arXiv:2611.30347v1 [physics.class-ph] 23 Nov 2026

可变形介电体中的储存能量与机械载荷：宏观场所决定的内容

Bela Schulte Westhoff[1*]

[1*]柏林工业大学，德国柏林 10587。

通讯作者。电子邮件：schultewesthoff@tu-berlin.de；

摘要

可变形电介质内部电场施加的机械载荷，自开尔文从偶极子所受的力推导出该载荷、亥姆霍兹从能量变化推导出该载荷以来，一直存在争议。当前的电弹性模型采用能量路径，将储能及其变形依赖性作为本构输入。我们利用离子、电子及其场的经典模型，并结合空间平均，考察这种能量代表什么，以及宏观场能决定其中多少。宏观场只携带自身的能量。在其平衡关系中，$\mathbf{J_{total}}\cdot\mathbf{E}$ 是离开宏观场的功率；它们并未说明这部分功率去了哪里。在该模型中，这部分功率驱动载流子运动和场结构，而这些在平均化过程中被消去。对于线性可逆响应，其时间积分为 $\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}$：$\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$ 是宏观场能 $\frac{1}{2}\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2$ 与这种结构的可恢复能量之和。热能、动能和弹性能也可同样推导，从而在热力学、力学和电动力学之间建立统一的能量映射。在变形过程中，同样的交换会产生机械功；宏观场决定总量，却不能决定机械功与储能之间的分配。我们提出一个充分性判据：若所有与某一宏观描述相一致的微观结构，对所关注的变形产生相同的虚功，则该宏观描述就能确定载荷。对于线性、非线性和滞后响应，我们分别说明所需的材料信息；线性情形则可得到亥姆霍兹应力。两个宏观场相同的偶极子阵列，此前已发现其边界牵引力存在差异，这表明充分性可能不成立；该判据可区分本构数据足以确定载荷的情形，以及需要界面或微观结构细节的情形。

关键词：可变形介电体、电弹性、储能、电致伸缩、空间平均、虚功

1 引言

要预测电介质在电场中的变形，必须知道电场施加于材料的体力密度和边界牵引力。长期以来，关于这种载荷存在多种并行的表达式 [1]。开尔文力密度源于将极化物质视为偶极子时所受的力，而科特韦格–亥姆霍兹力密度则源于储能的变化，并包含一个电致伸缩项 [2–4]。洛伦兹和爱因斯坦–劳布表达式给出的物体总力相同，但在物体内部的分布方式不同 [5, 6]。因此，争议在于载荷的局部分布；总力一致并不意味着决定变形的载荷分布也已确定 [7–9]。将力模型与测得的总力和局部变形进行比较后发现，各模型预测的变形并不相同 [10–12]。

这些表达式源自两种路径。力路径从微观组成部分所受的力出发，并探究这些力如何对连续介质施加载荷。能量路径则根据虚拟变形引起的储能变化得出载荷。近期一项对力路径的分析通过受控模型比较表明，宏观场未必能决定局部载荷 [13]。处于同一外加场中的束缚偶极子和单独锚定的电荷对材料施加的载荷不同，而具有相同极化和宏观场的两种偶极子排列会产生不同的边界牵引力。缺失的信息涉及电荷所受的力如何传递给材料，以及平均化会消除哪些微观关联。本文考察能量路径。

能量路径是成熟电弹性理论的基础，该理论根据规定的电学条件下储能函数的变化求得机械载荷 [14–19]。这些方法需要适当的热力学势 [20]；对于耗散材料，还需要描述储能和内部状态 [21, 22]。因此，储能及其对变形的依赖构成本构输入。

储能所代表的含义，已从微观层面进行了探讨。早期研究将材料能量和热流与微观运动及相互作用联系起来 [23], ，并描述了极化如何与热功和机械功耦合 [24]。其他研究则考察了能量如何在场与物质之间分配和交换 [25–27]。对于离散偶极子，Yaghjian 根据微观麦克斯韦方程推导出，宏观极化功等于对束缚载流子所做的功，加上局部场能的变化：该局部场能对应于偶极子产生的场与取代这些偶极子的连续极化所产生的场之差 [28]。在这种处理方式中，对载流子所做的功被视为偶极子模型的机械能，其目标是得到非负的宏观能量密度。对于周期性复合材料，可以将微观场的胞元平均二次表达式（包括储能）与宏观场及有效介电函数精确关联起来 [29]。这两项研究讨论的都是未变形介质中的能量和功率。

就载荷而言，微观计算表明，宏观参数并不能确定局部分布。具有相同有效介电常数的二维电介质圆柱晶格，其电致伸缩张量和体力密度取决于晶格对称性，尽管总力相同 [30];

此处将电致伸缩项理解为对有效介质平均中丢失的场信息的补偿。若仅指定宏观参数，则无法确定此类介质边界处的应力 [31]。对于一种模型离子晶体，亥姆霍兹力密度能够重现计算所得的应变，而这需要一个电致伸缩系数；该系数并未直接出现在麦克斯韦方程组或本构关系中 [8]。在晶格上磁偶极子的严格连续介质极限下，物体两部分之间的作用力包含一个反映晶格特性的局部表面项 [32, 33]。均匀化根据指定的微观结构构造储能函数 [34]。

据我们所知，这两条研究脉络尚未通过储能联系起来。第一条指出，场结构中存在一种能量，宏观场并不携带这种能量。第二条表明，局部载荷取决于微观结构，并通过力密度和电致伸缩系数来表述这种依赖关系。本文将二者联系起来：在同一个经典模型中，宏观场无法确定的载荷部分，正是平均化所消去的场能在变形过程中的变化。我们提出一个条件，并将其表述为虚功判据，以判断宏观描述是否足够。

我们从参考文献 [13] 中的经典模型出发：稳定离子、电子及其电磁场。在该模型的能量平衡中，两个主动储能装置是粒子动能和微观场能。载流子运动的三种角色划分，以及由空间平均得到宏观描述的过程，均遵循该参考文献；我们将空间平均后的电磁场称为保留场。由此可得三个结果。

首先，我们说明保留场记录了哪些能量信息。它们构成一个闭合的麦克斯韦系统，不包含平均化所消去的结构信息，并且携带自身的能量及其通量。它们的能量平衡只有一个交换项，即总电流与电场的乘积$\mathbf{J}_{\text{total}} \cdot \mathbf{E}$：这是离开保留场的功率。由于被消去的结构局限于物质内部，它们也能确定外部充电源所提供的功，但未解析的表面层会带来修正（第5.1节）。它们并未显示交换出的能量去向何处。因此，对于从一种状态极化至另一种状态的电介质，$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}$ 表示离开保留场的能量，而非极化场的能量。

其次，我们明确交换之外还有什么。乘积 $\mathbf{J}_{\text{total}} \cdot \mathbf{E}$ 并非载流子所受功的平均值：其中一部分用于形成平均化时会被消去的场结构，正如文献 [28] 对离散偶极子的研究所示。在具有两个能量储存和无功约束的模型中，可恢复的准静态极化功完全是这种场结构的能量。这一识别仅适用于该模型；交换本身以及下文的充分性判据则不依赖于此。对于固定变形下介电常数与温度无关的线性可逆响应，熟悉的能量密度 $\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ 因此结合了保留场能与增量 $\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$；我们将后者称为束缚能，即储存在这种未解析场结构中的可恢复能量。对于非线性和滞后响应，转移历史仍然已知，我们将确定决定其可恢复部分的材料信息。同一构造还将热能、动能和弹性能追溯到这两种微观能量储存，从而给出

适用于热力学、连续介质力学和宏观电动力学的统一能量图谱。

第三，我们将其推广到载荷，并提出一个充分性判据。在变形过程中，同样的交换也提供机械功，而保留场只能确定总量，不能确定其在机械功与结合能变化之间的分配。在亥姆霍兹应力中，在线性情形下，缺失的信息是介电常数对 [2, 4], 微观结构的依赖关系，这种依赖关系已得到确立 [8, 30, 31]。当所有与其场及所提供材料数据相一致的微观实现，在相关虚拟变形下、以所需精度给出相同的虚功时，宏观描述便能确定所关注的载荷。两个偶极子排列被假定在整个变形过程中共享相同的保留场，它们说明这一条件可能失效：二者的结合能变化和边界功并不相同。该判据区分了这样两类情形：在现有分辨率下，本构数据足以完成预测；以及需要更多空间信息或界面信息的情形。能量路径给出由虚拟变形所选定分量中的载荷，其分辨率不高于保留场和所提供数据的分辨率（第6.3节）。

本分析采用经典理论，并仅讨论电响应。不考虑内禀自旋及其磁矩，载荷预测涉及准静态变形。模型未解析的稳定化相互作用（包括量子效应）作为约束力处理；这些力不做总功，也不储存能量。第2–4节建立模型及其平均描述。第5节说明保留场记录了哪些能量信息、交换的能量在模型中流向何处，以及实现可恢复储存的条件。第 6 节说明保留场决定了哪些载荷信息、充分性判据及其应用。第2.1 节的平衡方程以及第4.1 节和第4.3 节的平均麦克斯韦方程均为标准形式，本文列出这些方程以统一符号。本文的结果还建立在以下三个步骤之上：载流子运动的三种角色（第2.2节）、通过平均处理得到的热能和弹性能（第3.3节），以及两个示例中保留场与残余场的比较（第4.2节）。

2 微观模型及其能量储存

我们以电子和离子及其电磁场作为有效的微观参照，并将电子和离子统称为载流子。我们的目标是以这一共同起点构建热力学、连续介质力学和宏观电动力学的能量描述。平均化通过集体变量概括同一批粒子和场，同时保留更精细的细节不予解析。在这里，我们确定微观能量储存及其交换，然后梳理参与这些平均化描述的粒子运动。

微观参考模型及其宏观描述均不包括内禀自旋及其相关的磁矩。其动力学以及能量和角动量的交换留待未来研究。

2.1 微观参考模型

每个载流子都具有质量和电荷。因此，其运动会产生机械动量和电流。我们首先定义载流子及其场，然后介绍其动力学和稳定性约束，以确立参考模型的能量储存与交换。本小节的场与载流子平衡是标准的 [35, 36]；我们在此陈述这些平衡，以明确下文所用的符号和假设。

我们讨论非相对论区域。对于物种 s，其微观数密度为 n_s、电荷为 q_s、质量为 m_s，速度为 $\mathbf{v}_s$，数通量为 $\mathbf{\Gamma}_s = n_s\mathbf{v}_s$。电荷和质量以不同方式对同一数通量加权：

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{mic}} &= \sum_s q_s n_s, \qquad \mathbf{j}_{\mathrm{mic}} = \sum_s q_s \mathbf{\Gamma}_s, \\ \rho_m^{\mathrm{mic}} &= \sum_s m_s n_s, \quad \mathbf{g}_{\mathrm{mech}}^{\mathrm{mic}} = \sum_s m_s \mathbf{\Gamma}_s. \end{aligned} \tag{1}$$

质量和电荷属于同一批载流子，但在不同的平衡关系中发挥作用：电荷和电流定义电磁源，而质量对载流子运动加权，从而得到机械动量。

式（1）中的载流子总源通过麦克斯韦方程组产生微观场 [35]：

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{e}_{\mathrm{mic}} &= \frac{\rho_{\mathrm{mic}}}{\varepsilon_0}, \quad \nabla\times\mathbf{e}_{\mathrm{mic}} = -\frac{\partial\mathbf{b}_{\mathrm{mic}}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\mathbf{b}_{\mathrm{mic}} &= 0, \qquad \nabla\times\mathbf{b}_{\mathrm{mic}} = \mu_0\mathbf{j}_{\mathrm{mic}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{e}_{\mathrm{mic}}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2}$$

在这一有效模型中，每个载流子都具有平滑、局域化且范围有限的电荷和质量分布，因此自场能有限。全文始终采用相同的正则化。

将载流子的牛顿定律求和并写成局部动量平衡，得到

$$\frac{\partial\mathbf{g}_{\mathrm{mech}}^{\mathrm{mic}}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{t}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{mic}} = \mathbf{f}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{mic}} + \mathbf{f}_{\mathrm{con}}^{\mathrm{mic}}. \tag{3}$$

这里，$\mathbf{t}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{mic}} = \sum_s m_s n_s \mathbf{v}_s\otimes\mathbf{v}_s$ 是运动粒子携带的动量通量。局部动量通过这种传输以及洛伦兹力 $\mathbf{f}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{mic}}$ 和约束反作用力 $\mathbf{f}_{\mathrm{con}}^{\mathrm{mic}}$ 发生变化。

