arXiv:2611.30364v1 [math.GT] 23 Nov 2026

EI通过 ∞-范畴对瞬子进行广义分解

唐龙科和叶帆

Abstract. 设 L 是平衡缝合流形 (M,γ) 中的一个带框架链环。我们在缝合瞬子同调中构造一个链环谱序列。对于 M 中与 L不相交的适当嵌入曲面，我们进一步细化该谱序列，使其保留诱导的多重分次。我们使用 ∞-范畴来编码瞬子理论中的同伦信息。特别地，我们得到链复形或超立方体复形上同伦相干交换算子的同时本征分解。作为第二作者及其合作者后续工作的代数基础，我们通过结合正、负旁路映射的超立方体，构造混合超立方体。该构造与缝合瞬子同调中由曲面多重分次确定的特征分解相容。

Contents

1. 引言 2 2. 构造概述 5 2.1. 超立方体与特征分解 5 2.2. 使用 ∞-范畴的原因 8 2.3. 绕越映射的组合 11 2.4. 结构安排 17 3. 稳定 ∞-范畴的代数结果 17 3.1. 超立方体的刻画 17 3.2. 周期复形 22 3.3. 特征分解 28 4. 缝合瞬子同调 30 4.1. 构造回顾 30 4.2. 主要定理的证明 34 5. 混合超立方体 35 5.1. 第一步：超盒复形 36 5.2. 第二步：缝合瞬子同调 36 5.3. 第三步：曲面多重分次 38 参考文献 41

1. Introduction

瞬子 Floer 同调中的手术正合三角最初由 Floer [Flo88, Flo90] 提出，之后由 Braam–Donaldson [BD95] 和 Scaduto [Sca15]重新研究。随后，单极子 Floer 同调和 Heegaard Floer 同调中也建立了类似的手术三角[KM07, KMOS07, OS04, OS05, Fre21, LRS23, AM25, QY26]。

基本设置由闭定向光滑三维流形 Y 中的带框架定向结 K 构成；具体而言，结配备一条选定的简单闭定向曲线 λ，该曲线位于 K 的管状邻域的边界 $\partial N(K)$ 上。曲线 λ 称为 K 的框架，其选取满足：对于 K 的定向子午线 $\mu = \mathrm{pt} \times \partial D^2 \subset S^1 \times D^2 \cong N(K)$，有序对 (μ, λ) 构成 $H_1(\partial N(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的一组基，并满足 $\mu \cdot \lambda = 1$。等价地，在 $Y \setminus \mathrm{int}\ N(K)$ 上考察时，我们有$\mu \cdot \lambda = -1$。

对于任意 Floer 同调理论 $F(-)$，都有一个长正合序列

$$\cdots \to F(Y) \to F(Y_0(K)) \to F(Y_1(K)) \to F(Y) \to \cdots \tag{1.1}$$

其中，对于 $i = 0,\ 1,\ Y_i(K)$ 表示通过系数为 i 的 Dehn 手术从 Y 得到的闭三维流形。具体而言，$Y_i(K)$ 是通过将一个实心环面粘到 $Y \setminus \mathrm{int}\ N(K)$ 上得到的，粘接方式使实心环面的子午线 $\mathrm{pt} \times \partial D^2$ 与代表同调类 $i\mu + \lambda$ 的曲线重合。正合序列中的映射由4维协边诱导，这些协边通过在源三维流形与区间 I的乘积上附加一个二维柄构成，并可能包含由局部系数或主丛带来的额外数据。这些映射通常称为手术协边映射。

事实上，在链级上有一个更强的结论。对于定义 $F(Y)$ 的链复形 $CF(Y)$，在导出范畴中存在一个拟同构

$$CF(Y) \cong \mathrm{cone}\big(CF(Y_0(K)) \to CF(Y_1(K))\big), \tag{1.2}$$

其中，cone 表示映射锥复形。

由于长正合序列 (1.1) 是 3-周期的，因此可以将其视为一个正合三角。拟同构 (1.2) 同样是 3-周期的。我们强调，映射锥表述蕴含正合三角的存在，而反向推论通常需要在域上进行。

映射锥描述尤其适用于推广到带框架链环上的手术。设 $L = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ 是 Y 中的一个带框架链环。对于 $\epsilon \in \{0,1\}^n$，令 $Y_\epsilon(L)$ 表示对 L 进行手术后得到的流形，其中在分量 K_i 上的手术系数为 ϵ_i。那么，(1.2) 可推广为拟同构

$$CF(Y) \cong \Big(\bigoplus_{\epsilon \in \{0,1\}^n} CF(Y_\epsilon(L)),\ \sum_{\epsilon \le \epsilon' \in \{0,1\}^n} D_{\epsilon,\epsilon'} \Big), \tag{1.3}$$

其中，偏序由 $0 < 1$ 诱导。为简便起见，我们省略 $CF(Y_\epsilon(L))$ 上的同调分次移位。与 L^1-范数 $|\epsilon|$ 相关联的滤过（该范数统计 ϵ 中等于 1 的项数）给出一个谱序列

$$E_1 = \bigoplus_{\epsilon \in \{0,1\}^n} F(Y_\epsilon(L)) \Longrightarrow F(Y). \tag{1.4}$$

我们将这样的构造称为来自立方体过滤的谱序列。

由该立方体滤过产生的链环谱序列，最初由 Ozsv´ath– Szab´o [OS05] 在 Heegaard Floer 理论中基于 $\mathbb{Z}/2$ 系数建立。针对

单极子和瞬子 Floer 同调的类似构造，后来分别由 Bloom [Blo11]在 $\mathbb{Z}/2$系数下以及 Scaduto [Sca15] 在 $\mathbb{Z}$ 系数下发展起来。最近，Qiu 与第二作者 [QY26]将单极子版本精化到了 $\mathbb{Z}$系数。

一个典型应用是从链环 $L \subset S^3$ 的（偶或奇、约化或未约化）Khovanov 同调 $Kh(L)$ 到其反向定向双重分支覆盖的适当 Floer 同调 $F(-\Sigma_2(L))$ 的谱序列。关于其他背景下的相关构造，也请读者参阅[KM11、KM21、Lin19、ATZ23、Li24、Bha24]。

本文为平衡缝合流形（M，γ）（参见定义 4.1）构造上述链环谱序列的一种变体。这里（M，γ）由一个具有非空边界的紧致定向 3-流形 M 和一组定向曲线 $\gamma \subset \partial M$ 组成，这组曲线称为缝合线，并满足某些平衡条件。Kronheimer–Mrowka [KM10b] 引入了两种 Floer 同调理论：缝合单极同调 $SHM(M,\gamma)$ 和缝合瞬子同调 $SHI(M,\gamma)$，它们是 Heegaard Floer 理论中 Juh´asz 缝合 Floer 同调 $SFH(M,\gamma)$ 的类比。

这两种缝合同调理论都是通过将 M 嵌入由 γ 和某些辅助选择所确定的闭定向三维流形 Y 中构造而成的，使得 $\partial M \backslash \gamma$ 的各个分量位于嵌入定向曲面 $R \subset Y$ 的两份平行副本上。随后，在相应的 Floer 理论中提取与 R 相关的 $F(Y)$ 的一个子空间。称有序对 (Y, R) 为 (M,γ) 的一个闭包 。所得同调群在同构意义下与闭包的选择无关。Baldwin–Sivek [BS15]，在投射情形下进一步建立了自然性结果；Baldwin–Sivek [BS16a, BS16b] 和 Li [Li20, Li21a] 研究了函子性结果。

此外，对于满足某些可容许性条件（参见定义 4.5）的适当嵌入曲面 $S_1, \ldots, S_k \subset M$，Ghosh–Li [GL23] 在 SHM 和 SHI 上构造了一个 $\mathbb{Z}^k$-分次，我们称之为曲面分次。相关构造另见 [KM10a, Li21b] 。

更准确地说，在构造 SHM 时，与曲面 R 相关的子空间，是通过计算 Y 上的自旋^c 结构在 R 上的第一陈类，并取对应于最大非平凡取值的直和项得到的，即 $2g(R) - 2$。曲面分次的构造方式类似：考虑 $l = 1$、.....、k 上的取值，其中所考虑的是包含 S_l 作为子曲面的闭定向曲面$S_l \subset Y$。对 SHI 的类似构造，则是取算子 $\mu(R)$ 和 $\mu(S_l)$ 在以 $\mathbb{C}$ 为系数的 Y 的瞬子 Floer 同调上作用所对应的同时广义特征空间。因此， SHI 仅在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上有定义。在这两种情形下，可能的取值或可能的特征值都是偶整数，且其绝对值至多为 $2g(S_l) - 2$ ，其中 S_l 是连通的。 − −

本文的主要目标是结合链外科谱序列 (1.4)、缝合瞬子同调 SHI 以及曲面分级结构。更准确地说，我们证明以下主要定理。

定理 1.1。 设$(M、\gamma)$ 是一个平衡缝合流形，并令 $S_l \subset (M、\gamma)$、 l =1、. . .、k 为可容许曲面。假设 $L = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \subset M$ 是一个与所有曲面 S_l 不相交的带框架链环。对于 $\epsilon \in \{0,1\}^n$，令 $M_\epsilon(L)$ 表示对$(M、\gamma)$ 沿 L 进行手术并使用由 ϵ 给出的系数后得到的缝合流形。我们也用 γ 和 S_l 分别表示 $M_\epsilon(L)$ 中诱导的缝合线和诱导的曲面。于是，存在一个来自立方体过滤的谱序列

$$\bigoplus_{\epsilon \in \{0,1\}^n} SHI(M_\epsilon(L), \gamma) \Longrightarrow SHI(M, \gamma)_L,$$

它保持与曲面 S_l 相关的曲面多重分次。这里，下标 L 表示在构造瞬子 *Floer* 同调时所使用的附加丛集（参见 *[Sca15* 的第三行和图 *1]*）。此外，第一页上的微分由手术协边映射在广义特征空间上的限制给出。

注 1.2. 对于 SHM，定理 1.1 的类似结果自然来自谱序列的构造以及曲面分次。这里我们考虑SHM 不带附加丛数据 L、系数取 $\mathbb{Z}/2$ [Blo11], 的情形，或带有附加局部系统数据 L、系数取 $\mathbb{Z}$ [QY26] 的情形。事实上，spin^c 结构的求值与谱序列构造中出现的所有微分相容。另一方面，定理 1.1 中不考虑曲面分次的 $n = 2$ 情形下谱序列的存在性，源自 Ghosh–Zemke [GZ24, §6]。然而，由于构造中产生的闭嵌入曲面 R 与 S_l之间存在非平凡交集，要验证谱序列与 S_l 相关的曲面分次相容，还需要考虑 [GZ24, 注 2.2 和 §8.1]之外的因素。特别地， [GZ24, §9] 中的结果可置于定理 1.1 的背景下理解，并结合 [Ye26, §8]中μ-算子之间同伦和高阶同伦的构造。

注 1.3。 事先来看，定理 1.1 中的谱序列依赖于来自两个源的选择：

(1) 闭包 $(M,\ \gamma)$ 的选择。可以利用 Baldwin–Sivek [BS15] 的自然性结果研究对此选择的依赖性。(2) 用于构造 μ-算子以及它们之间的同伦和高阶同伦的数据，详见 [Ye26, §8]。对这些选择的依赖性需要额外谨慎处理。

Baldwin–Sivek [BS22a, §4] 的证明表明，旁路正合三角是手术正合三角的特例；[LY25, §8] 对该证明给出了一项小的技术性修正。因此，通过修改定理 1.1 的表述，我们得到以下定理。

定理 1.4。 设 (M,γ) 是一个平衡缝合流形，并设 $S_l \subset (M,\gamma)$、 l =1、.....、 k 是可容许曲面。设 $\eta = \bigcup_{i=1}^{n} \eta_i \subset \partial M$ 是一组两两不相交的弧，称为旁路弧，使得对于任意 $i \in [1,n]$ 和 $j \in [1,k]$，我们有

$$\eta_i \cap S_j = \varnothing, \qquad |\eta_i \cap \gamma| = 3,$$

且 $N(\eta_i) \subset \partial M$如图 *1* 上方的子图所示。对于 $\epsilon \in \{0,1\}^n$，令 $\gamma_\epsilon(\eta)$为从 γ 得到的缝合线：根据 ϵ_i 的取值，将 $N(\eta_i)$ 中的缝合线替换为图 *1* 下方两个子图所示的两种缝合线之一。于是存在一个从立方体过滤出发的谱序列

$$\bigoplus_{\epsilon\in\{0,1\}^n} SHI(M,\gamma_\epsilon(\eta)) \Longrightarrow SHI(M,\gamma)$$

它尊重与曲面 S_l 相关联的曲面多重分次。此外，第一页上的微分由旁路映射给出。

注1.5。 图 1 中的循环次序 γ、γ_0、γ_1 与 [BS22a，图 11], 中的原始约定相反，因为在 (M、γ) 上没有进行定向反转（参见命题 4.7 的第 (2) 项）。

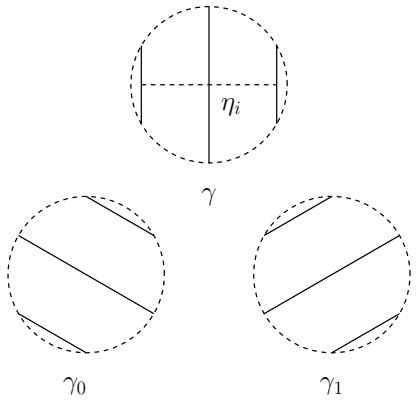


FIGURE 1. 虚线旁路弧 η_i 附近，以及缝合线的两种修改 γ_0 和 γ_1 。我们假设 ∂M的方向指向纸面外。

注 1.6。 除了定理1.1和定理1.4之外，本文的另一个动机是为第二作者及其合作者未来的工作发展基础性构造；构造的概要说明见 §2.3。在该工作中，作者计划将 [BLY23，§4] 中的思想推广到由互不相交的旁路弧组成的集合这一情形。目标是结合正、负旁路映射，构造一个从 $SFH(M、\gamma)$ 的链复形 $SFC(M、\gamma)$ 到 $SHI(M、\gamma)$ 的谱序列，使得微分以受控的方式影响曲面分次。

致谢。 我们感谢 Ian Zemke 就特征分解进行的有益交流。第二作者感谢 Michael Hopkins、David Treumann、Leon Liu 和 Yuanning Zhang 就 ∞-范畴进行的有益交流。第二作者还感谢 John A. Baldwin、Zhenkun Li 和 Steven Sivek 就即将开展的合作研究进行讨论，这些讨论为本项目提供了动力。本工作准备期间，第二作者获得了 Peter Kronheimer 提供的 Simons Collaboration Grant #271133 的部分资助。

AI 声明。 本工作的早期版本于2025年4月完成。作者使用 OpenAI Codex 的 gpt-6-astra 和 gpt-6.1-sol 模型修正文中的拼写错误和数学符号，并润色了部分陈述的表述。作者审阅了由此产生的修改，并对稿件承担全部责任。

2. SKETCH OF THE CONSTRUCTIONS

本节是引言的延续。我们概述超立方体和特征分解的构造，解释为何使用 ∞-范畴，并描述结合正、负旁路映射的构造。最后，我们概述其余各节的内容。

2.1. 超立方体与特征分解。 (1.3) 右侧的构造给出一个（维数为 n）的超立方体复形，或简称为超立方体。由指标的 L^1-范数 $|\cdot|$ 诱导的该超立方体上的滤过会产生一个谱序列。

