\mathrm{id}_H$时，这些范畴退化为[47]的经典 Yetter–Drinfeld 范畴；例如，${}_H\mathcal{YD}^H$（$\mathrm{id}_H,\mathrm{id}_H$）就是通常的范畴 ${}_H\mathcal{YD}^H$。

在 H上，右（分别地，左） V-余模结构 H^*通过以下方式诱导出左（分别地，右） $h^*\triangleright v$-模结构$=v_0\langle h^*,v_1\rangle$：（分别为 $v\triangleleft h^*:=\langle h^*,v_{-1}\rangle v_0$）。将 $\langle h^*,-\rangle$、 $h^*\in H^*$作用于（2.1）–（2.4）中的余模张量因子，可知这些条件分别等价于恒等式

$$h_1\triangleright\Big(\big(h^*\leftharpoonup\tau(h_2)\big)\triangleright v\Big)=\big(\sigma(h_1)\rightharpoonup h^*\big)\triangleright(h_2\triangleright v), \tag{2.5}$$
$$\Big(\big(\sigma(h_2)\rightharpoonup h^*\big)\triangleright v\Big)\triangleleft h_1=\big(h^*\leftharpoonup\tau(h_1)\big)\triangleright(v\triangleleft h_2), \tag{2.6}$$
$$\Big(v\triangleleft\big(\sigma(h_1)\rightharpoonup h^*\big)\Big)\triangleleft h_2=(v\triangleleft h_1)\triangleleft\big(h^*\leftharpoonup\tau(h_2)\big), \tag{2.7}$$
$$h_2\triangleright\Big(v\triangleleft\big(h^*\leftharpoonup\tau(h_1)\big)\Big)=(h_1\triangleright v)\triangleleft(\sigma(h_2)\rightharpoonup h^*). \tag{2.8}$$

我们定义 $\widehat{{}_H\mathcal{YD}}(\sigma,\tau)$为如下范畴：其对象是 V，带有左 H-模结构和左 H^*-模结构，并满足（2.5）；其态射同时为 H-线性的和 H^*-线性的。若 H是具有双射 antipode 的 Hopf代数，则 ${}_H\mathcal{YD}^H(\sigma,\tau)$等价于代数 $H^*\#_{\sigma}{}_{\text{上的左模范畴，}}{}_{\tau}H$ 见第2.3.1节。

若 H 是有限维的，则这些恒等式恰好是 V 成为扭曲 Drinfeld 双$D_{\sigma}{}_{\text{上的模的条件，}}{}_{\tau}(H)$ 见 [40, 第 2] 节；当 $\sigma=\tau=\mathrm{id}_H$时，这恢复了 Yetter–Drinfeld 模作为 Drinfeld双 $D(H)$ 上的模的经典描述。

$\widehat{{}_H\mathcal{YD}}(\sigma,\tau)$存在一个忠实正合函子 $F\colon {}_H\mathcal{YD}^H(\sigma,\tau)\to{}_H\mathcal{YD}^H(\sigma,\tau)$。对象 $V\in{}_H\mathcal{YD}^H(\sigma,\tau)$ 同构于某个 $F(U)$，其中 $U\in{}_H\mathcal{YD}^H(\sigma,\tau)$，当且仅当 V作为 H^*-模是有理的；也就是说，其模结构由右 H-余模结构通过 $h^*\triangleright v=v_0\langle h^*,v_1\rangle$诱导得到。范畴 $\widehat{\mathcal{YD}^H_H}(\sigma,\tau)$、$\widehat{{}^H\mathcal{YD}_H}(\sigma,\tau)$ 和 $\widehat{{}^H_H\mathcal{YD}}(\sigma,\tau)$ 可以类似地定义。

下述对偶是[40, 命题 3.7]，当 σ 与 τ 为Hopf代数自同构时。同样的公式对这里所用的双代数自同态仍然成立。

引理 2.5. 设 $V \in {}^H\mathcal{Y}D_H(\sigma,\tau)$是有限维的。则 $V^* = \mathrm{Hom}(V,\Bbbk)$是 ${}_H\mathcal{Y}D^H(\sigma,\tau)$的一个对象，且

$$(h \rhd f)(v) = f(v \lhd h), \quad \text{and} \quad f_0(v) \otimes f_1 = f(v_0) \otimes v_{-1}.$$

证明。 根据 V^* 上的余作用定义以及 2.3 中针对 V的相容条件，我们有

$$\begin{aligned}(h_1 \rhd f_0)(v) \otimes \tau(h_2) f_1 &= f_0(v \lhd h_1) \otimes \tau(h_2) f_1 \\ &= f\big((v \lhd h_1)_0\big) \otimes \tau(h_2)(v \lhd h_1)_{-1} \\ &\overset{(2.3)}{=\!=} f(v_0 \lhd h_2) \otimes v_{-1}\sigma(h_1) \\ &= (h_2 \rhd f)(v_0) \otimes v_{-1}\sigma(h_1) \\ &= (h_2 \rhd f)_0(v) \otimes (h_2 \rhd f)_1 \sigma(h_1).\end{aligned}$$

这正是相容条件（2.1），因此 $V^* \in {}_H\mathcal{Y}D^H(\sigma,\tau)$。 □

定理 2.5 通过对偶，将具有相同 Hopf 代数自同态的两个扭曲 Yetter–Drinfeld 模范畴联系起来 σ 和 τ。

2.3.1. 扭曲 *Drinfeld* 双。 设 H 为一个具有双射 antipode 的 Hopf代数。那么阿贝尔范畴 ${}_H\mathcal{Y}D^H(\sigma,\tau)$ 等价于一个称为扭曲 Drinfeld 双的代数上的模范畴。

回顾一下，给定一个双代数 H、一个左 H-模代数 A 和一个左 H-余模代数B，Takeuchi 交叉积 $A\#B$ 是一个结合代数，其底层 $\Bbbk$-空间为 $A\otimes B$，乘法为

$$(a\#b)(a'\#b') := a(b_{-1} \rhd a')\#b_0 b', \quad a,a' \in A,\ b,b' \in B,$$

单位元为 $1_A\#1_B$。

现在令 H 为一个反 antipode S 双射的 Hopf代数。那么， H 可通过以下方式成为左 $H\otimes H^{\mathrm{op}}$-余模代数：

$$\rho\colon H \longrightarrow (H\otimes H^{\mathrm{op}})\otimes H, \quad h \mapsto \big(h_1 \otimes S^{-1}(h_3)\big)\otimes h_2.$$

此外，对于任意两个 Hopf 代数自同态 $\sigma,\tau\colon H\to H$，对偶代数 H^* 可通过以下方式成为左 $H\otimes H^{\mathrm{op}}$-模代数：

$$(h\otimes l) \rightharpoonup f = \sigma(h) \rightharpoonup f \leftharpoonup \tau(l).$$

我们将 $H^*\#_{\sigma,\tau}H$ 记为上述左 $H\otimes H^{\mathrm{op}}$-模代数 H^* 与左 $H\otimes H^{\mathrm{op}}$-余模代数 H 相关联的 Takeuchi 交叉积。当 H 为有限维时，[40,第 2] 节证明了 $\widehat{{}_H\mathcal{Y}D^H}(\sigma,\tau)$（分别为 $\widehat{{}^H\mathcal{Y}D_H}(\sigma,\tau)$）与左（分别为右） $H^*\#_{\sigma,\tau}H$-模范畴等价。对于上述构造的代数，同样的等价关系也成立，其中 σ 和 τ 是 Hopf 代数自同态，且 H 不必是有限维的。

当 $\sigma=\tau=\mathrm{id}_H$ 和 H 为有限维时， $H^*\#H$ 是 Drinfeld双 $D(H) = H^{*\,\mathrm{cop}} \bowtie H$ [14]的底层代数。因此， $H^*\#_{\sigma,\ \tau}H$是该代数的一种扭曲形式。

对于一般的 Hopf代数， H^* 不一定是余代数。Sweedler有限对偶

$$H^\circ = \{\, f\in H^* \mid f(I)=0 \text{ for some finite-codimensional ideal } I\subset H \,\}$$

是一个 Hopf代数，并且在上述未扭曲的 $H\otimes H^{\mathrm{op}}$-作用下保持稳定。转到余反向余代数不会改变乘法，因此 Drinfeld双 $D(H) = (H^\circ)^{\mathrm{cop}} \bowtie H$满足 [13, 35]

$$D(H) \cong H^\circ\#H \hookrightarrow H^*\#H.$$

如果 H 是有限维的，那么 $H^\circ = H^*$ ，且包含关系为等式。

2.3.2. 双模范畴的 *Drinfeld* 中心。扭曲 Yetter–Drinfeld 模的范畴是某个适当双模范畴的 Drinfeld 中心。有限张量范畴的 S^4 公式源于以下事实：特征可逆对象属于这样一个双模范畴的 Drinfeld 中心，该双模范畴的左作用沿四重对偶函子拉回。

设 $\mathcal{C}$ 为一个幺半范畴，其结合约束为 $a_{X,Y,Z}:(X\otimes Y)\otimes Z \xrightarrow{\sim} X\otimes(Y\otimes Z)$，并设 $\mathcal{M}$ 为一个 $\mathcal{C}$-双模范畴。回顾一下，*Drinfeld* 中心 $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 的 $\mathcal{M}$ [19,定义 2。1] 是一个范畴，其对象为形如 (M,γ_M) 的对，其中 $M\in\mathcal{M}$ 且

$$\gamma_M=\{\gamma_{M,X}: X\otimes M \xrightarrow{\cong} M\otimes X\}_{X\in\mathcal{C}}$$

是一个在 X 上自然的同构族，并满足半编织（六边形）条件。从 (M,γ_M) 到 $(M',\gamma_{M'})$ 的态射是一个态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M,M')$，使得对每个 $X\in\mathcal{C}$,

$$(f\otimes \mathrm{id}_X)\circ\gamma_{M,X}=\gamma_{M',X}\circ(\mathrm{id}_X\otimes f).$$

Wh当 $\mathcal{M}=\mathcal{C}$ 时，这一构造与通常的 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 重合 .

令 $(\mathcal{M}^H,\otimes,\Bbbk^\eta)$ 表示右 H-余模的幺半范畴，并令 σ 和 τ 为 Hopf 代数自同态。令 $\mathcal{M}^H(\sigma,\tau)$ 表示 $\mathcal{M}^H$-双模范畴 $\mathcal{M}^H$，其左作用 $\otimes^\ell$ 由 τ 扭曲，右作用 $\otimes^r$ 由 σ扭曲；也就是说，

$$N\otimes^\ell M:=N^\tau\otimes M,\quad M\otimes^r N:=M\otimes N^\sigma,\quad N\in\mathcal{M}^H,\ M\in\mathcal{M}^H.$$

$\mathcal{M}^H$-双模范畴 $\mathcal{M}^H(\sigma,\tau)$ 的 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}^H}\big(\mathcal{M}^H(\sigma,\tau)\big)$ 等价于扭曲 Yetter–Drinfeld 模 ${}_H\mathcal{Y}D^H(\sigma,\tau)$ 所成的范畴。

注 2.6. 令 $\mathcal{C}$ 为有限张量范畴，并令 $X_\rho\in\mathcal{C}$ 为其特征可逆对象。Etingof、Niksch 和 Ostrik [17] 证明，对于每个 $V\in\mathcal{C}$，存在一个同构$\sim\gamma_V$: $V^{****}\otimes X_\rho \xrightarrow{\sim} X_\rho\otimes V$。此外，$(X_\rho,\gamma=\{\gamma_V\}_{V\in\mathcal{C}})$ 定义了 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ 中的一个对象，其中 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$-双模范畴，其底层范畴为 $\mathcal{C}$，右作用为通常的作用，左作用则沿四重对偶函子拉回；参见 [18, 注 4.13]。

如果 $\mathcal{C}$ 是有限维 Hopf 代数 H 上有限维余模的范畴，那么 $\mathcal{M}$ 等价于 $\mathcal{M}^H(\mathrm{id}_H,S^4)$ 的全子范畴，该子范畴由有限维对象组成，并且 $X_\rho\cong\int_r^H$ 是右 H-余模。然而，当 H 是无限维时，不能直接应用这一结论，因为有限维 H-余模的范畴不一定是有限张量范畴。

3. AS（余）Gorenstein Hopf 代数的 S^4 公式

我们证明了 AS-Gorenstein Hopf 代数的 S^4 公式，随后给出了 AS-co-Gorenstein Hopf 代数的相应公式。

3.1. **S^4-公式：AS-戈伦斯坦霍普夫代数。** 在本小节中，我们通过在其同调积分空间上构造一个 (id_H,S^4)-扭曲右左 Yetter–Drinfeld 模结构，推导 AS-戈伦斯坦霍普夫代数的反 antipode 的四次幂公式。我们的策略是在适当的 Yetter–Drinfeld 模范畴中，构造平凡模 ${}_\varepsilon\Bbbk$ 的自由 H-模分解，使得上同调 $\mathrm{Ext}^*_H({}_\varepsilon\Bbbk,H)$ 继承一个典范的扭曲 Yetter–Drinfeld 结构。我们首先构造一个函子 $H\boxtimes -$，它从左 H-余模范畴映射到扭曲 Yetter–Drinfeld 模范畴，并证明它是遗忘函子的左伴随（定理 3.1）。这一伴随关系给出了所需的 $\mathcal{F}$-分解（定理 3.2）。随后，我们在相关 Ext 群上构造相容的 H-模和 H^*-模结构，并证明它们与所选取的 $\mathcal{F}$- 分解无关（定理 3.5 ）。在有理性假设下，这些结构给出扭曲 Yetter–Drinfeld 模。结合这些准备性结果，我们证明本小节的主要结果（定理 3.9），并

通过在有限维情形下将我们的公式与经典的特征类群元素进行比较来得出结论。

设 H 是一个带反 antipode S 的 Hopf代数，且 σ 和 τ 是 H 的 Hopf 代数自同态。对于任意左 H-余模 N，在第一因子上进行乘法，使 $H\otimes N$ 具有左 H-模结构。此外，线性映射

$$H\otimes N\longrightarrow H\otimes H\otimes N,\quad h\otimes n\mapsto \tau(h_1)n_{-1}\sigma(S(h_3))\otimes h_2\otimes n_0$$

赋予 $H\otimes N$ 左 H-余模结构。直接验证可知，$H\otimes N$ 上的模结构和余模结构满足相容条件（2.4）。因此，$H\otimes N$ 是一个 (σ,τ)-扭曲左-左 Yetter–Drinfeld 模，我们将其记为 $H\boxtimes N$。这一构造产生一个函子

$$H\boxtimes -:{}^H\mathcal{M}\longrightarrow {}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau),\quad N\mapsto H\boxtimes N.$$

该函子具有一个遗忘模结构的右伴随。下面的引理是 [11, 推论 2。8] 的扭曲版本。按照惯例，我们在记号中省略遗忘函子。

引理 3.1。函子 $H\boxtimes -:{}^H\mathcal{M}\to {}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)$ 是遗忘函子 ${}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)\to {}^H\mathcal{M}$ 的左伴随；也就是说，存在一个自然同构

$$\Phi_{N,V}:\operatorname{Hom}_{{}^H\mathcal{M}}(N,V)\longrightarrow \operatorname{Hom}_{{}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)}(H\boxtimes N,V),\quad f\mapsto \big(h\otimes n\mapsto h\triangleright f(n)\big).$$

记 $\mathcal{F}$ 为 ${}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)$ 的全子范畴，它由形如 $H\boxtimes N$ 的对象组成，其中 N 是一个左 H-余模。