麦克斯韦方程组也可以通过微观场等价地表达洛伦兹力：

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{mic}} &= \rho_{\mathrm{mic}}\mathbf{e}_{\mathrm{mic}} + \mathbf{j}_{\mathrm{mic}}\times\mathbf{b}_{\mathrm{mic}} \\ &= \nabla\cdot\mathbf{t}_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}} - \frac{\partial\mathbf{g}_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4}$$

这里，$\mathbf{t}_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}}$ 是真空麦克斯韦应力，$\mathbf{g}_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}} = \varepsilon_0\mathbf{e}_{\mathrm{mic}}\times\mathbf{b}_{\mathrm{mic}}$ 是场动量密度 [35, 36]。这一恒等式从场的角度描述了同一电磁动量交换。

方程（$\mathbf{f}_{\mathrm{con}}^{\mathrm{mic}}$ 中3）的约束力密度代表了对有限载流子分布及其形成的材料构型进行稳定化的未解析作用。与 Eringen 和 Maugin 的经典麦克斯韦–洛伦兹处理一样 [15, 第 2.2 和 2.7],节，我们以稳定电荷组合为出发点。这一描述体现了被省略物理因素（包括量子效应）的作用，同时允许存在下文讨论的载流子运动和材料变形。

将每个载流子的运动方程与其速度作点积，再对所有载流子求和，即可得到载流子能量平衡。我们依次考察洛伦兹力项、约束力项和动能项。

对每个载流子而言，磁洛伦兹力垂直于其速度，因此电磁功率密度为

$$\mathcal{P}_{\mathrm{mic}} = \sum_{s} \mathbf{f}_{\mathrm{L},s}^{\mathrm{mic}} \cdot \mathbf{v}_s = \mathbf{j}_{\mathrm{mic}} \cdot \mathbf{e}_{\mathrm{mic}}. \tag{5}$$

麦克斯韦方程组通过微观场的能量密度和通量表达了相同的功率传递。这就是坡印廷定理:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\mathrm{mic}} \cdot \mathbf{e}_{\mathrm{mic}} &= -\left(\frac{\partial u_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}} \right), \\ u_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}} &= \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{e}_{\mathrm{mic}}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{b}_{\mathrm{mic}}|^2, \\ \mathbf{S}_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{e}_{\mathrm{mic}} \times \mathbf{b}_{\mathrm{mic}}. \end{aligned} \tag{6}$$

接下来考察约束力 $\mathbf{f}_{\mathrm{con}}^{\mathrm{mic}}$ 所做的功率。对于允许运动，我们要求约束力的总实际功率在任意时刻都为零:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathrm{con}}^{\mathrm{mic}} &\equiv \sum_{s} \mathbf{f}_{\mathrm{con},s}^{\mathrm{mic}} \cdot \mathbf{v}_s, \\ \int_{\Omega_{\mathrm{complete}}} \mathcal{P}_{\mathrm{con}}^{\mathrm{mic}}(\mathbf{x}, t)\, dV &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

这里，$\Omega_{\mathrm{complete}}$ 包含所有受约束载流子及其支撑结构。约束反力可能会在载流子之间以及不同位置之间重新分配能量，因此其局部功率不一定为零。我们还假设约束本身不储存能量，因此不会引入额外的主动储能装置。

载流子动能密度和通量为

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{mat}}^{\mathrm{mic}} &\equiv \frac{1}{2} \sum_{s} m_s n_s |\mathbf{v}_s|^2, \\ \mathbf{s}_{\mathrm{mat}}^{\mathrm{mic}} &\equiv \frac{1}{2} \sum_{s} m_s n_s |\mathbf{v}_s|^2 \mathbf{v}_s. \end{aligned} \tag{8}$$

保留局域约束功率后，载流子能量平衡和微观坡印廷定理给出 [25]

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{\mathrm{mat}}^{\mathrm{mic}}}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{s}_{\mathrm{mat}}^{\mathrm{mic}}-\mathcal{P}_{\mathrm{con}}^{\mathrm{mic}}&=\mathbf{j}_{\mathrm{mic}}\cdot\mathbf{e}_{\mathrm{mic}}\\&=-\left(\frac{\partial u_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}}}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{S}_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}}\right).\end{aligned}\tag{9}$$

在这些假设下，载流子动能和微观真空场能是参考模型中两个活跃的储能项。式（9）中的平衡关系为宏观构造提供了共同的能量基准。其中，$\mathbf{j}_{\mathrm{mic}}\cdot\mathbf{e}_{\mathrm{mic}}$ 是这两个储能项之间的完整交换。它的宏观对应量 $\mathbf{J}_{\mathrm{total}}\cdot\mathbf{E}$ 则具有不同含义，具体见第5.2节：它表示保留场与平均化所消去的一切之间的交换，其中包括部分场能。

2.2 载流子运动的三种角色

在平均化之前，我们将同一批载流子的运动和构型重新组织为三个角色，分别对应宏观域。这种变量变换保留了完整的微观信息。组织方式遵循参考文献 [13, 第 IIB 节]。

对于正物质组分（$a=i$）和电子（$a=e$），将每个载流子的速度分解为局域有序部分和涨落。将有序电子运动表示为相对于有序离子运动的形式：

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}_a=\mathbf{U}_a+\mathbf{c}_a,\quad\langle n_a\mathbf{c}_a\rangle_{\mathrm{loc}}=\mathbf{0},\\&\mathbf{U}_i=\mathbf{U}_H,\qquad\qquad\mathbf{U}_e=\mathbf{U}_H+\mathbf{w},\qquad\mathbf{w}=\dot{\boldsymbol{\xi}}.\end{aligned}\tag{10}$$

括号 $\langle\cdot\rangle_{\mathrm{loc}}$ 表示对包含许多载流子的局域邻域取平均；它定义了空间滤波（第3节）之前的有序物种速度 $\mathbf{U}_a$。这里，$\mathbf{U}_H=\mathbf{U}_i$ 是有序离子速度，我们将其用作参考运动。有序电子速度与之相差 $\mathbf{w}=\mathbf{U}_e-\mathbf{U}_i$，其中 $\boldsymbol{\xi}$ 表示相应的相对位移。涨落 $\mathbf{c}_i$ 和 $\mathbf{c}_e$ 均予以明确保留。

这些变量对应着三种宏观描述。涨落 $\mathbf{c}_i$,$\mathbf{c}_e$会影响热行为，而有序离子运动 $\mathbf{U}_H$ 则为连续介质力学描述中的运动与变形提供参考。在局部电中性的材料中，共同的有序运动会携带机械动量，但不会产生净对流电流。相对位移与运动（$\boldsymbol{\xi}$,$\mathbf{w}$）描述电荷分离和相对电流，是宏观电动力学中材料响应的基础。这三种作用始终通过相同的微观场和约束相互耦合。

3 通过平均化得到热能与机械能

我们首先基于共同载流子-场参考系构建材料的热力学-力学描述。在保持材料有序相对电荷构型固定的同时，允许集体运动、变形和热涨落。随后通过平均化定义连续介质变量，并确定由动能、热能和弹性能表示的微观贡献。

3.1 空间平均与尺度分离

令 $a_{\mathrm{mic}}(\mathbf{x}\ t)$ 表示任意微观标量场、矢量场或张量场。空间宽度为 ℓ 的归一化局部平均核 K_ℓ 定义为

$$\overline{a}_\ell(\mathbf{x},t) \equiv \langle a_{\mathrm{mic}} \rangle_\ell = \int K_\ell(\mathbf{x}-\mathbf{r}) a_{\mathrm{mic}}(\mathbf{r},t)\, d^3r. \tag{11}$$

空间平均也可以理解为按空间频率进行滤波：缓慢变化的分量会被保留，而微观尺度上的细微变化则会受到抑制。我们将平均后的量称为保留量，将平均操作称为保留。因此，平均场表示从同一微观状态中选取的内容，而未被解析的细节仍未得到确定。这种分离改变了描述方式，但不改变底层物理系统。未解析的内容仍可能对能量和力学响应有所贡献。

在平滑的体相中，微观载流子排列的尺度 d_{mic} 通常比热力学-力学描述所保留的最小空间变化尺度 L_{TM} 小许多数量级。平均宽度 ℓ_{mech} 因而可以选择为满足

$$d_{\mathrm{mic}} \ll \ell_{\mathrm{mech}} \ll L_{\mathrm{TM}}. \tag{12}$$

只要在此范围内做出合理选择，所得保留场在所需容差内相同，那么具体的平均核和宽度就无关紧要。这个区间称为体相平均平台。如果不存在这样的平台，就必须扩充保留状态，或以更精细的尺度进行解析。

3.2 从带电载流子到力学连续介质

现在，我们构建载流子的连续介质描述，先从单个载流子开始，再将它们组合成两个组分连续介质。

对于一个载流子 p ，其质量为 m_p，电荷为 q_p，位置为$\mathbf{r}_p(t)$，平均化会以光滑分布取代其局域表示，并将其铺展到平均区域上。当载流子的空间范围与 ℓ相比可以忽略时，对式（11）应用平均化可得点源近似：

$$\begin{aligned} \rho^{\mathrm{ret}}_{m,p}(\mathbf{x},t) &\simeq m_p K_\ell(\mathbf{x}-\mathbf{r}_p(t))\,, \\ \rho^{\mathrm{ret}}_{q,p}(\mathbf{x},t) &\simeq q_p K_\ell(\mathbf{x}-\mathbf{r}_p(t))\,. \end{aligned} \tag{13}$$

归一化核保留了积分质量和电荷。它们所表示的空间范围会发生变化，但仍都属于以$\mathbf{v}_p(t)$运动的同一载流子。其保留的动量密度为 ρ_m^{ret}，$_p\mathbf{v}_p$。

分别对离子和电子的这些重叠分布求和，便得到两个相互交错的连续介质。其质量密度和平均速度定义为

$$\begin{aligned}\rho_{m,a} &= \langle m_a n_a \rangle_\ell \,, \\ \rho_{m,a}\mathbf{V}_a &= \langle m_a n_a \mathbf{v}_a \rangle_\ell \\ &= \langle m_a n_a (\mathbf{U}_a + \mathbf{c}_a) \rangle_\ell \\ &\simeq \langle m_a n_a \mathbf{U}_a \rangle_\ell \,, \qquad a \in \{i, e\}.\end{aligned} \tag{14}$$

这里的空间平均化与式（10）中的有序—涨落分解保持一致，因此在平均化的精度范围内，$\langle m_a n_a \mathbf{c}_a \rangle_\ell \simeq \mathbf{0}$ 。于是$\mathbf{V}_a$ 是对有序组分运动 $\mathbf{U}_a$的质量加权连续介质表示。

在保留分辨率下，这些连续介质场压缩了微观载体描述：不再追踪单个粒子的位置和速度，而不同的微观排列可能在保留状态中变得无法区分。

双流体描述通过以下关系将共同运动与相对运动区分开来

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_H, \qquad \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_H + \mathbf{W}, \qquad \mathbf{W} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i. \tag{15}$$

对于此处考虑的共同运动，重叠的离子和电子连续介质具有相同的速度$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_H$。在局部电中性体中，它们的电荷密度和对流电流相互抵消，而质量和机械动量则相加，从而定义机械基体：

$$\begin{aligned}\rho_m &= \rho_{m,i} + \rho_{m,e}, \\ \rho_m \mathbf{V}_H &= \rho_{m,i}\mathbf{V}_i + \rho_{m,e}\mathbf{V}_e.\end{aligned} \tag{16}$$

基体速度定义了保留运动和变形。在物质坐标$\mathbf{X}$中，设 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}\ t)$ 为基体轨迹，则

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} = \mathbf{V}_H(\boldsymbol{\varphi}, t), \qquad\qquad \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}, \\ &\mathbf{F} = \nabla_X \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}.\end{aligned} \tag{17}$$

因此，ρ_m、$\mathbf{V}_H$、$\mathbf{u}$和$\mathbf{F}$ 描述了基体保留的质量、运动和变形；未解析的非仿射运动仍存在于微观参考模型中。

3.3 热机械能量贡献

基体保留的质量和速度决定了其连续介质动能。热描述和弹性描述将有关未解析的载流子运动和场结构的信息压缩为宏观状态变量。

方程（14）确定了平均动量，而平均速度平方保留了未解析的动能。对于共同运动 $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_H$，平均微观动能恰好分解为

$$\left\langle u_{\mathrm{mat}}^{\mathrm{mic}} \right\rangle_\ell = \underbrace{\frac{1}{2}\rho_m |\mathbf{V}_H|^2}_{k_{\mathrm{cont}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{a\in\{i,e\}} \left\langle m_a n_a |\mathbf{c}_{a,\ell}|^2 \right\rangle_\ell}_{k_{\mathrm{sub}}} . \tag{18}$$