这种滤过通常称为立方体过滤。参见 [MO25, §5], [Zem26, §2.2],和 [BHL19]。更准确地说，超立方体是如下形式的链复形

$$(C, D) = \left(\bigoplus_{\epsilon \in \{0,1\}^n} C_\epsilon[|\epsilon| - n],\ \sum_{\epsilon \le \epsilon'} D_{\epsilon,\epsilon'} \right), \tag{2.1}$$

其中， C_ϵ 是有限全局维数的交换诺特环 $\mathbb{K}$ 上的有限表示射影模，$D_{\epsilon,\ \epsilon'} : C_\epsilon \to C_{\epsilon'}$ 是模态射，而$\{0,1\}^n$ 上的偏序由 $0 < 1$诱导。每个 C_ϵ 都是某个 $m \in \mathbb{Z}_+$下的 $\mathbb{Z}$-分次或 $\mathbb{Z}/m$-分次，且移位前$D_{\epsilon,\ \epsilon'}$ 的次数为 $|\epsilon' - \epsilon| - 1$。我们采用$(C_\epsilon[k])_j = (C_\epsilon)_{j+k}$，因此 D 的总次数为 -1。对于周期分次，假设 m 为偶数，或 $2 = 0$ 属于 $\mathbb{K}$。

我们采用 Ye26，Construction 7.7]，中的总微分符号，其中$D_{\epsilon,\ \epsilon} = (-1)^{n-|\epsilon|}\partial_\epsilon$ 表示未移位顶点复形上微分 ∂_ϵ。相容条件为

$$\sum_{\epsilon \le \delta \le \epsilon'} D_{\delta,\epsilon'} \circ D_{\epsilon,\delta} = 0, \tag{2.2}$$

或等价地 $D \circ D = 0$，这意味着 (C, D) 是一个链复形。在 Floer情形中，$(C_\epsilon, \partial_\epsilon)$ 是在 (1.4) 中定义 $F(Y_\epsilon(L))$ 的链复形，其中省略了同调移位。在 Floer 同调情形中，(1.3) 中的其他态射 $D_{\epsilon,\epsilon'}$ for $\epsilon < \epsilon'$ 是由余边界族诱导的，称为族余边界映射。

一个算子

$$\mu = \sum_{\epsilon \le \epsilon' \in \{0,1\}^n} \mu_{\epsilon,\epsilon'} : (C, D) \to (C, D)$$

超立方体 (C, D) 上的算子由模态射 $\mu_{\epsilon,\epsilon'}$: $C_\epsilon \to C_{\epsilon'}$ 组成，它们满足 $\mu \circ D = D \circ \mu$，其中每个分量在未移位顶点上的次数为 $|\epsilon' - \epsilon|$，因此 μ 的总次数为零。

若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ （或更一般地，若底域为代数闭域），则线性代数给出广义特征分解

$$(C, D) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} (C^\lambda, D^\lambda), \tag{2.3}$$

其中

$$C^\lambda = \operatorname*{colim}_{N \to \infty} \ker(\mu - \lambda \cdot \mathrm{id})^N, \qquad D^\lambda = D|_{C^\lambda}.$$

然而，子复形 (C^λ, D^λ) 通常并非超立方体复形，而仅是一个 $\{0,1\}^n$-过滤链复形。特别地，C^λ 不一定是移位模组 $C^\lambda_\epsilon[|\epsilon| - n]$ 的直和，其中

$$C^\lambda_\epsilon = \operatorname*{colim}_{N \to \infty} \ker(\mu_{\epsilon,\epsilon} - \lambda \cdot \mathrm{id})^N$$

对于 $\epsilon \in \{0,1\}^n$。

例 2.1. 当 $n = 1$ 时，全复形的底层分次模为 $C_0[-1] \oplus C_1$，并且是映射锥

$$\mathrm{cone}(D_{0,1} : (C_0, \partial_0) \to (C_1, \partial_1)).$$

C^λ 中的元素要么是 $(0,\ x_1) \in 0 \oplus C_1^\lambda$，要么是 $(x_0,\ x_1') \in C_0^\lambda[-1] \oplus C_1$，但 $(x_0,\ 0)$ 不一定属于 C^λ，因为 $\mu_{0,\ 1}$ 可能非零。

为了在特征分解上构造超立方体结构，Ghosh–Zemke [GZ24, §6]证明了 $\{0,1\}^n$-滤过模 C^λ 的伴随分次模典范地同构于

$$\bigoplus_{\epsilon\in\{0,1\}^n} C^\lambda_\epsilon[|\epsilon|-n].$$

给定一个称为分裂映射的同构选择

$$\Phi:\bigoplus_{\epsilon\in\{0,1\}^n} C^\lambda_\epsilon[|\epsilon|-n]\to C^\lambda \tag{2.4}$$

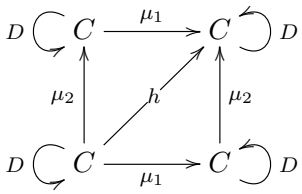
它诱导出这个典范识别的逆映射，由此可以构造一个超立方体复形

$$E^\lambda(C,\mu;\Phi)=\left(\bigoplus_{\epsilon\in\{0,1\}^n} C^\lambda_\epsilon[|\epsilon|-n],\ \Phi^{-1}\circ D\circ\Phi\right).$$

此外，在 [GZ24 的 §6]，中，这一构造被推广到超立方体之间的态射，并应用于两个同伦相干交换算子的同时广义特征空间 μ_1，μ_2 其上为 $(C,\ D)$。这里，同伦相干交换意味着存在一个态射

$$h=\sum_{\epsilon\le\epsilon'\in\{0,1\}^n} h_{\epsilon,\epsilon'}:C\to C,$$

通常称为同伦，使得下图



(2.5)

是同伦交换的。在全复形 $(C,\ D)$ 上，次数为 1 的同伦 h 满足

$$\mu_2\mu_1-\mu_1\mu_2=Dh+hD.$$

采用 [Ye26, 构造 7.7]，的符号，这些数据定义了一个满足 (2.2) 的 $(n+2)$ 维超立方体。

虽然可以将这一策略扩展到更多同伦相干交换算子 μ_1、……、μ_r，但要一致地选取 (2.4) 中的同构 Φ，并追踪相关的同伦与高阶同伦，会变得愈发微妙。在本文中，我们不显式地执行这一过程，而是使用 ∞-范畴来系统地组织高阶同伦相干信息。

从 ∞-范畴的视角来看，超立方体只不过是由范畴 $\square^n=(\Delta^1)^n$ （见定义 2.4）作为指标的图表，而同伦相干交换算子则对应于分类 ∞-范畴 $\mathbf{B}_\bullet\mathbb{N}^r$ 对幺半群 $\mathbb{N}^r$ 的作用，该作用施加于这样的图表上。关于瞬子理论中的相应构造，参见 [Ye26, §2.1–2.2]。这两种视角之间的等价性由定理 2.5 确立。

2.2. **使用 ∞-范畴的理由**。 为了处理同伦及更高阶同伦，我们将广泛运用 Lurie[Lur09a、Lur17、Lur24] 所发展的 $(\infty,1)$-范畴理论。这个框架使我们能够系统地捕捉超立方体和同伦相干交换算子所编码的信息，并发展特征分解。遵循 Lurie 的术语，我们用“∞-范畴”指代 $(\infty,1)$-范畴。对于不熟悉 ∞-范畴的读者，标准参考文献包括 [Lur09a，第 1], [章；Lur17，第 1], [章；Lur09b，§1-2], , 以及综述文章 [Ber10、Ber20]。

然而，与那些参考文献中的做法（以及第二作者叶帆此前的工作 [Ye26]）不同，我们将以与模型无关的方式使用 ∞-范畴的语言；也就是说，我们不会将 ∞-范畴等同于任何特定模型，例如拟范畴、完备塞加尔空间或单纯范畴。我们采取这种方法，是因为我们关注的并非发展 ∞-范畴理论，而是运用它。与模型无关的表述方式更贴合我们的直觉：我们将 ∞-范畴视为范畴，同时牢记其应用中至关重要的所有高阶相干数据。模型只是表示∞-范畴，就像戴德金分割和柯西序列表示实数一样；在使用实数时，我们通常不会把它们视为戴德金分割或柯西序列。这种方法与许多当代使用 ∞-范畴的论文的写作风格一致，例如 [BS22b、BHS23]。

为将空间的 ∞-范畴中的对象与实际的拓扑空间区分开来，我们通常将前者称为 $anima$，并用 Ani 表示 anima 的 ∞-范畴（[Lur09a，定义 1.2.16.1]）。我们用 Cat 表示小型 ∞-范畴的 ∞-范畴（[Lur09a，定义 3.0.0.1]），并用 Fun 表示函子的 ∞范畴（[Lur09a，记号 1.2.7.2]）。一般而言，我们倾向于用无衬线字母表示固定的 ∞-范畴，或输出 ∞-范畴的构造；而用花体字母表示一般的 ∞-范畴。

警告 2.2。 在本文中，我们仍用“范畴”指“1-范畴”，但有时也会用“普通范畴”来强调它们并非真正的 ∞-范畴。不过，我们确实将 1-范畴视为一种特殊的 ∞-范畴，也就是没有非平凡高阶态射的范畴。若使用拟范畴来建模 ∞-范畴，则可通过神经函子 $\mathbf{N}_\bullet(-)$ 将普通范畴视为 ∞-范畴，参见[Lur24，002N、003D]。 ∞-范畴中的 1-态射简称为态射，而对 $k>1$ 而言的k-态射则称为高阶态射 或高阶同伦，因为它们都是可逆的。

警告 2.3. $f\colon X\to Y$是 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 中对象 X 和 Y之间的一个态射；如果它在同伦 1-范畴 h$\mathcal{C}$ 中诱导出同构（见 [Lur24, 004R]），则称其为同构。在这种情况下，我们用 $X=Y$或 $X\xrightarrow{\sim}Y$代替 $X\cong Y$。与通常的等号不同，这种记法隐含地保留了同构 f的信息。

根据 ∞-范畴的具体情形，同构可以是链同构、链同伦等价、拟同构，或 ∞-范畴之间的等价。我们也用 $\mathcal{C}\simeq\mathcal{C}'$ 或 $\mathcal{C}\xrightarrow{\sim}\mathcal{C}'$ 表示两个 ∞-范畴之间的等价。

此外，我们用等号表示两个函子之间的自然同构，并将它们视为函子 ∞-范畴中的对象。

这种等式记法同样适用于态射和高阶态射。例如，当我们写下 $h=g\circ f$ 时，也隐含地记录了那个为该

等式提供“见证”的 2-态射（见 [Lur24, 0042]）。此外，交换图由高阶态射提供见证（见 [Lur24, 005V]）。

为陈述我们的主要命题，我们引入以下定义。我们选择尽可能简化设定，同时保留主要思想；第3节中的许多结果实际上在更一般的情形下也成立。

定义 2.4。(1) 给定 $n \in \mathbb{N}$，令 $\square^n = (\Delta^1)^n$ 表示维数为 n 的单纯形立方体，其中 $\Delta^1 = \{0 \to 1\}$ 是一个具有两个对象 0 和 1、两个单位元态射以及一个从 0 到 1 的态射的范畴。对于 $n = 0$，$\square^0$ 就是一个只有一个对象且除单位元外没有其他态射的范畴。注意，对于任意 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，$\mathsf{Fun}(\square^0, \mathcal{C}) = \mathcal{C}$。

(2) 令 $\mathbb{K}$为具有有限全局维数的交换诺特环，其含义见定义 3.22（另见 [Sta24, 00O6]），并令 m 为正整数。假设 m 为偶数，或 $\mathbb{K}$ 具有特征2。此类环的例子 $\mathbb{K}$ 包括 $\mathbb{Z}$、域、多项式环、在此类环上的有限变量形式幂级数环，以及此类环的局部化。按照 [Ye26，定义 3.51],令

$$\mathsf{D}_m(\mathbb{K}) = \mathrm{N}^{\mathrm{dg}}_{\bullet}(\mathsf{Ch}_m(\mathsf{Mod}(\mathbb{K})_{\mathrm{proj}}))$$

是 ∞ 上（可能无限表示的） m-周期链复形的导出范畴，并令

$$\mathsf{D}^c_m(\mathbb{K}) = \mathrm{N}^{\mathrm{dg}}_{\bullet}(\mathsf{Ch}_m(\mathsf{Mod}(\mathbb{K})^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{proj}}))$$

是 $\mathsf{D}_m(\mathbb{K})$ 的全子-∞-范畴，由有限表示射影模的复形组成；这些复形恰好是紧对象。按照 [Ye26，例 3.58], $\mathsf{D}^c_m(\mathbb{K})$ 记作 $\mathsf{D}_m(\mathsf{Mod}(\mathbb{K})^{\mathrm{fin}})$。我们用 $\mathsf{D}(\mathbb{K})$ 表示 [Lur17，定义 1.3.5.8] 中构造的通常（非周期且无界）导出 ∞-范畴，并将 $\mathsf{D}^c(\mathbb{K})$ 定义为紧对象构成的全子-∞-范畴，其中的对象是有限表示射影模的有界复形。根据 [Lur17，命题 1.3.2.10 和推论 1.3.2.18] ，以及 [Ye26，第3节.6],，所有这些导出范畴在 [Lur17，定义 1.1.1.9] 的意义下都是稳定的，并且也是对称幺半的。紧子-∞-范畴 $\mathsf{D}^c_m(\mathbb{K})$ 和 $\mathsf{D}^c(\mathbb{K})$ 还具有刚性。稳定 ∞- 范畴相较于三角范畴的一大优势是，映射锥就是余纤维；余纤维是一种特殊的余极限，因此具有函子性。

(3) 给定 $r \in \mathbb{N}$，令 $A_r = \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_r]$ 为 $\mathbb{K}$ 上的多项式代数。给定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $m \in \mathbb{Z}_+$，令 D 为以下 ∞-范畴之一

$$\mathsf{D}^{n,c}(\mathbb{K}) = \mathsf{Fun}(\square^n, \mathsf{D}^c(\mathbb{K})), \text{ and } \mathsf{D}^{n,c}_m(\mathbb{K}) = \mathsf{Fun}(\square^n, \mathsf{D}^c_m(\mathbb{K})). \tag{2.6}$$

令 $\mathsf{End}^r(\mathsf{D}) = \mathsf{Fun}(\mathsf{B}_{\bullet}\mathbb{N}^r, \mathsf{D})$，其中 $\mathsf{B}_{\bullet}\mathbb{N}^r$ 是幺半群 $\mathbb{N}^r$ 的分类 ∞-范畴，参见 [Lur24, 04G0]。我们也将 $\mathsf{End}^r(\mathsf{D})$ 记为 $\mathsf{Mod}_{A_r}(\mathsf{D})$，视其为相应环境导出范畴中 A_r-模的全子范畴，其中底层对象属于 D。$\mathsf{End}^r(\mathsf{D})$ 中的对象写作 $\mathscr{X} = (\mathscr{X}, T)$（在第3节.3中也写作 (X, T)），其中$\mathscr{X} \in \mathsf{D}$，且 T 由 $\mathscr{X}$ 的 r 个自同态组成，这些自同态以同伦相干的方式彼此交换。

(4) 给定上述 A_r 和 D，以及 A_r 的一个理想 I，令 $\mathsf{End}^r_I(\mathsf{D}) = \mathsf{Mod}^{\mathsf{Nil}(I)}_{A_r}(\mathsf{D})$ 为 $\mathsf{End}^r(\mathsf{D})$ 的全 ∞-子范畴，由如 [Lur18，备注 7.0.0.1], 所述的 I-幂零对象组成；即对象 $(\mathscr{X}, T)$，满足对每个 $f \in I$,

$$\mathrm{colim}(\mathscr{X} \xrightarrow{f} \mathscr{X} \xrightarrow{f} \cdots) = 0, \tag{2.7}$$