命题 3.2。设 $V\in {}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)$。

(1) 态射 $\varphi_V:=\Phi_{V,V}(\mathrm{id}_V)$ 是 $\mathcal{F}$-预覆盖 V；也就是说，对于每个 $F\in\mathcal{F}$，映射

$$(\varphi_V)_*:\operatorname{Hom}_{{}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)}(F,H\boxtimes V)\longrightarrow \operatorname{Hom}_{{}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)}(F,V)$$

是满射。

(2) 存在一个 $\mathcal{F}$-分解 V；也就是说，在 ${}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)$ 中存在一个（不一定正合的）复形，

$$\cdots\longrightarrow F_1\longrightarrow F_0\longrightarrow V\longrightarrow 0$$

使得每个 $F_i\in\mathcal{F}$，并且复形在对任意 $F\in\mathcal{F}$ 应用 $\operatorname{Hom}_{{}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)}(F,-)$ 后成为正合复形。

(3) 特别地，V 的 $\mathcal{F}$-分解可选为一个正合序列

$$\cdots\xrightarrow{d_{i+1}} H\boxtimes N_i\xrightarrow{d_i}\cdots\xrightarrow{d_2} H\boxtimes N_1\xrightarrow{d_1} H\boxtimes N_0\xrightarrow{d_0} V\longrightarrow 0$$

在 ${}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)$ 中，其中，对每个 $i\geqslant 0$，N_i 都是一个 H-余模，且限制映射 $d_i|_{1\boxtimes N_i}$ 是内射的。

(4) 如果 V 作为左 H-模是 $\mathrm{FP}_n(n\geqslant 0)$ 型的，那么存在一个正合序列

$$\cdots\longrightarrow H\boxtimes N_i\longrightarrow\cdots\longrightarrow H\boxtimes N_1\longrightarrow H\boxtimes N_0\longrightarrow V\longrightarrow 0$$

在 ${}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)$ 中，其中对 $0\leqslant i\leqslant n$，N_i 是有限维的。该序列是底层 H-模 V 的自由分解，但并未声称它是意义下的 $\mathcal{F}$-分解，如(2)所述。

证明。(1) 由于 $F\in\mathcal{F}$，存在一个 H-余模 N，使得 $F=H\boxtimes N$。对于任意 $f\in \widetilde{\operatorname{Hom}}_{{}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)}(F,V)$，定义 $\widetilde{f}$: $F\to H\boxtimes V,\ h\boxtimes n\mapsto h\boxtimes f(1\boxtimes n)$。于是 $f\in\widetilde{\operatorname{Hom}}_{{}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)}(F,H\boxtimes V)$。对于任意 $h\in H$ 和 $n\in N$，

$$(\varphi_V\widetilde{f})(h\boxtimes n)=\varphi_V\big(h\boxtimes f(1\boxtimes n)\big)=h\triangleright f(1\boxtimes n)=f(h\boxtimes n),$$

其中，最后一个等式由 f 的 H-线性性得出。因此 $\varphi_V f=f$，且 $(\varphi_V)_*$ 是满射。

(2) 这直接由 (1) 和 [15, 命题 8.1。3]。

(3) 令 $N_0 = V$和 $d_0 = \varphi_{N_0} = \Phi_{V,V}(\mathrm{id}_V)$。那么 d_0 是满射，其限制 $d_0|_{1\boxtimes N_0}$是内射。对 N_1 =Ker(d_0) 应用相同的构造并继续归纳，我们便得到所需的正合序列。

(4) 由于 V 作为左 H-模是 FP$_n$ 型的，因此 ${}_HV$ 是有限生成的。取 ${}_HV$的一组生成元 $\{x_1, \ldots, x_m\}$。根据有限性定理 [37, 5.1.1],，存在 V的一个有限维 H-子余模 N_0，其中包含 $\{x_1, \ldots, x_m\}$。令 ι: $N_0 \hookrightarrow V$表示包含映射。因此，存在一个态射 $d_0 := \Phi_{N_0,V}(\iota)$: $H \boxtimes N_0 \to V$，它属于 ${}^H_H\mathcal{Y}D(\sigma, \tau)$。由于 $HN_0 = V$，映射 d_0 是满射。现在假设 $n \geqslant 1$。模 $H \boxtimes N_0$ 是一个有限生成自由左 H-模，因此作为左 H-模是 FP$_{n-1}$ 型的。由 Schanuel 引理 [48, 命题 3.12], ，Ker(d_0) 作为左 H-模也是 FP$_{n-1}$ 型的。所需结论由对 n 的归纳得出。□

Bichon [4] 利用定理中的非扭曲情形的分解3.2 (3)，按照 [20]的意义计算了双代数上同调。

由于每个 $H \boxtimes N_i$ 都是自由左 H-模，因此可以用这样的分解计算 Ext 群。为了赋予这些 Ext 群扭曲Yetter–Drinfeld模结构，我们首先在一般情形下研究 Hom 空间 Hom$_H(V, X)$。

引理 3.3. 设 $V \in {}^H_H\mathcal{Y}D(\sigma, \tau)$，且 $X \in {}^H_H\mathcal{M}^H_H$是第 3] 节中的 Hopf 双模 [49,。

(1) Hom 空间 Hom$_H(V, X)$具有自然的右 H *-模结构，其定义如下:

$$(f \lhd h^*)(v) = f(v_0)_0\langle h^*, \sigma\Big(S^3\big(f(v_0)_1\big)\Big)S(v_{-1})\tau\big(f(v_0)_{-1}\big)\rangle. \tag{3.1}$$

(2) Hom$_H(V, X)$还具有自然的右 H-模结构，该结构由 X上的右 H-模结构诱导，即:

$$(f \lhd h)(v) = f(v) \lhd h. \tag{3.2}$$

这个右 H-模结构以及 H^*上的右 Hom$_H(V, X)$ 模结构满足式（2.7）中关于这对 $(\tau, \sigma S^4)$ Hopf 代数自同态的条件。

（3）如果 Hom$_H(V, X)$配备由式（3.1）定义的结构后是一个有理右 H^*-模，那么 Hom$_H($ $V, X)$配备由式（3.2）定义的右 H-模结构后，是 ${}^H\mathcal{Y}D_H(\tau, \sigma S^4)$中的一个对象。

（4）如果 V作为左 H-模是有限生成的，那么 Hom$_H(V, X)$ 是一个有理右 H^*-模，因此根据（3），属于 ${}^H\mathcal{Y}D_H(\tau, \sigma S^4)$。

证明。 （1）容易看出，方程（3.1）在 H^*上诱导出一个右模结构。利用反 antipode，Hom(V, X)。对于一个 2.4）式所述的 (σ, τ)-扭曲左-左 Yetter– Drinfeld 模，其相容条件可以等价地写成

$$(h \rhd v)_{-1} \otimes (h \rhd v)_0 = \tau(h_1)v_{-1}\sigma\big(S(h_3)\big) \otimes h_2 \rhd v_0 \quad (h \in H,\ v \in V). \tag{3.3}$$

要证明 (1)，只需证明对于任意 $f \in$Hom$_H(V, X)$ 和 $h^* \in H^*$， $f \lhd h^*$ 是 H-线性的。验证如下:

$$\begin{aligned}
&(f \lhd h^*)(h \rhd v)\\
&\overset{(3.1)}{=\!=} f\big((h \rhd v)_0\big)_0\langle h^*, \sigma\Big(S^3\big(f((h \rhd v)_0)_1\big)\Big)S\big((h \rhd v)_{-1}\big)\tau\big(f((h \rhd v)_0)_{-1}\big)\rangle\\
&\overset{(3.3)}{=\!=} f(h_2 \rhd v_0)_0\langle h^*, \sigma\Big(S^3\big(f(h_2 \rhd v_0)_1\big)\Big)S\Big(\tau(h_1)v_{-1}\sigma\big(S(h_3)\big)\Big)\tau\big(f(h_2 \rhd v_0)_{-1}\big)\rangle\\
&= h_3 \rhd f(v_0)_0\langle h^*, \sigma\Big(S^3\big(f(v_0)_1\big)S^3(h_4)S^2(h_5)\Big)S(v_{-1})\tau\big(S(h_1)h_2 f(v_0)_{-1}\big)\rangle\\
&= h \rhd f(v_0)_0\langle h^*, \sigma\Big(S^3\big(f(v_0)_1\big)\Big)S(v_{-1})\tau\big(f(v_0)_{-1}\big)\rangle
\end{aligned}$$

$= h \triangleright (f \triangleleft h^*)(v).$

(2) 显然，公式（3.2）在 H 上定义了一个右 H-模结构，其作用对象为 $\mathrm{Hom}_H(V,X)$。直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\Big(\big(f \triangleleft (\tau(h_1) \rightharpoonup h^*)\big) \triangleleft h_2\Big)(v)\\
&= \big(f \triangleleft (\tau(h_1) \rightharpoonup h^*)\big)(v) \triangleleft h_2\\
&\overset{(3.1)}{=\!=} f(v_0)_0 \triangleleft h_2\big\langle \tau(h_1) \rightharpoonup h^*, \sigma\Big(S^3\big(f(v_0)_1\big)\Big) S(v_{-1})\tau\big(f(v_0)_{-1}\big)\big\rangle\\
&= f(v_0)_0 \triangleleft h_2\big\langle h^*, \sigma\Big(S^4(h_4)S^3(h_3)S^3\big(f(v_0)_1\big)\Big) S(v_{-1})\tau\big(f(v_0)_{-1}\big)\tau(h_1)\big\rangle\\
&= (f \triangleleft h_1)(v_0)_0\big\langle h^* \leftharpoonup \sigma\big(S^4(h_2)\big), \sigma\Big(S^3\big((f \triangleleft h_1)(v_0)_1\big)\Big) S(v_{-1})\tau\big((f \triangleleft h_1)(v_0)_{-1}\big)\big\rangle\\
&= \Big((f \triangleleft h_1) \triangleleft \big(h^* \leftharpoonup \sigma(S^4(h_2))\big)\Big)(v).
\end{aligned}$$

因此，(2.7) 对以下这对 Hopf 代数自同态成立：$(\tau, \sigma S^4)$ 。

(3) 当右 H^*-模结构由左 H-余模结构诱导时，由 (2) 以及 (2.3) 与 (2.7) 的等价性可知。

(4) 根据定理 3.2(4)，存在一个有限维 H-余模 N 以及一个满射态射 $\pi: H \boxtimes N \to V$。因此，$\mathrm{Hom}_H(V,X)$ 是 $\mathrm{Hom}_H(H \boxtimes N, X)$ 的一个 H^*-子模。因此，只需证明 $\mathrm{Hom}_H(H \boxtimes N, X)$ 是一个有理右 H^*-模。令 N^* 为线性对偶 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(N, \Bbbk)$，并赋予由 $f_{-1}\langle f_0, n\rangle = S(n_{-1})\langle f, n_0\rangle$ 确定的左 H-余模结构，其中 $f \in N^*$ 和 $n \in N$ 为任意元素。考虑线性映射 $\Bbbk$

$$\Theta : N^* \otimes X \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(H \boxtimes N, X), \quad f \otimes x \mapsto \big(h \boxtimes n \mapsto f(n)h \triangleright x\big),$$

其中，$N^* \otimes X$ 赋予了由左 H-余模结构诱导的右 H^*-模结构

$$f \otimes x \mapsto \sigma(S^3(x_1)) f_{-1}\tau(x_{-1}) \otimes f_0 \otimes x_0.$$

映射 Θ 是双射。对于 $g = \Theta(f \otimes x)$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\big(g \triangleleft h^*\big)(h \boxtimes n)\\
&= g(h_2 \boxtimes n_0)_0\langle h^*, \sigma\Big(S^3\big(g(h_2 \boxtimes n_0)_1\big)\Big) S\big(\tau(h_1)n_{-1}\sigma(S(h_3))\big)\tau\big(g(h_2 \boxtimes n_0)_{-1}\big)\rangle\\
&= f(n_0)(h_2 \triangleright x)_0\langle h^*, \sigma\Big(S^3\big((h_2 \triangleright x)_1\big)\Big) S\big(\tau(h_1)n_{-1}\sigma(S(h_3))\big)\tau\big((h_2 \triangleright x)_{-1}\big)\rangle\\
&= f(n_0)(h_3 \triangleright x_0)\langle h^*, \sigma\big(S^3(h_4x_1)\big) S\big(\tau(h_1)n_{-1}\sigma(S(h_5))\big)\tau(h_2x_{-1})\rangle\\
&= f(n_0)(h \triangleright x_0)\langle h^*, \sigma\big(S^3(x_1)\big) S(n_{-1})\tau(x_{-1})\rangle\\
&= f_0(n)(h \triangleright x_0)\langle h^*, \sigma\big(S^3(x_1)\big) f_{-1}\tau(x_{-1})\rangle\\
&= \Theta(f_0 \otimes x_0)(h \boxtimes n)\langle h^*, \sigma\big(S^3(x_1)\big) f_{-1}\tau(x_{-1})\rangle\\
&= \Theta\big((f \otimes x) \triangleleft h^*\big)(h \boxtimes n).
\end{aligned}$$

因此，Θ 是 H^*-线性的，从而是右 H^*-模的同构。 □

我们使用以下比较引理，其证明是例行的，因而略去（参见[15,第 8 节1]）。

引理 3.4。 设$U, V \in {}^H_H\mathcal{Y}D(\sigma,\tau)$，设 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to U \to 0$是${}^H_H\mathcal{Y}D(\sigma,\tau)$中的一个复形，且对所有 $i \geqslant 0$都有 $P_i \in \mathcal{F}$，并设 $F_\bullet$ 是 V的一个 $\mathcal{F}$-分解。则 ${}^H_H\mathcal{Y}D(\sigma,\tau)$中的每个态射 $f: U \to V$都可提升为一个链映射 $P_\bullet \to F_\bullet$，且在同伦意义下唯一。

根据定理3.4， ${}^H_H\mathcal{Y}D(\sigma,\tau)$ 中的每个态射都可以提升为 $\mathcal{F}$-分解之间的链映射，且该提升在同伦意义下唯一。下述命题将使用这个提升。

12 QUANSHUI WU 和 RUIPENG ZHU

命题 3.5。设 $V \in {}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)$，且 $X \in {}^H_H\mathcal{M}^H_H$是一个 Hopf 双模。对于每个$i \geqslant 0$，以下陈述成立。

(1) 空间 $\mathrm{Ext}^i_H(V,X)$ 具有由（ H^*3.1）诱导的自然右 H-模结构，以及由（3.2）诱导的自然右 $\mathcal{F}$-模结构。此外，这两种结构均与定理 V 3.2(3) 中构造的 -分解的选择无关。(2) 空间 $\mathrm{Ext}^i_H(V,X)$ 是 $\widehat{{}^H\mathcal{YD}_H}(\tau,\sigma S^4)$中的一个对象。此外，若它作为右 H^*-模是有理的，则它是 ${}^H\mathcal{YD}_H(\tau,\sigma S^4)$中的一个对象。

证明。(1) 设 $F_\bullet$ 是 V 的一个 $\mathcal{F}$-分解，该分解由定理 3.2(3) 构造。由于 $F_\bullet$ 也是 V 作为 H-模的一个投射分解，上同调群 $\mathrm{H}^i\big(\mathrm{Hom}_H(F_\bullet,X)\big)$ 作为 $\Bbbk$-向量空间，与 H-模范畴中的通常 Ext 群 $\mathrm{Ext}^i_H(V,X)$ 一致。根据定理 3.3，复形 $\mathrm{Hom}_H(F_\bullet,X)$ 既是一个 H-复形，也是一个 H^*-复形。因此，其上同调群继承了右 H-模结构和右 H^*-模结构。