这里，$\mathbf{c}_{a,\ell} = \mathbf{v}_a(\mathbf{r}\ t) - \mathbf{V}_H(\mathbf{x}\ t)$ 表示各载流子相对于平均点 $\mathbf{x}$ 处保留的主体速度的速度。未解析动能 k_{sub} 既包括载流子涨落，也包括有序运动中未解析的变化。在局部平衡下，其局部随机化部分通过温度等宏观变量以热能密度u_{th} 表示，而无需追踪各个载流子的速度。

连续介质变量同样无法解析微观电磁场结构。即使保留的净电荷和电流为零，离子和电子的微观电荷分布也未必重合，其局部场仍可能非零。共同变形可以改变这种微观排列及其场能，而无需引入电子相对于离子的额外有序位移。由于约束不储存能量，且材料静止时这种能量依然存在，在此经典模型中，可恢复变形能就是场能；它由弹性能 u_{el}表示。应变和弹性本构定律能够描述这种响应，而无需解析每一种载流子排列及其场。无序载流子运动也会产生涨落微观场。经过局部平衡化后，这些场的未解析能量在热描述中由 u_{rad} 表示。因此，宏观热状态概括了随机化的载流子动能和涨落场能。

由此得到的热力学能量图为

	无序涨落	共同运动和变形
载流子动能	u_{th}	k_{cont}
真空场	u_{rad}	u_{el}

. (19)

因此，将无序涨落与共同运动和变形分开，便把微观的两种储能组织成上述四项；平均化和集体状态变量将它们描述为热能、连续介质动能和弹性能。

4 平均电磁场及平均化所消除的内容

现在，我们转而讨论离子和电子有序的相对位移与运动，并首先说明经过平均化后如何表示它们的电磁场。保持热力学机械宿主固定，对微观场进行空间平均，将其分为保留场和未解析残差。该构造遵循文献 [13, 第 IIIA 节]。

4.1 对每个载流子的源和场进行平均

第 3.2节介绍了单个离子或电子的平均质量和电荷分布。现在，我们对相应的电磁场进行同样的空间平均，然后通过麦克斯韦叠加合并载流子贡献。

我们使用第 3.1 节中的滤波器，其采用归一化中心核和固定的体相平均宽度 ℓ_{EM}，该滤波器处于电磁尺度分离窗口内：

$$\int K_{\ell_{\mathrm{EM}}}(\mathbf{r})\, d^3r = 1, \qquad \int \mathbf{r} K_{\ell_{\mathrm{EM}}}(\mathbf{r})\, d^3r = \mathbf{0}, \\ d_{\mathrm{mic}} \ll \ell_{\mathrm{EM}} \ll L_{\mathrm{EM}}. \tag{20}$$

这里， d_{mic} 是载流子或晶格尺度， L_{EM} 是最小的保留场变化尺度。在电磁保留尺度上，对每个载流子的质量、电荷和运动，以及相应的场，都应用相同的平均化。下文用 $\langle\cdot\rangle \equiv\langle\cdot\rangle_{\ell_{\mathrm{EM}}}$ 表示这一固定滤波器。

对于电荷为 q、位置为 $\mathbf{r}_q(t)$、速度为 $\mathbf{v}_q(t)$ 的载流子，在相同的点源近似下，平均电荷密度和电流密度为，

$$\rho_q = \left\langle \rho_q^{\mathrm{mic}} \right\rangle \simeq q K_{\ell_{\mathrm{EM}}}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_q(t)), \\ \mathbf{J}_q = \left\langle \mathbf{j}_q^{\mathrm{mic}} \right\rangle \simeq q \mathbf{v}_q(t) K_{\ell_{\mathrm{EM}}}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_q(t)). \tag{21}$$

归一化和中心化会保留总电荷及电荷中心，而固定滤波器会保留连续性关系， $\partial_t \rho_q + \nabla \cdot \mathbf{J}_q = 0$。

现在，我们将每个载流子的微观场分解为保留平均量和包含未解析细节的残余场。保留场满足麦克斯韦方程组，其源为平均电荷密度和电流密度；这是因为麦克斯韦方程组是线性的，而且固定的体相滤波器与空间和时间导数可交换 [35,第 6.6] 节。我们将这一分解写作

$$\mathbf{E}_q = \left\langle \mathbf{e}_q^{\mathrm{mic}} \right\rangle, \qquad \mathbf{B}_q = \left\langle \mathbf{b}_q^{\mathrm{mic}} \right\rangle, \\ \mathbf{e}_q^{\mathrm{mic}} = \mathbf{E}_q + \delta\mathbf{e}_q, \quad \mathbf{b}_q^{\mathrm{mic}} = \mathbf{B}_q + \delta\mathbf{b}_q. \tag{22}$$

残余源 $\delta\rho_q = \rho_q^{\mathrm{mic}} - \rho_q$ 和 $\delta\mathbf{j}_q = \mathbf{j}_q^{\mathrm{mic}} - \mathbf{J}_q$ 也满足连续性，并且 $\delta\rho_q$ 的总电荷和一阶电荷矩为零。因此，其最低阶电荷多极矩消失。在距离 $d \gg \ell_{\mathrm{EM}}$处，微观场与保留场在所需精度范围内一致；而在$O(\ell_{\mathrm{EM}})$载流子邻域内，平均化会显著改变场。残余项具有衰减的高阶多极尾项，不必严格为零。对于时变源，当 $\omega_{\max}\ell_{\mathrm{EM}}/c \ll 1$时，该结论适用于保留带宽范围。

麦克斯韦叠加通过对载流子贡献求和，将这一构造推广到整个材料。保留场保留了已解析行为，而载流子尺度的源几何结构和近场则归入残余项。对于给定的电源历史，这种线性适用于麦克斯韦方程组；材料响应本身则可能是非线性的。

4.2 电介质与导体示例

现在，我们用极化电介质和导体来说明平均化如何消除微观场结构。在每种情况下，我们都在热力学机械宿主固定不变的条件下，对比微观场与保留场。这样的比较分离出有序的相对电荷重排及其产生的场；宿主中未发生变化的微观背景予以省略，因此图示量表示的是场诱导的变化。

对于任一物体，令 ρ_{ret} 和$\mathbf{E}$ 分别表示保留电荷密度和电场。将残差定义为它们与微观量之差，可得

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{mic}} &= \rho_{\mathrm{ret}} + \delta\rho, \\ \mathbf{e}_{\mathrm{mic}} &= \mathbf{E} + \delta\mathbf{e}. \end{aligned} \tag{23}$$

对于选定的保留描述，这种分解是精确的。总场为 $\mathbf{e}_{\mathrm{mic}} = \mathbf{e}_{\mathrm{ext}} + \mathbf{e}_{\mathrm{ind}}$；图 1 比较了感应场，其中省略了共同的指定外场。

极化电介质。 外加场通过改变电介质中的微观电荷组织使其极化。(a)–(c)面板中的局域电荷对阵列展示了一种示例性构型；这种平均化方法可直接应用于底层的离子和电子，而无需指定特定的极化机制。即使平均后的体电荷密度为零，微观电荷结构及其电场仍然存在。在此例中，平均化会在保留场中消除这些细节，但体相内部及其边界附近仍存在残余场。

导体。 在准静态理想导体极限下，载流子会重新分布，使过剩电荷移至表面。其感应场会在已解析的中性体相中抵消外加场。图 1 的(d)–(f)面板通过指定的电荷分布展示了这种表面组织。平均化后，残余场主要留在表面附近；而电介质示例中的残余场则遍布整个体相。

（b）和（e）面板按构造具有相同的保留源和感应场，而（c）和（f）面板则呈现不同的残余结构。因此，不同的微观排列可以具有相同的保留源与场描述。

从滤波边界层到尖锐界面。在平滑体相中，式（20）中的尺度分离使保留场不受平均核合理变化的影响。在尖锐材料边界处，平均核同时覆盖物质和真空，空间变化则延展至整个平均尺度。由于不存在能够选定唯一边界剖面的明确谱隙，平均化会产生厚度为 $O(\ell_{\mathrm{EM}})$ 的平滑过渡层，其形状取决于所选的平均核。

图 (b) 和 (e) 中的尖锐表面电荷层取代了这一平滑过渡剖面。为将它们与平均化构造联系起来，首先将经过字面滤波的电荷密度和场写为

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{filt}} &= \langle \rho_{\mathrm{mic}} \rangle, \quad \delta\rho_{\mathrm{filt}} = \rho_{\mathrm{mic}} - \rho_{\mathrm{filt}}, \\ \mathbf{E}_{\mathrm{filt}} &= \langle \mathbf{e}_{\mathrm{mic}} \rangle, \quad \delta\mathbf{e}_{\mathrm{filt}} = \mathbf{e}_{\mathrm{mic}} - \mathbf{E}_{\mathrm{filt}}. \end{aligned} \tag{24}$$

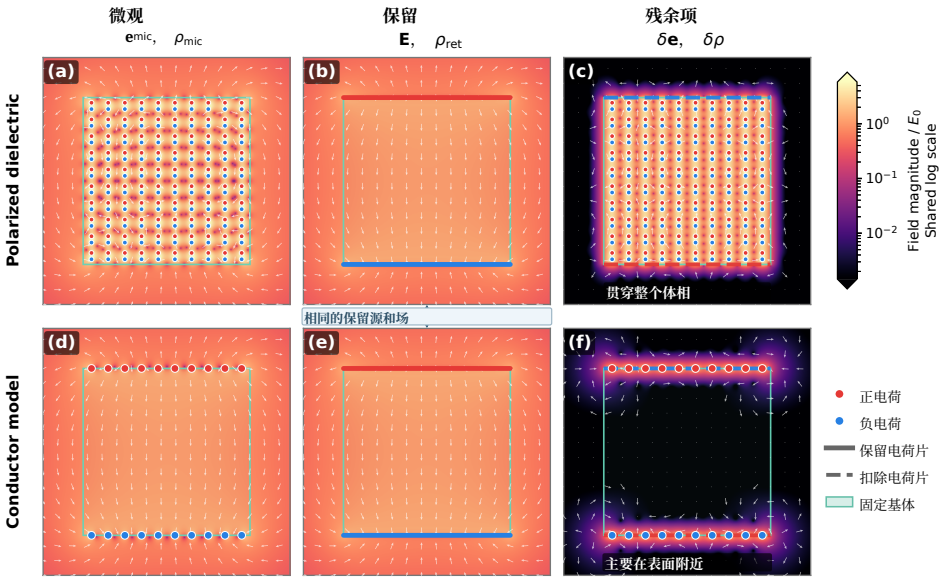

图 1 保留源和感应场相同，但残余结构不同的概念示意图。A 10×10 组体电荷对（电介质，上）和一个规定的表面电荷模型（导体，下）使用相同的保留电荷片，因此 (b) 和 (e) 相同。各列显示相应的场和电荷密度分解，$\mathbf{e}_{\mathrm{mic}} = \mathbf{E} + \delta\mathbf{e}$ 和 $\rho_{\mathrm{mic}} = \rho_{\mathrm{ret}} + \delta\rho$；图中省略外场。(c) 中的残余项遍布整个电介质体，而 (f) 中的残余项主要位于表面附近。颜色表示场强，采用统一的对数刻度，并以 E_0（物体中心处的保留场强）为基准；箭头表示方向。虚线电荷片表示扣除的保留电荷；绿色轮廓表示固定基体。两个模型都采用相同的正则化二维静电核；下排直接规定电荷，而不求解导体平衡。未解析场能还包括与保留场的交叉项（第5节）。

我们用一个携带相同单位面积过剩电荷的尖锐界面，取代这一依赖于核函数的过渡剖面，前提是这种替代在所需精度范围内能够再现过渡层外的滤波场 [7, 35]:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{s}) &= \int_{\mathrm{layer}} \left[\rho_{\mathrm{filt}}(\mathbf{s}, n) - \rho_{\mathrm{bulk}}(\mathbf{s}, n)\chi_{\Omega}(\mathbf{s}, n)\right] dn, \\ \rho_{\mathrm{ret}} &= \rho_{\mathrm{bulk}}\chi_{\Omega} + \sigma(\mathbf{s})\delta_{\partial\Omega}. \end{aligned} \tag{25}$$

此处，$\rho_{\mathrm{filt}}(\mathbf{s}\ n)$ 是该层中式（24）所定义的字面滤波电荷密度，其中外法向坐标为 n，切向位置为 $\mathbf{s}$；减去阶跃剖面可避免在 σ 中再次计入体相电荷。示性函数 χ_{Ω} 在物体 Ω 内等于 1，在外部等于 0；$\delta_{\partial\Omega}$ 是其边界上的表面δ分布。对于两个示例中的中性体，$\rho_{\mathrm{bulk}} = 0$。