其中，colim 分别表示 $\mathsf{Fun}(\square^n, \mathsf{D}(\mathbb{K}))$ 或 $\mathsf{Fun}(\square^n, \mathsf{D}_m(\mathbb{K}))$ 中的同伦余极限。在环境 A_r-模 ∞-范畴中，底层对象不必是紧对象,

令 $\mathrm{R}\Gamma_I$ 表示局部上同调函子，它是包含 I-幂零对象的全子范畴之右伴随（见 [Lur18，定义 7.1.2.1]和 [Sta24, 0952]）。

(5) 假设 $\mathbb{K}$ 是代数闭的。根据希尔伯特零点定理， $A_r = \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_r]$ 的每个极大理想都具有如下形式

$$\mathfrak{m}_{\vec{\lambda}} = (T_1 - \lambda_1, \ldots, T_r - \lambda_r) \tag{2.8}$$

对于唯一的 $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$。对于 $\overline{\mathscr{X}} \in \mathsf{End}^r(\mathsf{D})$，记作 $\overline{\mathscr{X}}_{\vec{\lambda}} = \mathrm{R}\Gamma_{\mathfrak{m}_{\vec{\lambda}}}(\overline{\mathscr{X}})$，并将其底层对象记为 $\mathscr{X}_{\vec{\lambda}}$。

下面的定理给出了超立方体原始定义与使用 ∞-范畴的定义之间的对应关系，这基本上可由 [Ye26 的构造 7.6 和 7.7]以及构造 3.9 得出。

定理 2.5。 设 D 如(2.6)所述。D 和 $\mathsf{End}^r(\mathsf{D})$ 中的对象有如下描述。

(1) D 中的一个对象对应于 *(2.1)* 中维数为 n 、带有 $\mathbb{Z}$ 或$\mathbb{Z}/m$-同调分次的超立方体；
(2) $\mathsf{End}^r(\mathsf{D})$ 中的一个对象对应于维数为 n 、带有 $\mathbb{Z}$或 $\mathbb{Z}/m$-同调分次的超立方体，以及超立方体上 r 个在同伦意义下相干交换的算子。

记号 2.6。 在 [Ye26], 中， ∞-范畴设置下的概念为便于区分称为立方复形。鉴于定理 2.5，我们交替使用超立方体和立方复形这两个术语。

随后，我们通过 ∞-范畴给出超立方体的特征分解。以下定理的证明将在§3.3中给出。

定理 2.7。 设 $\mathbb{K}$ 为一个代数闭域，并令D 为$\mathsf{D}^c(\mathbb{K})$ 或$\mathsf{D}^c_m(\mathbb{K})$。直和函子给出稳定的 ∞-范畴之间的一个等价

$$\bigoplus_{\vec{\lambda} \in \mathbb{K}^r} \mathsf{End}^r_{\mathfrak{m}_{\vec{\lambda}}}(\mathsf{D}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{End}^r(\mathsf{D}), \tag{2.9}$$

其中直和由具有有限支撑的族构成。其逆函子将 $\mathscr{X}$ 发送到$(\mathrm{R}\Gamma_{\mathfrak{m}_{\vec{\lambda}}}(\mathscr{X}))_{\vec{\lambda} \in \mathbb{K}^r}$。赋予其$\overline{\text{来}}$自备注 *3.15* 和 *3.36* 的对称幺半结构后，该等价是对称幺半的。

推论 2.8。 设D 如定理 *2.7*中所述。存在稳定的 ∞-范畴之间的一个等价

$$\mathsf{End}^r(\mathsf{Fun}(\square^n, \mathsf{D})) \simeq \bigoplus_{\vec{\lambda} \in \mathbb{K}^r} \mathsf{Fun}(\square^n, \mathsf{End}^r_{\mathfrak{m}_{\vec{\lambda}}}(\mathsf{D})). \tag{2.10}$$

对于逐点应用于立方体方向的定理 *2.7* 所给结构，该等价是对称幺半范畴的。

证明。 根据定理 2.7，我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{End}^r(\mathsf{Fun}(\square^n,\mathsf{D})) &= \mathsf{Fun}(\mathrm{B}_\bullet\mathbb{N}^r\times\square^n,\mathsf{D})\\ &= \mathsf{Fun}(\square^n,\mathsf{End}^r(\mathsf{D}))\\ &\simeq \mathsf{Fun}\Big(\square^n,\bigoplus_{\vec{\lambda}\in\mathbb{K}^r}\mathsf{End}^r_{\mathfrak{m}_{\vec{\lambda}}}(\mathsf{D})\Big)\\ &= \bigoplus_{\vec{\lambda}\in\mathbb{K}^r}\mathsf{Fun}(\square^n,\mathsf{End}^r_{\mathfrak{m}_{\vec{\lambda}}}(\mathsf{D})).\end{aligned}$$

最后一个识别成立，是因为 $\square^n$ 只有有限个顶点，所以它们支撑的并集是有限的。对立方体方向逐点应用定理 2.7，即可得到对称幺半性。□

定义 2.9。 等价 (2.10) 随后再忘却每个直和项上的算子，给出了特征分解函子

$$\mathrm{Eig}^{n,r}:\mathsf{End}^r(\mathsf{Fun}(\square^n,\mathsf{D}))\to\bigoplus_{\vec{\lambda}\in\mathbb{K}^r}\mathsf{Fun}(\square^n,\mathsf{D}).$$

我们将 $\mathrm{Eig}^{n,r}_{\vec{\lambda}}(\mathscr{X})=\mathscr{X}_{\vec{\lambda}}$ 在 $\vec{\lambda}$处的分量记为此分量，称作与广义特征空间相关联于 λ。注意，在同调上，它们给出通常的广义特征空间。

若不采用 ∞-范畴框架，就需要在 (2.4) 中选择一个分裂映射Φ ，以得到特征分解的超立方体。根据 [GZ24，引理 6.5]，可以沿子立方体归纳地选择分裂映射，使所得超立方体相对于子立方体表现良好。不过，该引理的证明仍涉及一些任意选择。 [GZ24，引理 6.7] 的结果及其对超立方体的推广表明，分裂映射的不同选择会导出同伦等价的超立方体。

此外，对于两个同伦相干交换算子 T_1 和 T_2，以不同顺序应用特征分解所得的超立方体通过 [GZ24, 引理 6.8]同伦等价。根据 [GZ24, 命题 6.9], ，如果 $T_2-T_1=\alpha\mathrm{id}$ 对某个 $\alpha\in\mathbb{C}$ 幂零，那么相应的特征分解在同伦等价意义下仅相差特征值平移。下面给出的这一比较形式允许 $T_2-T_1-\alpha\mathrm{id}$ 为幂零，并将在 §5 中使用。

推论 2.10. 设 D 如定理 *2.7* 中所述，并设 $\mathscr{X}=(\mathscr{X},T)\in\mathsf{End}^r($函子范畴$(\square^n,\mathsf{D}))$。固定$i$、 $j\in[1,r]$ 和 $\alpha\in\mathbb{K}$。若 $T_j-T_i-\alpha\,\mathrm{id}$ 在每个顶点的同调上幂零作用，则 $\mathscr{X}_{\vec{\lambda}}=0$ ，除非 $\lambda_j=\lambda_i+\alpha$。特别地， T_i 在 λ 处的广义特征空间与T_j 在 $\lambda+\alpha$ 处的广义特征空间，可通过它们的联合广义特征空间的包含映射自然地识别。

证明。 在 $\mathscr{X}_{\vec{\lambda}}$每个顶点的同调上，右侧的三项

$$(\lambda_j-\lambda_i-\alpha)\,\mathrm{id}=(T_j-T_i-\alpha\,\mathrm{id})-(T_j-\lambda_j\,\mathrm{id})+(T_i-\lambda_i\,\mathrm{id})$$

彼此可交换且均为幂零。如果 $\lambda_j-\lambda_i-\alpha\neq0$，则每个顶点处的同调都消失，因此 $\mathscr{X}_{\vec{\lambda}}=0$。最后一个断言由将具有所规定特征值的联合块相加得到。□

2.3. **旁路映射的组合**。在本小节中，我们介绍第二作者及其合作者在未来工作中组合旁路映射的设置。我们先从对应于定理 1.4 中 $n=k=1$ 的最简单情形开始，然后考虑一般情形。

设 $(M,\ \gamma_0)$ 是一个平衡缝合流形，且 $\eta \subset \partial M$ 是一条与缝合线 γ_0 相交两次的定向简单闭曲线。与 η 相关的两条自然旁路弧如图 2 所示，分别称为正旁路弧 η^+ 和负旁路弧 η^-。图 1 中由这两条旁路弧诱导的缝合线 $\gamma_1^{\pm}$ 是同伦的，因此我们省略上标中的符号。图 1 中 $\eta^{\pm}$ 对应的顶部缝合线 $\gamma_{\pm}$ 通常并不同伦，但也有一些例外，例如当 $\partial M \cong T^2$ 和 γ 由两条平行简单闭曲线组成时。

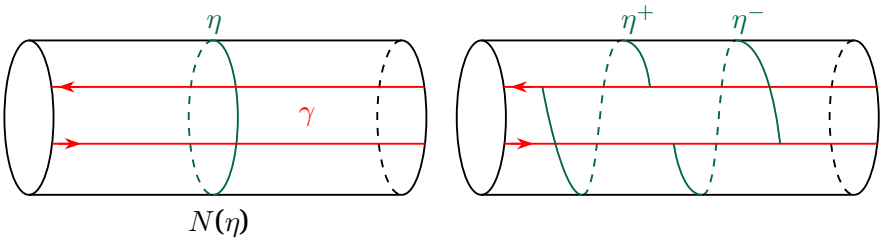


FIGURE 2. 曲线 η 及其两条旁路弧 η^+ 和 η^-。在可见的一侧，∂M 的外法向指向圆柱内部。

设 $S \subset (M,\ \gamma_0)$ 是一个可容许曲面，可能与 η^+ 和 η^-相交，且代数交数

$$a = \partial S \cdot \eta$$

为正。设 S^+ 和 S^- 由 S 得到：如图 3 所示，在 $N(\eta)$ 中对其边界进行同伦，使得

$$S^+ \cap \eta^+ = \emptyset \text{ and } S^- \cap \eta^- = \emptyset,$$

固定 γ_1 时，$(M,\ \gamma_1)$ 中诱导的曲面同伦。注意，如图 4 所示，对边界进行同伦的操作称为稳定化，并对应于命题 4.7 (3) 中曲面分次的分次平移。根据图 3 和图 4 可以直接验证，与 S^+和 S^- 相关联的曲面分次之间的分次平移恰好为 $2a$，其中因子 2 源于我们对分次所作的重新缩放。

我们选择 $S^{\pm}$ 使其可容许；如有必要，对两者应用相同的稳定化，但避开 N（η）。然后，我们分别对 $(S^+,\ \eta^+)$ 和 $(S^-,\ \eta^-)$ 应用定理 1.4。由于定理 1.4 中的谱序列来自立方体过滤，与 (1.2) 类似，我们确实得到拟同构

$$SHI(M,\gamma_{\pm},S^{\pm},\lambda) \cong \operatorname{cone}\big(SHI(M,\gamma_0,S^{\pm},\lambda) \to SHI(M,\gamma_1,S^{\pm},\lambda)\big), \tag{2.11}$$

这里我们利用了这样的事实：$\mathbb{C}$ 上的链复形与其同调拟同构；记号 $S^{\pm}$ 和 $\lambda \in 2\mathbb{Z}$ 表示相应的曲面分次。我们将 (2.11) 的映射锥中的映射记为 $\psi_{\pm}$，并称它们为正和负旁路映射。关于 $S^{\pm}$ 的先前假设意味着

$$\begin{aligned} SHI(M,\gamma_0,S^+,\lambda) &\cong SHI(M,\gamma_0,S^-,\lambda-2a), \\ \text{and } SHI(M,\gamma_1,S^+,\lambda) &\cong SHI(M,\gamma_1,S^-,\lambda). \end{aligned} \tag{2.12}$$

因此，我们可以构造一个映射锥

$$\operatorname{cone}\Big(\bigoplus_{\lambda\in 2\mathbb{Z}} SHI(M,\gamma_0,S^+,\lambda) \xrightarrow{\psi_+ + \psi_-} \bigoplus_{\lambda\in 2\mathbb{Z}} SHI(M,\gamma_1,S^+,\lambda)\Big), \tag{2.13}$$

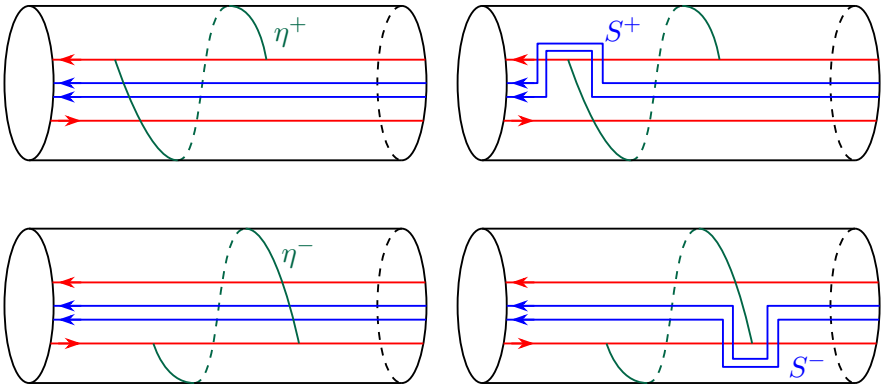


FIGURE 3. S 的定向边界在左侧以蓝色显示， η^+在上方， η^- 在下方。右侧的 S^+ 由正稳定化得到， S^- 由负稳定化得到。我们采用图 2 的定向约定。

称为混合映射锥，使得 ψ_+ 保持分次 λ ，而 ψ_- 将分次降低 $2a$。随后，该分次在 (2.13) 上诱导出一个滤过，使得 E_1-页同构于

$$\bigoplus_{\lambda\in 2\mathbb{Z}} SHI(M,\gamma_+,S^+,\lambda)$$

通过 (2.11)。我们将这种滤过称为分次滤过，以区别于引言中的立方体过滤 。虽然我们也可以根据分次取另一种滤过，使得 E_1-页同构于 $\bigoplus_{\lambda\in 2\mathbb{Z}} SHI(M,\gamma_-,S^-,\lambda)$，但本文不需要这种滤过。

混合映射锥的构造很容易推广到多个可容许曲面 $S_l\subset(M,\gamma_0)$，其中 $l=1,\dots,k$。对于与 S_l^+ 相关联的曲面多重分次，映射 ψ_+ 的度为零，而 ψ_- 的多重度为 $-2\vec{a}$，其中 $\vec{a}=(a_1,\dots,a_k)$ 且 $a_l=\partial S_l\cdot\eta$。

推广到多个旁路弧的情形会更加复杂。现在假设 $\eta_i\subset\partial M$,$i=1$、.....、 n 是两两不交的定向简单闭曲线，每条曲线与 γ_0 相交两次，且它们的邻域 $N(\eta_i)$ 两两不交。令 $\eta_i^{\pm}$ 为图 2 中对应的旁路弧，ψ_i、$\pm$ 为对应的旁路映射。与 $\gamma_\pm$ 在 $n=1$ 时的情况类似，对于 $s\in\{+,-\}^n$，令 γ_s 表示从 γ_0 得到的缝合线：取图 1 中 $\eta_i^{s_i}$ 对应的上方缝合线，其中 s_i 是 s 的第 i 项。此外，对于 $\epsilon\in\{0,1\}^n$，令 γ_ϵ 表示图 1 中 $\eta_i^{\pm}$ 对应的任意一条下方缝合线，符号任选，因为它们都同伦。特别地，我们有$\gamma_{\vec{0}}=\gamma_0$。