设 $F'_\bullet$是另一个 $\mathcal{F}$-分解 V。根据定理 3.4，存在一个链映射$f_\bullet\colon\ F'_\bullet \to F_\bullet$它提升了 id_V并且是同伦等价。因此

$$\mathrm{Hom}_H(f_\bullet,X)\colon\ \mathrm{Hom}_H(F_\bullet,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(F'_\bullet,X)$$

它也是一个同伦等价。由于每个 $\mathrm{Hom}_H(f_i,X)$ 同时具有 H-线性和 H^*-线性结构，诱导出的两个上同调群模结构是一致的。

(2) 根据定理 3.3(2)，$\mathrm{Hom}_H(F_\bullet,X)$ 的每一项都满足关于 $(\tau,\sigma S^4)$ 的 (2.7)。微分是两种模结构下的态射，因此恒等映射可下降到上同调上，并且 $\mathrm{Ext}^i_H(V,X)$ 属于 $\widehat{{}^H\mathcal{YD}_H}(\tau,\sigma S^4)$。如果这个右 H^*-模是有理的，那么如定理 3.3(3) 所述，$\mathrm{Ext}^i_H(V,X)$ 属于 ${}^H\mathcal{YD}_H(\tau,\sigma S^4)$。□

引理 3.6。设 H 是一个反 antipode 为 S 的 Hopf代数，设 $V \in {}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)$，并设 $X \in {}^H_H\mathcal{M}^H_H$是一个 Hopf 双模。若 V 作为 H-模是 FP_d 型，则对任意 $i \leqslant d$，$\mathrm{Ext}^i_H(V,X)$ 都是有理右H^*-模。

证明。由定理 3.2(4)，存在一个正合序列 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to V \to 0$在${}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)$中，其中 $P_i = H \boxtimes N_i$并且 N_i对于 $i \leqslant d$，它是有限维的。由定理 3.3(4)，$\mathrm{Hom}_H(P_i,X)$ 对于 $i \leqslant d$是有理右 H^*-模。由于有理模在子模和商模下封闭，$\mathrm{H}^i\big(\mathrm{Hom}_H(P_\bullet,X)\big)$ 对于 $i \leqslant d$是有理的。

设 $F_\bullet$ 是在定理 3.2(3) 中构造的 $\mathcal{F}$ 分解。由定理 3.4，存在一个链映射 $f_\bullet\colon P_\bullet \to F_\bullet$，它在 ${}^H_H\mathcal{YD}(\sigma,\tau)$ 中提升 id_V。由于 $P_\bullet$ 和 $F_\bullet$ 都是 V 作为左 H-模的投射分解，$f_\bullet$ 是 H-模复形之间的同伦等价。此外，每个 $\mathrm{Hom}_H(f_i,X)$ 都同时是 H-线性的和 H^*-线性的，因此 $f_\bullet$ 诱导出同构

$$\mathrm{H}^i\big(\mathrm{Hom}_H(P_\bullet,X)\big) \cong \mathrm{H}^i\big(\mathrm{Hom}_H(F_\bullet,X)\big) = \mathrm{Ext}^i_H(V,X)$$

它们是右 H-模和右 H^*-模之间的同构。特别地，对于 $i \leqslant d$，$\mathrm{Ext}^i_H(V,X)$ 是右 H^*-模中的有理模。□

引理 3.7。 [25, 命题 3.5。3] 设 C 是一个余代数，并令 C_0 表示其余根。那么 C_0 是余反射的，当且仅当每个有限维单右 C^*-模都是有理的；并且当且仅当每个有限维单左 C^*-模都是有理的。

引理 3.8。 [42, 推论 3.6 和 3.12] 设 C 为一个余代数，并令 $\mathcal{S}(C)$表示 C的单子余代数集合。假设 $\Bbbk$ 是无限的。若 $|\mathcal{S}(C)| \leqslant |\Bbbk|$，则余根 C_0 是余反射的。

确保余根为余反射的进一步条件见于 [25, 定理 3.7。5]。

现在我们可以陈述并证明主要结果：左 AS-Gorenstein 霍普夫代数的左同调积分空间具有规范的扭曲 Yetter–Drinfeld 结构，由此可得 S^4-公式。

定理 3.9. 设 H 是维数为 d 、反 antipode 为 S的左 AS-Gorenstein 霍普夫代数。假设 H 的余根是余反射的，或者 ${}_\varepsilon\Bbbk$ 是 FP_d 型。

(1) 左同调积分空间 $\int_H^\ell$是一个 (id_H, S^4)-扭曲的右-左 Yetter–Drinfeld 模。因此，存在一个类群元素 g 和一个特征 $\alpha\colon\ H \to \Bbbk$ ，使得

$$\int_H^\ell \cong \Bbbk g \text{ as a left } H\text{-comodule; } \int_H^\ell \cong \Bbbk_\alpha \text{ as a right } H\text{-module.}$$

(2) 对所有 $h \in H$,

$$S^4(h) = g(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})g^{-1}. \tag{3.4}$$

证明。**(1)** 注意到 $\Bbbk$ 是一个左-左 Yetter–Drinfeld 模，其左 H-模结构为平凡结构，左 H-余模结构也为平凡结构。应用定理3.5 ，取 $\sigma = \tau = \mathrm{id}_H$，可得

$$\mathrm{Ext}_H^i(\Bbbk, H) \in \widehat{{}^H\mathcal{YD}_H}(\mathrm{id}_H, S^4) \text{ for all } i \geqslant 0.$$

由于 H是维数为 d的左 AS-戈伦斯坦代数，空间 $\int_H^\ell = \mathrm{Ext}_H^d(\Bbbk, H)$ 是一维的，因此是单的。如果 H 的余根是余反射的，那么根据定理 3.7， $\int_H^\ell$ 作为右 H^*-模是有理的。如果 ${}_\varepsilon\Bbbk$ 是 FP_d 型，那么根据定理 3.6， $\int_H^\ell$ 作为右 H^*-模也是有理的。因此，在这两种情况下， $\int_H^\ell$作为右 H^*-模都是有理的，故有 $\int_H^\ell \in {}^H\mathcal{YD}_H(\mathrm{id}_H, S^4)$。于是，作为左 H-余模， $\int_H^\ell$ 具有形式 $\Bbbk g$ ，其中 $g \in G(H)$ 是某个类群元素；作为右 H-模， $\int_H^\ell$ 具有形式 $\Bbbk_\alpha$ ，其中 $\alpha \in G(H^\circ)$ 是某个特征。

(2) 固定一个非零元素 $t \in \mathrm{Ext}_H^d(\Bbbk, H)$。由相容条件（2.3）以及 $(\sigma, \tau) = (\mathrm{id}_H, S^4)$，我们得到

$$gh_1 \otimes t\alpha(h_2) = S^4(h_2)(t \lhd h_1)_{-1} \otimes (t \lhd h_1)_0 = S^4(h_2)t_{-1} \otimes t_0\alpha(h_1) = S^4(h_2)g \otimes t\alpha(h_1).$$

由于 $t \neq 0$，比较两边可得

$$gh_1\alpha(h_2) = \alpha(h_1)S^4(h_2)g. \tag{3.5}$$

因此，

$$S^4(h) = \alpha^{-1}(h_1)\alpha(h_2)S^4(h_3)gg^{-1} = \alpha^{-1}(h_1)gh_2\alpha(h_3)g^{-1} = g(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})g^{-1},$$

其中，第二个等式由（3.5）得到。因此，我们得到（3.4）。 □

更一般地，只要 $\mathrm{Ext}_H^i(\Bbbk, H)$ 是一维的，并且 H 的余根是余反射的，或者平凡左 H-模属于 FP_i 型，同样的论证便适用。

在定理 3.9中，类群元素 g 由 H 的一维左余模结构唯一确定，而特征 α 由 H 的一维右模结构唯一确定。 $\int_H^\ell$。

我们通过证明在有限维情形下， g aboverecover恢复经典的特征类群元素，来结束本小节。

注3.10。 设 H 是一个有限维 Hopf 代数，并设 t 是 H的一个非零左积分。令 g 表示 H的特征类群元素，其特征由下述恒等式刻画：$\langle f, g\rangle\lambda = f * \lambda$ 对任意右积分 $\lambda \in H^*$ 以及任意 $f \in H^*$。根据 [46, 定理10.5。4],$t_2 \otimes t_1 = t_1 \otimes S^2(t_2)g$。将 $\big((\mathrm{id}_H \otimes S^3) \circ \Delta\big) \otimes \mathrm{id}_H$ 应用于等式两边，得到

$$t_2 \otimes S^3(t_3) \otimes t_1 = t_1 \otimes S^3(t_2) \otimes S^2(t_3)g.$$

将最后两个张量因子相乘，得到

$$t_2 \otimes S^3(t_3)t_1 = t_1 \otimes S^3(t_2)S^2(t_3)g = t \otimes g.$$

这表明 g 与 H 通过$\int_H^\ell$ 在定理3.9中定义的左余作用所对应的类群元素-公式（3.4）在霍普夫代数 H 为有限维时与 Radford 公式一致。

3.2. S^4**-公式：AS-余 Gorenstein Hopf 代数**。本小节中，我们利用 AS-余 Gorenstein Hopf 代数的同调余积分，推导其反 antipode 四次幂的公式。我们的策略是在适当的 Yetter–Drinfeld 模范畴中，为平凡余模 $\Bbbk^\eta$ 构造一个由余自由 H-余模组成的余解，使得上同调$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{M}^H}(H,\Bbbk^\eta)$ 继承典范的扭曲 Yetter–Drinfeld 结构。我们首先构造一个函子 $-\boxplus H$，它将右 H-模映到 Yetter–Drinfeld 模，并证明它是遗忘函子的右伴随（定理3.11），由此得到所需的 $\mathcal{G}$-余解（定理3.12）。随后，我们为相关的 Ext 群赋予相容的 H-和 H^*-模结构，且这些结构不依赖于 $\mathcal{G}$-余解的选取（定理3.15）。在有理性假设下，这些结构给出扭曲 Yetter–Drinfeld 模。结合这些结果，我们证明本小节的主要结论（定理3.16）。

设 M 是一个右 H-模。赋予 $M\otimes H$ 由第二个因子上的余乘法诱导的右 H-余模结构。线性映射

$$M\otimes H\otimes H\longrightarrow M\otimes H,\qquad m\otimes x\otimes h\mapsto (m\otimes x)\lhd h:=m\lhd h_2\otimes \tau(S(h_1))x\sigma(h_3)$$

赋予 $M\otimes H$ 一个右 H-模结构。$M\otimes H$ 上的模结构和余模结构满足相容条件（2.2）。因此，$M\otimes H$ 是一个 σ,τ-扭曲右-右 Yetter–Drinfeld 模，记作 $M\boxplus H$。这一构造给出一个函子

$$-\boxplus H\colon\ \mathcal{M}_H\longrightarrow \mathcal{YD}^H_H(\sigma,\tau),\quad M\mapsto M\boxplus H.$$

此函子有一个左伴随，由遗忘余模结构给出。

引理 3.11. [11,推论 2.8]函子 $-\boxplus H{:}\mathcal{M}_H\to\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\tau)$ 是遗忘函子 $\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\tau)\to\mathcal{M}_H$ 的右伴随；也就是说，存在一个自然同构

$$\Psi_{V,M}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_H}(V,M)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\tau)}(V,M\boxplus H),\qquad f\mapsto \big(v\mapsto f(v_0)\otimes v_1\big).$$

令 $\mathcal{G}$表示 $\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\tau)$ 中形如 $M\boxplus H$ 的对象类，其中 M 是右 H-模。

命题 3.12。令 $V\in\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\tau)$。

(1) 态射 $\psi_V:=\Psi_{V,\,V}(\mathrm{id}_V)$ 是 $\mathcal{G}$-预包络 V；也就是说，对于每个 $G\in\mathcal{G}$，诱导映射

$$(\psi_V)^*\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\tau)}(V\boxplus H,G)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\tau)}(V,G)$$

是满射。

(2) 存在 $\mathcal{G}$-余解 V；也就是说，在 $\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\tau)$ 中存在一个（不一定正合的）复形 $0\to V\to G^0\to G^1\to\cdots$，使得每个 $G^i\in\mathcal{G}$，并且对于任意 $G\in\mathcal{G}$，对其应用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\,\tau)}(-,G)$ 后，该复形变为正合复形。

（3）特别地，$\mathcal{G}$的 V 余解可以选取为一个正合序列

$$0\longrightarrow V\xrightarrow{d^0} M^0\boxplus H\xrightarrow{d^1} M^1\boxplus H\xrightarrow{d^2}\cdots\xrightarrow{d^i} M^i\boxplus H\xrightarrow{d^{i+1}}\cdots$$

位于 $\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\tau)$中，其中，对于任意 $i\geqslant 0$，M^i是一个右 H-模，并且 $M^i\cong\mathrm{Im}(d^i)$作为 H-模。

证明。（1）由于 $G\in\mathcal{G}$，存在一个 H-模 M 使得 $G=M\boxplus H$。对于任意 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\,\tau)}(V,G)$，定义 $\widetilde{g}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\,\tau)}(V\boxplus H,G)$为 $\widetilde{g}(v\boxplus h)=\big((\mathrm{id}_M\otimes\varepsilon)g(v)\big)\otimes h$。对于任意 $v\in V$，

$$(\widetilde{g}\psi_V)(v)=\widetilde{g}(v_0\otimes v_1)=(\mathrm{id}_M\otimes\varepsilon)g(v_0)\otimes v_1=g(v),$$

其中最后一个等式由 H-余线性映射 g得到。因此，$\widetilde{g}\psi_V=g$ 且 $(\psi_V)^*$ 是满射。

(2) 这是 [15,命题 8.1.3]。

(3) 令 $M^0 = V$和 $d^0 := \psi_{M^0}$。由于 d^0是内射的， M^0可与 Im(d^0) 等同。令 $M^1 :=$ Coker(d^0)。对 M^1应用相同的构造并归纳进行，即可得到所需的正合序列。□

根据这一伴随，每个扭曲Yetter–Drinfeld模都存在一个由形如 $M \boxplus H$ 的模构成的余解，其中这些模作为 H-余模是余自由的，因而是内射的。由于每个 $M^i \boxplus H$ 作为右 H-余模都是内射的，因此这样的余解可用于计算 H-余模的 Ext 群。为了赋予这些 Ext 群扭曲Yetter–Drinfeld模结构，我们先在一般情形下研究 Hom 空间 Hom$_{\mathcal{M}^H}(X,V)$。

引理 3.13。设 $V \in {}^H_H\mathcal{YD}^H_H(\sigma,\tau)$且 $X \in {}^H_H\mathcal{M}^H_H$。

(1) Hom 空间 Hom$_{\mathcal{M}^H}(X,V)$ 具有自然的左 H-模结构，其定义为

$$(h \triangleright f)(x) = f\Big(\sigma\big(S^3(h_3)\big) \triangleright x \triangleleft \tau(h_1)\Big) \triangleleft S(h_2). \tag{3.6}$$

(2) Hom$_{\mathcal{M}^H}(X,V)$ 还具有自然的左 H^*-模结构，其定义为

$$(h^* \triangleright f)(x) = \langle h^*, x_{-1}\rangle f(x_0), \tag{3.7}$$

以及由此得到的 H-模和 H^*-模结构在Hom$_{\mathcal{M}^H}(X,V)$ 满足2.5) 对于这对$(\tau,\sigma S^4)$ Hopf代数自同态成立。

(3) 如果由 H^*定义的左Hom$_{\mathcal{M}^H}(X,V)$-模3.7)是有理的，那么Hom$_{\mathcal{M}^H}(X,V) \in {}_H\mathcal{YD}^H(\tau,\sigma S^4)$。