式（23）中的分解适用于这两种表示。对于直接滤波，残余项包含被平均化抑制的微观结构。对于尖锐界面，它还包括表面电荷片未涵盖的过渡层细节。残余场由残余源产生，并且可能在载流子及

界面邻域之外仍有衰减尾部。下一小节将汇总针对保留的体相源和面源的麦克斯韦方程组。

4.3 保留场的麦克斯韦方程

对于总电流和磁场，相应的分解为

$$\mathbf{j}_{\mathrm{mic}} = \mathbf{J}_{\mathrm{total}} + \delta\mathbf{j}, \quad \mathbf{b}_{\mathrm{mic}} = \mathbf{B} + \delta\mathbf{b}. \tag{26}$$

在光滑体相中，保留量即为滤波后的源和场。麦克斯韦方程组的线性性质，以及固定滤波器与微分运算的可交换性，给出

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho_{\mathrm{ret}}}{\varepsilon_0}, \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0, \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{total}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{27}$$

在未解析界面处，第 4.2 节中的尖锐代表在分布意义下满足这些方程，并满足相应的保留面源和跃变条件。

在此参考模型中，保留的麦克斯韦系统直接由离子和电子的电荷与电流导出，无需借助中间的分子模型或多极近似。电子或离子位移以及分子重新取向，都是对相同载流子源的不同组织方式。因此，场方程在这些机制下保持相同的形式。对于给定的源和控制量，适当的初始条件和边界条件共同构成电磁问题；材料定律则决定源演化和能量响应。

源表示。为了将这一描述与传统的宏观记号联系起来，我们引入极化和磁化，作为保留载流子源的一种可选表示。选择一种自由/束缚划分，将任何全局输运或调和分量归入 $\mathbf{J}_{\mathrm{free}}$。剩余电流可写为 [7]

$$\mathbf{J}_{\mathrm{total}} = \mathbf{J}_{\mathrm{free}} + \mathbf{J}_{\mathrm{b}}, \quad \mathbf{J}_{\mathrm{b}} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{M}. \tag{28}$$

旋度项的散度为零。如果自由电荷–电流对和总电荷–电流对都满足连续性，那么

$$\rho_{\mathrm{ret}} = \rho_{\mathrm{free}} - \nabla\cdot\mathbf{P}, \tag{29}$$

在将任意与时间无关的参考电荷吸收到 ρ_{free} 之后。该表示并非唯一，且不会改变总电荷和电流，也不会改变麦克斯韦问题。

相应的激励场

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \tag{30}$$

将式（27）写成熟悉的激励形式 [27]。下面的电学示例设$\mathbf{M} = \mathbf{0}$，因此$\mathbf{J}_{\mathrm{total}} = \mathbf{J}_{\mathrm{free}} + \partial_t \mathbf{P}$。

极化和磁化可以描述材料的组织结构，并作为本构变量。这些电源表述及其相关激励场不会增加独立的电磁自由度，也不能单独确定能量储存或其状态依赖性。

残余场满足形式相同的麦克斯韦方程组，其残余源为 $\delta\rho$ 和 $\delta\mathbf{j}$。由于方程是线性的，式（27）中的保留系统在没有残余场的情况下仍然是封闭的：其中不含任何残余量，其解也不携带关于残余场的信息，正如图 1 的（c）和（f）面板对相同保留场所展示的那样。这两部分仍通过载流子保持联系，因为载流子的运动会产生两组电源；此外，在场的每个二次量中，例如能量和应力中，它们又会重新汇合。因此，平均化未解析的场结构仍可能对宏观能量作出贡献。

5 保留场的能量与未解析场结构

保留场满足带有保留源的麦克斯韦方程组（第 4.3 节）。因此，它们的能量平衡包含自身的能量、其通量以及一个交换项，即总电流与场的乘积 $\mathbf{J}_{\mathrm{total}}\cdot\mathbf{E}$。本节将阐明该交换项的含义，以及其另一侧包含的内容。

为单独考察相对电荷运动的响应，我们首先排除与连续介质力学域和热力学域的能量交换：基体保持静止且刚性，并抑制热能交换。

我们先考察导体充电，以确定保留场何时能够再现外部输入的功。此步骤优先进行，因为只有当通过保留场输入的能量确实等于实际供给的能量时，才能确定电介质内部的能量交换。随后，我们考察电介质中的能量交换及其作为储存的表述。最后，我们将这些贡献合并为统一能量图谱，并恢复机械能和热能交换。

5.1 导体充电：外功的保留

第 4.2 节所述的准静态导体，其显著的充电引起的剩余场集中在其表面附近。通过考察对充电功率的修正，可以检验这些场的能量效应。

考虑一个具有理想导电电极的电容器，在基体固定的情况下，由外部电源以准静态方式充电，$\mathbf{U}_H=\mathbf{0}$。在充电时间尺度内，忽略载流子惯性、载流子动能的变化及其传输。我们用作用于每种载流子的外部力密度$\mathbf{f}_{\mathrm{ext},\,s}^{\mathrm{mic}}$来表示电源的电磁作用。其场不包括在$(\mathbf{e}_{\mathrm{mic}},\ \mathbf{b}_{\mathrm{mic}})$中，后者包含由重新分布的电容器电荷产生的场。

将外部驱动纳入式（9）得

$$
\begin{aligned}
p_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{mic}} &\equiv \sum_{s} \mathbf{f}_{\mathrm{ext},s}^{\mathrm{mic}} \cdot \mathbf{v}_s \\
p_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{mic}} + \mathcal{P}_{\mathrm{con}}^{\mathrm{mic}} &\simeq -\mathbf{j}_{\mathrm{mic}} \cdot \mathbf{e}_{\mathrm{mic}} \\
&= \frac{\partial u_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}}.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

在式（31）中， $\partial_t u_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}}$衡量能量向所包含的电磁场进行的局部传递：正值表示输入，负值表示输出。在这种交换为零的情况下，局部场能的任何变化都由传输来平衡。在充电假设下，外部功率和约束功率共同提供这种局部传递。约束反作用力可以重新分配能量，但不会提供独立的储能；其贡献在完整的受约束电容器组件（包括其支撑结构）中相互抵消。因此，积分后的场平衡确定了外部充电功率总量。

为确定保留是否维持了这一总输入，将$\mathbf{e}_{\mathrm{mic}} = \mathbf{E} + \delta\mathbf{e}$和$\mathbf{j}_{\mathrm{mic}} = \mathbf{J}_{\mathrm{total}} + \delta\mathbf{j}$ 代入微观功率乘积:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{j}_{\mathrm{mic}} \cdot \mathbf{e}_{\mathrm{mic}} &= \mathbf{J}_{\mathrm{total}} \cdot \mathbf{E} + r_P^{\mathrm{mic}}, \\
r_P^{\mathrm{mic}} &\equiv \delta\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\mathrm{total}} \cdot \delta\mathbf{e} \\
&\quad + \delta\mathbf{j} \cdot \delta\mathbf{e}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

残余项 r_P^{mic}是保留后的乘积中省略的功率贡献。在这一充电模型的光滑体相中， $\delta\mathbf{e} \simeq \mathbf{0}$ ，而式（20）中的尺度间隙给出$\langle \delta\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle \simeq 0$。因此

$$
\begin{aligned}
\left\langle r_P^{\mathrm{mic}} \right\rangle &\simeq 0, \\
\left\langle \mathbf{j}_{\mathrm{mic}} \cdot \mathbf{e}_{\mathrm{mic}} \right\rangle &\simeq \mathbf{J}_{\mathrm{total}} \cdot \mathbf{E} \qquad \text{in smooth bulk.}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

r_P^{mic}的剩余贡献集中在未解析的表面邻域 $\mathcal{L}_\partial$ 中，其厚度为 $O(\ell_{\mathrm{EM}})$。仅凭厚度较小并不能限制积分功率，因此我们要求

$$
\left| \int_{\mathcal{L}_\partial} r_P^{\mathrm{mic}} \, dV \right| \leq P_{\mathrm{tol}}.
\tag{34}
$$

这里 P_{tol} 是总充电功率允许的表面修正。在光滑体相中，将保留的外部功率密度定义为 $p_{\mathrm{ext}} \equiv \langle p_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{mic}} \rangle$。平均充电

平衡关系与保留的麦克斯韦系统，式（27），则给出 [2, 7, 35]

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{ext}} + \left\langle \mathcal{P}_{\mathrm{con}}^{\mathrm{mic}} \right\rangle &\simeq -\mathbf{J}_{\mathrm{total}} \cdot \mathbf{E} \\ &= \frac{\partial u_{\mathrm{vac}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{vac}}, \\ u_{\mathrm{vac}} &= \frac{\varepsilon_0}{2}|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2, \\ \mathbf{S}_{\mathrm{vac}} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{35}$$

在所述充电假设和表面功率容差下，对式（31）中的微观能量平衡和式（35）中的保留能量平衡积分，得到的外部总充电功率相同。累积的充电功由保留场能的变化以及穿过组件边界的净能量输运来核算。因此，无需解析微观表面场，仅凭保留场就足以预测这一能量。然而，与此不同，在电介质中，被平均化省略的微观场可能对能量储存有显著贡献。

5.2 电介质极化：交换与储存

现在，在开始充电之前，我们将一个中性电介质体 Ω_{d} 置于电容器中，使其不与导体发生电接触。离子基体保持静止且刚性，$\mathbf{U}_H = \mathbf{V}_H = \mathbf{0}$，热能贡献（$u_{\mathrm{th}}$，$u_{\mathrm{rad}}$）保持不变。除相应的电磁场能外，我们还保留电子相对于基体有序运动的动能。

外部充电功。电介质就位后，我们首先考察电源通过电容器电极提供的功。电介质通过其在电极处产生的场影响这部分功；在未解析的界面层之外，保留处理能以所需精度保留该场（第 4 节）。因此，在导体与电介质之间的间隙中，保留场就是微观场，而到达电介质体的保留坡印廷通量就是真实的能流。在满足第 5.1 节的充电假设和边界功率条件时，保留场因此决定了提供给完整导体–电介质组件（包括其支撑结构）的外功。

微观能量交换。现在我们转向电介质内部的能量交换。电容器场和电介质自身的场均包含在（$\mathbf{e}_{\mathrm{mic}}$，$\mathbf{b}_{\mathrm{mic}}$）中。独立的外部驱动仅作用于导体电荷，因此电介质内部的微观能量平衡可由式（9）得出：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\mathrm{mat}}^{\mathrm{mic}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{s}_{\mathrm{mat}}^{\mathrm{mic}} - \mathcal{P}_{\mathrm{con}}^{\mathrm{mic}} &= \mathbf{j}_{\mathrm{mic}} \cdot \mathbf{e}_{\mathrm{mic}} \\ &= -\left(\frac{\partial u_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}} \right). \end{aligned} \tag{36}$$

在离子基体固定且不考虑热交换的情况下，起作用的动能响应是电子相对于离子的有序运动，包括其动能储存和传输。约束项保留了与施加的限制相关的约束反力，以及能量可能在局部重新分配的情况；这些反力在整个受约束系统上的总功率为零。

现在利用式（32）将该微观功率分为保留项和残余项：

$$\mathbf{j}_{\mathrm{mic}} \cdot \mathbf{e}_{\mathrm{mic}} = \mathbf{J}_{\mathrm{total}} \cdot \mathbf{E} + r_P^{\mathrm{mic}}. \tag{37}$$

残余项在整个体相中都可能保持显著，因此保留电流–场乘积不一定等于微观洛伦兹功率。利用微观麦克斯韦方程和保留麦克斯韦方程，同一残余功率也可以等价地写成场的形式，如第 2 [28] 节所示：

$$r_P^{\mathrm{mic}} = -\left(\frac{\partial u_{\mathrm{unres}}^{\mathrm{mic}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{unres}}^{\mathrm{mic}} \right).$$

这里， $u_{\mathrm{unres}}^{\mathrm{mic}}$ 和$\mathbf{S}_{\mathrm{unres}}^{\mathrm{mic}}$ 分别是未解析场能量密度和通量，定义为

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{unres}}^{\mathrm{mic}} &\equiv u_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}} - u_{\mathrm{vac}} \\ &= \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{e} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{b} + \frac{\varepsilon_0}{2} |\delta\mathbf{e}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\delta\mathbf{b}|^2, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathrm{unres}}^{\mathrm{mic}} &\equiv \mathbf{S}_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{mic}} - \mathbf{S}_{\mathrm{vac}} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{E} \times \delta\mathbf{b} + \delta\mathbf{e} \times \mathbf{B} + \delta\mathbf{e} \times \delta\mathbf{b} \right). \end{aligned} \tag{39}$$