对于任意具有 $l=1,\dots,k$ 的可容许曲面 $S_l\subset(M,\gamma_0)$，我们为 $s\in\{+,-\}^n$ 选择由稳定化得到的 2^n 可容许曲面S_l^s，使得在 $N(\eta_i)$ 中， S_l 的边界同伦于图 3 所示情形之一的边界，具体取决于符号 s_i。对于$i=1,\dots,n$，令

$$f_i=-2\cdot(\partial S_1\cdot\eta_i,\dots,\partial S_k\cdot\eta_i)\in(2\mathbb{Z})^k,$$

这是$\psi_{i,-}$ 的分次平移；当$\psi_{i,+}$ 保持分次时。

再次由定理 1.4，我们得到所有如 (1.3) 中的 $s \in \{+,-\}^n$ 的拟同构

$$SHI(M,\gamma_s,\{S_l^s\}_{l\in[1,k]},\vec{\lambda}) \cong \left(\bigoplus_{\epsilon\in\{0,1\}^n} SHI(M,\gamma_\epsilon,\{S_l^s\}_{l\in[1,k]},\vec{\lambda})[|\epsilon|-n],\ \sum_{\epsilon\le\epsilon'} D^s_{\epsilon,\epsilon'}\right). \tag{2.14}$$

这里我们隐含地用到了这样一个事实：域上的链复形与其同调拟同构。另见 [HHSZ26 中关于超立方体的同调扰动引理的显式构造，引理 2.11]，以及 [Wan25，引理 3.3]。

将 (2.12) 推广，我们有

$$SHI(M,\gamma_\epsilon,\{S_l^{\vec{+}}\}_{l\in[1,k]},\vec{\lambda}) \cong SHI(M,\gamma_\epsilon,\{S_l^s\}_{l\in[1,k]},\vec{\lambda}+\sum_{\substack{\epsilon_i=0\\ s_i=-}} f_i), \tag{2.15}$$

其中 $\vec{+}=(+,\ .....,\ +)$。

此外，我们有 $D^s_{\epsilon,\ \epsilon}=0$，且若 $|\epsilon'-\epsilon|=1$，则映射 $D^s_{\epsilon,\ \epsilon'}$ 仅取决于 s 中与 ϵ 和 ϵ' 不同的那个坐标相对应的项，因为它是同调层面上的绕路映射。

为了将混合映射锥 (2.13) 推广为混合超立方体，我们需要以下假设。

假设 2.11. 存在如注 *1.3* 中所述的选择以及超立方体 (2.14) 在 函子范畴$(\square^n,\mathsf{D}_2^c(\mathbb{C}))$ 中的代表元，使得对任意 $\epsilon\le\epsilon'\in\{0,1\}^n$，映射 $D^s_{\epsilon,\epsilon'}$ 仅取决于 s 中与 ϵ 和 ϵ' 不同的坐标相对应的项。我们称此条件为混合条件。

注 2.12. 当 $\epsilon=\vec{0}=(0,\dots,0)$ 和 $\epsilon'=\vec{1}=(1,\dots,1)$ 时，假设 2.11 显然成立。由于只要 $|\epsilon'-\epsilon|\le 1$，该条件也成立，因此一旦共同选定顶点代表元和边代表元，混合条件对 $n=2$ 也成立。

若假设 2.11 成立，我们可以定义总和

$$D^{\mathrm{mix}}=\sum_{\epsilon\le\epsilon'\in\{0,1\}^n}\ \sum_{s\in\{+,-\}^{\epsilon'-\epsilon}} D^s_{\epsilon,\epsilon'}, \tag{2.16}$$

其中 $\{+,-\}^{\epsilon'-\epsilon}$ 由满足以下条件的那些 $s\in\{+,-\}^n$ 组成：每当 $\epsilon_i=\epsilon_i'$时， $s_i=+$。事实是，

$$D^s=\sum_{\epsilon\le\epsilon'\in\{0,1\}^n} D^s_{\epsilon,\epsilon'}$$

对于所有 $s\in\{+,-\}^n$， D^{mix} 都是一个微分，这就意味着 D^{mix} 在.....上也是一个微分

$$\bigoplus_{\vec{\lambda}\in(2\mathbb{Z})^k}\ \bigoplus_{\epsilon\in\{0,1\}^n} SHI(M,\gamma_\epsilon,\{S_l^{\vec{+}}\}_{l\in[1,k]},\vec{\lambda})[|\epsilon|-n].$$

我们将相应的链复形称为混合超立方体。

假设存在同态 $\rho:(2\mathbb{Z})^k\to\mathbb{Z}$，使得对所有 $i\in[1,n]$， $\rho(f_i)>0$。满足 $\rho(\vec{\lambda})\ge p$ 的直和项在混合超立方体上定义了一个递减滤过。其

E_1 页同构于

$$\bigoplus_{\vec{\lambda}\in(2\mathbb{Z})^k} SHI(M,\gamma_{\vec{+}},\{S_l^{\vec{+}}\}_{l\in[1,k]},\vec{\lambda})$$

由式 (2.14) 得到 $s=\vec{+}$。我们将这种滤过称为 ρ-分次滤过。混合超立方体和 ρ-分次滤过就是注 1.6 中提到的所需构造。

现在我们聚焦于假设 2.11，这是本文的主要动机。我们需要展开说明 SHI 和曲面多重分次的定义。具体来说，我们考虑平衡缝合流形的闭包，以及可容许曲面在闭包中的扩张，如引言所述。由于本文不讨论闭包的拓扑构造细节，我们在定理陈述中将该构造概括为一个拓扑假设，并将在第二作者及其合作者的后续工作中加以验证。

作为一种启发，我们从关于 $n=1$ 和一般 k 的拓扑假设入手。根据引言中的概述及第 4 节的细节，为了定义曲面多重分次，我们需要找到 (M,γ_0) 的一个特殊闭包[1] (Y_0,R)，使得以下条件成立。

(1) $S_l^{\pm}$ 对应的可容许曲面 $l\in[1,k]$ 可扩张为闭曲面 $S_l^{\pm}$ 属于 Y_0，且必然与 R 相交。我们不需要 S_l 的扩张。(2) 正、负旁路映射由手术协边诱导，$W^{\pm}$ 以 Y_0 为源，沿着与 R 不相交的曲线 $C^{\pm}$ 进行手术。此外，我们假设 C^+ 与 S_l^+ 不相交，且 C^- 与 S_l^- 不相交。令 $Y_1^{\pm}$ 为 $W^{\pm}$ 的靶，并且也用 R 表示 $Y_1^{\pm}$ 中的所得曲面。另外，令 $S_l^{\pm}\subset Y_1^{\pm}$ 表示所得曲面。根据构造，$(Y_1^{\pm},R)$ 和 (M,γ_1) 互为闭包，且 $S_l^{\pm}\subset Y_1^{\pm}$ 为 (M,γ_1) 诱导多重分次。

(3) 令 X 为从 (Y_1^-,R) 到 (Y_1^+,R) 的典范协边，这确实是一个协边

$$(X,\widetilde{Z}_R):(Y_1^-,R)\sqcup(Y_\varphi,R_\varphi)\to(Y_1^+,R\sqcup R_\varphi) \tag{2.17}$$

由沿 R 和 R_φ 进行 Floer 切除所诱导（参见 [KM10b, 第3节.2]），其中 $Y_\varphi=(R_\varphi\times I)/(x,1)\sim(\varphi(x),0)$ 是 φ 的映射环面，而曲面的协边[2] $\widetilde{Z}_R$ 是 R 和 R_φ 的乘积协边的不交并。从图 3 中的构造可知，固定 γ_1 时，(M,γ_1) 中 S_l 的所得曲面同伦，因此我们还需要进一步关联它在不同闭包 $(Y_1^{\pm},R)$ 中的扩张。特殊闭包应选择为使得在典范协边中，还存在进一步的曲面协边

$$\widetilde{Z}_l:(Y_1^-,\overline{S}_l^-)\sqcup(Y_\varphi,F_l)\to(Y_1^+,\overline{S}_l^+),$$

其中，F_l 是由 R 上的一族简单闭曲线得到的环面族，并且该曲线族在 φ 作用下保持不变。

[1]事实上，闭包是定义 4.2 中标记奇闭包的简称，其中也包含丛集 ω 的信息。由于丛集在后续构造中（例如手术协边和典范协边）具有类似的性质，因此此处可以放心地在记号中省略它，并在第5节中仔细考虑。[2]我们使用 $\widetilde{Z}_R$ 而不是 Z_R，以使记号与 [Ye26, 构造 8.9], 兼容，其中 Z_R 专指 $\widetilde{Z}_R$ 边界上的曲面，即 R 的副本。

现在我们陈述一般 n的拓扑假设。由于由 S_l 诱导的多个曲面S_l^s 在与不同 η_i相关的旁路映射作用下表现各异，因此对特殊闭包的假设要复杂得多。我们不考虑从 S_l 的稳定化中取出一个同时避开正、负旁路弧的单一曲面，是因为在典范余 bordism 下关联所得曲面会更加困难。

假设 2.13。 存在一个满足以下条件的特殊闭包$(Y_{\vec{0}}$、 $R)$，它是$(M$、 $\gamma_0)$ 的闭包，其中 $i \in [1,n]$、 $l \in [1,k]$、 $\epsilon \in \{0,1\}^n$、 s、 $t \in \{+,-\}^n$和 ϵ_i表示 ϵ 的第 i个条目（ s、 t同理）。

(1) 可容许曲面 S_l^s 延拓为 $Y_{\vec{0}}$中的闭曲面 S_l^s 。*(2)* 旁路映射 ψ_i、 $\pm$ 由以 $Y_{\vec{0}}$ 为源、沿着与 R不相交的曲线 $C_i^{\pm}$进行的手术协边 $W_i^{\pm}$诱导。此外，曲线 $C_i^{s_i}$与 S_l^s 不相交。令 Y_ϵ^s为对 $Y_{\vec{0}}$ 施加与ψ_i、 s_i 相关的手术（对 $\epsilon_i = 1$ ）后得到的曲面，并令 R也表示 Y_ϵ^s 中的所得曲面。根据构造，如果 s和 s' 仅在满足 $\epsilon_i = 0$的坐标 i 上有所不同，则有 $Y_\epsilon^s = Y_\epsilon^{s'}$ 。此外，令 $S_l^s \subset Y_\epsilon^s$表示所得曲面。于是根据构造，所有$(Y_\epsilon^s$、 $R)$ 都是$(M$、 $\gamma_\epsilon)$ 的闭包，并且$S_l^s \subset Y_\epsilon^s$为$(M$、 $\gamma_\epsilon)$诱导多重分次。

(3) 我们也将 $Y_i^{\pm}$写作 $W_i^{\pm}$的靶。令

$$(X_i, \widetilde{Z}_R) : (Y_i^-, R) \sqcup (Y_{\varphi_i}, R_{\varphi_i}) \to (Y_i^+, R \sqcup R_{\varphi_i}) \tag{2.18}$$

为不同闭包之间如(2.17)所示的典范协边。此典范协边还诱导出一些

$$(X_{\epsilon,i}^s, \widetilde{Z}_R) : (Y_\epsilon^s, R) \sqcup (Y_{\varphi_i}, R_{\varphi_i}) \to (Y_\epsilon^{s'}, R \sqcup R_{\varphi_i}) \tag{2.19}$$

对于 $\epsilon_i = 1$、 $s_i = -$，而 s' 由 s 将 s_i 替换为 $s_i' = +$得到。应选择特殊闭包，使得在典范协边中还存在进一步的曲面余 *bordism*

$$\widetilde{Z}_{i,l}^t : (Y_i^-, \overline{S}_l^t) \sqcup (Y_{\varphi_i}, F_{i,l}^t) \to (Y_i^+, \overline{S}_l^{t'}), \tag{2.20}$$

其中 $t_i = -$ 和 t' 由 t 将 t_i 替换为 $t_i' = +$得到，而 $F_{i,\,l}^t$ 是由 R 上的一族在 φ_i 作用下保持不变的简单闭曲线得到的环面族。若对每个满足 $\epsilon_j = 1$的 j，都有 $t_j = s_j$，则(2.20)中的曲面余 *bordism* 会在 $X_{\epsilon,\,i}^s$ 中诱导出来自(2.19)的曲面余 *bordism*，记作

$$\widetilde{Z}_{\epsilon,i,l}^{s,t} : (Y_\epsilon^s, \overline{S}_l^t) \sqcup (Y_{\varphi_i}, F_{i,l}^t) \to (Y_\epsilon^{s'}, \overline{S}_l^{t'}). \tag{2.21}$$

(4) 最后，我们假设某些典范余 *bordism*族和曲面协边的支撑位于不相交区域内，这与 *[Ye26*，定义 *7.8* 和 *8.18]*，中的含义一致；粗略地说，这表示它们在某些开子集之外是乘积。更明确地，考虑余边界

$$\begin{aligned} W_i^{+,\prime} =& W_i^+ \sqcup \bigsqcup_{j=1}^n I \times Y_{\varphi_j} \ \ and \\ W_i^{-,\prime} =& \big(X_i \sqcup \bigsqcup_{j\neq i} I \times Y_{\varphi_j}\big) \circ \big(W_i^- \sqcup \bigsqcup_{j=1}^n I \times Y_{\varphi_j}\big), \end{aligned} \tag{2.22}$$

以及曲面协边

$$\widetilde{Z}^{t,\prime}_{i,l} = \begin{cases} I \times \overline{S}^t_l & t_i = +, \\ \widetilde{Z}^t_{i,l} \circ (I \times \overline{S}^t_l \sqcup I \times F^t_{i,l}) & t_i = -. \end{cases} \tag{2.23}$$

那么，对于任意 $s \in \{+,-\}^n$，

$$\left\{(W_i^{s_i,\prime}, \{\widetilde{Z}^{t,\prime}_{i,l}\}_{l\in[1,k],t\in\{+,-\}^n,t_i=s_i})\right\}_{i\in[1,n]} \tag{2.24}$$

其余边界包含在互不相交的区域中，其中每个 $\widetilde{Z}^{t,\prime}_{i,l}$ 均理解为包含乘积圆柱 $I \times F^t_{j,l}$，其中 $j \neq i$ 满足 $t_j = -$。我们还假设，每个余边界部分上的曲面三维余边界都没有四重交。这些条件使我们能够应用 *[Ye26* 中的超立方体构造、构造 *7.11* 和定理 *8.21]*。关于切除模型中四重交的条件，参见 *[Ye26*，例 *8.22]* 。

注2.14。 为简便起见，我们省略假设（2.13）中有关丛集的信息。可以施加额外条件，使定理 1.1 中出现的额外丛集能够利用 [Ye26，注 7.19] 消去。第二作者及其合作者将在未来的工作中讨论这一问题。

定理 2.15。 假设 *2.13* 蕴含假设 *2.11*。因此，我们得到混合超立方体的微分 D^{mix} *in* （2.16）的构造。

2.4. **结构安排**。 在第3节中，我们发展关于 ∞-范畴的代数结果。我们预计本节读者熟悉 ∞-范畴的基本概念和术语。在 §3.1 中，我们给出单纯形立方体 $\square^n$ 的另一种刻画，这将在定理 2.5 的证明中使用。在 §3.2 中，对于任意阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$，我们给出导出 ∞-范畴 $\mathrm{D}_m(\mathcal{A})$ 的若干等价定义。在 §3.3 中，我们证明定理 2.7 中的特征分解，并给出沿此过程得到的若干推广。