证明。(1) 显然，公式（3.6）在 H上定义了一个左Hom(X,V)-模结构。因此，只需证明对于任意$(h \triangleright f)$，它是 H-余线性的，其中 $f \in$Hom$_{\mathcal{M}^H}(X,V)$，且 $h \in H$。利用相容条件和反 antipode 公理，可得：

$$\begin{aligned}
&\rho\big((h \triangleright f)(x)\big)\\
&= \rho\Big(f\big(\sigma(S^3(h_3)) \triangleright x \triangleleft \tau(h_1)\big) \triangleleft S(h_2)\Big)\\
&\overset{(2.2)}{=\!=} f\Big(\sigma\big(S^3(h_5)\big) \triangleright x \triangleleft \tau(h_1)\Big)_0 \triangleleft S(h_3) \otimes \sigma\big(S^2(h_4)\big) f\Big(\sigma\big(S^3(h_5)\big) \triangleright x \triangleleft \tau(h_1)\Big)_1 \tau\big(S(h_2)\big)\\
&= f\Big(\sigma\big(S^3(h_7)\big) \triangleright x_0 \triangleleft \tau(h_1)\Big) \triangleleft S(h_4) \otimes \sigma\big(S^2(h_5)S^3(h_6)\big) x_1 \tau\big(h_2 S(h_3)\big)\\
&= f\Big(\sigma\big(S^3(h_3)\big) \triangleright x_0 \triangleleft \tau(h_1)\Big) \triangleleft S(h_2) \otimes x_1\\
&= (h \triangleright f)(x_0) \otimes x_1.
\end{aligned}$$

(2) 公式（3.7）赋予 Hom$_{\mathcal{M}^H}(X,V)$一个良定义的左 H^*-模结构，该结构由 H-余模结构在 X 上诱导而来。由于

$$\begin{aligned}
&\Big(h_1 \triangleright \big((h^* \leftharpoonup \sigma(S^4(h_2))) \triangleright f\big)\Big)(x)\\
&= \Big(\big(h^* \leftharpoonup \sigma(S^4(h_4))\big) \triangleright f\Big)\Big(\sigma\big(S^3(h_3)\big) \triangleright x \triangleleft \tau(h_1)\Big) \triangleleft S(h_2)\\
&= f\Big(\big(\sigma(S^3(h_3)) \triangleright x \triangleleft \tau(h_1)\big) \triangleleft \big(h^* \leftharpoonup \sigma(S^4(h_4))\big)\Big) \triangleleft S(h_2)\\
&= \big\langle h^* \leftharpoonup \sigma(S^4(h_6)), \sigma(S^3(h_5)) x_{-1} \tau(h_1)\big\rangle f\Big(\sigma\big(S^3(h_4)\big) \triangleright x_0 \triangleleft \tau(h_2)\Big) \triangleleft S(h_3)\\
&= \big\langle h^*, \sigma\big(S^4(h_6)S^3(h_5)\big) x_{-1} \tau(h_1)\big\rangle f\Big(\sigma\big(S^3(h_4)\big) \triangleright x_0 \triangleleft \tau(h_2)\Big) \triangleleft S(h_3)\\
&= \big\langle h^*, x_{-1}\tau(h_1)\big\rangle f\Big(\sigma\big(S^3(h_4)\big) \triangleright x_0 \triangleleft \tau(h_2)\Big) \triangleleft S(h_3)\\
&= \langle \tau(h_1) \rightharpoonup h^*, x_{-1}\rangle (h_2 \triangleright f)(x)\\
&= \Big(\big(\tau(h_1) \rightharpoonup h^*\big) \triangleright (h_2 \triangleright f)\Big)(x),
\end{aligned}$$

it 可知，式（2.5）对这对 Hopf 代数自同态 $(\tau, \sigma S^4)$ 成立。

(3) 这由 (2) 以及在左侧 H^*-模结构由右侧 H-余模结构诱导时，(2.1) 与 (2.5) 的等价性可得。□

我们使用以下比较引理，其证明是常规的，因此略去（参见[15,第 8 节。1]）。

引理 3.14。设 $U, V \in {}^H_H\mathcal{YD}^H(\sigma,\tau)$，设 $0 \to U \to G^0 \to G^1 \to \cdots$ 是 $\mathcal{G}$-余解，U，并设 $0 \to V \to Q^0 \to Q^1 \to \cdots$ 是 ${}^H_H\mathcal{YD}^H(\sigma,\tau)$ 中的一个复形，其中对所有 $i \geqslant 0$，都有 $Q^i \in \mathcal{G}$。那么，每个态射 $f\colon U \to V$（属于 ${}^H_H\mathcal{YD}^H(\sigma,\tau)$）都可提升为一个上链映射 $G^\bullet \to Q^\bullet$，且在同伦意义下唯一。

根据定理 3.14， ${}^H_H\mathcal{YD}^H(\sigma,\tau)$ 中的每个态射都可提升为 $\mathcal{G}$-余解的上链映射，且该提升在同伦意义下唯一。下面的命题将用到这个提升。

命题 3.15. 设 $V \in {}^H_H\mathcal{YD}^H(\sigma,\tau)$，且 $X \in {}^H_H\mathcal{M}^H$是一个 Hopf 双模。对于每个$i \geqslant 0$，以下结论成立。

(1) 空间 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^H}(X,V)$ 带有一个由 (3.7) 诱导的自然左 H^*-模结构，以及一个由 (3.6) 诱导的自然左 H-模结构。此外，这两种结构都不依赖于定理 3.12 中构造的 V 的 $\mathcal{G}$-余解的选取。(2) 空间 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^H}(X,V)$ 属于 ${}_H\mathcal{YD}^H(\tau,\sigma S^4)$。若该空间作为左$H^*$-模也是有理的，则它属于 ${}_H\mathcal{YD}^H(\tau,\sigma S^4)$。

证明。(1) 令 $G^\bullet$ 为定理 3.12(3) 中给出的 V 的 $\mathcal{G}$-余解。该余解是正合的，并且其中每一项作为右 H-余模都是内射的。因此，$\mathrm{H}^i\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X, G^\bullet)\big)$ 作为一个 $\Bbbk$-向量空间同构于通常的 Ext 群 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^H}(X,V)$，后者是在右 H- 余模范畴中计算的。由定理 3.13，复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X, G^\bullet)$ 同时是一个 H-复形和一个 H^*-复形。因此，其上同调群继承了左 H-模和左 H^*-模结构。

设 $G'^\bullet$ 是另一个 $\mathcal{G}$-余解， V。由定理 3.14，存在一个上链映射 $f^\bullet\colon\ G^\bullet \to G'^\bullet$，它提升了 id_V并且是一个同伦等价。因此

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X, f^\bullet)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X, G^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X, G'^\bullet)$$

也是一个同伦等价。由于每个 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X, f^i)$ 同时具有 H-线性和 H^*-线性结构，因此诱导出的两种上同调群模结构相同。

(2) 根据定理 3.13(2)，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(X, G^\bullet)$ 的每一项对于这一对 $(\tau, \sigma S^4)$ 都满足 (2.5)。微分是两种模结构的态射，因此这一恒等式传递到上同调上，并且 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^H}(X,V)$ 属于 ${}_H\mathcal{YD}^H(\tau,\sigma S^4)$。如果这个左 H^*-模是有理的，那么如定理 3.13(3) 所示，$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^H}(X,V)$ 属于 ${}_H\mathcal{YD}^H(\tau,\sigma S^4)$。□

现在我们为 AS-余 Gorenstein Hopf 代数建立一个类似于定理 3.9 的结果。

定理 3.16。设 H 是维数为 d、反 antipode 为S的右 AS-co-Gorenstein Hopf 代数。假设 H 的余根是余反射的。

(1) 右同调余积分空间 $\int^H_r$ 是一个 (id_H, S^4)-扭曲左-右 Yetter–Drinfeld 模。因此，存在一个类群元素 $\widetilde{g}$ 和一个特征 $\widetilde{\alpha}$，使得 $\int^H_r \cong \Bbbk\widetilde{g}$ 是右 H-余模，且 $\int^H_r \cong {}_{\widetilde{\alpha}}\Bbbk$ 是左 H-模。

(2) 对所有 $h \in H$，

$$S^4(h) = \widetilde{g}(\widetilde{\alpha} \rightharpoonup h \leftharpoonup \widetilde{\alpha}^{-1})\widetilde{g}^{-1}. \tag{3.8}$$

证明。 (1) 注意到 $\Bbbk$，赋予平凡的右 H-模和右 H-余模结构后，是一个右-右 Yetter–Drinfeld 模。将定理 3.15 应用于 $\sigma = \tau = \mathrm{id}_H$，得到

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^H}(H, \Bbbk) \in \widehat{{}_H\mathcal{Y}D^H}(\mathrm{id}_H, S^4) \quad \text{for all } i \geqslant 0.$$

由于 H 是维数为 d的右 AS-co-Gorenstein，因此空间 $\int_r^H = \mathrm{Ext}^d_{\mathcal{M}^H}(H, \Bbbk)$ 是一维的，因而是单的。此外， $\int_r^H$ 根据定理3.7是有理的，因此$\int_r^H \in {}_H\mathcal{Y}D^H(\mathrm{id}_H, S^4)$。于是，存在一个类群元素 $\widetilde{g} \in G(H)$和一个特征标 $\widetilde{\alpha}$： $H \to \Bbbk$ 使得 $\int_r^H \cong \Bbbk\widetilde{g}$ 作为右 H-余模，以及 $\int_r^H \cong {}_{\widetilde{\alpha}}\Bbbk$ 作为左 H-模。

(2) 取一个非零元素 $t \in \int_r^H$。由相容条件（2.1）及$(\sigma, \tau) = (\mathrm{id}_H, S^4)$，可得

$$\widetilde{\alpha}(h_1)\, t \otimes S^4(h_2)\widetilde{g} = (h_2 \triangleright t)_0 \otimes (h_2 \triangleright t)_1 h_1 = \widetilde{\alpha}(h_2)\, t \otimes \widetilde{g}\, h_1.$$

由于 $t \neq 0$，比较两边可得

$$\widetilde{g}\, h_1\, \widetilde{\alpha}(h_2) = \widetilde{\alpha}(h_1)\, S^4(h_2)\, \widetilde{g}.$$

这是将 3.5 中的 (g, α) 替换为 $(\widetilde{g}, \widetilde{\alpha})$所得的结果。定理 3.9(2) 的证明余下部分因此给出（3.8）。□

若 H 是维数为 0 的右 AS-余戈伦斯坦 Hopf 代数，即 H 是余 Frobenius 的，那么 $\int_r^H$ 是 H^* 的一维 H^*-子模。由于 H^* 的每个有限维 H^*-子模都是有理的（ [46, 命题 3.1.9(b)]），$\int_r^H$ 是有理的，因而是一个 (id_H, S^4)-扭曲的左-右 Yetter–Drinfeld 模。在此情形下， $\widetilde{g}$ 和 $\widetilde{\alpha}$ 与 [2] 中的特征群样元素重合；参见其中的 (1.8) 和引理 2.5。如定理 3.9 的证明所示，余 Frobenius Hopf 代数的 S^4 公式 [2, 定理 2.8] 直接由扭曲的 Yetter–Drinfeld 相容条件得到。

4. S^4公式的应用

本节介绍定理 S^4中建立的公式：3.9和定理 3.16。首先，我们将在定理 4.1 中证明，对于同调积分；并将在定理 4.2中证明，对于同调余积分，当 H 是交换的时，模结构是平凡的；当 H 是余交换的时，余模结构是平凡的。群代数是一个特例（定理 4.3）。随后，我们比较克莱因瓶基本群的 $(\int_H^\ell)^*$ 与 $\int_r^H$，以及量子化 Borel 子代数 $\mathcal{U}_q^{\geqslant 0}(\mathfrak{sl}_2)$。最后两个小节中，我们将公式 S^4应用于两个结构性问题：反 antipode 的双射性，以及 S^2的阶的有限性。

4.1. 同调（余）积分的平凡性以及 $(\int_H^\ell)^*$ 与 $\int_r^H$ 的比较。接下来的两个命题分别讨论这两种结构：如果 H 是交换的，那么其同调积分和余积分上的模结构是平凡的；而如果 H 是余交换的，那么余模结构是平凡的。

命题 4.1. 设 H 是一个 AS-戈伦斯坦霍普夫代数。
(1) 若 H 是交换的，则 $\int_H^\ell \cong \Bbbk_\varepsilon$ 是右 H-模。(2) 若 H 是余交换的，则 $\int_H^\ell$ 作为右 H^*-模是有理的，并且 $\int_H^\ell \cong {}^\eta\Bbbk$ 是左H-余模。

证明。 (1) 对于 $z \in H$，令 r_z: $H \to H, x \mapsto xz$ 表示由 z 给出的右乘法。根据定义， H-模 $\int_H^\ell = \mathrm{Ext}^d_H($ $\Bbbk, H)$ 上的模结构由 r_z 诱导。若 H 是交换的且 $z \in H$，则 r_z 与由 z 给出的左乘法一致，而后者是 H-线性的。在 $\Bbbk$ 的任意投射分解上，乘以 z 是一个提升 $\varepsilon(z)\,\mathrm{id}_\Bbbk$ 的链映射。因此， r_z 诱导 $\varepsilon(z)$ id

在 $\mathrm{Ext}_H^d(\Bbbk, H)$ 上。因此， $\int_H^\ell$ 上的 H-模结构经余单位分解，也就是说，作为 H-模的 $\int_H^\ell \cong \Bbbk_\varepsilon$。

(2) 对于任意左 H-余模 N，若其余作用由单位元 1_H 诱导，即 $n_{-1}\otimes n_0 = 1_H \otimes n$，则 $H\boxtimes N$ 上的余作用满足

$$\rho(h\boxtimes n) = h_1 n_{-1} S(h_3)\otimes h_2 \boxtimes n_0 = h_1 1_H S(h_3)\otimes h_2 \boxtimes n = h_1 S(h_2)\otimes h_3 \boxtimes n = 1_H \otimes h \boxtimes n,$$

其中第三个等号由 H 的余交换性得出。特别地，$H\boxtimes N$ 上的余作用是平凡的。现在考虑正合序列

$$\cdots \xrightarrow{d_{i+1}} H\boxtimes N_i \xrightarrow{d_i} \cdots \xrightarrow{d_2} H\boxtimes N_1 \xrightarrow{d_1} H\boxtimes N_0 \xrightarrow{d_0} \Bbbk \longrightarrow 0$$

由定理 3.2 得到，其中每个 $d_i|_{1\boxtimes N_i}$ 都是内射的。由于 $d_0|_{1\boxtimes N_0}$ 将 N_0 嵌入为 $\Bbbk$ 的子余模，作为左 H-余模， N_0 与 $\Bbbk$ 同构。因此， $H\boxtimes N_0$ 上的余作用是平凡的。由于 $d_1|_{1\boxtimes N_1}$ 是到 $H\boxtimes N_0$ 中的内射余线性映射， N_1 上的余作用也平凡。重复这一论证，归纳可得，对于每个 $i\geqslant 0$， $H\boxtimes N_i$ 上的余作用都是平凡的。对于任意 $h\in H$、 $h^*\in H^*$、 $n\in N_i$ 和 $f\in \mathrm{Hom}_H(H\boxtimes N_i, H)$，我们有

$$(f\lhd h^*)(h\boxtimes n) \overset{(3.1)}{=\!=} f(h\otimes n)_2\big\langle h^*, S^3\big(f(h\boxtimes n)_3\big)S(1_H)f(h\boxtimes n)_1\big\rangle = \langle h^*, 1\rangle f(h\boxtimes n).$$