在平滑体相中，第 4 节确立的尺度分离使平均保留项–残余项交叉项可以忽略。然而，残余场平方项在平均化后仍然存在：微观场结构可能从保留场中消失，但仍会对能量作出贡献。在未解析界面附近，空间变化延伸至平均尺度范围内，因此体相尺度分离不再保证平均交叉项可以忽略。精确的未解析能量包含保留场–残余场交叉项，以及尖锐界面表示所省略的过渡层贡献，并且不必在每一点都为正。

利用这一场恒等式将式（36）改写为保留洛伦兹功率的形式，可得

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathrm{total}} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(u_{\mathrm{mat}}^{\mathrm{mic}} + u_{\mathrm{unres}}^{\mathrm{mic}} \right) \\ + \nabla \cdot \left(\mathbf{s}_{\mathrm{mat}}^{\mathrm{mic}} + \mathbf{S}_{\mathrm{unres}}^{\mathrm{mic}} \right) - \mathcal{P}_{\mathrm{con}}^{\mathrm{mic}}. \end{aligned} \tag{40}$$

保留场所记录的内容。方程（40）是精确的，它将保留描述所包含的内容与平均化所移除的内容区分开来。其左侧是保留的坡印廷平衡方程（35）中的交换项，仅由保留场决定。其右侧仅包含保留场所不携带的量：载流子动能、平均化所移除的场结构能量、它们的通量以及约束功率。因此，乘积 $\mathbf{J}_{\mathrm{total}} \cdot \mathbf{E}$ 表示

能量离开保留场的速率。它并非对载流子所做功的平均值，因为其中一部分能量流入了未解析场能。

考虑电介质从一种状态转变到另一种状态时的极化。源功在导体处进入保留场，并由保留的坡印廷通量携带。其中一部分使保留场能增加 u_{vac}。极化电流沿着 $\mathbf{E}$ 流动时，能量以 $\mathbf{E}\cdot\partial_t\mathbf{P}$ 的速率离开保留场。最后，保留场记录了三个量：源功、自身能量的变化，以及离开的能量 $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{P}$。只有第二个量是初末场状态的属性；另外两个量则由历史决定。在这场交换背后，载流子逆着约束发生位移，它们之间的场结构也发生了变化；离开的能量就在其中，或已被传递出去。这一切都无法从保留场中看出。在某一给定时刻，保留场无法区分电介质正在极化还是导体正在耗散：两种情况下，$\mathbf{J}_{\mathrm{total}}\cdot\mathbf{E} > 0$。二者的区别在于过程逆转时能量是否会返回，而这取决于材料响应。

这种理解不需要假设储存，即可适用于整个物体。就平均化的精度而言，残余场局限于物质及其表面层（第 4.1 节）。因此，在边界位于电介质周围真空中的体积上对式（40）积分，在这一精度下不会产生载流子能量或未解析场能的通量。在本节的假设下，物体内部保留场所失去的能量，等于物体的载流子动能与未解析场能的变化；约束功率除外，因为对整个组件而言，它为零。此阶段尚无法确定这种能量在物体内的具体所在。

式（40）两边的性质也有所不同。交换属于保留描述：其中既不涉及本构定律，也不涉及微观细节，而且这种理解适用于任何材料响应。能量的去向则按照经典参考模型所揭示的方式表述。更精细的模型会以不同方式划分这部分能量，例如将能量归于此处由无功约束所代表的量子效应，但其总量由保留场确定，且不会改变。

储能表示。 现在，我们来探讨在只能获得保留场、且不再解析微观细节时，如何表示式（40）右侧的内容。与第 3节中的热力学机械宿主一样，我们引入宏观量来表示未解析响应的能量效应。首先，我们用两个功率来表示交换：一个是未解析场结构接收的功率，另一个是相对动能功率：

$$\mathbf{J}_{\mathrm{total}}\cdot\mathbf{E} \simeq \mathcal{P}_{\mathrm{unres}} + \mathcal{P}^{\mathrm{kin}}_{\mathrm{rel}}. \tag{41}$$

这里，$\mathcal{P}_{\mathrm{unres}}$ 表示与未解析电场贡献之间的交换，而$\mathcal{P}^{\mathrm{kin}}_{\mathrm{rel}}$表示有序电子运动相对于固定离子的动能响应。这些功率包含相关的储存、传输和约束介导的传递。保留场决定它们的总和；材料描述则决定其分配及后续演化。

对于此处考虑的受约束的无耗散响应，我们通过束缚和有序电子动能储存来描述这些功率。在保留精度下

并在所述精度范围内，这种储能表示假设这些能量在每个材料元的边界上净输运可忽略不计，且其中的净约束功率也可忽略不计。在这些条件下，方程（41）变为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{\mathrm{bind}}}{\partial t}+\frac{\partial k_{\mathrm{rel}}}{\partial t} &\simeq \mathbf{J}_{\mathrm{total}}\cdot\mathbf{E}\\ &=-\left(\frac{\partial u_{\mathrm{vac}}}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{S}_{\mathrm{vac}}\right).\end{aligned}\tag{42}$$

在这些局部储能条件下，微观材料响应由两个宏观能量量表示。结合能密度 u_{bind} 表示因保留而被省略的微观场中可恢复的能量，而 k_{rel} 则是电子相对于固定离子有序运动的动能密度。因此，结合能保留了未解析场的能量贡献，而无需重建其微观分布。此处该术语仅取此义，并非指束缚系统的内聚能或解离能。

在这些条件下，交换转化为储存率。正值 $\mathbf{J}_{\mathrm{total}}\cdot\mathbf{E}$会将能量从保留场转移至结合储能和相对动能储存；负功率则将能量返还给保留场。如果相对动能变化可以忽略，保留功率就仅决定结合能率。第 6.2节将探讨确定线性可逆、非线性可逆和耗散响应下可恢复结合储能所需的材料信息。

5.3 宏观能量映射与交换

在第 5.2 节的局部储能假设下，有序相对电荷响应由三种能量贡献表示：保留场能 u_{vac}、结合能u_{bind} （表示可恢复的未解析场能），以及 k_{rel} 电子相对于离子有序运动的动能。

这些电学贡献完善了第 3 节的热机械映射。表 1 按照能量的微观起源和载体作用，对所得能量进行了组织。表中的行区分载流子动能与电磁场能量；列则区分无序涨落、共同运动与变形，以及有序相对电荷构型与运动。

这六个条目描述的是相同的两种微观能量储存。热场涨落、弹性储能和可恢复结合储能，都是保留场未携带的微观电磁能量，只是通过不同的材料变量来表示；只有 u_{vac} 是根据保留的 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 显式计算的。热能、连续介质能和相对动能同样代表载流子运动的不同作用。热机械条目是在相对电荷构型保持不变的情况下确定的，而电学条目则是在基体固定且热交换受到抑制的情况下确定的。一个条目依赖于另一种作用的变量，例如结合能依赖于变形，这种依赖关系就是第 6 节所考察的各领域之间的耦合。材料定律提供了这种状态依赖性和耦合。

能量交换。在方程（42）中，未考虑机械能和热能交换，因此，从保留场传递的功率只改变束缚能和相对动能

表1 经典载体–场模型中三个宏观域的能量图。各列区分宏观域和载体作用；能量行标明其微观起源。热和机械条目遵循第3节；可恢复结合储能采用第5.2节的可逆局部储能假设。

宏观域	热力学	连续介质力学	宏观电动力学
载体作用	无序涨落	共同运动和变形	相对电荷构型和运动
载流子动能	u_{th}：随机化载流子能量	k_{cont}：连续介质动能	k_{rel}：相对载体动能
微观场能	u_{rad}：涨落场贡献	u_{el}：可逆形变相关场能	u_{vac}：保留场能 能量 u_{bind}：可恢复结合储能

储存。现在，我们允许基体共同运动和变形，并考虑耗散。因此，同一保留场功率也可以用于提供机械功和热能。其总量仍由保留的坡印廷平衡决定，而材料模型则决定它在这三个领域之间的分配：

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\mathrm{total}}\cdot\mathbf{E} &= -\left(\frac{\partial u_{\mathrm{vac}}}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{S}_{\mathrm{vac}}\right)\\ &\simeq \underbrace{\mathcal{P}_{\mathrm{unres}}+\mathcal{P}_{\mathrm{rel}}^{\mathrm{kin}}}_{\text{electrodynamic}}+\underbrace{p_{\mathrm{def}}}_{\text{mechanical}}+\underbrace{p_{\mathrm{diss}}}_{\text{thermal}}\,.\end{aligned}\tag{43}$$

右侧各项将这一功率与表中的能量贡献联系起来 1。电功率描述了与未解析场能和载流子相对运动之间的交换。机械功率 p_{def} 为基体的共同运动和变形供能，而 $p_{\mathrm{diss}}\geq 0$ 则表示向热贡献的直接耗散传递。这些功率涵盖了材料描述中的储存、传输和传递。

表 1 和式（43）共同完善了统一能量图谱：它们指出各项贡献的微观起源，并将保留场能交换与三个宏观域联系起来。

6 通往负载的能量路径：保留场所决定的内容

现在，我们考察宏观电磁领域如何通过离子基体的变形，在能量层面与连续介质力学域耦合。对于本文讨论的准静态过程，相关的电储能由保留场能{v1}和可恢复结合能 {v2}表示

。这些能量的变化与外部输入的电功共同决定传递给基体的机械功。我们利用这一联系，确定保留场和现有材料数据何时能够以连续介质描述所要求的分辨率确定机械载荷。

6.1 从电能到机械载荷

令 U_{vac} 和 U_{bind} 分别表示整个导体–电介质组件的总保留场能和可恢复结合能。对于基体的虚拟变形，能量守恒给出

$$\delta W_{\mathrm{em}} \simeq \delta W_{\mathrm{ext,elec}} - \delta(U_{\mathrm{vac}} + U_{\mathrm{bind}})\,. \tag{44}$$

此处 δW_{em} 是传递给基体的机械功。电源功 $\delta W_{\mathrm{ext,\ elec}}$ 取决于规定的控制量：固定导体电荷时，电源功为零；而固定电压时，电荷发生变化会产生电源功。对于规定的控制量 Λ，我们将储存的电能和电源功合并为功势 U_Λ，其中 $\delta U_\Lambda = \delta(U_{\mathrm{vac}}+U_{\mathrm{bind}}) - \delta W_{\mathrm{ext,\ elec}}$。因此，机械功为$\delta W_{\mathrm{em}} \simeq -\delta U_\Lambda$ [17, 18, 20, 37]。

为明确该功所度量的机械载荷，令 q 对允许的基体变形进行参数化 $\mathbf{u}(\mathbf{X}; q$，同时保持电学、热学和器件控制量 Λ固定。我们假设此变分的总约束虚功为零 [38,第2节1]。其虚位移为 $\delta\mathbf{u} = \boldsymbol{\eta}_q\,\delta q$，其中 $\boldsymbol{\eta}_q = \partial\mathbf{u}/\partial q$。位移模式 $\boldsymbol{\eta}_q$ 决定了要确定的载荷分量。在此变分过程中，任何耗散内部变量均保持在其当前值；其作用将在第 6.2.3节中展开讨论。

对于占据 Ω 的基体，传递的体力密度 $\mathbf{f}_{\mathrm{em}}^{\mathrm{bulk}}$和边界牵引力 $\mathbf{t}_{\mathrm{em}}$所做的虚功相同。写作 $\delta W_{\mathrm{em}} = Q_{\mathrm{em}}^{(q)}\delta q$ 即可确定与所选变形共轭的广义载荷：

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{em}}^{(q)} &\equiv \int_\Omega \mathbf{f}_{\mathrm{em}}^{\mathrm{bulk}} \cdot \boldsymbol{\eta}_q\, dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}_{\mathrm{em}} \cdot \boldsymbol{\eta}_q\, dA \\ &\simeq -\left.\frac{dU_\Lambda}{dq}\right|_\Lambda . \end{aligned} \tag{45}$$

方程（45）将功势与进入连续介质力学的载荷联系起来。现有的宏观信息能否确定这一载荷，则是另一个问题。由保留场和提供的材料数据构造的约化势 U_Λ^{ret}，若其负导数能在要求的容差范围内重现 $Q_{\mathrm{em}}^{(q)}$，便足以满足要求。因此，该描述未明确说明的微观差异必须在这一精度内不改变所选虚功。我们将这一条件称为充分性判据。可通过比较来检验该判据：一对虚功不同的可容许实现即可表明描述不充分（第 6.4节）；而充分性则是相对于明确说明的一类实现来确立的，例如由具有实测变形依赖性的本构定律所涵盖的实现。