在第 4 节中，我们回顾缝合瞬子同调的构造，并主要基于定理 2.7 证明定理1.1和定理1.4。

在 §5 中，我们分几个步骤证明定理 2.15。

3. Algebraic results for stable ∞-categories

本节聚焦于适用于一般情形的稳定 ∞-范畴的代数结果。§2.2 中的结果是其特例。

对于稳定 ∞-范畴中的对象 X，记 $X[k] = \Sigma^k X$ 为 $k \in \mathbb{Z}$，其中 Σ 表示悬挂；此处沿用 [Lur17，记号 1.1.2.7]。对于按同调次数分次的链复形，这给出 $(X[k])_j = X_{j-k}$。注意，这与 (2.1) 中采用的约定 $(X[k])_j = X_{j+k}$ 不同；后者沿用 [Wei94，平移 1.2.8]。

3.1. **超立方体的刻画**。 本小节将对单纯形立方体 $\square^n = (\Delta^1)^n$ 以及分类 ∞-范畴 $\mathbf{B}_\bullet\mathbb{N}^r$ 给出另一种描述，这将在定理 2.5 的证明中用到。这里我们用 $\varnothing$ 表示某个 ∞-范畴中的始对象，用 $*$ 表示终对象。

引理 3.1. 设 P 是一个偏序集，$\mathcal{F}$ 是它的子集族，满足：

(1) $\mathcal{F}$ 在有限交下封闭；*(2)* P 中的每条有限长度的链都包含在 $\mathcal{F}$的某个子集中。

于是，作为 ∞-范畴， $P = \mathrm{colim}_{T\in\mathcal{F}} T$ ；其中我们将偏序集视为 ∞-范畴，并通过子集包含关系将 $\mathcal{F}$视为偏序集。

证明。 我们证明更强的命题： $P = \mathrm{colim}_{T\in\mathcal{F}} T$ 作为单纯形 anima。换言之，对于任意偏序集映射 $x\colon \Delta^n \to P$，我们验证图表

$$\mathcal{F} \ni T \mapsto \begin{cases} *, & x \text{ factors through } T; \\ \varnothing, & \text{otherwise}; \end{cases}$$

其余极限为 $*$。作为一个取值仅为 $*$ 和 $\varnothing$的图表，其余极限是取值为 $*$的部分的神经，也就是作为 $\mathcal{F}$ 的子偏序集的 $\{T \in \mathcal{F} \mid x(\Delta^n) \subseteq T\}$ ；根据 (2)，它非空；根据 (1)，它是逆向有向偏序集，因此其神经是可缩的。□

引理 3.2。 设 C 是一个 ∞-范畴，并设 $C^{\triangleleft}$ 和 $C^{\triangleright}$ 是由 C 分别添加一个始对象0 和一个终对象1得到的 ∞-范畴。换言之，$\mathrm{Obj}(C^{\triangleleft}) = \mathrm{Obj}(C) \sqcup \{0\}$，且映射 *anima* 为

$$\mathrm{Hom}_{C^{\triangleleft}}(x,y) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_C(x,y), & x,y \in C; \\ *, & x = 0; \\ \varnothing, & \textit{otherwise}; \end{cases}$$

$C^{\triangleright}$也同理。令 $\Sigma C = C^{\triangleleft} \sqcup_C C^{\triangleright}$ 为 ∞-范畴中的推出。则 $\mathrm{Obj}(\Sigma C)$ $=\mathrm{Obj}(C) \sqcup \{0,1\}$，且映射 *anima* 为

$$\mathrm{Hom}_{\Sigma C}(x,y) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_C(x,y), & x,y \in C; \\ |C|, & x = 0 \textit{ and } y = 1; \\ *, & x = 0 \textit{ or } y = 1 \textit{ but not both}; \\ \varnothing, & \textit{otherwise}; \end{cases}$$

其中 $|C|$ 表示 ∞-范畴 C 的神经，即由 C 将其所有态射求逆后得到的 *anima*。

证明。 这是 [Ram24，推论 2.3] 的一个特例。 □

引理 3.3。 设 C 是一个具有推出和有限积的 ∞-范畴，且有限积对推出具有分配性。设 T 是一个有限集，对每个 $t \in T$ ，令

$$\begin{array}{ccc} x(0,t) & \longrightarrow & y(0,t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x(1,t) & \longrightarrow & y(1,t) \end{array}$$

是 C 中的一个推出方块。则图表 $(\Delta^1)^T \times \Delta^1 \to C$ 由下式给出

$$(a,0) \mapsto \prod_{t\in T} x(a_t,t),\ (a,1) \mapsto \prod_{t\in T} y(a_t,t)$$

是一个余极限图。

证明。 注意，如果对于每个 $t \in T$，我们都有一个分解

$$\begin{array}{ccccc} x(0,t) & \longrightarrow & z(0,t) & \longrightarrow & y(0,t) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x(1,t) & \longrightarrow & z(1,t) & \longrightarrow & y(1,t) \end{array}$$

如果两个小方块都是推出，并且我们已经分别将大方块中的引理对它们证明，那么我们就证明了大方块中的引理，因为沿着一个超面拼接两个立方余极限图仍然给出一个余极限图。因此，只需处理这样的情形：对于除一个 $t \in T$ 之外的所有 $t \in T$，都有 $x(0,\ t) = y(0,\ t)$ 以及 $x(1,\ t) = y(1,\ t)$；这一点显然成立，因为此时该图由以下各面组成，而根据假设它们都是推出，

$$\begin{array}{ccc} x(0,t) \times \prod_{u \neq t} x(a_u, u) & \longrightarrow & y(0,t) \times \prod_{u \neq t} x(a_u, u) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x(1,t) \times \prod_{u \neq t} x(a_u, u) & \longrightarrow & y(1,t) \times \prod_{u \neq t} x(a_u, u) \end{array}$$

其中 a 遍历 $(\Delta^1)^{T \setminus t}$。 □

例 3.4。 设 S 是一个非空有限集，且设 $d = |S|$ 是其基数。设 $\mathcal{C}_0$ 是一个 ∞-范畴，$x = (x_0,\ x_1) : \partial\Delta^1 \to \mathcal{C}_0$ 是其中的两个对象，并设 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \sqcup_{x,\ \partial\Delta^1} \Delta^1$ 是 ∞- 范畴中的推出，其中对象为 ∞- 范畴；也就是说，它是由 $\mathcal{C}_0$ 添加一个从 x_0 到 x_1 的态射得到的 ∞-范畴。我们将考虑以下例子：

(1) $\mathcal{C}_0 = \partial\Delta^1$ 和 $\mathcal{C} = \Delta^1$；
(2) $\mathcal{C}_0 = *$ 和 $\mathcal{C} = \mathrm{B}_\bullet\mathbb{N}$。

命题 3.5. 令 $\partial(\Delta^1)^S$ 为立方体 $(\Delta^1)^S$ 的边界，并将其视为一个 ∞-范畴。严格来说，

$$\partial(\Delta^1)^S = \operatorname*{colim}_{T \subsetneq S} (\Delta^1)^T \times (\partial\Delta^1)^{S \setminus T}.$$

于是，典范映射 $(\partial\Delta^1)^S \to \partial(\Delta^1)^S \to (\Delta^1)^S$ 在对象的 *anima* 上诱导同构；也就是说，$\partial(\Delta^1)^S$ 的对象的 *anima* 是集合 $\{0,1\}^S$。滥用记号，令0和1 表示对象 0^S 和 1^S。那么对于 $x, y \in \partial(\Delta^1)^S$,

$$\mathrm{Hom}_{\partial(\Delta^1)^S}(x,y) = \begin{cases} S^{d-2}, & x = 0 \ \textit{and}\ y = 1; \\ \varnothing, & x \not\leq y; \\ *, & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

这里 S^{d-2} 表示$(d-2)$维球面，更典范地说，它是∞-范畴 $(\Delta^1)^S \setminus \{0,1\}$的神经。

证明。 由于 $\partial\Delta^1 = \{0,1\}$，我们可以将定义 $\partial(\Delta^1)^S$ 的余极限拆分为

$$\operatorname*{colim}_{T \subsetneq S,\, i \in \{0,1\}^{S \setminus T}} (\Delta^1)^T,$$

其中 $(T, i) \leq (T', i')$ 表示 $T \subseteq T'$ 和 $i \mapsto i'$ 在指标偏序集中，我们将其记为 P。非正式地说，P 是 $(\Delta^1)^S$ 所有维度的各个面的包含偏序集，但不包括立方体

本身。设 P_0 和 P_1 分别是 P 的子偏序集，由远离 0 和 1 的面组成。换言之，

$$P_0 = \{(T,i) \in P \mid i \neq 0^{S\setminus T}\},\ P_1 = \{(T,i) \in P \mid i \neq 1^{S\setminus T}\}.$$

设 $P_{01} = P_0 \cap P_1$。那么引理 3.1 显然适用于族 $\{P_0, P_1, P_{01}\}$，从而得到$P = P_0 \sqcup_{P_{01}} P_1$ 作为范畴，因此 $\partial(\Delta^1)^S = \operatorname{colim}_{(T,i)\in P}(\Delta^1)^T$ 是 $\operatorname{colim}_{(T,i)\in P_0}(\Delta^1)^T$ 与 $\operatorname{colim}_{(T,i)\in P_1}(\Delta^1)^T$ 沿着 $\operatorname{colim}_{(T,i)\in P_{01}}(\Delta^1)^T$的推出。现在再次应用引理 3.1，得知这三个余极限分别是偏序集 $(\Delta^1)^S\setminus 0$、$(\Delta^1)^S\setminus 1$和 $(\Delta^1)^S\setminus\{0,1\}$。由此得到

$$\partial(\Delta^1)^S = ((\Delta^1)^S \setminus 0) \sqcup_{(\Delta^1)^S\setminus\{0,1\}} ((\Delta^1)^S \setminus 1),$$

并且我们可以应用引理 3.2 得出结论。 □

推论 3.6。设 $E_S \subseteq \partial(\Delta^1)^S$ 是仅包含两个对象0 和 1的满子-∞-范畴，因此其映射 *anima* 为 $\mathrm{Hom}(0、0) = \mathrm{Hom}(1、1) = *$、$\mathrm{Hom}(0、1) = S^{d-2}$以及$\mathrm{Hom}(1、0) = \varnothing$。那么下图是一个 ∞-范畴的推出，

$$\begin{array}{ccc} E_S & \longrightarrow & \partial(\Delta^1)^S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^1 & \longrightarrow & (\Delta^1)^S \end{array}$$

其中顶部箭头是包含函子，右侧箭头是典范函子，另外两个箭头是将0映射到0 并将1 映射到1 的唯一函子。

证明。我们证明上述图表是单纯形 anima 的推出。换言之，我们检验函子所对应的 anima

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Fun}(\Delta^n, E_S) & \longrightarrow & \mathsf{Fun}(\Delta^n, \partial(\Delta^1)^S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Fun}(\Delta^n, \Delta^1) & \longrightarrow & \mathsf{Fun}(\Delta^n, (\Delta^1)^S) \end{array}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都构成推出方块。为此，我们只需检验对于每个 $x \in \mathsf{Fun}(\Delta^n,(\Delta^1)^S)$，下面的图表是 anima 的推出方块。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Fun}(\Delta^n, E_S) \times_{\mathsf{Fun}(\Delta^n,(\Delta^1)^S)} \{x\} & \longrightarrow & \mathsf{Fun}(\Delta^n, \partial(\Delta^1)^S) \times_{\mathsf{Fun}(\Delta^n,(\Delta^1)^S)} \{x\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Fun}(\Delta^n, \Delta^1) \times_{\mathsf{Fun}(\Delta^n,(\Delta^1)^S)} \{x\} & \longrightarrow & \{x\} \end{array}$$

现在这显然成立：如果 x 经过底部箭头 $\Delta^1 \to (\Delta^1)^S$ 分解，那么水平箭头是同构；而如果不经过该箭头分解，那么竖直箭头是同构。□

构造 3.7. 对于 $T \subseteq S$，令 $\mathcal{C}^S_T = \mathcal{C}^T \times \mathcal{C}_0^{S\setminus T}$，于是 $\mathcal{C}^S_\varnothing = \mathcal{C}^S_0$ 和 $\mathcal{C}^S_S = \mathcal{C}^S$。典范映射 $\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}$ 使 $\mathcal{C}^S_T$ 关于 T具有函子性，从而得到一个从 S 的子集偏序集到 ∞-范畴的 ∞-范畴的函子，即一个函子 $(\Delta^1)^S \to \mathsf{Cat}$。对于 S 的子集构成的向下封闭族 $\mathcal{F}$，令

$$\mathcal{C}^S_{\mathcal{F}} = \operatorname*{colim}_{T\in\mathcal{F}} \mathcal{C}^S_T,$$

其中将 $\mathcal{F}$ 视为 $(\Delta^1)^S$ 的一个满子-∞-范畴，并且余极限是在 Cat 中取的。于是$\mathcal{C}^S_{\{\varnothing\}} = \mathcal{C}^S_0$ 和 $\mathcal{C}^S_{\mathcal{P}(S)} = \mathcal{C}^S$，其中 $\mathcal{P}(S)$ 表示 S 的幂集。

命题 3.8. 设 $\mathcal{F}_0$ 是 S的子集构成的向下封闭族，设 T 是 S 的一个非空子集，且不属于 $\mathcal{F}_0$，其所有真子集都属于 $\mathcal{F}_0$；再设 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \{T\}$，于是 $\mathcal{F}$ 也是向下封闭的。在这种情况下，我们有如下推出方块，其对象属于∞-范畴：

$$\begin{array}{ccc} E_T \times \mathcal{C}_0^{S\setminus T} & \longrightarrow & \mathcal{C}^S_{\mathcal{F}_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^1 \times \mathcal{C}_0^{S\setminus T} & \longrightarrow & \mathcal{C}^S_{\mathcal{F}} \end{array}$$

其中， E_T 和左箭头如推论 *3.6* 所示，右箭头是显然的映射，而水平箭头则由推论 *3.6* 中的水平箭头、例 *3.4* 中的函子$\partial\Delta^1 \to \mathcal{C}_0$ 和 $\Delta^1 \to \mathcal{C}$，以及 $\mathcal{C}^S_{\mathcal{F}}$的定义给出。

证明。 设 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(T)$ 和 $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(T) \setminus \{T\}$。那么 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{P}$和 $\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{P} = \mathcal{P}_0$，引理 3.1 适用，因此 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \sqcup_{\mathcal{P}_0} \mathcal{P}$作为 ∞-范畴成立，从而 $\mathcal{C}^S_{\mathcal{F}} = \mathcal{C}^S_{\mathcal{F}_0} \sqcup_{\mathcal{C}^S_{\mathcal{P}_0}} \mathcal{C}^S_{\mathcal{P}}$。因此，要证明该命题，只需考虑 $\mathcal{F} = \mathcal{P}$ 且 $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}_0$的情形。消去$\mathcal{C}_0^{S\setminus T}$，并将 T 替换 S应用推论 3.6 后，我们只需证明下图是一个推出方块。

$$\begin{array}{ccc} \partial(\Delta^1)^T & \longrightarrow & \mathcal{C}^T_{\mathcal{P}_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Delta^1)^T & \longrightarrow & \mathcal{C}^T_{\mathcal{P}} \end{array}$$

展开 $\partial(\Delta^1)^T$ 和 $\mathcal{C}^T_{\mathcal{P}_0}$ 的定义后，我们只需证明图表 $\mathcal{P}(T) \times \Delta^1 \to$ Cat 是一个

$$(U, 0) \mapsto (\Delta^1)^U \times (\partial\Delta^1)^{T\setminus U},\ (U, 1) \mapsto \mathcal{C}^U \times \mathcal{C}_0^{T\setminus U}$$

is 余极限图；这正是引理 3.3，只不过其中所有推出方块如下 .