因此，$\mathrm{Hom}_H(H\boxtimes N_i, H)$ 上的 H^*-作用可经由在单位元 1_H 处求值分解。由于这对每个 $i\geqslant 0$ 都成立，整个复形 $\mathrm{Hom}_H(H\boxtimes N_\bullet, H)$ 上的 H^*-作用及其上同调上的作用，也可经由在 1_H 处求值分解。因此， $\int_H^\ell \cong {}^\eta\Bbbk$ 作为左 H-余模。□

下面的命题是定理 4.1 的余 Gorenstein 类比；其证明使用定理 3.12 中的余解，代替定理 3.2中的分解。

命题 4.2. 设 H 是一个 AS-余 Gorenstein Hopf 代数。

(1) 若 H 是交换的，则 $\int_r^H \cong {}_\varepsilon\Bbbk$ 作为左 H-模。(2) 若 H 是余交换的，则 $\int_r^H$ 作为左 H^*-模是有理的，并且 $\int_r^H \cong \Bbbk^\eta$ 作为右H-余模。

证明。 (1) 应用定理 3.12于 $V=\Bbbk_\varepsilon^\eta \in \mathcal{Y}D_H^H$，我们得到一个正合序列

$$0\longrightarrow \Bbbk \xrightarrow{d^0} M^0\boxplus H \xrightarrow{d^1} M^1\boxplus H \xrightarrow{d^2}\cdots\xrightarrow{d^i} M^i\boxplus H \xrightarrow{d^{i+1}}\cdots$$

在 $\mathcal{Y}D_H^H$ 中，其中对每个 $i\geqslant 0$， $M^i\cong \mathrm{Im}(d^i)$ 是 H-模。对于任意带有平凡 H-作用的右 H-模 M， $M\boxplus H$ 上的右 H- 作用满足

$$(m\boxplus k)\lhd h = m\lhd h_2 \boxplus S(h_1)kh_3 = m\boxplus S(h_1)kh_2 = m\boxplus kS(h_1)h_2 = \varepsilon(h)(m\boxplus k),$$

第三个等式是由 H 的交换性得到的。正如定理 3.12 的证明中所示， M^0 同构于 $\Bbbk$，因此 $M^0\boxplus H$ 是平凡的 H-模。因此，其商 $\mathrm{Im}(d^1)$ 也是平凡的 H-模。此外，由于每个 $M^{i+1}\cong \mathrm{Im}(d^{i+1})$ 都是 H-模，由归纳可得，对每个 $i\geqslant 0$，$\mathrm{Im}(d^{i+1})$、 M^{i+1} 和 $M^{i+1}\boxplus H$ 都是平凡的。因此，每个 $M^i\boxplus H$ 上的 H-作用都是平凡的。此外，对于任意 $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H, M^i\boxplus H)$，作用 (3.6) 给出

$$(h\rhd f)(k) = f\big(S^3(h_3)kh_1\big)\lhd S(h_2) = f\big(S^3(h_2)kh_1\big) = f\big(kh_1S^3(h_2)\big) = \varepsilon(h)f(k),$$

因此，每个 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H, M^i\boxplus H)$ 上的 H-作用均由余单位 ε 导出。因此，整个复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H, M^\bullet\boxplus H)$ 上的 H-作用，以及其上同调 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^H}(H,\Bbbk)$ 上的作用，均通过余单位分解。由此得出，$\int_r^H \cong {}_\varepsilon\Bbbk$ 作为 H-模。

（2）应用定理 3.12于 $V=\Bbbk_\varepsilon^\eta \in \mathcal{Y}D_H^H$，我们得到一个正合序列

$$0\longrightarrow \Bbbk_\varepsilon^\eta \xrightarrow{d^0} G^0 \xrightarrow{d^1} G^1 \xrightarrow{d^2}\cdots\xrightarrow{d^i} G^i \xrightarrow{d^{i+1}}\cdots$$

在 $\mathcal{Y}D_H^H$ 中，其中每个 G^i 都是内射的 H-余模。对于任意 $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H, G^i)$， H-余线性映射 λ 与 H 的余交换性意味着

$$\lambda(h_2) \otimes h_1 = \lambda(h_1) \otimes h_2 = \lambda(h)_0 \otimes \lambda(h)_1.$$

因此，对于 $h^* \in H^*$，作用（3.7）给出

$$(h^* \triangleright \lambda)(h) = \langle h^*, h_1 \rangle \lambda(h_2) = \langle h^*, \lambda(h)_1 \rangle \lambda(h)_0 = h^* \triangleright \lambda(h).$$

因此，在每个 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H, G^i)$ 上的 H^*-作用 (3.7) 与由 G^i 上的 H^*-作用诱导的作用一致。由于 H 是余交换的，作用映射 $h^* \triangleright -$ 在每个 G^i 上都是右 H-余线性的，因此定义了 $G^\bullet$ 的一个 H-余线性链自同态 ξ。由于 $h^* \triangleright -$ 在 $\Bbbk_\varepsilon^\eta$ 上与 $\langle h^*, 1_H \rangle \mathrm{id}$ 一致， $\xi: G^\bullet \to G^\bullet$ 与 $\langle h^*, 1_H \rangle \mathrm{id}_{G^\bullet}$ 同伦。应用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H, -)$，我们得出，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H, G^\bullet)$ 的诱导链自同态 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H, \xi)$ 也与 $\langle h^*, 1_H \rangle \mathrm{id}$ 同伦。由于由 h^* 在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H, G^\bullet)$ 上的作用所定义的链自同态与 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H, \xi)$ 一致，它与 $\langle h^*, 1_H \rangle \mathrm{id}$ 同伦。因此， h^* 在 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^H}(H, \Bbbk^\eta)$ 上的诱导作用由标量 $\langle h^*, 1_H \rangle$ 给出；等价地，$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^H}(H, \Bbbk^\eta)$ 上的 H^*-作用由平凡的 H-余作用诱导。根据 AS-余戈伦斯坦假设， $\int_r^H$ 是一维的。因此，作为 H-余模， $\int_r^H \cong \Bbbk^\eta$。□

定理 4.2(2) 给出了以下推论中的余模表述。

推论 4.3。设 G 为一个群。则 $\int_r^{\Bbbk G}$ 作为左 $(\Bbbk G)^*$-模是有理的，并且 $\int_r^{\Bbbk G} \cong {}_\varepsilon\Bbbk^\eta$ 作为 Yetter–Drinfeld 模也是有理的。

证明。作为余代数，群代数 $\Bbbk G$ 是余交换的，并分解为一维子余代数 $\Bbbk g$ $(g \in G)$ 的直和。设 $\lambda \in \mathrm{Hom}(\Bbbk G, \Bbbk)$ 为由下式定义的线性映射

$$\lambda(g) = \begin{cases} 1, & g = 1_G, \\ 0, & g \neq 1_G. \end{cases}$$

由于 $\Delta(g) = g \otimes g$，对于每个 $f \in (\Bbbk G)^*$ 以及每个 $g \in G$，都有 $(\lambda * f)(g) = \lambda(g)\, f(g) = \langle f, 1_G \rangle \lambda(g)$。因此 $\lambda * f = \langle f, 1_G \rangle \lambda$，所以 $\Bbbk G$ 是余 Frobenius 的，从而是维数为 0 的 AS-co-Gorenstein。特别地，$\int_r^{\Bbbk G} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^{\Bbbk G}}(\Bbbk G, \Bbbk)$。映射 λ 是 $\Bbbk G$-余线性的。对于任意 $g, h \in G$，定理 3.13 中的模作用给出

$$(g \triangleright \lambda)(h) = g \triangleright \lambda(g^{-1}hg) = \lambda(g^{-1}hg) = \begin{cases} 1, & h = 1_G, \\ 0, & h \neq 1_G. \end{cases}$$

因此， $g \triangleright \lambda = \lambda$，所以 $\int_r^{\Bbbk G} \cong {}_\varepsilon\Bbbk$ 作为 $\Bbbk G$-模。结合定理4.2(2)，这表明 $\int_r^{\Bbbk G} \cong {}_\varepsilon\Bbbk^\eta$ 是 Yetter–Drinfeld 模。□

当 H是有限维时，可以证明$(\int_H^\ell)^* \cong \int_r^H$作为$(\mathrm{id}_H, S^4)$-扭曲左-右 Yetter–Drinfeld 模，其中$(\int_H^\ell)^*$上的扭曲Yetter–Drinfeld模结构由定理2.5给出。下面的例子表明，这种对偶性通常并不成立，即使对于诺特 AS-正则群代数也是如此。

例 4.4（克莱因瓶）。假设 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$。令 K 为克莱因瓶，并设 $G = \pi_1(K)$。那么

$$G \cong \langle a, b \mid aba^{-1} = b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \rtimes_{-1} \mathbb{Z}.$$

由于 G 是多循环的， $\Bbbk G$ 是一个诺特群代数，依据 [36, 定理1.5。12]。存在一个正合序列

$$0 \longrightarrow \Bbbk G \boxtimes N_2 \xrightarrow{d_2} \Bbbk G \boxtimes N_1 \xrightarrow{d_1} \Bbbk G \boxtimes N_0 \xrightarrow{d_0} \Bbbk \longrightarrow 0$$

在 ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ 中，其中 $N_0 = \Bbbk e_0$、 $N_1 = \Bbbk e_{11} \oplus \Bbbk e_{12}$, 和 $N_2 = \Bbbk e_2$； N_i 上的 $\Bbbk G$-余作用由单位元 1_G 诱导；边界同态由下式确定

$$d_0(1 \boxtimes e_0) = 1, \qquad d_1(1 \boxtimes e_{11}) = (a-1) \boxtimes e_0, \qquad d_1(1 \boxtimes e_{12}) = (b-1) \boxtimes e_0,$$
$$d_2(1 \boxtimes e_2) = (b-1) \boxtimes e_{11} + (ab^{-1}+1) \boxtimes e_{12}.$$

将函子 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(-, \Bbbk G)$ 应用于此投射分解，我们得到复形

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(\Bbbk G \boxtimes N_0, \Bbbk G) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(\Bbbk G \boxtimes N_1, \Bbbk G) \xrightarrow{d_2^*} \mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(\Bbbk G \boxtimes N_2, \Bbbk G) \longrightarrow 0.$$

对上同调的直接计算表明

$$\mathrm{Ext}^i_{\Bbbk G}({}_\varepsilon\Bbbk, \Bbbk G) \cong \begin{cases} 0, & i \neq 2, \\ \Bbbk G / \big((b-1)\Bbbk G + (ab^{-1}+1)\Bbbk G\big) \cong \Bbbk_\alpha, & i = 2, \end{cases}$$

其中， α 是由 $\alpha(a) = -1$ 和 $\alpha(b) = 1$定义的 $\Bbbk G$ 的特征。因此， $\Bbbk G$ 是维数为 2 的 AS-正则代数。根据定理 4.1(2)， $\int^\ell_{\Bbbk G} \cong {}^\eta\Bbbk$ 作为余模。由此，$(\int^\ell_{\Bbbk G})^* \cong ({}^\eta\Bbbk_\alpha)^* \cong_\alpha \Bbbk^\eta \ncong {}_\varepsilon\Bbbk^\eta$，而根据定理 4.3， $\int_r^{\Bbbk G} \cong {}_\varepsilon\Bbbk^\eta$ 。因此，存在一个诺特 AS-正则群代数 $\Bbbk G$，使得$(\int^\ell_{\Bbbk G})^* \ncong \int_r^{\Bbbk G}$。

与前面的反例不同，下面的例子表明，对量子化 Borel 子代数 $\mathcal{U}_q^{\geqslant 0}(\mathfrak{sl}_2)$，对偶 $(\int^\ell_H)^* \cong \int_r^H$仍然成立；该子代数是维数为 2 的 AS-正则代数，也是维数为 1 的 AS-余正则代数。

例 4.5。 假设 $q \in \Bbbk^\times$ 不是单位根。量子化 Borel 子代数$H := \mathcal{U}_q^{\geqslant 0}(\mathfrak{sl}_2)$ 是由 E, K, K^{-1} 生成并满足以下关系的 $\Bbbk$-代数:

$$KK^{-1} = 1 = K^{-1}K, \qquad KEK^{-1} = q^2E.$$

余代数结构定义为

$$\Delta(K) = K \otimes K, \qquad \Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E, \qquad \varepsilon(K) = 1, \qquad \varepsilon(E) = 0,$$

反 antipode S 定义为 $S(K) = K^{-1}$ 以及 $S(E) = -K^{-1}E$。

The 代数 H 是维数为 2 的诺特 AS-正则代数。存在一个正合序列 e

$$0 \longrightarrow H \boxtimes N_2 \xrightarrow{d_2} H \boxtimes N_1 \xrightarrow{d_1} H \boxtimes N_0 \xrightarrow{d_0} \Bbbk \longrightarrow 0$$

在 ${}^H_H\mathcal{YD}$中，其中 $N_0 = \Bbbk e_0$、 $N_1 = \Bbbk e_{11} \oplus \Bbbk e_{12}$ 和 $N_2 = \Bbbk e_{2}$。 H-余作用在 N_i 上的定义为

$$\rho(e_0) = 1 \otimes e_0, \qquad \rho(e_{11}) = 1 \otimes e_{11}, \qquad \rho(e_{12}) = K \otimes e_{12} - E \otimes e_{11}, \qquad \rho(e_2) = K \otimes e_2,$$

且边界同态由下式确定

$$d_0(1 \boxtimes e_0) = 1, \qquad d_1(1 \boxtimes e_{11}) = (K-1) \boxtimes e_0, \qquad d_1(1 \boxtimes e_{12}) = E \boxtimes e_0,$$
$$d_2(1 \boxtimes e_2) = E \boxtimes e_{11} + (1 - q^{-2}K) \boxtimes e_{12}.$$

对该投射分解应用 $\mathrm{Hom}_H(-, H)$ 可得复形

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(H \boxtimes N_0, H) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_H(H \boxtimes N_1, H) \xrightarrow{d_2^*} \mathrm{Hom}_H(H \boxtimes N_2, H) \longrightarrow 0.$$

直接计算表明

$$\mathrm{Ext}^i_H({}_\varepsilon\Bbbk, H) = 0 \qquad \text{for all } i \neq 2.$$

此外， $\int^\ell_H = \mathrm{Ext}^2_H({}_\varepsilon\Bbbk, H) \cong \Bbbk_\alpha$作为右 H-模，其中 $\alpha(K) = q^2$且 $\alpha(E) = 0$，并且 $\int^\ell_H \cong \Bbbk K^{-1}$ 作为左 H-余模。

接下来，我们证明 H 是维数为 1 的 AS-余正则代数，并计算右同调余积分 $\int_r^H$。令 $\Bbbk[x]$ 为由 $x = K^{-1}E$生成的 H 的子代数。子代数 $\Bbbk[x]$是 H 的右余理想，并且在 H的右伴随作用 $b \lhd h = S(h_1)bh_2$ 下保持不变。

由于配备了右伴随作用的 Hopf代数本身是其上的右-右 Yetter–Drinfeld 模，因此 $\Bbbk[x]$ 是 $\mathcal{Y}D_H^H$中的 H的子对象。此外， $H=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}K^n\Bbbk[x]$ 作为右余模，且 H 作为其自身上的右余模是内射的；因此，每个直和项$K^n\Bbbk[x]$ 都是内射的。令 π_n 表示从 H 到 $K^n\Bbbk[x]$的典范投影。令 $p=q^2$。设$k_p=1+p+\cdots+p^{k-1}$，$0!_p=1$，并且对于任意 $k\geqslant 1$，有 $k!_p=1_p2_p\cdots k_p$。定义高斯二项式系数为 $\binom{n}{k}_p=\frac{n!_p}{k!_p(n-k)!_p}$，其中 $0\leqslant k\leqslant n$。在 $K^{-1}\Bbbk[x]$ 上赋予如下右 H-模结构：

$$(K^{-1}x^n)\lhd K=q^{-2(n+1)}K^{-1}x^n,\qquad (K^{-1}x^n)\lhd E=(q^{-2(n+1)}-q^2)K^{-1}x^{n+1}$$