沿选定变形的保留场解确定 δU_{vac}，结合源功，还可确定变形过程中离开保留场的能量，$\delta W_{\mathrm{ext,\ elec}} - \delta U_{\mathrm{vac}}$。根据方程（44），这等于各项之和 $\delta U_{\mathrm{bind}} + \delta W_{\mathrm{em}}$。保留场确定的是总和，而非各个分项：要得到机械功，我们必须知道基体变形时可恢复结合能如何变化。

6.2 束缚能与材料响应

力预测需要知道固定宿主构型下可恢复的储存能，以及它随变形的变化。完成这两个步骤所需的材料信息取决于响应机制，如图 2 所示。

在固定变形 q下，若 $\mathbf{J}_{\mathrm{free}} = \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{M} = \mathbf{0}$，则有 $\mathbf{J}_{\mathrm{total}} = \partial_t \mathbf{P}$。沿充电历史对式（43）中的保留功率平衡积分，可得单位体积的电功：

$$\begin{aligned} -\int \left(\frac{\partial u_{\mathrm{vac}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{vac}} \right) dt &= \int \mathbf{J}_{\mathrm{total}} \cdot \mathbf{E}\, dt \\ &= \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}. \end{aligned} \tag{46}$$

因此，极化积分度量了从保留场传递到材料响应的净能量，无论该响应为何。这是对转移过程进行时间积分的结果。只有当转移可以恢复并保留在材料元中时，它才会成为储能；无论如何，它都不是极化场的能量：$\mathbf{P}$ 表示束缚电流（第4.3节），本身不携带能量。熟知的能量密度$\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$将这部分转移能量加到保留场能上，因此以这些条件成立为前提。只有在线性可逆响应下，端点本身才能确定储存部分；而任何材料都不可能在所有场强和变化速率下都呈线性可逆响应。以下各响应机制的区别在于，转移历史对可恢复部分揭示了什么。

6.2.1 线性可逆响应

我们首先考虑一种线性可逆电介质。为了确定其可恢复结合能，我们从零场参考态开始对其充电，同时保持主体变形q 不变。其极化定律为

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}(q)\mathbf{E} \tag{47}$$

其中 $\boldsymbol{\chi}(q)$ 对称，$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(q)\mathbf{E}$，且 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\chi}$。

在第 5.2 节的局部储能条件下，且相对动能的变化可忽略不计时，式（46）中的充电积分就是传递到可恢复结合储能中的能量。因此，式（42）给出了束缚能增量：

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{bind}}(\mathbf{E}, q) - u^0_{\mathrm{bind}}(q) &= \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{E}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{P}(\mathbf{E}', q) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\chi}(q)\mathbf{E} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{E}, q). \end{aligned} \tag{48}$$

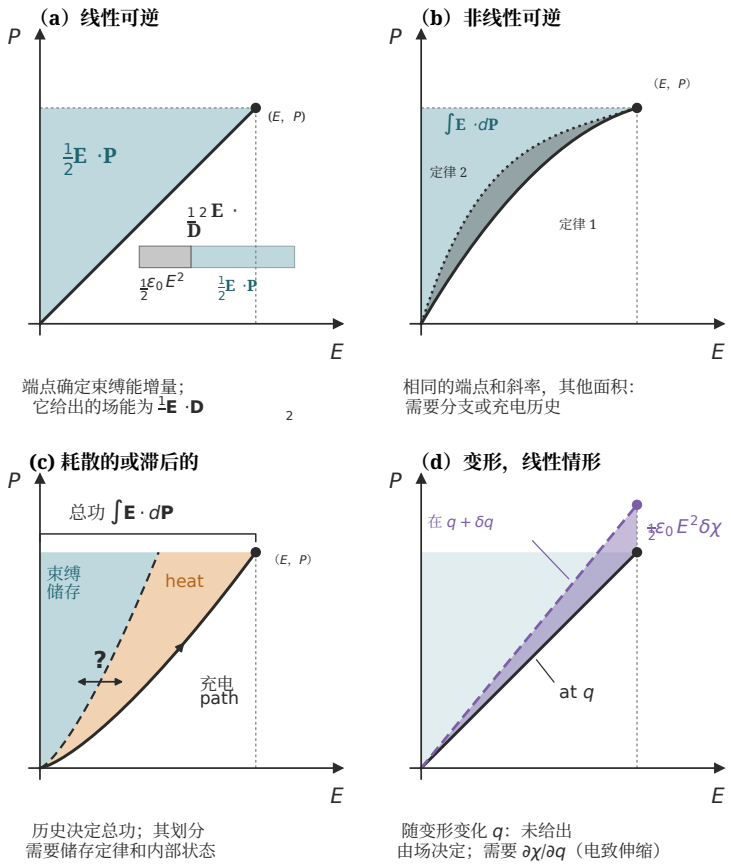

图 2 保留场对传递给材料的能量有何决定作用，图示于固定变形下的 E–P平面中。曲线与 P轴之间的面积为 $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{P}$；所有曲线均为示意图。（a）线性可逆响应：端点决定结合能增量 $_{1\,2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}$，它与保留场能 $\frac{1}{2}\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2$ 相加，得到 $_{1\,2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$。（b）非线性可逆响应：两种具有相同端点和局部切线的定律所围成的面积不同，因此，该增量需要知道本构分支或充电历史。（c）耗散或滞后响应：充电历史决定传递功总量；要将其划分为可恢复结合储能和热（以虚线表示），则需要储能函数和内部状态。（d）线性响应下的固定电场变形：变形分别为 q和 $q+\delta q$时两条直线之间的狭长区域面积为 $\frac{1}{2}\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2\,\delta\chi$，即结合能增量的变化；确定该变化需要知道磁化率对应变的依赖性。对于非线性和滞后响应，相应的输入是分支的变形依赖性，或者固定内部状态下储能函数的变形依赖性。

这里 $u^0_{\mathrm{bind}}(q) \equiv u_{\mathrm{bind}}(\mathbf{0}, q)$ 是零场参考态。已知的线性定律根据保留端点 [图 2(a)] 确定这一增量。这一判定假设介电常数与温度无关，这与第 5.2 节中热交换可忽略的设定一致；若 $\boldsymbol{\chi}$取决于温度，则等温功 $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{P}$ 是自由能的变化，其中一部分会以热的形式与热域 [4] 交换。虽然它是用端点处的场来表示的，$_{1\,2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}$ 的值就是传递积分

对于该定律而言，而不是由 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{P}$所携带的量：以不同定律到达同一端点，对应于不同的储存部分 [图 2(b)]。

从微观角度看，式（48）表明，束缚能增量就是残余场能的变化：在静电情形下，根据式（38），且在平滑体相中交叉项可忽略时，$u_{\mathrm{bind}}(\mathbf{E}\ q) - u^0_{\mathrm{bind}}(q) = \frac{\varepsilon_0}{2}\Delta\langle|\delta \mathbf{e}|^2\rangle$，其中 Δ 表示相对于零场状态的变化。对于离散偶极子，参考文献 [28]得到了相应关系，其中极化功等于作用于偶极子载体的功，加上场差$\mathbf{e}_{\mathrm{mic}}$ –$\mathbf{E}$能量的变化；在存在无功约束且动能可忽略时，第一部分不储存能量。对于无损周期性复合材料，晶胞平均微观能量等于由有效介电函数 [29] 构成的宏观表达式。

将此增量加到保留场能中，即得到静电 regime 下由电场诱导的可恢复能量密度：

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{rec}}(\mathbf{E}, q) &= u_{\mathrm{vac}} + \left[u_{\mathrm{bind}}(\mathbf{E}, q) - u^0_{\mathrm{bind}}(q)\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}. \end{aligned} \tag{49}$$

因此，传统能量密度由保留场能与可恢复的束缚能增量组成。对其进行体积分，即可得到对功势 U_Λ 的场诱导储存贡献。若零场参考态 $u^0_{\mathrm{bind}}(q)$ 和界面的变形依赖性贡献会影响所选载荷，也必须将其纳入考虑。

要得到方程（45）中的机械载荷，我们必须确定功势如何随变形而变化，包括保留场、几何形状和材料响应的变化。仅知道某一几何形状下的介电常数，并不能确定基体变形时束缚能如何变化；其变形依赖性属于额外的材料信息 [图 2（d）]。

为将所得载荷表示为连续介质应力，我们取局部应变 u_{ik} 作为变形变量。对于等温变化，功势由亥姆霍兹自由能 $F = U - TS$ 构造，并纳入与规定控制量相适应的电源项和边界项。对于未变形状态下各向同性的固体，其应变变化给出小应变极限下电场诱导连续介质应力的传统亥姆霍兹/朗道–利夫希茨表达式： [2, 4, 19, 39, 40]

$$\begin{aligned} \sigma^{\mathrm{elec}}_{ik} &= \frac{1}{2}\left(E_i D_k + E_k D_i\right) - \frac{1}{2}E_l D_l\,\delta_{ik} \\ &\quad - \frac{\varepsilon_0}{2}E_l E_m \left(\frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial u_{ik}}\right)_{T,\mathbf{E}}. \end{aligned} \tag{50}$$

这里 u_{ik} 是无穷小应变，而 T 是温度。最后一个电致伸缩项是保留场留下的未确定贡献：它源于在固定电场下，束缚能增量 $\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\chi}\mathbf{E}$ [图 2(d)],的显式应变依赖性，也就是说，源于场结构中被平均化消除的能量。其他各项则由保留场解以及给定构型下的介电常数决定。该项已

通过使晶胞发生变形，对介电圆柱晶格进行了评估：在有效介电常数固定时，它取决于晶格对称性，而由此形成的亥姆霍兹应力正是与根据微观场计算出的力密度相匹配的应力 [30]。某一构型下的载荷需要该处相关的变形导数；要预测有限变形范围内的情况，则需要了解该导数在整个范围内的变化。这些材料数据可以通过测量获得，也可以利用包含相关内部弛豫的应变高分辨率模型获得 [41, 42]。

6.2.2 非线性可逆响应

接下来，我们考虑一种非线性可逆电介质，其充电积分通常不能简化为$_1$ $_2\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}$。在相同的局部储能假设下，可恢复束缚能增量由一条可逆可积本构分支 $\mathcal{C}_{\mathrm{rev}}(q)$确定；该分支在固定基体变形 q下连接参考态与工作态：

$$u_{\mathrm{bind}}(\mathbf{E},q)-u^{0}_{\mathrm{bind}}(q)=\int_{\mathcal{C}_{\mathrm{rev}}(q)}\mathbf{E}'\cdot d\mathbf{P}'. \tag{51}$$

已知的保留充电历史仍可通过式（46）确定这一增量。通常，仅凭保留端点无法确定该增量：不同的可逆非线性本构定律可以具有相同的端点（$\mathbf{E}$,$\mathbf{P}$, $\mathbf{D}$）和局部切线，却对应不同的束缚能增量 [图2（b）]。要根据端点数据确定该增量，还需要参考态与工作态之间的本构分支，或等价的储能数据。

变形依赖性。利用分支积分，场致可恢复能量密度和选定载荷可写为

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{rec}}(\mathbf{E},q)&=u_{\mathrm{vac}}+\int_{\mathcal{C}_{\mathrm{rev}}(q)}\mathbf{E}'\cdot d\mathbf{P}',\\ Q^{(q)}_{\mathrm{em}}&=-\left.\frac{dU_{\Lambda}[u_{\mathrm{rec}};q]}{dq}\right|_{\Lambda}. \end{aligned} \tag{52}$$

此处 $U_{\Lambda}[u_{\mathrm{rec}};\ q]$ 包括与选定载荷相关的变形几何以及所有电源、边界和参考贡献。已知某一几何下的本构分支即可确定该处的束缚能增量。要预测力，还需知道该分支积分如何随选定变形而变化。

变形相关的本构分支或等效储能函数提供了这一信息 [16, 43, 44]。均匀化为构建此类函数及其变形导数提供了一种途径，所依据的是给定的微观结构 [34]。结合保留场的变化，这些信息决定了进入充分性判据的可恢复能量变化。

6.2.3 耗散与滞回

最后，我们考虑极化响应具有耗散性或滞后性的电介质。方程（46）仍然决定保留场向材料传递的净能量，但此时这部分传递的能量既用于改变可恢复的束缚

能量储存，也用于耗散。因此，充电功总量本身并不能确定力预测所需的可恢复能量 [图2（c）]。在固定主体变形 q的条件下进行准备，且相对载体惯性、可逆热交换和独立传输均不起作用时，

$$
\begin{aligned}
&w_{\mathrm{elec}}[\mathcal{C}] \equiv \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{P} = \Delta u_{\mathrm{bind}}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}) + w_{\mathrm{diss}}[\mathcal{C}],\\
&w_{\mathrm{diss}}[\mathcal{C}] \geq 0.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