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^1 & \longrightarrow & \mathcal{C}_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^1 & \longrightarrow & \mathcal{C} \end{array}$$

□

构造 3.9。 我们只会将命题 3.8 用于例 3.4 中的例子，因此这里详细说明命题 3.8 在这些情形下的含义：

(1) 对任意 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，给出一个函子 $X\colon (\Delta^1)^S \to \mathcal{C}$，等价于给出 $2^{|S|}$ 个对象 $X_\bullet\colon \{0,1\}^S \to \mathcal{C}$，再对非空的 $T \subseteq S$ 进行归纳，沿着 $S^{|T|-2} \to *$ 延拓由先前归纳步骤给出的映射 $S^{|T|-2} \to$Hom($X_{0^T,i}, X_{1^T,i}$)；其中 i 遍历 $\{0,1\}^{S\setminus T}$ 中的元素，使得 $(0^T, i)$ 和 $(1^T, i)$ 都是 $\{0,1\}^S$ 的元素。

(2) 对于任意 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，给出函子 $X\colon \mathrm{B}_\bullet\mathbb{N}^S \to \mathcal{C}$ 就等同于给出一个对象$X \in \mathcal{C}$，并且对非空的 $T \subseteq S$ 归纳地沿着 $S^{|T|-2} \to *$ 扩张由先前归纳步骤给出的映射 $S^{|T|-2} \to$Hom(X, X)。

记作 $d=|T|$。当 $\mathcal{C}$ 稳定时， $d=1$ 的扩张等同于选择一个态射$X\to Y$。对于 $d\geq 2$，选择一个基点便给出分裂 $S^{d-2}\otimes X\simeq X\oplus\Sigma^{d-2}X$，因此该扩张等同于选择分量 $\Sigma^{d-2}X\to Y$ 的一个零伦。

定理 *2.5* 的证明。由构造 3.9(1) 和 [Ye26，构造 7.6 和 7.7], 中，初始顶点为 ϵ 、终止顶点为 ϵ' 的子立方体上的扩张数据由 $D_{\epsilon,\ \epsilon'}$表示，并满足边界关系 (2.2)。这就得到了第一个断言。对于第二个断言，在立方体的函子范畴中应用构造 3.9(2)。$\mathrm{B}_\bullet\mathbb{N}^r$ 在此类立方体上的作用，恰好等价于为其选取一组 r 同伦相干交换算子。□

3.2. **周期复形**。周期复形是同调代数中研究颇多的对象，但以往的研究只关注其导出三角范畴或 dg-范畴。在本小节中，除定义 2.4 外，我们还给出周期复形的导出∞-范畴的若干等价定义。其中一些等价性源自 [Lur17, §1.3], ，另一些则是 Saito [Sai23]结果的 ∞-范畴版本。注 3.15 中将其描述为模范畴，揭示了周期与非周期情形之间的联系，并有助于构造特征分解。非周期导出 ∞-范畴的优点在于它具有自然的 t-结构。

我们首先回顾非周期链复形的同伦 ∞-范畴和导出 ∞-范畴。

定义 3.10 ([Lur17, 定义 1.3.2.1])。设 $\mathcal{A}$ 为一个加性范畴。 $\mathcal{A}$同伦∞-范畴 $\mathcal{A}$-复形记为 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$，它是 dg-范畴 $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ 的 dg-神经 $\mathrm{N}^{\mathrm{dg}}_\bullet$([Lur17, 构造 1.3.1.6])；而 $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ 是由 $\mathcal{A}$复形构成的 dg-范畴，其定义如下：

- 对象 $X\in\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ 具有形式 $(X_i,d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，其中 $X_i\in\mathcal{A}$, $d_i\colon X_i\to X_{i-1}$，且对所有 $i\in\mathbb{Z}$ 都有 $d_{i-1}\circ d_i=0$。
- 对于 $X,Y\in\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$，链复形 $\mathsf{Hom}(X,Y)_\bullet$ 定义为

$$\mathrm{Hom}(X,Y)_p=\prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_i,Y_{i+p});\ (df)(x)=d(f(x))-(-1)^p f(dx).$$

根据 [Lur17，命题 1.3.2.10]，我们知道 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 是一个稳定 ∞-范畴。

若 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴，则可以考虑由无环复形（即同调平凡的复形）构成的全子-∞-范畴 $\mathsf{Ac}(\mathcal{A})\subset\mathsf{K}(\mathcal{A})$。 $\mathcal{A}$的导出 ∞-范畴 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$定义为商 $\mathsf{K}(\mathcal{A})/\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$，也就是说，它是在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$之下、将 $\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$映射为零的初始稳定 ∞-范畴。

现在我们将上述定义推广到周期复形。

定义 3.11。设 m 是一个正整数， $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴。 m-周期 $\mathcal{A}$-复形的同伦∞-范畴 m-周期 $\mathcal{A}$-复形记为 $\mathsf{K}_m(\mathcal{A})$，它是 dg-范畴 $\mathsf{Ch}_m(\mathcal{A})$的 dg-神经；该 dg-范畴由 m-周期 $\mathcal{A}$-复形构成，定义如下：

- 对象 $X\in\mathsf{Ch}_m(\mathcal{A})$具有如下形式：$(X_i,d_i)^{i\in\mathbb{Z}/m}$，其中 $X_i\in\mathcal{A}$, $d_i\colon X_i\to X_{i-1}$，使得对所有 $i\in\mathbb{Z}/m$， $d_{i-1}\circ d_i=0$。
- 对于 $X,Y\in\mathsf{Ch}_m(\mathcal{A})$，链复形 $\mathsf{Hom}(X,Y)_\bullet$ 定义为

$$\mathrm{Hom}(X,Y)_p=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/m}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_i,Y_{i+p});\ (df)(x)=d(f(x))-(-1)^p f(dx).$$

注意， p 不是 $\mathbb{Z}/m$的元素，而是一个整数，因此 $(-1)^p$ 是有意义的。

容易看出， [Lur17，命题 1.3.2.10] 的证明可以推广，并表明 $\mathrm{K}_m(\mathcal{A})$ 是一个稳定 ∞-范畴。

若 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴，同样可以考虑由无环复形（即同调平凡的复形）构成的全子 ∞-范畴 $\mathrm{Ac}_m(\mathcal{A}) \subset \mathrm{K}_m(\mathcal{A})$。于是， m-周期导出∞-范畴 $\mathrm{D}_m(\mathcal{A})$ 定义为商 $\mathrm{K}_m(\mathcal{A})/\mathrm{Ac}_m(\mathcal{A})$，即 $\mathrm{K}_m(\mathcal{A})$下的初始稳定$\infty$-范畴，其中 $\mathrm{Ac}_m(\mathcal{A})$ 被映射为零。

注 3.12. 在定义 3.10 和 3.11 中，按无环复形取商等同于将拟同构求逆，因为拟同构恰好是余纤维无环的态射；而在稳定 ∞-范畴中，一个态射是同构，当且仅当其余纤维为零。因此，这些定义分别等价于 [Lur17，定义 1.3.4.1], 中的局部化 $\mathrm{K}(\mathcal{A})[W^{-1}]$ 和 $\mathrm{K}_m(\mathcal{A})[W_m^{-1}]$，其中 W和W_m 是拟同构的集合。

注记 3.13. 沿用定义 3.10 和定义 3.11 的记号。根据微分分次神经的定义，映射 $f\colon X \to Y$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$（分别为 $\mathrm{K}_m(\mathcal{A})$）由链复形 $\mathrm{Hom}(X,Y)_\bullet$的一个 0-循环表示，即 $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)_0$ with $df = 0$。容易验证，这对应于链映射 $f\colon X \to Y$ in $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$（分别为 $\mathrm{Ch}_m(\mathcal{A})$）。同样容易看出，由链映射 $f, g\colon X \to Y$表示的 $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ 中两个映射之间的等式，由 f and g 之间的链同伦表示；等式之间的等式由同伦之间的同伦表示，依此类推（参见 [Lur17, 示例 1.3.1.8，注记 1.3.2.2]）。

定义 3.11 相较于定义 2.4 的优点在于，前者更好地契合高阶代数的框架：

记号 3.14。 给定带单位元的交换环 $\mathbb{K}$，我们用 $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$ 表示（可能是无限呈的） $\mathbb{K}$-模所成的阿贝尔范畴，并将 $\mathrm{D}(\mathbb{K})$ =$\mathrm{D}(\mathrm{Mod}(\mathbb{K}))$。同样的缩写也适用于 $\mathrm{D}_m(\mathbb{K})$，而 a $\mathbb{K}$-复形 表示一个 $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$-复形。

注 3.15 （作为微分分次模的周期复形）。 令 $\mathbb{K}$ 为带单位元的交换环， m 为正整数。考虑分次劳朗代数 $\mathbb{K}[\beta^{\pm}]$，其中 β 位于次数 m，并将其视为微分为零的微分分次代数。那么显然， m-周期复形与该微分分次代数 $\mathbb{K}[\beta^{\pm}]$的右 dg-模相同，即

$$\mathsf{Ch}_m(\mathbb{K}) = \mathsf{RMod}_{\mathbb{K}[\beta^{\pm}]}(\mathsf{Ch}(\mathbb{K})).$$

应用 [Lur17，定理 4.3.3。17] ，取 $\mathbf{A}$ =$\mathrm{Ch}(\mathbb{K})$、 $A = \mathbb{K}$ 和 $B = \mathbb{K}[\beta^{\pm}]$，我们得到

$$\mathsf{D}_m(\mathbb{K}) = \mathsf{RMod}_{\mathbb{K}[\beta^{\pm}]}(\mathsf{D}(\mathbb{K})),$$

也就是说，$\mathrm{D}_m(\mathbb{K})$ 等价于 ∞-范畴 $\mathrm{D}(\mathbb{K})$ 中右 $\mathbb{K}[\beta^{\pm}]$-模所成的 ∞-范畴。

当 m 为偶数或 $2 = 0$ 属于 $\mathbb{K}$时， $\mathbb{K}[\beta^{\pm}]$ 是一个交换 dg-代数。在这种情况下，左 dg-模和右 dg-模没有区别；此外，根据 [Lur17, 定理 4.5.2.1], , $\mathrm{D}_m(\mathbb{K})$ =$\mathrm{Mod}^{\mathbb{K}[\beta^{\pm}]}(\mathrm{D}(\mathbb{K}))$ 是一个对称幺半 ∞- 范畴，其使用了 [Lur17, 注 7.1.2.12] 中 $\mathrm{D}(\mathbb{K})$ 上的导出张量积。

在本小节余下部分中，我们证明，在记号 3.23 的假设下，定义 2.4 和 3.11 中的导出 ∞-范畴等价（定理 3.26）。此外，这一结果还表明，注 3.15 中定义的对称幺半结构与 [Ye26] 中的对称幺半结构等价。

定义 3.16（参见 [Sta24, 070H] 的对偶）。设 m 为正整数，$\mathcal{A}$ 为阿贝尔范畴。若对象 P 属于 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$（分别属于 $\mathsf{K}_m(\mathcal{A})$），且对所有 X 属于 $\mathsf{Ac}(\mathcal{A})$（分别属于 $\mathsf{Ac}_m(\mathcal{A})$），均有 $\mathrm{Hom}^{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(P,X)=0$（分别有 $\mathrm{Hom}^{\mathsf{K}_m(\mathcal{A})}(P,X)=0$），则称其为投射。注意，投射对象构成 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$（分别为 $\mathsf{K}_m(\mathcal{A})$）的一个稳定子-$\infty$-范畴，并且对余极限封闭。

命题 3.17. 沿用定义 *3.16* 的记号，因此 P 是一个投射（m-周期）复形。于是对所有 Y 属于 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$（分别地，属于 $\mathsf{K}_m(\mathcal{A})$），我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(P,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(P,Y)\ (resp.\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}_m(\mathcal{A})}(P,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}_m(\mathcal{A})}(P,Y)).$$

证明. 这是一个一般事实：对于稳定的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 及其稳定全子-∞-范畴 $\mathcal{D}$，若 $P\in\mathcal{C}$ 对所有 $X\in\mathcal{D}$都满足 $\mathrm{Hom}(P,X)=0$，则对所有 $Y\in\mathcal{C}$，我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,Y)=\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}/\mathcal{D}}(P,Y)$。□

推论 3.18. 沿用定义 *3.16* 的记号，并设 $f\colon P\to Q$ 是$\mathsf{K}(\mathcal{A})$（分别地，$\mathsf{K}_m(\mathcal{A})$）中的一个映射，其中 P 和 Q 都是投射的。若 f 是$\mathsf{D}(\mathcal{A})$（分别地，$\mathsf{D}_m(\mathcal{A})$）中的一个同构，则它也是$\mathsf{K}(\mathcal{A})$（分别地，$\mathsf{K}_m(\mathcal{A})$）中的同构，即一个链同伦等价。

回忆一下，阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象 P 若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-)$ 是正合函子，则称其为投射。

命题 3.19。设 $\mathcal{A}$ 为阿贝尔范畴。若一个 $\mathcal{A}$-复形 P 的所有项都是投射的，且右有界（即 $P_i=0$ 对于 $i\ll 0$），那么 P 在$\mathsf{K}(\mathcal{A})$中是投射的。

证明。设 X 为一个无环 $\mathcal{A}$-复形。我们需要证明 $\mathrm{Hom}^{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(P,X)=0$，也就是说，每个链映射 $P\to X$ 都是零伦的。设 $f=(f_i\colon P_i\to X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 为一个链映射。我们按归纳方式如下构造 f 的零伦 h：

- 对于 $i\ll 0$，由于 $P_i=0$，我们别无选择，只能令 $h_i=0$。
- 假设我们已经构造了满足 $d_{j+1}h_j+h_{j-1}d_j=f_j$（对于 $j<i$）的 h_j。我们希望对 i做同样的事情。也就是说，我们希望找到 $h_i\colon P_i\to X_{i+1}$，使得 $d_{i+1}h_i=f_i-h_{i-1}d_i$。由于 P_i 是投射的，只需证明 $f_i-h_{i-1}d_i$ 的像包含于 d_{i+1}的像中；由于 X 是无环的，这等价于说明 $d_i(f_i-h_{i-1}d_i)=0$，而这可由归纳假设很容易看出。□

命题 3.20。设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴。设

$$P(0)\to P(1)\to\cdots$$

是一个 $\mathbb{N}$-图表，其对象为 $\mathcal{A}$-复形，即从偏序集 $(\mathbb{N},\leq)$ 到范畴 $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$的函子。假设对于每个 $i\in\mathbb{Z}$，第 i 项上的图表

$$P(0)_i\to P(1)_i\to\cdots$$

最终为常值，即存在一个 N（取决于 i），使得

$$P(N)_i\xrightarrow{\sim}P(N+1)_i\xrightarrow{\sim}\cdots.$$

将这个 $P(N)_i$记作 P_i，并将显然的链复形 $(P_i)_{i\in\mathbb{Z}}$记作 P。那么，$P=\mathrm{colim}_{n\to\infty}P(n)$ 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$中的余极限，也就是说，$P(n)$ 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的余极限，可以逐项计算。

证明。 根据余极限的定义，我们需要证明对所有 $Y \in \mathsf{K}(\mathcal{A})$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(P, Y) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(P(n), Y),$$

作为 anima 的极限。根据微分分次神经的定义，$\mathrm{Hom}^{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X,\ Y)$ 可以计算为复形 $\mathrm{Hom}(X,\ Y)_\bullet \in \mathsf{D}(\mathbb{Z})$ 的 Ω^∞，且由于 Ω^∞ 保持极限，只需在 $\mathsf{D}(\mathbb{Z})$ 中证明上述等式。现在命题由引理 3.21 得出，因为最终恒定图表的 $\lim^1$ 为零。□

引理 3.21. 设

$$A(0) \leftarrow A(1) \leftarrow \cdots$$

be a n 个 $\mathbb{N}^{\mathrm{opp}}$-阿贝尔群链复形图表。假设对所有 $i \in \mathbb{Z}$ ，

$$\lim_{n\to\infty}{}^1 A(n)_i = 0.$$

那么，$\lim_{n\to\infty} A(n)$ 在 $\mathsf{D}(\mathbb{Z})$ 中的极限可以按项计算。

证明。 这里 $\lim^1$ 表示 R^1Sta24, 091D] 中的 lim。引理由 [Sta24, 07KC, 091D, 0CQD] 立即得出。□

定义 3.22. 阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 具有足够多的投射对象，若其中每个对象 $\mathcal{A}$ 都存在一个来自某个投射对象的满态射。其全局维数为

$$\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A} = \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}^i(X, Y) \neq 0 \text{ for some } X, Y \in \mathcal{A}\}.$$

若 $\mathcal{A}$ 具有足够多的投射对象，则 $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A} \leq d$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 中的每个对象都存在长度至多为 d的射影分解。对于交换环 $\mathbb{K}$，记 $\mathrm{gl.dim}\,\mathbb{K} = \mathrm{gl.dim}\ \mathrm{Mod}(\mathbb{K})$.