对所有 $n\geqslant 0$。右侧 H-余作用在 $K^{-1}\Bbbk[x]$ 上是 Δ的限制。结合上面的右作用，它满足 (2.2)，因此 $K^{-1}\Bbbk[x]$是 $\mathcal{Y}D_H^H$中的一个对象。存在一个正合序列$\mathcal{Y}D_H^H$：

$$0\longrightarrow \Bbbk_\varepsilon^\eta\xrightarrow{d^0}\Bbbk[x]\xrightarrow{d^1}K^{-1}\Bbbk[x]\longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

边界同态由下式给出

$$d^0(1)=1,\qquad d^1(x^n)=\begin{cases}0, & n=0,\\ n_{q^2}K^{-1}x^{n-1}, & n\geqslant 1.\end{cases}$$

由于 (4.1) 作为右 H-模的序列是分裂正合的，对其应用 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{M}_H}(-,M)$，对于每个右 H-模 M 都得到一个正合序列。由定理 3.11 的自然同构，$\mathrm{Hom}^{\mathcal{Y}D_H^H}(-,M\boxplus H)\cong\mathrm{Hom}^{\mathcal{M}_H}(-,M)$。因此，对 (4.1) 应用 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{Y}D_H^H}(-,G)$ 同样会对每个 $G=M\boxplus H\in\mathcal{G}$ 得到一个正合序列，并且 (4.1) 是 $\mathcal{Y}D_H^H$ 中 $\Bbbk_\varepsilon^\eta$ 的一个 $\mathcal{G}$-余解。由于它还是长度为 1 的 $\Bbbk_\varepsilon^\eta$ 的内射分解，平凡 H-余模 $\Bbbk$ 的内射维数至多为 1。

对于任意 $f\in\mathrm{Hom}^{\mathcal{M}^H}(H,\Bbbk[x])$，都有

$$f(K^mx^n)=\begin{cases}\binom{n}{n-m}_{q^2}\varepsilon(f(K^mx^m))x^{n-m}, & 0\leqslant m\leqslant n\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

and

$$(d^1\circ f)(K^mx^n)=\begin{cases}\binom{n}{n-m}_{q^2}(n-m)_{q^2}\varepsilon(f(K^mx^m))K^{-1}x^{n-m-1}, & 0\leqslant m<n\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

若 $d^1\circ f=0$，则将 $n=m+1$代入上述公式可得，对于所有 $m\geqslant 0$均有 $\varepsilon(f(K^mx^m))=0$，从而 $f=0$。因此 $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{M}^H}(H,\Bbbk)=0$。此外，对于任意 $f\in\mathrm{Hom}^{\mathcal{M}^H}(H,\Bbbk[x])$，都有 $d^1\circ f\neq\pi_{-1}$。另一方面，对于任意 $g\in\mathrm{Hom}^{\mathcal{M}^H}(H,K^{-1}\Bbbk[x])$，定义 $f\in\mathrm{Hom}^{\mathcal{M}^H}(H,\Bbbk[x])$ 为

$$f(K^mx^n)=\begin{cases}\binom{n}{n-m}_{q^2}\frac{1}{(m+1)_{q^2}}\varepsilon(g(K^mx^{m+1}))x^{n-m}, & 0\leqslant m\leqslant n\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

直接计算表明，f 是 H-余线性的，并且 $\varepsilon(g(K^{-1}))\pi_{-1}+d^1\circ f=g$。因此，$\pi_{-1}$的类生成上同调群 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}^H}(H,\Bbbk)$；也就是说，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}^H}(H,\Bbbk)=\Bbbk\pi_{-1}$。此外，平凡 H-余模 $\Bbbk$ 的内射维数至少为 1。因此，H 是维数为 1 的 AS-余正则对象。令 $\int_r^H=\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}^H}(H,\Bbbk)$。

对于任意 $h^*\in H^*$，我们有

$$(h^*\rhd\pi_{-1})(K^{-1})=\langle h^*,K^{-1}\rangle\pi_{-1}(K^{-1}),$$

因此 $h^*\rhd\pi_{-1}-\langle h^*,K^{-1}\rangle\pi_{-1}\in\mathrm{Im}(d^1_*)$。于是，作为右 H-余模，$\int_r^H=\Bbbk\pi_{-1}\cong\Bbbk K^{-1}$。令$\widetilde{\alpha}:H\to\Bbbk$ 为满足 $\int_r^H\cong{}_{\widetilde{\alpha}}\Bbbk$ 的特征。由于

$$(K\rhd\pi_{-1})(K^{-1})=\pi_{-1}(K^{-1}K^{-1}K)\lhd K^{-1}=K^{-1}\lhd K^{-1}=q^2K^{-1},$$

由此可得 $K \triangleright \pi_{-1} - q^2\pi_{-1} \in \mathrm{Im}(d_*^1)$，进而 $\widetilde{\alpha}(K) = q^2$。此外，$\widetilde{\alpha}(E) = \widetilde{\alpha}(KEK^{-1}) = \widetilde{\alpha}(q^2E)$。由于 $q^2 \neq 1$，因此 $\widetilde{\alpha}(E) = 0$。于是，$(\int_H^\ell)^* \cong \int_r^H$是 ${}_H\mathcal{Y}D^H(\mathrm{id}_H, S^4)$ 中的对象，其中 $(\int_H^\ell)^*$ 上的扭曲左-右 Yetter–Drinfeld 模结构由定理 2.5 给出。

4.2. **反 antipode 的双射性**。作为 S^4-公式的第一个推论，我们考察反 antipode 的双射性。设 H 是域 $\Bbbk$ 上带有反 antipode S 的 Hopf代数。在若干情形下，已知反 antipode 是双射的。

注 4.6。设 H 是带有反 antipode S 的 Hopf代数。那么，在以下每种情形中，S 都是双射的：

（1） [30, 命题 2] H 是有限维的；（2） [44, 命题 2] H 是余 Frobenius 的，即 H^* 含有非零积分；（3） [45] (H, R)是拟三角Hopf代数；（4） [52, 定理 A] H 可以嵌入到一个左完美环中，Q 使得 Q 是 H 作为右 H-模的本质扩张；（5） [34, 定理 0。2] H 是 AS-Gorenstein 的，且每个右可逆元都是正则元；（6） [51, 定理 6。1] H 是右诺特或左诺特的。

在情形（1）中，双射性也可由（1.1）推出。在情形（2）中，同样可由一个形状相同的公式推出。在这两个公式中，由右端定义的映射是由一个类群元素的共轭与双射 $h \mapsto \alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1}$, 的复合，因此该映射是双射。所以 S^4是双射，从而 S 也是双射。

对于任意 Hopf代数 H，双代数 $H^{\mathrm{op\,cop}}$赋予相反乘法和相反余乘法后，是一个反 antipode 为 S的 Hopf代数。因此，H 是左 AS（余-）戈伦斯坦，当且仅当 $H^{\mathrm{op\,cop}}$ 是右 AS（余-）戈伦斯坦。下面的命题由定理 S^4中建立的 3.9 -公式以及定理 3.16推出。

命题 4.7。（1）设 H 是一个维数为 d的左 AS-Gorenstein 霍普夫代数。如果 H 的余根是余反射的，或者 ${}_\varepsilon\Bbbk$ 是 FP_d型的，那么 H 的反 antipode 是双射。
(2) 设 H 是右 AS-co-Gorenstein 霍普夫代数。如果 H 的余根是余反射的，那么 H 的反 antipode 是双射。

证明。(1) 根据定理 3.9,

$$S^4(h) = g\,(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})\,g^{-1} \qquad \text{for all } h \in H.$$

映射 $h \mapsto ghg^{-1}$ 和 $h \mapsto \alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1}$ 都是双射，因此 S^4 也是双射，进而 S 也是双射。
(2) 将同样的论证应用于 (3.8)，可知 S 是双射。 □

任何满足定理 H 中条件 4.7(1) 的左 AS-Gorenstein 霍普夫代数都有双射 antipode S。由于 S 诱导了代数同构 $H \cong H^{\mathrm{op}}$，该同构交换左、右 AS-Gorenstein 条件，H 也满足右 AS-Gorenstein 条件，因此是 AS-Gorenstein。任何满足定理 H 中条件 4.7(2) 的右 AS-co-Gorenstein 霍普夫代数都有双射 antipode S。由于 S 诱导了余代数同构 $H \cong H^{\mathrm{cop}}$，该同构交换左、右 AS-co-Gorenstein 条件，H 也满足左 AS-co-Gorenstein 条件，因此是 AS-co-Gorenstein。

注 4.8。设 H 是维数为 d的 AS-戈伦斯坦霍普夫代数。假设 H 的余根是余反射的，或者 ${}_\varepsilon\Bbbk$ 是 FP_d 型。
(1) 设 $K = H^{\mathrm{op\,cop}}$。反 antipode 给出一个霍普夫同构 $S\colon H \to K$。作为代数，K与 H^{op}一致，因此 $\int_H^r = \mathrm{Ext}^d_{H^{\mathrm{op}}}(\Bbbk, H)$ 是 K的左同调积分空间。由定理 3.9，$\int_H^\ell$是一个 (id_H, S^4)-扭曲的右-左 Yetter–Drinfeld 模。记 $t \lhd h$

其右 H-作用和 $t \mapsto t_{-1} \otimes t_0$ 其左 H-余作用。沿 S 传递得到右 K-作用和左 K-余作用

$$t \lhd_K h = t \lhd S(h), \qquad t \mapsto S(t_{-1}) \otimes t_0$$

关于 $\int_H^r$。右 K-作用就是左 H-作用，而左 K-余作用就是右 H-余作用，因此这些变为

$$h \rhd t = t \lhd S^{-1}(h), \qquad t \mapsto t_0 \otimes S(t_{-1})$$

在这种左右转换下，$\int_H^\ell$ 是 H 上的一个 (S^4, id_H)-扭曲左-右 Yetter–Drinfeld 模。如果 $\int_H^\ell \cong \Bbbk_\alpha$ 是一个右 H-模，那么 $\int_H^r \cong {}_{\alpha^{-1}}\Bbbk$ 是一个左 H-模。如果 $\int_H^\ell \cong \Bbbk g$是一个左 H-余模，那么 $\int_H^r \cong \Bbbk g^{-1}$ 是一个右 H-余模。

（2）左同调积分空间 $\int_H^\ell$ 可以看作右 $H^{\circ}\#_{\mathrm{id}_H,\, S^4}H$-模。关于 S^4 的公式（3.4）随后可以写成

$$S^4(h) = (\alpha\#g)(1\#h)(\alpha\#g)^{-1} = (\alpha\#g)(1\#h)(\alpha^{-1}\#g^{-1}),$$

其中，H 通过 $h \mapsto 1\#h$与 $H^{\circ}\#_{\mathrm{id}_H,S^4}H$ 相认同为一个子代数。

4.3. 的阶 S^2。本小节中，我们应用 S^4-公式来考察 antipode 何时具有有限阶。以下结果归功于 Brown 和 Zhang。

命题 4.9。 [8, 命题 6。2] 设 H 是一个诺特仿射 PI Hopf 代数。若 H 具有有限全局维数或是其中心上的有限模，则 S在 H 上的某个幂是一个内自同构。

在同一篇论文中，Brown 和 Zhang 提出了以下问题。

问题 4.10。 [8, 问题6.2] 若 H 是一个诺特仿射 PI Hopf 代数，H 的 antipode 是否具有有限阶?

-公式为定理4.10提供了一个部分答案。我们先概述证明策略。根据 S^4-公式（定理3.9 或定理3.16），存在一个类群元素 $g \in G(H)$和一个特征 $\alpha\colon H \to \Bbbk$ 使得

$$S^4(h) = g\,(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})\,g^{-1} \quad \text{for all } h \in H.$$

令 $\mathrm{ad}_g, \mathrm{ad}_\alpha \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{Hopf}}(H)$ 表示这些自同构

$$\mathrm{ad}_g(h) = ghg^{-1}, \quad \mathrm{ad}_\alpha(h) = \alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1},$$

分别。因此，S^4-公式可以改写为

$$S^4 = \mathrm{ad}_g \circ \mathrm{ad}_\alpha\,.$$

由于 ad_g 和 ad_α 可交换，当 ad_g 和 ad_α 均具有有限阶时，S^4 也具有有限阶。因此，要证明 S^2 具有有限阶，只需证明 ad_g 和 ad_α 均具有有限阶。

令 B 为 H 的一个右余理想子代数，并记 $B^+ = B \cap \mathrm{Ker}\ \varepsilon$。如果 B 在 H 中是中心的，那么 $HB^+ = B^+H$，因此 HB^+ 是 H 的双边理想。此外，HB^+ 是一个余理想：$\varepsilon(HB^+) = 0$，且 $\Delta(HB^+) \subseteq HB^+ \otimes H + H \otimes HB^+$。由于 $\Delta(B) \subseteq B \otimes H$，$S(b) = (\varepsilon(b_1) - b_1)S(b_2) \in B^+H$ 对于 $b \in B^+$ 成立。因此，$S(HB^+) \subseteq B^+H = HB^+$。于是，$HB^+$ 在反 antipode 作用下保持不变，因此是 H 的霍普夫理想。最后，如果 H 作为一个 B-模是有限生成的，那么H/HB^+ 在 $B/B^+ = \Bbbk$ 上是有限生成的，因而是有限维的。

命题4.11。 设 H 是一个维数为 d、反 antipode 为 S 的 AS-戈伦斯坦霍普夫代数。假设以下条件成立。

(1) H 是中心右余理想子代数 B 上的有限生成模 .