此处 $\mathcal{H}_0$ 和 $\mathcal{H}$ 分别表示初始和当前内部状态；对保留端点以及 q 的依赖是隐含的。不可逆部分 w_{diss} 流入表1中的热域；其后续储存和传输属于基体的热力学-力学描述。

保留的电磁历史确定了式（53）中的传递功；材料模型则给出其在可恢复结合储能和耗散部分 [21, 22] 之间的划分。当响应取决于历史时，相同的瞬时（$\mathbf{E}$，$\mathbf{P}$，$\mathbf{D}$）可能对应不同的内部状态 $\mathcal{H}$，并具有不同的可恢复能量和变形导数。这些内部变量保留了载体—场构型的相关记忆，而无需引入新的微观能量储存。

对于耗散性或滞后的电介质，结合储能取决于当前内部状态 $\mathcal{H}$。通过虚拟变形将式（45）应用于相应的功势，并在 $\mathcal{H}$ 保持固定时，可得

$$
Q^{(q)}_{\mathrm{em}} = -\left.\frac{\partial U_\Lambda(q,\mathcal{H})}{\partial q}\right|_{\Lambda,\mathcal{H}}.
\tag{54}
$$

沿选定变形的保留场解确定保留场能的变化。然而，可恢复结合能及其变形变化还需要保留场之外的材料信息：本构储能函数和当前内部状态。要根据保留的电磁历史预测该状态，还需要初始状态和演化定律 [21]。提供这些信息后，同一虚功关系便可确定保守电驱动力载荷。

6.3 可达到的和所需的力分辨率

现在，我们来考察如何根据保留场以及第6.2节的材料信息，对体力密度和边界牵引力进行精细分辨。结论分为两部分：每个虚位移都会产生载荷的一个分量，因此，要分辨载荷的分布，就需要相应多样的变形；而可达到的分辨率受限于保留场和所提供数据的分辨率。

所需的力分辨率取决于所关注的力学预测。要预测特定空间分辨率下的变形，通常只需考虑许多粒子或偶极子的集体载荷。只要平均描述能够以所需精度保留所选的力学响应，就不必分辨它们各自的力峰值。

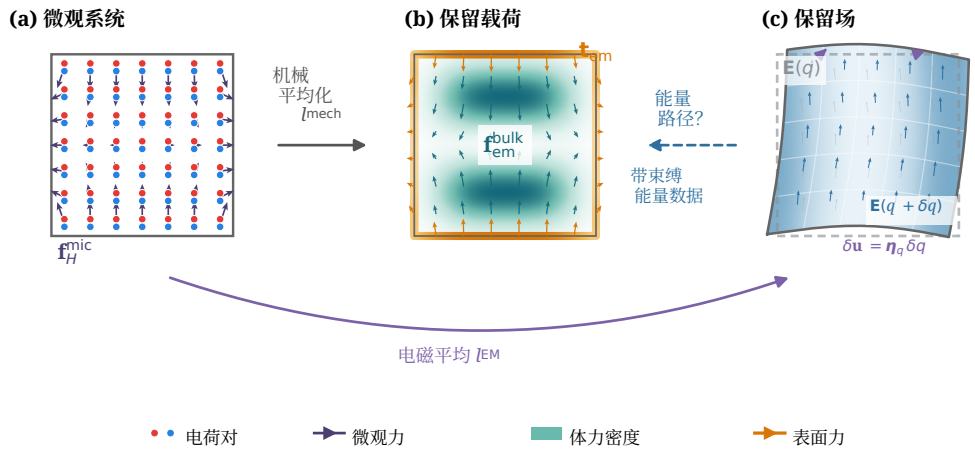

图 3 保留机械载荷的两条路径。（a）示意性的 7×7 点偶极阵列及其基体力，箭头长度按四次方根缩放。灰色等高线标示基体边界。机械保留，（a）$\to$（b），将内部力表示为 $\mathbf{f}_{\mathrm{em}}^{\mathrm{bulk}}$，并将边界层表示为表面力 $\mathbf{t}_{\mathrm{em}}$。电磁保留，（a）$\to$（c），对同一构型的微观场进行平均化。面板（c）示意性地显示了虚拟变形下的保留场。虚线路径（c）$\to$（b）通过虚功检验一致性 [方程（45）]，，除保留场外还使用束缚能数据。

我们用体力密度和边界牵引力表示这种集体载荷。在图3中，直接路径 (a)$\to$(b) 根据微观基体载荷 $\mathbf{f}_H^{\mathrm{mic}}$ 得到这些量，其中载体到基体的传递已明确规定：

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathrm{em}}^{\mathrm{bulk}} &\simeq \left\langle \mathbf{f}_H^{\mathrm{mic}} \right\rangle_{\ell_{\mathrm{mech}}}, \qquad d_{\mathrm{mic}} \ll \ell_{\mathrm{mech}} \ll L_{\mathrm{out}}, \\ \mathbf{t}_{\mathrm{em}} &\simeq \int_{\text{transition layer}} \mathbf{f}_H^{\mathrm{mic}}\, dn. \end{aligned} \tag{55}$$

这里，L_{out} 是机械预测必须解析的最小空间尺度，而n 是垂直于界面的距离。体相平均化会抑制微观力的变化，同时保留其集体载荷。在界面未被解析时，沿力层积分会将其作用保留为边界牵引力，并在选定的机械分辨率下进行切向平均化。这些体相载荷和边界载荷定义了后续基于能量的预测所针对的连续体目标。载体到基体的传递和机械保留详见参考文献 [13, 第 III–IV 节]。

为了进行预测，我们使用尺度为 ℓ_{EM} 的保留场，这些场是通过沿 (a) 进行电磁保留而获得的$\to$(c)，并辅以第 6.2 节中确定的束缚能信息。这些输入进入第 6.1 节的功势。沿着虚线路径 (c)$\to$(b)，我们考察在何种力学分辨率下，其变化能够再现直接平均的体相和边界载荷所做的功。

方程（45）将获得的力信息与所选虚位移联系起来。刚性平移确定其方向上的总力。要解析载荷分布，需要考察空间变化的变形所引起的能量变化

达到所需的力学分辨率。只要能捕捉到单个粒子或偶极力在这些变形下的集体功，这些力就可以不予解析。

对于此处讨论的光滑体描述，保留场必须解析所选机械载荷所需的空间变化。如果没有另外提供更精细的空间信息，则需要

$$\ell_{\mathrm{EM}} \lesssim \ell_{\mathrm{mech}}. \tag{56}$$

在这一分辨率下，材料和界面信息还必须能够确定对所选功有贡献的未解析场能的变化。例如，局域缺陷可能会改变变形过程中的结合能变化，却仍无法在保留的电磁响应中解析出来。如果这一贡献对所需精度而言不可忽略，就必须通过材料数据或局部解析的微观模型加以捕捉。缺陷附近具有原子分辨率的原子到连续体方法便是实现这一目标的一种途径 [45]。

6.4 相同的保留场路径，不同的结合能变化

我们考察参考文献 [13]（第 VC 节和附录 A）中所确立的对齐—错列边界比较所产生的能量后果。两组相同的平行线偶极子阵列具有相同的数密度、连续体以及载流子到基体的传输特性。在对齐排列 A 中，相邻行在垂直方向上对齐；在错列排列 S 中，连续各行沿横向错开半个晶格间距。

这一偏移小于保留的空间分辨率，因此体极化保持不变。在尖锐界面极化分布和电边界条件相同的情况下，两个阵列的保留电场因此相同。它们的保留体载荷一致，但边界层积分和表面平均会得到不同的牵引力，$\mathbf{t}_A \neq \mathbf{t}_S$。在上边界，错列排列使原本正下方的邻居被对角邻居取代，从而改变每个偶极子所经历的近场梯度。在文献 [13] 的线偶极子基准中（其图 2），将顶面牵引力按两种排列共有的仅场值归一化后，排列对齐时为 -0.149，错列排列时为 $+0.145$，而仅场表达式本身给出 $+1.00$。这些数值描述的是该基准；此处采用的结论是，在保留数据相同的情况下，牵引力仍然不同。

为比较能量，我们还规定，在共同的准静态虚拟变形过程中，整个过程中保留的极化分布完全相同；该变形以 q 为参数，并采用相同的尖锐界面约定和电边界条件。本例额外假设这一共同的变形响应。由此得到 $\mathbf{E}_A(q) = \mathbf{E}_S(q)$，因此 $\delta U_{\mathrm{vac},A} = \delta U_{\mathrm{vac},S}$；共同的场可能随 q 变化。变形路径相同，并不能确定未解析的近场及其在变形过程中的变化。

我们选取一个光滑的连续体虚位移 $\delta\mathbf{u}$，使得两个边界载荷在参考构形处所做的虚功不同。相等的体载荷与保留场能变化在比较中相互抵消。在第6.1节的保守虚功假设下，对于刚性固定偶极矩偶极子、无功

内部约束且无外部电输入的情形，能量守恒给出

$$\begin{aligned}\delta W_S - \delta W_A &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t}_S - \mathbf{t}_A) \cdot \delta\mathbf{u}\, ds \\ &= -\delta(U_{\mathrm{bind},S} - U_{\mathrm{bind},A}) \neq 0.\end{aligned} \tag{57}$$

这里，Ω 是平面横截面；功和能量均按单位面外长度计。偶极子自能保持不变，因此功的差异源于未解析场能中相互作用的结合能变化不同，其中包括未解析界面处保留项与残余项的交叉项［式（38）］。

在规定的共同变形响应下，不同的边界牵引力因此对应不同的结合能变化。仅凭保留场路径无法确定这些变化。要完成图 →3中的路径 (c)，还需要材料或界面信息，以确定对所选机械功有贡献的结合能变化。

6.5 机电建模的启示

充分性判据为将保留的电磁描述与连续介质力学耦合提供了一条实用准则：场与所提供的材料数据必须共同确定机械模型所需载荷的功。首先明确预期的变形或载荷分布，包括任何相关的边界牵引力，并规定空间分辨率、精度和规定控制量。这些选择确定了该描述必须再现其功的虚拟变形，以及第 6.3 节所需的空间信息。

能量输入是保留场能量和可恢复结合能的变化，以及与控制条件相适应的源功。第6.2 节中确定的材料信息，必须足以确定选定变形下的结合能变化，包括相关的参考项和界面贡献。必须将可恢复储存与损耗区分开来，并在需要时提供内部状态和演化信息。表2 汇总了对于纳入这一途径的各个量，保留场能够确定哪些内容，以及还需补充哪些内容。当这些输入已知时，根据第45式，在第6.1节的虚功假设下，可得选定的电驱动载荷。

缺失的变形依赖性通常可以通过本构数据或均匀化储能函数，在现有连续介质分辨率下加以补充［34］。如果被省略的结构使所选载荷超出所需精度范围，则可通过有针对性的微观或多尺度计算，提供相关的能量变化或力［46, 47］。经过验证的力或应力定律，或经过实验标定的载荷，也提供了一条直接路径；文献［13］说明了边界载荷重构。对于相同的保守实现和控制条件，由此得到的能量描述与力描述必须在虚功方面保持一致。

表 2 保留场对能量路径所用各物理量的决定作用。每项陈述均在所引用章节的假设条件下成立。

量	是否由保留场决定?	所需的 必需的是	章节
能量与能流 保留场的 u_{vac} 以及 $\mathbf{S}_{\mathrm{vac}}$	Yes	None	5.1
由……提供的功 外部来源	是的，直至表面层修正	None	5.1，5.2
交换的净功率 与材料之间， $\mathbf{J}_{\mathrm{total}} \cdot \mathbf{E}$	Yes	用于划分的材料定律 在储存、运动、变形和热之间	5.2, 5.3
可恢复结合 能量在固定变形 ，线性的 可逆响应	是的，采用线性定律：增量 $_{12}\mathbf{E}$ – $\mathbf{P}$	除线性定律外没有其他内容	6.2.1
相同的、非线性 可逆响应	只有结合充电历史，而不是来自端点	本构分支或 储能函数	6.2.2
相同，耗散的 或滞后响应	否；只有总量传递功	储能函数与 内部状态；一种演化 用于预测该状态的定律	6.2.3
束缚的变化 能量在变形下 ，它 计入载荷	No	介电常数的变形依赖性 介电常数， 本构分支 ，or 储能函数；界面 或空间信息，其中 未解析的结构变化 所关注的虚功	6.2–6.4