记号 3.23. 在本小节结束之前，设 $\mathcal{A}$ 是一个具有足够多投射对象且全局维数有限的阿贝尔范畴，记 $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{A} = d \in \mathbb{N}$。令 $\mathcal{P}$表示其投射对象构成的全子范畴。

引理 3.24. 对于任意 $\mathcal{A}$-复形 X，存在一个 $\mathcal{A}$-复形 P和一个拟同构$P \to X$，使得 P 在$\mathsf{K}(\mathcal{A})$中是投射对象，且 P 的所有项都是投射对象。特别地，自然函子 $\mathsf{K}(\mathcal{P}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ 是本质满的。

证明。 考虑 X的自然截断序列

$$\cdots \to \tau_{\geq 1}X \to \tau_{\geq 0}X \to \tau_{\geq -1}X \to \cdots$$

其中 $\tau_{\geq n}X$ 定义为复形

$$\cdots \to X_{n+2} \to X_{n+1} \to Z_n(X) \to 0 \to 0 \to \cdots$$

其次数为 $\geq n$ 的同调与 X 的同调相同，其他同调均为零。现在只需构造一个复形序列 $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$，其中的 $\mathcal{A}$-复形在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中是投射的，具有投射项，并且构成如下复形图表

$$\begin{array}{ccccc} P(0) & \longrightarrow & P(1) & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \tau_{\geq 0}X & \longrightarrow & \tau_{\geq -1}X & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中交换，其上方一行满足命题 3.20 的假设，且其垂直映射均为拟同构，因为此时复形的逐项余极限

$P = \mathrm{colim}_{n\to\infty} P(n)$ 计算出 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的余极限，从而给出一个满足我们所有要求的映射 $P \to X$。

我们按如下方式进行归纳构造：

基例： 这是右有界复形的著名投射分解。参见例如 [Sta24, 0646]。

归纳法： 假设我们已构造出所需的 $P(n) \to \tau_{\geq -n}X$。注意，由同调长正合列可知，在 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 中有 $\mathrm{fib}(\tau_{\geq -n}X \to \tau_{\geq -n-1}X) = H_{-n-1}(X)[-n-2]$。根据假设，$\mathcal{A}$ 的全局维数为 d，因此我们可以找到一个拟同构 $Q \to H_{-n-1}(X)[-n-2]$，使得 Q 的各项均为投射对象，且仅在范围 $[-n-2, d-n-2]$ 内非零。由于 $Q \cong H_{-n-1}(X)[-n-2]$且 $P(n) \cong \tau_{\geq -n}X$ 在 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 中，自然映射 $H_{-n-1}(X)[-n-2] \to \tau_{\geq -n}X$ 可视为 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 中的映射 $Q \to P(n)$。根据命题 3.17 和 3.19，它也是 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的映射 $Q \to P(n)$，因此可由复形之间的链映射表示。现在令 $P(n+1)$ 为该映射的映射锥。那么，根据构造，链映射$P(n) \to P(n+1)$ 在次数 $> d-n-1$ 上是同构，并且我们有一个图表

$$\begin{array}{ccc} P(n) & \longrightarrow & P(n+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{\geq -n}X & \longrightarrow & \tau_{\geq -n-1}X \end{array}$$

在 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 中交换。再次利用命题 3.17 和 3.19，$P(n+1)$ 是 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的投射对象，上方的垂直映射也是 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的映射，并且图表在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中交换，因此我们的归纳构造完成了。□

引理 3.25。 对于每个 m-周期性 $\mathcal{A}$-复形 X，存在一个 m-周期性 $\mathcal{A}$-复形 P以及一个拟同构 $P \to X$，使得 P 在$\mathsf{K}_m(\mathcal{A})$中是投射的，并且 P的所有项都是投射的。特别地，自然函子 $\mathsf{K}_m(\mathcal{P}) \to \mathsf{D}_m(\mathcal{A})$ 是本质满的。

证明。对于 $Q \in \mathcal{A}$，令 $Q[0]$ 表示这样一个复形：Q 位于次数 0，且所有微分均为零。我们首先证明，如果 $Q \in \mathcal{A}$ 是投射的，那么 $Q[0] \in \mathsf{K}_m(\mathcal{A})$ 是投射的。取一个无环的 $X \in \mathsf{K}_m(\mathcal{A})$ 以及一个链映射 $f\colon Q[0] \to X$。我们希望证明 f 是零伦的。注意到，f 本质上是一个映射 $f_0\colon Q \to X_0$，且满足 $d_0 f_0 = 0$。由 X 的无环性以及 Q的投射性可知，这意味着 f_0 经由 $d_1\colon X_1 \to X_0$分解，从而得到所需的零伦。

无环情形是直接的。我们对包含 X 的非零同调次数的区间长度进行归纳法。

基例： 假设 X 只有一个非零同调。在这种情况下，我们对该同调的投射维数进行归纳法。不妨设$A = H_0(X) \neq 0$。如果 A 的投射维数为 0，即 A 是投射的，那么商映射 $Z_0(X) \to Z_0(X)/B_0(X) = H_0(X)$ 存在一个截面 $A \to Z_0(X)$，从而得到一个拟同构 $A[0] \to X$。如果 A 具有正的投射维数，那么取一个投射的 Q 和一个满射 $Q \twoheadrightarrow A$。类似地，存在一个映射$Q \to Z_0(X)$，提升 $Q \twoheadrightarrow A = Z_0(X)/B_0(X)$，从而得到一个链映射 $Q[0] \to X$。容易看出，$\mathrm{fib}(Q[0] \to X)$ 仍然只有一个非零同调，其投射维数小于 A 的投射维数，因此根据归纳假设，存在一个投射复形 P，其所有项都是投射的，以及一个拟同构$P \to \mathrm{fib}(Q[0] \to X)$。这给出一个拟同构 $\mathrm{cofib}(P \to Q[0]) \to X$。由于

cofib($P \to Q[0]$) 可以由映射锥表示，该映射锥的所有项都是投射的；并且由于投射对象构成一个稳定的子-∞-范畴，它也是投射的，证毕。

归纳法： 假设 X 在多个次数上有非零同调。不失一般性，设 $A = H_0(X) \neq 0$。取正整数 $n < m$，使得 X的非零同调集中在 0、1、.....、 n，并对 n作归纳。取一个投射 Q 和一个满射 $Q \twoheadrightarrow A$。由投射性，存在映射$Q \to Z_0(X)$，将 $Q \twoheadrightarrow A = Z_0(X)/B_0(X)$提升，从而得到一个链映射 $Q[0] \to X$。由同调长正合列，容易看出 fib($Q[0] \to X$)的非零同调集中在 0、1、.....、 $n-1$。现在利用归纳假设，基例中的同样推理仍然适用，结论得证。□

定理 3.26. 设 m 为正整数。设 P 为一个 (m-周期) $\mathcal{A}$-复形，且其所有项均为投射的。则 P 在K($\mathcal{A}$)（分别地，K$_m(\mathcal{A})$）中是投射的。自然函子K($\mathcal{P}$) →D($\mathcal{A}$)（分别地，K$_m(\mathcal{P})$ →D$_m(\mathcal{A})$）是一个等价。

证明. 我们先处理非周期情形。由引理 3.24，存在一个 $\mathcal{A}$-复形P'，它在 K($\mathcal{A}$) 中是投射的，且所有项均为投射的，并存在一个拟同构$P' \to P$。因此， P的投射性等价于 $P' \to P$的映射锥的投射性，而该映射锥是一个所有项均为投射的无环复形。因此，不失一般性，我们可以假设 P 是无环的。在这种情况下，我们断言 $P = 0$ 属于 K($\mathcal{A}$)，即 P 与零复形同伦等价。为此，只需证明短正合列

$$0 \to Z_i(P) \to P_i \to B_{i-1}(P) = Z_{i-1}(P) \to 0$$

对每个 i 都分裂，因为此时 P 将是二项复形$0 \to Z_i(P) \xrightarrow{\mathrm{id}} Z_i(P) \to 0$ 的移位的直和，而这些复形显然都是零伦的。为此，考虑当 $n > 0$ 时的函子 Ext$^n(Z_i(P)\ -)$。由上述短正合列所关联的 Ext 长正合列可知，

$$\mathrm{Ext}^n(Z_i(P), -) = \mathrm{Ext}^{n+1}(Z_{i-1}(P), -) = \mathrm{Ext}^{n+2}(Z_{i-2}(P), -) = \cdots$$

由于 $\mathcal{A}$ 的全局维数有限，且这些等式无限延续，因此上面的 Ext 都必须为零。这意味着对于每个 i， $Z_i(P)$ 都是投射对象，故上述短正合列分裂。现在，由命题 3.17，K($\mathcal{P}$) → D($\mathcal{A}$) 是全忠实的；由引理 3.24，它是本质满的，因此是一个等价。

周期情形的证明相同，只需用引理 3.25 替代引理 3.24。 □

推论 3.27. 设 m 是一个正整数。设 $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ 是一个满阿贝尔子范畴，其中 $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P} \cap \mathcal{A}_0$ 是 $\mathcal{A}_0$ 中的一个充足投射对象族，即对于所有 $A \in \mathcal{A}_0$，都存在 $Q \in \mathcal{P}_0$ 及一个满射 $Q \twoheadrightarrow A$。那么自然函子 D($\mathcal{A}_0$) → D($\mathcal{A}$) (相应地，D$_m(\mathcal{A}_0)$ → D$_m(\mathcal{A})$) 是全忠实的。

证明。 根据定理 3.26，这归结为证明 K($\mathcal{P}_0$) →K($\mathcal{P}$)（分别地，K$_m(\mathcal{P}_0)$ →K$_m(\mathcal{P})$）具有全忠实性，而这由微分分次神经的定义显然成立。□

例 3.28。 在推论 3.27 中， $\mathcal{A}$ 可以是交换诺特环 $\mathbb{K}$ 上的普通模范畴 Mod($\mathbb{K}$)，其中 $\mathbb{K}$ 具有有限全局维数。紧对象构成的全子范畴 $\mathcal{A}_0$ =Mod($\mathbb{K}$)^c 是一个阿贝尔子范畴。于是 D$_m(\mathcal{A})$ 是紧生成的，并且自然函子 D$_m(\mathcal{A}_0)$ → D$_m(\mathcal{A})$ 是全忠实的，其本质像恰好是 D$_m(\mathcal{A})$ 的紧对象。注意，我们不能替换周期性假设，因为

D($\mathcal{A}$) 中的紧对象应当是有界的，而 D($\mathcal{A}_0$) 的本质像包含无界复形。

注 3.29。 假设 $\mathbb{K}$ 具有有限全局维数，且 m 为偶数或 $2=0$ 属于 $\mathbb{K}$。对于$\mathcal{A}$ =Mod($\mathbb{K}$)，定理 3.26 中的等价将 [Ye26, Construction 3.54]中的对称幺半结构与注 3.15 中的结构对应起来。事实上，二者都是对度逐项投射的 m-周期复形的普通范畴在拟同构处进行的对称幺半局部化；该范畴配备 Koszul 张量积，而它计算了在 $\mathbb{K}[\beta^{\pm}]$ [Lur17, Proposition 4.1.7.4 和 Remark 4.1.7.5] 中所述的导出张量积。

3.3. **特征分解**。 设 $\mathbb{K}$ 为代数闭域。实际中，我们的周期复形将受到 r 同伦相干交换算子的作用，也就是说，它们将如定义 2.4 中那样是 $A_r=\mathbb{K}[T_1,\dots,T_r]$ 上的线性对象；我们希望相对于这些算子进行特征分解。换言之，从几何而非代数的角度来看，我们的复形是 $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}^r$ =Spec(A_r)上的拟凝聚复形，其中 r表示加法群的重积，并带有注 3.15 中的周期性作用。根据 [Lur17, Theorem 7.1.2.13]和 [Lur18, Proposition 2.2.3.3] ，有范畴等价 D(A_r) $\simeq$ QCoh($\mathbf{G}_{\mathrm{a}}^r$)。本小节将按照支撑给出某些拟凝聚复形的分解，并且相对于卷积积而言，这些分解是对称幺半的。这些结果在专家中或许早已广为人知，但我们未能找到相关参考文献。

定理 2.7 中特征分解的存在性由有限支撑和[Sta24, 0AEF], 推出，具体解释如下。我们的主要任务是证明它与对称幺半结构相容，包括周期情形。

在本小节中，我们将在更一般的设定下发展此类分解理论，即将$\mathbf{G}_{\mathrm{a}}^r$ 替换为 G 上的一般交换代数群 G ，并在本小节余下部分固定该群。

注 3.30. 根据 [Lur18, 命题 9.6.1.1], ，对于一般的 qcqs（即准紧且准分离）概形 X，拟凝聚 $\mathcal{O}_X$复形的 ∞-范畴 QCoh(X)是紧生成的。对于此类概形之间的态射 $f\colon X\to Y$，存在一个伴随

$$f^*\colon \mathsf{QCoh}(Y)\rightleftarrows \mathsf{QCoh}(X)\colon f_*$$

因此 f^* 保余极限，而 f_* 保极限。当 f 是 qcqs 态射时，根据 [Lur18, 推论 3.4.2.2]， f_* 也保余极限。请注意，我们的（f^*， f_*）表示导出拉回和推前；未导出函子一般不保拟同构。

在本小节中，我们主要使用拟凝聚层的推前函子性，即将拟凝聚层视为从拟紧拟分离概形到由紧对象生成的 ∞范畴的协变函子。

构造 3.31 （拟凝聚层(G)上的卷积）。 设 $a\colon G\times G\to G$ 为加法，且 $0:\mathrm{Spec}(\mathbb{K})\to G$ 为单位元。卷积积为 $A\otimes B=a_*(A\boxtimes B)$，其中 $\boxtimes$ 为导出外张量积。由群律及 [Lur18, 推论 9.4.2.3],，这赋予拟凝聚层(G)对称幺半结构，其单位元为 $0_*\mathbb{K}$。

在这一一般性情形下，“分解为广义特征空间的复形”是具有零维支撑的拟凝聚复形。在研究它们之前，我们先回顾一些关于余幂等元的事实，例如见 [Aok26，§2]:

注 3.32. 设 $(\mathcal{C},\otimes,\mathbf{1})$ 是一个对称幺半 ∞-范畴。以下概念等价：

余幂等元： 余范畴 $\mathcal{C}_{/\mathbf{1}}$ 中的一个对象 $c\colon C \to \mathbf{1}$，使得 $C \otimes c\colon C \otimes C \to C \otimes \mathbf{1} = C$ 是一个同构。