(2) H 作为左 B-模是忠实平坦的。(3) H 的余根是余反射的，

或者 ${}_\varepsilon\Bbbk$ 是 FP_d 型。

那么 S^2 的阶有限，且整除 $2\dim_{\Bbbk} H$，其中 $\overline{H} := H/H\overline{B}^+$。

证明。令 $\pi\colon\ H \to \overline{H},\ h \mapsto \overline{h}$为典范商 Hopf代数同态。置$n := $维数$_{\Bbbk} H$。令 $g \in G(H)$ 为类群元素，并令 $\alpha\colon\ H \to \Bbbk$ 为定理 3.9 所给出的特征。则（3.4）可改写为

$$S^4 = \mathrm{ad}_g \circ \mathrm{ad}_\alpha = \mathrm{ad}_\alpha \circ \mathrm{ad}_g\,.$$

由于有限维 Hopf 代数作为其任一 Hopf 子代数上的模都是自由的，见 [37, 定理 3.1。5], 因此 $G(H)$ 的阶整除 n。g 的像 $\overline{g}$ 在 $\overline{H}$ 中是一个类群元素，故$\overline{g}^n = 1_{\overline{H}}$;也就是说，$\overline{g^n} \in 1_H + HB^+$。于是

$$(\pi \otimes \mathrm{id}_H)\Delta(g^n) = \overline{g^n} \otimes g^n = \overline{1_H} \otimes g^n,$$

因此 $g^n \in {}^{\mathrm{co}\overline{H}}H$。由于 H 在 B上忠实平坦，Takeuchi的对应 [54, 定理 1]推出 ${}^{\mathrm{co}\overline{H}}H = B$。于是 $g^n \in B$，它包含于 $Z(H)$ 的中心 H中。因此 $\mathrm{ad}_{g^n} = \mathrm{id}_H$。

对于 $z \in Z(H)$，z 在 H 上的右乘法与 z的左乘法一致，后者是 H-线性的，并且根据定理4.1(1)的论证，在 $\int_H^\ell$上诱导出 $\varepsilon(z)\,\mathrm{id}$。特别地，$\alpha(B^+) = \varepsilon(B^+) = 0$，因此 α 可分解为一个代数同态 $\alpha\colon\ H \to \Bbbk$，它是有限维 Hopf 代数 H^*中的一个类群元素。由于$G(H^*)$的阶整除n，$\alpha^n = \varepsilon$；等价地，$\alpha^n = \varepsilon$ 在 H上。

由于 $\mathrm{ad}_{g^n} = \mathrm{id}_H$ 且 $\alpha^n = \varepsilon$，可得

$$S^{4n} = (\mathrm{ad}_g \circ \mathrm{ad}_\alpha)^n = \mathrm{ad}_g^n \circ \mathrm{ad}_\alpha^n = \mathrm{ad}_{g^n} \circ \mathrm{ad}_{\alpha^n} = \mathrm{id}\,.$$

因此，S^2 的有限阶整除 $2n$。□

注4.12。在定理 4.11的证明中，$\alpha \in G(H^\circ)$ 在较弱的假设下仍具有有限阶，即 H 是一个仿射Hopf代数，且作为其中心上的模是有限的 [8,命题6.2(a)及其证明之后的句子]。

应用定理4.11 于在其中心Hopf子代数上有限的Hopf代数时，我们必须验证忠实平坦性假设。下述引理证明这一假设成立。

引理4.13。设 H 是一个作为模在其中心上有限生成的Hopf代数。那么 H 在其任意交换Hopf子代数上都是忠实平坦的。

证明。根据 [53, 定理5。4], 弱有限Hopf代数在其任意交换Hopf子代数上都是忠实平坦的。因此只需证明 H 是弱有限的。回顾一下，环 R 是 Dedekind有限的，当且仅当 $xy = 1$ 蕴含 $yx = 1$ 对所有 $x, y \in R$均成立；而 R 是弱有限的，当矩阵环 $M_n(R)$ 对每个 $n \geqslant 1$都是 Dedekind有限的。由于 H 作为一个 $Z(H)$-模是有限生成的，因此典范映射 $H \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Maxspec}\ Z(H)} H_{\mathfrak{m}}$ 是内射的。此外，每个局部化 $H_{\mathfrak{m}}$ 都是中心局部环 $Z(H)_{\mathfrak{m}}$ 上的有限模，因此是半局部的。半局部环上的矩阵环也是半局部的（见 [28, 20.4]），并且每个半局部环根据 [28, 命题 20.8]都是 Dedekind有限的；因此，半局部环是弱有限的。由于弱有限性在子环和任意乘积下保持不变（见 [27, 推论 1.10 和命题 1.9]），可知 H 是弱有限的。□

应用定理 4.11 可得以下推论，其忠实平坦性由定理 4.13保证。

推论 4.14。设 H 是一个维数为 d 的 AS-Gorenstein Hopf 代数。假设 H 的余根是余反射的，或者 ${}_\varepsilon\Bbbk$ 属于 FP_d 型。如果 H 是中心霍普夫子代数 B 上的有限模，那么 S^2 的有限阶整除 $2\dim H$，其中 $\overline{H} := H/HB^+$。

命题 4.15。设 H 是一个具有反 antipode S 的 AS-co-Gorenstein Hopf 代数，并假设 H 的余根是余反射的。如果 H 是中心霍普夫子代数 B 上的有限模，那么 S^2 的有限阶整除 $2\dim H$，其中 $H := H/HB^+$。

证明。令 $\pi\colon H \to H$，$h \mapsto \overline{h}$ 表示规范商 Hopf代数同态。设$n := \dim_{\Bbbk} H$。令 $\widetilde{g} \in G(H)$ 为类群元素，并令 $\widetilde{\alpha}\colon H \to \Bbbk$ 为定理 3.16所给出的特征。则（3.8）可改写为

$$S^4 = \mathrm{ad}_{\widetilde{g}} \circ \mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}} = \mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}} \circ \mathrm{ad}_{\widetilde{g}}.$$

根据定理 4.13，H 作为左 B-模是忠实平坦的。随后，定理 4.11 证明中的相同论证表明 $\widetilde{g}^n \in B$，从而 $\mathrm{ad}_{\widetilde{g}^n} = \mathrm{id}_H$。根据定理 3.12，存在一个正合序列

$$0 \longrightarrow \Bbbk \xrightarrow{d^0} M^0 \boxplus H \xrightarrow{d^1} M^1 \boxplus H \xrightarrow{d^2} \cdots \xrightarrow{d^i} M^i \boxplus H \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

在 $\mathcal{Y}D_H^H$ 中。对于任意右 H-模 M，若 B 通过余单位作用，即 $m \triangleleft b = \varepsilon(b)m$，则 $M \boxplus H$ 上的右 B-作用由下式给出

$$(m \boxplus h) \triangleleft b = m \triangleleft b_2 \boxplus S(b_1)hb_3 = m \boxplus S(b_1)hb_2 = m \boxplus hS(b_1)b_2 = \varepsilon(b)(m \boxplus h),$$

其中第三个等号是由 B 在 H中的中心性得出的。因此，B对每个$M^i \boxplus H$的作用都是由余单位诱导的。此外，对于任意 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H, M^i \boxplus H)$，作用（3.6）给出

$$(b \triangleright f)(h) = f\big(S^3(b_3)hb_1\big) \triangleleft S(b_2) = f\big(S^3(b_2)hb_1\big) = f\big(hb_1S^3(b_2)\big) = f\big(hb_1S(b_2)\big) = \varepsilon(b)f(h),$$

这表明，B对每个 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H, M^i \boxplus H)$ 的作用也由余单位 ε 诱导。因此，B 对 $\int_r^H$ 的作用可经由余单位分解。因此 $\widetilde{\alpha}|_B = \varepsilon|_B$，所以 $\widetilde{\alpha}(HB^+) = 0$，且 $\widetilde{\alpha}$ 经由 π 分解，从而得到 $G(H^*)$ 的一个元素。由于 H 是有限维的，H 的特征的阶有限，且整除 $\dim H = n$；因此 $\widetilde{\alpha}^n = \varepsilon$。

由于 $\mathrm{ad}_{\widetilde{g}^n} = \mathrm{id}_H$ and $\widetilde{\alpha}^n = \varepsilon$，可得

$$S^{4n} = (\mathrm{ad}_{\widetilde{g}} \circ \mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}})^n = \mathrm{ad}_{\widetilde{g}}^n \circ \mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}}^n = \mathrm{ad}_{\widetilde{g}^n} \circ \mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}^n} = \mathrm{id}.$$

因此，S^2 的有限阶整除 $2n$。 □

定理4.11 的两个类似结果成立：若将关于中心右余理想子代数的有限生成性和忠实平坦性，替换为关于余中心商 Hopf 代数的有限余生成性和忠实余平坦性，则分别得到 AS-co-Gorenstein 情形下的定理4.16 以及 AS-Gorenstein 情形下的定理4.17。现在回顾相关定义。设 C 是一个余代数，且 N 是一个左 C-余模。若余模 N 作为有限余生成的 C-余模嵌入到 C 的有限个副本的直和中，则称其为 C。余代数映射 $\pi\colon C \to D$ 称为余中心的，如果对所有 $c \in C$，

$$\pi(c_1) \otimes c_2 = \pi(c_2) \otimes c_1.$$

设 $\pi\colon H \to C$ 是一个满射到左 H-模余代数 C 上的商映射，并设

$$B := {}^{\mathrm{co}\pi}H = \{h \in H \mid (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta(h) = \pi(1_H) \otimes h\}$$

记为左 C-余不变元的子代数。那么 B 是 H的右余理想。若 π 是余中心的，则 ${}^{\mathrm{co}\pi}H = H^{\mathrm{co}\pi} := \{h \in H \mid (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(h) = h \otimes \pi(1_H)\}$。因此，$B$也是 H的左余理想和子双代数。此外，对于 $b \in B$，有

$$\begin{aligned}
b \otimes \pi(1_H) &= b_3 \otimes \pi\big(S(b_1)b_2\big) \\
&= b_3 \otimes S(b_1)\pi(b_2) && (\pi \text{ is } H\text{-linear}) \\
&= b_2 \otimes S(b_1)\pi(1_H) && (\text{since } B \text{ is a sub-bialgebra and } B = {}^{\mathrm{co}\pi}H) \\
&= b_2 \otimes \pi\big(S(b_1)\big) && (\pi \text{ is } H\text{-linear})
\end{aligned}$$

将 $S\otimes \mathrm{id}_C$ 应用于上述等式，得到 $S(b)\otimes\pi(1_H)=S(b_2)\otimes\pi(S(b_1))$；等价地，$(\mathrm{id}\otimes\pi)\Delta(S(b))=S(b)\otimes\pi(1_H)$。因此 $S(B)\subseteq H^{\mathrm{co}\pi}=B$，所以 B 是 H的 Hopf 子代数。若对于某个 $r\geqslant 1$，H 作为左 C-余模嵌入 $C^{\oplus r}$，则 B 嵌入 $\text{余}^C(C^{\oplus r})=({}^{\mathrm{co}C}C)^{\oplus r}=\Bbbk^r$，因此是有限维的。

命题 4.16。设 H 是一个维数为 d、反 antipode 为 S 的 AS-余 Gorenstein Hopf 代数，并设 $\pi\colon H\to C$ 是映 onto 左 H-模余代数 C 的商映射。假设以下条件成立。

(1) H 作为左 C-余模是有限余生成且忠实余平坦的。(2) π 是余中心的。(3) H 的余根是余反射的。

则 S^2 的阶为有限阶且整除 $2\dim_{\Bbbk}B$，其中 $B=\text{余}^{\pi}H$。

证明。令 $n:=$维数$_{\Bbbk}B$。令 $\widetilde{g}\in G(H)$ 为类群元素，并令 $\widetilde{\alpha}\colon\ H\to\Bbbk$ 为定理 3.16所给出的特征。于是（3.8）可改写为

$$S^4=\mathrm{ad}_{\widetilde{g}}\circ\mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}}=\mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}}\circ\mathrm{ad}_{\widetilde{g}}.$$

将定理 3.12 应用于 $V=\Bbbk^{\eta}_{\varepsilon}\in\mathcal{Y}D^H_H$ 可得到一个正合序列

$$0\longrightarrow\Bbbk^{\eta}_{\varepsilon}\xrightarrow{d^0}G^0\xrightarrow{d^1}G^1\xrightarrow{d^2}\cdots\xrightarrow{d^i}G^i\xrightarrow{d^{i+1}}\cdots$$

在 $\mathcal{Y}D^H_H$中，其中每个 G^i都是内射 H-余模。我们将 C^*与其在 H^*下的像 π^*等同。对任意 $\lambda\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H,G^i)$ 和 $c^*\in C^*$，作用 (3.7) 给出

$$\big((c^*\pi)\rhd\lambda\big)(h)=\langle c^*,\pi(h_1)\rangle\lambda(h_2)=\langle c^*,\pi(h_2)\rangle\lambda(h_1)=\langle c^*,\pi(\lambda(h)_1)\rangle\lambda(h)_0=(c^*\pi)\rhd\lambda(h).$$

因此，每个 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H,G^i)$ 上的 C^*-作用 (3.7) 与由 G^i 上的 C^*-作用所诱导的作用一致。由于 π 是余中心的，作用映射 $c^*\pi\rhd-$ 在每个 G^i 上都是右 H-余线性的，因而定义了一个 H-余线性链自同态 $\xi\colon\ G^\bullet$。此外，由于 $c^*\pi\rhd-$ 与 $\langle c^*,\pi(1_H)\rangle\mathrm{id}$ 在 $\Bbbk^{\eta}_{\varepsilon}$ 上一致，故 $\xi\colon G^\bullet\to G^\bullet$ 与 $\langle c^*,\pi(1_H)\rangle\mathrm{id}_{G^\bullet}$ 同伦。应用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H,-)$，可得由此诱导的 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H,G^\bullet)$ 的链自同态 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H,\xi)$ 与 $\langle c^*,\pi(1_H)\rangle\mathrm{id}$ 同伦。由于由 $c^*\pi$ 在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H,G^\bullet)$ 上的作用所诱导的链自同态与 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^H}(H,\xi)$ 一致，它也与 $\langle c^*,\pi(1_H)\rangle\mathrm{id}$ 同伦。因此，$c^*\pi$ 在 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}^H}(H,\Bbbk^{\eta})$ 上诱导的作用由标量 $\langle c^*,\pi(1_H)\rangle$ 给出。特别地，固定 $0\neq x\in\int^H_r$ 和 $c^*\in C^*$。于是

$$\langle c^*,\pi(1_H)\rangle x=(c^*\pi)\rhd x=\langle c^*,\pi(x_1)\rangle x_0=\langle c^*,\pi(\widetilde{g})\rangle x.$$

由于 $x\neq 0$ 和 c^* 是任意的，因此可得 $\pi(1_H)=\pi(\widetilde{g})$，从而有 $\widetilde{g}\in B$。由于 B 是有限维的，其类群元具有有限阶；特别地，$\widetilde{g}$ 的阶整除n。因此，$\widetilde{g}^n=1_H$。

$\widetilde{\alpha}$ 在有限维Hopf子代数 B 上的限制具有有限阶，且该阶整除 B的维数；因此，$\widetilde{\alpha}^n|_B=\varepsilon|_B$。由此可得 $\widetilde{\alpha}^n(HB^+)=\widetilde{\alpha}^n(H)\widetilde{\alpha}^n(B^+)=\widetilde{\alpha}^n(H)\,\varepsilon(B^+)=0$。由于 H 是忠实余平坦的 C-余模，Takeuchi 对应 [54,定理 2] 给出 $\mathrm{Ker}(\pi)=HB^+$。因此，$\widetilde{\alpha}^n$ 是余中心的，因为它经过余中心映射 π分解。于是，对于任意 $h\in H$，我们有

$$\mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}^n}(h)=\langle\widetilde{\alpha}^n,S(h_1)\rangle h_2\langle\widetilde{\alpha}^n,h_3\rangle=\langle\widetilde{\alpha}^n,S(h_1)\rangle\langle\widetilde{\alpha}^n,h_2\rangle h_3=h.$$

由此可得 $\mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}^n}=\mathrm{id}_H$。

由于 $\widetilde{g}^n=1_H$、$\mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}^n}=\mathrm{id}_H$，且 $\mathrm{ad}_{\widetilde{g}}$与 $\mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}}$可交换，我们得到

$$S^{4n}=(\mathrm{ad}_{\widetilde{g}}\circ\mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}})^n=\mathrm{ad}^n_{\widetilde{g}}\circ\mathrm{ad}^n_{\widetilde{\alpha}}=\mathrm{ad}_{\widetilde{g}^n}\circ\mathrm{ad}_{\widetilde{\alpha}^n}=\mathrm{id}_H.$$

因此，S^2 的阶有限，且整除 $2n$。 □

命题4.17。设 H 是一个维数为 d、反 antipode 为 S的 AS-戈伦斯坦霍普夫代数，且 π: $H \to K$ 是一个满射 Hopf代数同态。假设以下条件成立。

(1) H 是有限余生成的，并且作为左 K-余模是忠实余平坦的。(2) π 是余中心的。(3) H 的余根是余反射的，或者 ${}_{\varepsilon}\Bbbk$ 属于 FP_d型。