7 结论

通过能量路径求取作用于电介质的机械载荷，需要知道储能及其在变形下的变化。我们考察了保留场能够确定其中多少内容（表 2）。保留场携带自身的能量，其平衡中包含一个交换项，即 $\mathbf{J}_{\mathrm{total}} \cdot \mathbf{E}$：离开这些场的功率。除表面层修正外，它们确定了供给组件的外功，并确定了这种交换；但它们无法显示能量去了哪里。因此，极化积分 $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}$ 是从保留场中传出的、经过时间积分的能量传递，而不是极化场的能量。于是，保留场在某一时刻的状态只能确定其自身的能量，而其历史则确定已传递的能量；剩余的储能及其在变形下如何变化，则属于材料信息。在变形过程中，保留场因此确定的是束缚能变化与机械功之和，

要预测选定的载荷，还需要了解能量对变形的相关依赖性。

交换之外的情况取决于微观模型。交换并非载流子所受功的平均值：其中一部分会转化为场结构，而平均化会将其消去。在所述局部储能条件下，这种结构的可恢复能量由束缚能表示；在线性可逆静电状态下$\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$则由保留场能与束缚能增量$\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}$共同构成。仅知道这种单位体积储能，并不能确定其微观空间分布或对变形的依赖性。在经典模型中，载流子动能和微观电磁场能是两个活跃的储能形式；平均化和集体变量则通过热能、机械能和电能来表示它们的贡献。由此得到的能量映射揭示了热力学、连续介质力学和宏观电动力学共有的物理内容，以及连接它们的能量交换。

只要与现有描述相符的所有微观实现都能以所需精度给出相同的虚功，这种描述就足够了。此时，能量路径可逐个虚变形地得出各载荷分量，其精细程度不超过保留场和所提供数据所能确定的范围。通过进一步假设整个变形过程中保留场均相同，扩展后的对齐—交错对比表明，相同的保留场路径可能对应不同的结合能变化和连续介质边界功。所需的材料信息通常可在现有连续介质分辨率下提供。依赖变形的本构定律、可恢复储能函数和内部状态描述，能够在不重建未解析场的微观分布的情况下，编码其集体机械效应。如果被省略的结构会使选定的功超出所需精度，则需要额外的空间或界面信息。

因此，能量路径并未消除力路径中所体现的、对超出宏观场的信息的需求 [13]：对于这两种偶极子排列，边界功之差由其结合能变化之差给出。这两条路径呈现出相同的结构。由于保留场满足麦克斯韦方程组，第2.1 节中的恒等式对它们同样成立：它们通过$\mathbf{J}_{\text{total}}\cdot\mathbf{E}$交换能量，并通过作用于保留源的洛伦兹力交换动量；但在这两种情况下，它们都没有揭示交换最终流向何处。统一能量图谱为耦合宏观域确立了物理基础，而充分性判据则规定了在何种情况下，它们可用的材料描述能够确定机械载荷。本文的分析是经典的，并且仅限于电响应；内禀自旋和磁性物质留待今后研究。相同的构造还可从能量扩展到动量、应力和传输，这关系到物质中电磁能动量张量的确定；这一扩展也留待另行研究。

声明与说明

- **利益冲突** 作者声明，其不存在与本文内容相关的利益冲突。

• **资金支持** 本研究未获得任何资金支持。
• **数据和代码可用性** 用于生成图的 Python 代码1 和3可根据合理请求向作者索取。图 2 是解析曲线的示意图，不涉及模拟数据。本文介绍了理论分析；关于对齐–交错边界表面力的结果见参考文献 [13]。

• **生成式 AI 工具的使用**作者使用了来自 OpenAI（GPT）和 Anthropic（Claude）的大型语言模型，以协助起草和修订文本、编写生成图表的 Python 代码以及检查计算结果。作者通过推导过程并与文献进行比较，核实了科学内容，并对本文承担全部责任。

参考文献

[1] Bobbio, S.：《材料电动力学：固体与流体中的力、应力和能量》。学术出版社，圣迭戈（2000）[2] Melcher, J.R.：《连续介质电机学》。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥（1981）[3] Stratton, J.A.：《电磁理论》。麦格劳-希尔，纽约（1941）[4] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., Pitaevskii, L.P.：《连续介质电动力学》，第2版。《理论物理学教程》第8卷。巴特沃斯-海涅曼，牛津（1984）[5] Barnett, S.M., Loudon, R.：论作用于电介质的电磁力。《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》**39**，671–684（2006）https://doi.org/10.1088/0953-4075/39/15/S14[6] Mansuripur, M., Zakharian, A.R., Wright, E.M.：物质内部的电磁力分布。《物理评论A》**88**（2），023826（2013）https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.023826 [7] Haus, H.A., Melcher, J.R.：《电磁场与能量》。普伦蒂斯·霍尔，新泽西州恩格尔伍德克利夫斯（1989）[8] Markel, V.A.：氯化钠等离子晶体中静电力密度的数值研究。《Physical Review B》**107**，104307（2023）https://doi.org/10.1103/PhysRevB.107.104307[9] Park, B.S., Choi, H.S., Park, J.O., Wang, J.H., Park, I.H.：电介质材料中开尔文力密度与科特韦格–亥姆霍兹力密度的等同性。《IEEE磁学汇刊》**56**（4），1–4（2020）https://doi.org/10.1109/TMAG.2019.2952448[10] Reich, F.A.：连续介质力学与电动力学的耦合：通过实验和选定问题研究电磁力模型。博士论文，柏林工业大学¨（2017）。https://doi.org/10.

14279/depositonce-6518

[11] Reich, F.A., Rickert, W., M¨uller, W.H.：电磁力模型研究：通过选定问题展示全局与局部效应的差异。Continuum Mechanics and Thermodynamics 30，233–266（2018）https: //doi.org/10.1007/s00161-017-0596-4[12] Rickert, W.：通过有理框架和选定实验研究电磁耦合问题。博士论文，柏林工业大学¨（2023）。https://doi.org/10.14279/depositonce-17117[13] Schulte Westhoff, B.：相同的宏观场，不同的局部机械载荷：机电闭合诊断。《应用物理评论》26，054011（2026）https://doi.org/10.1103/8s4n-1fvh[14] Toupin, R.A.：弹性介电体。《理性力学与分析杂志》5(6)，849–915（1956）[15] Eringen, A.C., Maugin, G.A.：《连续介质电动力学 I：基础与固体介质》。施普林格，纽约（1990）[16] Dorfmann, A., Ogden, R.W.：非线性电弹性。《力学学报》174(3– 4)，167–183（2005）https://doi.org/10.1007/s00707-004-0202-2[17]McMeeking, R.M., Landis, C.M.：可变形介电材料中的静电力与储能。《应用力学杂志》72(4)，581–590（2005）https://doi.org/10.1115/1.1940661[18] Suo, Z., Zhao, X., Greene, W.H.：可变形介电体的非线性场论。《固体力学与物理学杂志》56(2)，467–486（2008）https: //doi.org/10.1016/j.jmps.2007.05.021[19] Zhao, X., Suo, Z.：大变形弹性介电体中的电致伸缩。《应用物理学杂志》104，123530（2008）https://doi.org/10.1063/1.3031483[20] Liu, L.：连续介质静电学的能量表述。《固体力学与物理学杂志》61，968–990（2013）https://doi.org/10.1016/ j.jmps.2012.12.007[21] Miehe, C., Rosato, D.：铁电性的率相关增量变分表述。《International Journal of Engineering Science》49，466–496（2011）https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2010.11.003[22] Foo, C.C., Cai, S., Koh, S.J.A., Bauer, S., Suo, Z.：耗散性介电弹性体模型。《应用物理学杂志》111(3)，034102（2012）https://doi.org/10. 1063/1.3680878

[23] de Groot, S.R., Suttorp, L.G.：《电动力学基础》。North-Holland Publishing Company，阿姆斯特丹（1972）[24] Tiersten, H.F.：热电弹性非线性方程。International Journal of Engineering Science 9，587–604（1971）https://doi.org/10.1016/ 0020-7225(71)90062-0[25] Richter, M., Florian, M., Henneberger, K.：坡印廷定理与有界介质中光传播的能量守恒。EPL 81，67005（2008）https://doi.org/10.1209/0295-5075/81/67005[26] Saldanha, P.L.：线性介质中电磁波的能量和动量在电磁部分与物质部分之间的划分。Optics Communications 284，2653–2657（2011）https://doi.org/10.1016/j.optcom.2011.02. 007[27] Kinsler, P., Favaro,A., McCall, M.W.：四个坡印廷定理。European Journal of Physics 30，983–993（2009）https://doi.org/10.1088/0143-0807/30/5/007[28] Yaghjian, A.D.：由微观麦克斯韦方程推导宏观偶极连续体的经典功率与能量关系。Progress In Electromagnetics Research B 71，1–37（2016）https://doi.org/10.2528/PIERB16081901[29] Silveirinha, M.G.：结构化材料中的坡印廷矢量、加热率和储能：第一性原理推导。Physical Review B 80，235120（2009）https://doi.org/10.1103/PhysRevB.80.235120[30] Sun, W., Wang, S., Ng, T.F.J., Zhou, L., Chan, C.T.：电致伸缩张量的解析推导及其在光学力密度计算中的应用。Physical Review B 91(23)，235439（2015）https://doi.org/10.1103/PhysRevB.91. 235439[31] Wang, S., Ng, J., Xiao, M., Chan, C.T.：边界处的电磁应力：光子压力还是张力？Science Advances 2(3)，1501485（2016）https://doi. org/10.1126/sciadv.1501485[32]Schl¨o merkemper, A.：刚性晶体材料两部分之间磁力的连续介质极限的数学推导。Archive for Rational Mechanics and Analysis 176，227–269（2005）https://doi.org/10.1007/ s00205-004-0354-1[33] Popovi´c, N., Praetorius, D., Schl¨omerkemper, A.：刚性多边形物体之间磁力的分析与数值模拟。第一部分：分析。Continuum Mechanics and Thermodynamics 19，67–80（2007）https://doi.org/ 10.1007/s00161-007-0046-9

[34] Ponte Casta˜neda, P., Siboni, M.H.：通过均匀化建立电活性聚合物复合材料的有限应变本构理论。International Journal of Non- Linear Mechanics 47，293–306（2012）https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011. 06.012[35] Jackson, J. D.：《经典电动力学》，第3版。Wiley，纽约（1999）[36] Fano, R.M., Chu, L.J., Adler, R.B.：《电磁场、能量与力》。Wiley，纽约（1960）[37] McMeeking, R.M., Landis, C.M., Jimenez, S.M.A.：材料静电与机械联合载荷的虚功原理。International Journal of Non-Linear Mechanics 42，831–838（2007）https://doi.org/10.1016/j. ijnonlinmec.2007.03.008[38] Maugin, G.A.：连续介质力学中的虚功率法：耦合场的应用。《力学学报》35，1–70（1980）https://doi.org/10.1007/ BF01190057[39] Lee, H.Y., Peng, Y., Shkel, Y.M.：电介质的应变-介电响应：电致伸缩应力的基础。《应用物理学杂志》98，074104（2005）https://doi.org/10.1063/1.2073977[40] Shkel, Y.M.：电致伸缩：材料参数与应力/应变本构关系。《哲学杂志》87(11)，1743–1767（2007）https://doi.org/10.1080/14786430601003890[41] Srinivasan, R.：弹性介电体的晶格理论。《物理评论》165(3)，1041–1053（1968）https://doi.org/10.1103/PhysRev.165.1041[42] Tanner, D.S.P., Bousquet, E., Janolin, P.-E.：基于第一性原理计算电致伸缩的优化方法。《Small》17，2103419（2021）https://doi.org/10.1002/smll.202103419[43] Bustamante, R., Dorfmann, A., Ogden, R.W.：非线性电弹静力学：变分框架。Zeitschrift f¨ur angewandte Mathematik und Physik 60，154–177（2009）https://doi.org/10.1007/s00033-007-7145-0[44]Liu, L.：连续介质磁电弹性的能量表述及其应用。《固体力学与物理学杂志》63，451–480（2014）https://doi.org/10.1016/j.jmps.2013.08.001[45] Jha, P.K., Marshall, J., Knap, J., Dayal, K.：晶体缺陷的原子到连续介质多尺度建模及非局部静电相互作用。《应用力学杂志》90(2)，021003（2023）https://doi.org/10.1115/1.4056111

[46] Park, H.S., Devel, M., Wang, Z.：纳米材料机电行为的新型多尺度公式。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **200**(29–32)，2447–2457（2011）https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.04.003

[47] Marshall, J., Dayal, K.：具有长程静电相互作用的离子固体原子到连续体多尺度建模。《固体力学与物理学杂志》**62**，137–162（2014）
https://doi.org/10.1016/j.jmps.2013.09.025