那么， S^2 的有限阶整除 $2\dim_{\Bbbk} B$，其中 $B = {}^{\text{余}\pi}H$。

证明。令 $n := \text{维数}_{\Bbbk} B$。设 $g \in G(H)$ 为类群元素，而 $\alpha\colon H \to \Bbbk$ 为定理 3.9 所给出的特征。于是，(3.4) 可改写为

$$S^4 = \mathrm{ad}_g \circ \mathrm{ad}_\alpha = \mathrm{ad}_\alpha \circ \mathrm{ad}_g\,.$$

对于任意左 H-余模 N，其诱导的 K-余作用由类群元素$\pi(1_H)$给出时， $H \boxtimes N$ 上的余作用满足

$$\begin{aligned}
(\pi \otimes \mathrm{id})\rho(h \boxtimes n) &= \pi\big(h_1 n_{-1} S(h_3)\big) \otimes h_2 \boxtimes n_0 \\
&= \pi(h_1)\pi(n_{-1})\pi\big(S(h_3)\big) \otimes h_2 \boxtimes n_0 \\
&= \pi(h_1)\pi(1_H) S\big(\pi(h_3)\big) \otimes h_2 \boxtimes n \\
&= \pi(h_1)\pi(1_H) S\big(\pi(h_2)\big) \otimes h_3 \boxtimes n \qquad (\pi \text{ is cocentral}) \\
&= \pi\big(h_1 S(h_2)\big) \otimes h_3 \boxtimes n \\
&= \pi(1_H) \otimes h \boxtimes n.
\end{aligned}$$

因此， K在 $H \boxtimes N$ 上的余作用也由 $\pi(1_H)$诱导。考虑正合序列

$$\cdots \longrightarrow H \boxtimes N_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow H \boxtimes N_1 \longrightarrow H \boxtimes N_0 \longrightarrow \Bbbk \longrightarrow 0$$

在定理 3.2中，其中 K在每个 N_i 上的余作用由 $\pi(1_H)$诱导。对于任意 $h \in H$， $k^* \in K^*$， $n \in N_i$，以及 $f \in \mathrm{Hom}_H(H \boxtimes N_i, H)$，我们有

$$\begin{aligned}
&\big(f \lhd (k^*\pi)\big)(h \boxtimes n) \\
&\overset{(3.1)}{=\!=} f\big((h \boxtimes n)_0\big)_2 \big\langle k^*\pi, S^3\big(f\big((h \boxtimes n)_0\big)_3\big) S\big((h \boxtimes n)_{-1}\big) f\big((h \boxtimes n)_0\big)_1 \big\rangle \\
&= f\big((h \boxtimes n)_0\big)_2 \Big\langle k^*, \pi\Big(S^3\big(f\big((h \boxtimes n)_0\big)_3\big)\Big)\pi\Big(S\big((h \boxtimes n)_{-1}\big)\Big)\pi\Big(f\big((h \boxtimes n)_0\big)_1\Big) \Big\rangle \\
&= f(h \boxtimes n)_2 \Big\langle k^*, S^3\Big(\pi\big(f(h \boxtimes n)_3\big)\Big)\pi\big(f(h \boxtimes n)_1\big) \Big\rangle \\
&= f(h \boxtimes n)_3 \Big\langle k^*, S^3\Big(\pi\big(f(h \boxtimes n)_2\big)\Big)\pi\big(f(h \boxtimes n)_1\big) \Big\rangle \qquad (\pi \text{ is cocentral}) \\
&= \langle k^*, \pi(1_H)\rangle f(h \boxtimes n),
\end{aligned}$$

最后一个等式成立，是因为 π 的满射性和余中心性意味着 K 是余交换的。因此，$\mathrm{Hom}_H($ $H\boxtimes N_i, H)$上的 K^*作用通过在 $\pi(1_H)$处求值而分解。因此， $\int_H^\ell$ 上的 K^*作用通过在 $\pi(1_H)$处求值而分解；也就是说，对于任意 $x \in \int_H^\ell$和 $k^* \in K^*$，

$$\langle k^*, \pi(1_H)\rangle x = x \lhd (k^*\pi) = \langle k^*, \pi(x_{-1})\rangle x_0 = \langle k^*, \pi(g)\rangle x.$$

由于 $x \neq 0$ 和 k^* 是任意的，我们得到 $\pi(1_H) = \pi(g)$，从而得到 $g \in B$。由于 B 是有限维的，其类群元具有有限阶；特别地， g 的阶整除 n。因此， $g^n = 1_H$。

由于 $\alpha\colon H \to \Bbbk$ 是一个特征，其在有限维Hopf子代数 B 上的限制的阶为有限阶，且整除 n，因此 $\alpha^n|_B = \varepsilon|_B$。于是 $\alpha^n(HB^+) = 0$。忠实余平坦性和Takeuchi的

对应 [54, 定理 2] 给出 核$(\pi) = HB^+$，正如定理 4.16的证明中所述。因此α^n 通过余中心映射 π分解，因而是余中心的。对于任意 $h \in H$，

$$\mathrm{ad}_{\alpha^n}(h) = \langle \alpha^n, S(h_1)\rangle h_2 \langle \alpha^n, h_3\rangle = \langle \alpha^n, S(h_1)\rangle \langle \alpha^n, h_2\rangle h_3 = h,$$

因此 $\mathrm{ad}_{\alpha^n} = \mathrm{id}_H$。

由于 $g^n = 1_H$、$\mathrm{ad}_{\alpha^n} = \mathrm{id}_H$，且 ad_g与 ad_α交换，我们得到

$$S^{4n} = (\mathrm{ad}_g \circ \mathrm{ad}_\alpha)^n = \mathrm{ad}_g^n \circ \mathrm{ad}_\alpha^n = \mathrm{ad}_{g^n} \circ \mathrm{ad}_{\alpha^n} = \mathrm{id}_H .$$

因此， S^2 的阶为有限阶，且整除 $2n$。 □

致谢

人工智能工具用于语言编辑和语法检查。作者对稿件承担全部责任。作者谨向 Liyu Liu 和 Yinhuo Zhang 致以感谢，感谢他们提出的宝贵意见和建议。

参考文献

[1] M. Artin 和 W. F. Schelter，《整体维数为 3 的分次代数》，《Advances in Mathematics》，66 (1987)，第 171–216 页。[2] M. Beattie、D. Bulacu 和 B. Torrecillas，《余 Frobenius 霍普夫代数的 Radford S^4 公式》，《Journal of Algebra》，307 (2007)，第 330–342 页。[3] Y. Bespalov、T. Kerler、V. Lyubashenko 和 V. Turaev，《编织 Hopf 代数的积分》，《Journal of Pure and Applied Algebra》，148 (2000)，第 113–164 页。[4] J. Bichon，《Hopf 代数的 Hochschild 同调与余单位的自由 Yetter-Drinfeld 分解》，Compos. Math.，149 (2013)，第 658–678 页。[5] K. A. Brown，《满足多项式恒等式的诺特 Hopf 代数的表示论》，载于《有限维代数表示论趋势》（西雅图，WA，1997），《Contemporary Mathematics》第 229 卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，1998，第 49–79 页。[6] K. A. Brown，《关于 AS-戈伦斯坦霍普夫代数的报告》，arXiv:2605.00774，（2026）。[7] K. A. Brown 和 K. R. Goodearl，《诺特 PI 霍普夫代数的同调方面及最大维数不可约模》，《Journal of Algebra》，198 (1997)，第 240–265 页。[8] K. A. Brown 和 J. J. Zhang，《诺特 Hopf 代数的对偶化复形与扭曲 Hochschild (上)同调》，《Journal of Algebra》，320 (2008)，第 1814–1850 页。[9] ，《GK 维数为一的素正则 Hopf 代数》，《Proceedings of the London Mathematical Society》(3)，101 (2010)，第 260–302 页。[10] K. S. Brown，《群上同调》，《数学研究生教材》第 87 卷，施普林格出版社，纽约-柏林，1982。[11] S. Caenepeel、G. Militaru 和 S. Zhu，《交叉模与 Doi-Hopf 模》，《Israel Journal of Mathematics》，100 (1997)，第 221–247 页。[12] S. Dăscălescu、C. Năstăsescu 和 B. Torrecillas，《余代数的同调维数与交叉余积》，K-Theory，23 (2001)，第 53–65 页。[13] Y. Doi 和 M. Takeuchi，《通过二余循环改变乘法——量子版本》，《Communications in Algebra》，22 (1994)，第 5715–5732 页。[14] V. G. Drinfel'd，《量子群》，载于《国际数学家大会论文集》第 1、2 卷（伯克利，加利福尼亚州，1986），美国数学会，普罗维登斯，RI，1987，第 798–820 页。[15] E. E. Enochs 和 O. M. G. Jenda，《相对同调代数。第 1 卷》，《De Gruyter 数学论述》第 30 卷，Walter de Gruyter GmbH & Co. KG，柏林，扩充版，2011。[16] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik，《张量范畴》，《数学调查与专著》第 205 卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2015。[17] P. Etingof、D. Nikshych 和 V. Ostrik，《有限张量范畴中 Radford S^4 公式的一个类似结果》，《International Mathematics Research Notices》，(2004)，第 2915–2933 页。[18] J. Fuchs、G. Schaumann 和 C. Schweigert，《有限范畴的 Eilenberg-Watts 演算与双模 Radford S^4 定理》，《Transactions of the American Mathematical Society》，373 (2020)，第 1–40 页。[19] S. Gelaki、D. Naidu 和 D. Nikshych，《分次融合范畴的中心》，《Algebra & Number Theory》，3 (2009)，第 959–990 页。[20] M. Gerstenhaber 和 S. D. Schack，《双代数上同调、变形与量子群》，《美国国家科学院院刊》，87 (1990)，第 478–481 页。

[21] V. Ginzburg, 《卡拉比–丘代数》, arXiv:math/0612139。[22] F. Hausser 和 F. Nill, 《拟霍普夫代数的积分理论》, arXiv:math/9904164。[23] J.-W. He、B. Torrecillas、F. Van Oystaeyen 和 Y. Zhang, 《通过余代数研究诺特完全代数的对偶化复形》, 《Communications in Algebra》, 42 (2014), 第 271–285 页。[24] J.-W. He、F. Van Oystaeyen 和 Y. Zhang, 《余交换卡拉比–丘霍普夫代数与变形》, 《Journal of Algebra》, 324 (2010), 第 1921–1939 页。[25] R. G. Heyneman 和 D. E. Radford, 《有限型余代数的自反性》, 《Journal of Algebra》, 28 (1974), 第 215–246 页。[26] C. Kassel, 《量子群》, 《数学研究生教材》第 155 卷, 施普林格出版社, 纽约, 1995。[27] T. Y. Lam, 《模与环讲义》, 《数学研究生教材》第 189 卷, 施普林格出版社, 纽约, 1999。[28] , 《非交换环入门》, 《数学研究生教材》第 131 卷, 施普林格出版社, 纽约, 第二版, 2001。[29] R. G. Larson, 《霍普夫代数的特征标》, 《Journal of Algebra》, 17 (1971), 第 352–368 页。[30] R. G. Larson 和 M. E. Sweedler, 《Hopf 代数的结合正交双线性形式》, 《American Journal of Mathematics》, 91 (1969), 第 75–94 页。[31] G. Liu, 《GK 维数为一的素 Hopf 代数的一个分类结果》, 《Journal of Algebra》, 547 (2020), 第 579–667 页。[32] M. E. Lorenz 和 M. Lorenz, 《关于 Hopf 代数的交叉积》, 《Proceedings of the American Mathematical Society》, 123 (1995), 第 33–38 页。[33] D.-M. Lu、Q.-S. Wu 和 J. J. Zhang, 《Hopf 代数的同调积分》, 《Transactions of the American Mathematical Society》, 359 (2007), 第 4945–4975 页。[34] J. Lü、S.-Q. Oh、X. Wang 和 X. Yu, 《关于 Hopf 代数反 antipode 的双射性及其应用的一则注记》, 《Proceedings of the American Mathematical Society》, 146 (2018), 第 4619–4631 页。[35] S. Majid, 《量子群理论基础》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1995。[36] J. C. McConnell 和 J. C. Robson, 《非交换诺特环》, 《数学研究生教材》第 30 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 修订版, 2001。L. W. Small 协助编写。[37] S. Montgomery, 《Hopf 代数及其在环上的作用》, CBMS数学区域会议系列第 82 卷, 由数学科学会议委员会为其出版, 华盛顿特区; 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 1993。[38] C. Nastasescu、B. Torrecillas 和 Y. H. Zhang, 《遗传余代数》, 《Communications in Algebra》, 24 (1996), 第 1521–1528 页。[39] D. Nikshych, 《弱霍普夫代数的结构》, 《Advances in Mathematics》, 170 (2002), 第 257–286 页。[40] F. Panaite 和 M. D. Staic, 《广义（反）Yetter-Drinfeld 模作为编织T-范畴的组成部分》, 《Israel Journal of Mathematics》, 158 (2007), 第 349–365 页。[41] A. Putman, 《自由群与曲面群的交换子子群》, 《L'Enseignement Mathématique》, 68 (2022), 第 389–408 页。[42] D. E. Radford, 《核自反余代数》, 《Journal of Algebra》, 26 (1973), 第 512–535 页。[43] , 《有限维霍普夫代数的反 antipode 阶有限》, 《American Journal of Mathematics》, 98 (1976), 第 333–355 页。[44] , 《具有非零积分的 Hopf 代数的有限性条件》, 《Journal of Algebra》, 46 (1977), 第 189–195 页。[45] , 《关于拟三角Hopf代数的反 antipode》, 《Journal of Algebra》, 151 (1992), 第 1–11 页。[46] , 《霍普夫代数》, 《纽结及相关主题丛书》第 49 卷, 世界科学出版公司, 哈肯萨克, NJ, 2012。[47] D. E. Radford 和 J. Towber, 《与任意双代数相关的 Yetter-Drinfeld范畴》, 《Journal of Pure and Applied Algebra》, 87 (1993), 第 259–279 页。[48] J. J. Rotman, 《同调代数导论》, 《 Universitext 》, 施普林格出版社, 纽约, 第二版, 2009。[49] P. Schauenburg, 《Hopf 模与 Yetter-Drinfel'd 模》, 《Journal of Algebra》, 169 (1994), 第 874–890 页。[50] H.-J. Schneider, 《Hopf 代数讲义》, 《数学研究》第 31/95 卷, Trabajos de Matemática [《数学著作》],科尔多瓦国立大学数学、天文学与物理学院, 科尔多瓦, 1995。Sonia Natale 记录。[51] A. Sciandra, 《诺特 Hopf 代数具有双射 antipode》, arXiv:2610.15473, （2026）。[52] S. Skryabin, 《关于 Hopf 代数反 antipode 双射性的新结果》, 《Journal of Algebra》, 306 (2006), 第 622–633 页。[53] S. Skryabin, 《有限维 Hopf 子代数上的平坦性失效》, arXiv:2506.16292, （2025）。

[54] M. Takeuchi, 相对霍普夫模——等价性与自由性判据, 《Journal of Algebra》, 60（1979）, 第452–471页。[55] J. Wu、G. Liu 和 N. Ding, *GK* 维数为一的仿射素正则霍普夫代数的分类, 《Advances in Mathematics》, 296（2016）, 第1–54页。[56] Q.-S. Wu 和 J. J. Zhang, 诺特 *PI* 霍普夫代数是戈伦斯坦代数, 《Transactions of the American Mathematical Society》, 355（2003）, 第1043–1066页。[57] D. N. Yetter, 量子群与幺半范畴的表示, 《剑桥哲学学会数学会刊》, 108（1990）, 第261–290页。

复旦大学数学科学学院, 中国上海 200433电子邮箱: qswu@fudan.edu.cn上海财经大学数学学院, 中国上海 200433电子邮箱: zhuruipeng@sufe.edu.cn