余幂等余代数： 余交换余代数 C，位于 $\mathcal{C}$ 中，其余乘法$C \to C \otimes C$是一个同构。

粉碎余局部化： 一个满子-∞-范畴 $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$，在与 $\mathcal{C}$ 中的对象张量后仍封闭，且其包含函子具有右伴随 $R\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$，使得自然变换 $R(\mathbf{1}) \otimes - \to R(-)$ 是一个同构。

这种等价关系如下：余幂等元 $c\colon C \to \mathbf{1}$ 对应于由满足 $X \otimes c\colon X \otimes C \to X$ 是同构的对象 $X \in \mathcal{C}$ 构成的满子-∞-范畴，其包含函子具有右伴随 $- \otimes C$；反过来，具有右伴随 R 的粉碎余局部化 $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ 对应于余幂等元 $R(\mathbf{1})$。

例3.33。 回顾 [Lur18, 定义 7.1.5.1] 对于闭子集 $Z \subseteq G$，全子范畴 $\mathsf{QCoh}_Z(G) \subseteq \mathsf{QCoh}(G)$；并由 [Lur18, 命题 7.2.3.1] 可知，该包含映射有一个右伴随 $\mathrm{R}\Gamma_Z$，称为局部上同调（参见 [Sta24, 0952]）。对于 $\mathcal{O}_G$ 上通常的导出张量积，它是一个粉碎余局部化，对应于余幂等元 $\mathrm{R}\Gamma_Z(\mathcal{O}_G) \in \mathsf{QCoh}_Z(G) \subseteq \mathsf{QCoh}(G)$。

对于互不相交的闭子集 $Z,\ Z' \subseteq G$，$\mathrm{R}\Gamma_Z(\mathcal{O}_G) \otimes \mathrm{R}\Gamma_{Z'}(\mathcal{O}_G) = 0$。因此，对于 G 的一族 $(Z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 互不相交的闭子集，直和 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{R}\Gamma_{Z_\lambda}(\mathcal{O}_G) \in \mathsf{QCoh}(G)$ 也是一个余幂等元，并对应于一个粉碎余局部化，我们将其记为 $\mathrm{R}^{\Gamma}{}_{(Z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}}$，其像记为 $\mathsf{QCoh}_{(Z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}}(G)$。

定义3.34 （零维支撑复形）。 在上述例3.33中，令$(Z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为代数群 G的所有闭点，这些点也正是G 的所有 $\mathbb{K}$-点，因为 $\mathbb{K}$ 是代数闭的。我们将所得的粉碎余局部化记为$\mathrm{R}\Gamma_{0\mathrm{d}}$，并将其像记为拟凝聚层$_{0\mathrm{d}}(G)$。根据定义，对于所有 $A \in$ 拟凝聚层$_{0\mathrm{d}}(G)$，有$A = \bigoplus_{\lambda\in G(\mathbb{K})} \mathrm{R}\Gamma_\lambda(A)$，其中$\mathrm{R}\Gamma_\lambda(A)$支撑在闭点 λ上。因此，拟凝聚层$_{0\mathrm{d}}(G) = \prod_{\lambda\in G(\mathbb{K})}$ 拟凝聚层$_\lambda(G)$。

命题 3.35 （分解的对称幺半性）。 拟凝聚层$_{0\mathrm{d}}$（G） $\subseteq$ 拟凝聚层（G）从卷积继承一个对称幺半结构。此外，若利用沿 λ的平移将拟凝聚层$_\lambda$（G） 与拟凝聚层$_0$（G） 相识别，则在该识别下

$$\mathsf{QCoh}_{0\mathrm{d}}(G) = \prod_{\lambda\in G(\mathbb{K})} \mathsf{QCoh}_\lambda(G) = \mathsf{Fun}(G(\mathbb{K}), \mathsf{QCoh}_0(G)),$$

右侧的对称幺半结构对应于 *Day* 卷积，即$(A \otimes B)_\lambda = \bigoplus_{\mu+\nu=\lambda} A_\mu \otimes B_\nu$，对于 $A = (A_\lambda)$ $B = (B_\lambda) \in$ 拟凝聚层$_0(G)^{G(\mathbb{K})}$。

证明。 令 $a\colon G \times G \to G$ 为加法映射，并令 t_λ 表示沿 λ 的平移。回顾一下，卷积积为 $A \otimes B = a_*(A \boxtimes B)$。若 A 支撑在 μ 上，而 B 支撑在 ν 上，则 $A \boxtimes B$ 支撑在 (μ, ν) 上。它在 $a^{-1}(G \setminus \{\mu + \nu\})$ 上的限制为零，因此 $A \otimes B$ 支撑在 $\mu + \nu$ 上。由于单位元支撑在 0 上，且卷积对每个变量都保持直和，$\mathsf{QCoh}_{0\mathrm{d}}(G)$ 继承了卷积积。

对于 $A_\mu, B_\nu \in \mathsf{QCoh}_0(G)$，恒等式 $a \circ (t_\mu \times t_\nu) = t_{\mu+\nu} \circ a$ 给出

$$(t_\mu)_* A_\mu \otimes (t_\nu)_* B_\nu = (t_{\mu+\nu})_*(A_\mu \otimes B_\nu).$$

对 $\mu + \nu = \lambda$ 取直和并平移回 0，即得到 $(A \otimes B)_\lambda$ 的所述公式。对于求和映射 $G^k \to G$，同一恒等式与复合及置换相容，包括 0 处的空和。因此，这些辨识给出了关于 Day 卷积的对称幺半等价。□

上述命题同样适用于周期复形:

注释 3.36。回顾注 3.15 中的代数 $\mathbb{K}[\beta^{\pm}] \in \mathsf{D}(\mathbb{K})$，将其视为沿 0_* 的拟凝聚层范畴 $\mathsf{QCoh}_0(G)$ 中的代数，即沿 G 的单位元推前。根据命题 3.35 中的识别取模范畴，便得到等价

$$\mathsf{Mod}_{\mathbb{K}[\beta^{\pm}]}(\mathsf{QCoh}_{0\mathrm{d}}(G)) = \mathsf{Fun}(G(\mathbb{K}), \mathsf{Mod}_{\mathbb{K}[\beta^{\pm}]}(\mathsf{QCoh}_0(G))),$$

当 $|\beta|$ 为偶数或 $2=0$ 属于 $\mathbb{K}$ 时为对称幺半的，其中右侧使用 Day 卷积。这给出了周期复形对应的命题 3.35 的类比。

注释 3.37（关于 G 的函子性）。对于代数群 $f\colon G \to H$ over $\mathbb{K}$ 的映射，显然 f_* 将 $\mathsf{QCoh}_{0\mathrm{d}}(G)$ 映入 $\mathsf{QCoh}_{0\mathrm{d}}(H)$；特别地，对于 $\lambda \in G(\mathbb{K})$，它将直和项 $\mathsf{QCoh}_\lambda(G)$ 映至 $\mathsf{QCoh}_{f(\lambda)}(H)$。

定理 *2.7* 的证明。取 $G = \mathbf{G}_{\mathrm{a}}^r = \mathrm{Spec}(A_r)$，其中 $A_r = \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_r]$。对于 $\mathscr{X} \in \overline{\mathbf{End}}^r(\mathsf{D})$，在非周期情形下，其底层同调的总维数有限；在周期情形下，每个周期内的维数有限。因此它支撑在有限个闭点上 S。由于 S 是离散的，局部上同调余单位给出 $\bigoplus_{\lambda\in S} \mathrm{R}\Gamma_{\mathfrak{m}_\lambda}(\mathscr{X}) \simeq \mathscr{X}$ by[Sta24, 0AEF]。每个底层直和项都作为一个收缩子属于 D，而 D 对有限直和封闭。因此，命题 3.35 和注 3.36 限制为所述的对称幺半等价。□

4. Sutured instanton homology

本节回顾缝合瞬子同调的构造，并证明主要定理。

4.1. 构造回顾。

本小节回顾缝合瞬子同调的定义 SHI 及其曲面分次。

定义 4.1 ([Juh06，定义 2.2], [Juh08，定义 3.5])。平衡缝合流形$(M,\ \gamma)$由一个可能不连通、定向、紧致且边界非空的三维流形 M 以及其中的一个闭定向一维子流形 γ 组成。设 $A(\gamma) = [-1,1]\times\gamma$ 是 $\gamma \subset \partial M$ 的一个环形邻域，并令 $R(\gamma) = \partial M \backslash \mathrm{int}(A(\gamma))$。我们要求满足以下性质。

(1) M 和 $R(\gamma)$ 均无闭分量。(2) 若 $\partial A(\gamma) = -\partial R(\gamma)$ 的定向与 γ的定向相同，则要求 $\partial R(\gamma)$ 上的这个定向诱导出 $R(\gamma)$ 上的定向，称为典范定向。(3) 设 $R_+(\gamma)$ 是 $R(\gamma)$ 中典范定向与 M在 ∂M 上诱导的定向一致的部分，并令 $R_-(\gamma) = R(\gamma)\backslash R_+(\gamma)$。我们要求$\chi(R_+(\gamma)) = \chi(R_-(\gamma))$，称为平衡条件。

此外，如果对于 ∂M 的每个分量 F，$\chi(R_+(\gamma)\cap F) = \chi(R_-(\gamma)\cap F)$，则称 $(M,\ \gamma)$ 为强平衡。

根据 Kronheimer–Mrowka [KM10b，第 7] 节以及 Baldwin–Sivek [BS15，第 9]，节，我们如下定义缝合瞬子同调。

定义 4.2 ([BS15，定义 9.1 和 9.2])。设 $(M,\ \gamma)$ 是定义 4.1 中的一个平衡缝合流形。令 $\mathscr{D} = (Y,\ R,\ \omega)$ 为 $(M,\ \gamma)$ 的一个标记奇闭包（简称为闭包），其由以下部分组成:

(1) 一个包含 M 作为子流形的闭、定向、连通三维流形 Y；(2) 一个闭、定向、连通的嵌入曲面 R，其亏格为 $g \geq 2$，称为指定曲面；其中 g 也称为该闭包的亏格；(3) $\omega = \alpha \cup \eta$，其中 α 是 Y 中的一条定向、连通嵌入曲线，并与 R 横截地相交一次；此外，η 是 R 中的一条同调本质嵌入曲线，因而也是 Y 中的一条同调本质嵌入曲线；我们将 ω 称为丛集。

为简便起见，这里省略了关于嵌入的一些条件。奇闭包 $\mathscr{D} =(Y, R, \omega = \alpha)$由上述数据构成，但不包括 η。我们也将 α 称为丛集。

定义 4.3. 对于(M, γ)的每个奇闭包或标记奇闭包 $\mathscr{D}$，我们定义

$$SHI(\mathscr{D}) = I(Y, \omega)_{(2,2g(R)-2)}$$

为瞬子 Floer 同调 $I(Y, \omega)$上 μ-算子$(\mu(\text{pt}) \ \mu(R))$的同时广义特征空间，其特征值为$(2, 2g(R) - 2)$（关于 μ-算子的定义，参见 [Ye26, §8] 和 [Don02, DK90]）。

记号 4.4. 依照 [BS15, 定理 1.18 和定义 9.18], ，我们用**SHI**(M, γ)表示与所有标记奇闭包 $\mathscr{D}$相关联的 $\mathbb{Z}/2$-分次 $\mathbb{C}$-模 $SHI(\mathscr{D})$所构成的射影传递系统，这称为缝合瞬子同调的扭曲版本。注意，不存在典范的绝对 $\mathbb{Z}/2$-分次；如 [KM10a, §2.6]所述，只定义了相对 $\mathbb{Z}/2$-分次。

通常，记号 $SHI(M, \gamma)$ 指的是所有奇闭包和标记奇闭包 $\mathscr{D}$ 上的 $\mathbb{Z}/2$ 分次 $\mathbb{C}$-模 $SHI(\mathscr{D})$ 的同构类。尽管相应的丛集可能不同，但对应的模仍然同构。然而，在本文中，每当我们写作 $SHI(M, \gamma)$ 时，都会固定一个标记奇闭包，并在记号中省略它。因此，$SHI(M, \gamma)$ 表示一个固定的 $\mathbb{C}$-模。我们还固定用于定义协边映射的辅助数据，包括与余边界族相关的辅助数据，从而使这些模之间的线性映射定义明确，而非仅在相差 $\mathbb{C}$ 中单位元的倍数意义下定义。此外，$SHI(M, \gamma)$ 带有一个 $\mathbb{Z}/2$ 分次。

最后，存在一个保持相对 $\mathbb{Z}/2$ 分次的同构，

$$\underline{\mathbf{SHI}}(M, \gamma) \cong SHI(M, \gamma).$$

此外，所有涉及 **SHI** 的等式和映射都会诱导出相应的、涉及SHI 的等式和映射；这些等式和映射在相差 $\mathbb{C}$ 中单位元的倍数意义下定义。

接下来我们聚焦于**SHI**(M, γ)上的曲面分次，该分次最初由Kronheimer–Mrowka在 [KM10b, §7] 和 [KM10a, §2.5]中引入。辅助选择的独立性由Li [Li21b] 和Ghosh–Li [GL23]证明。另请参见Wang [Wan22, §4.2.4], 其中给出了其他证明。

定义 4.5 ([GL23, 定义 2.26])。 设(M, γ)是一个平衡缝合流形。若曲面 $S \subset (M, \gamma)$满足以下条件，则称其为（强）可容许：

(1) 它是处于一般位置的适当嵌入定向曲面；(2) 它可以是不连通的，并且可以包含球面以外的闭分支；(3) ∂S 的每个分量都与 γ 非平凡地横截相交。(4) 数目

$$c(S) = \frac{1}{2}|\partial S \cap \gamma| - \chi(S) \tag{4.1}$$

为偶数，其中 $|\partial S \cap \gamma|$ 是几何交数。

如果去掉最后一个条件，我们就称 S 为弱可容许。注意，弱可容许曲面的所有分量也都是弱可容许的。

备注 4.6。我们排除了球面分量，因为 [Wan22, 第 4.2 节4]中的许多结果都要求这一假设。对于弱可容许曲面，我们去掉最后一个条件，因为该条件是缝合瞬子理论中构造分次时的技术性假设。特别地，这是将曲面 S 延拓为 (M,γ) 的闭包所必需的条件。我们还将通过稳定化和重整化为弱可容许曲面构造分次。

回顾记号 4.4，当我们固定闭包时，**SHI** 是一个射影传递系统的 $\mathbb{C}$-模，而 SHI 是一个实际的 $\mathbb{C}$-模。下面我们汇总上述参考文献中的以下性质。为了使分次与 μ-算子的特征值更加直接地联系起来，我们将原分次乘以 2。

命题 4.7 ([LY22，定理 2.21 和 2.27] 以及 [LY23，定理 2.4])。设 (M,γ) 是一个平衡缝合流形，并设 S 是定义 *4.5* 中的弱可容许曲面。那么，在 $\mathbf{SHI}(M,\gamma)$ 上存在一个以 $\lambda\in\mathbb{Z}$ 为指标的分次，称为曲面分次，并满足以下性质。——

(1) 分次支撑在 $c(S)+2\mathbb{Z}$ 中，其中 $c(S)$ 是式 (4.1) 中的量。特别地，与可容许曲面相关联的分次支撑在 $2\mathbb{Z}$ 中。多个弱可容许曲面会诱导一个多重分次。

(2) 负号表示定向反转。那么我们有

$$\underline{\mathbf{SHI}}(M,\gamma,-S,\lambda)=\underline{\mathbf{SHI}}(M,\gamma,S,-\lambda),$$
$$\underline{\mathbf{SHI}}(M,-\gamma,S,\lambda)\cong\underline{\mathbf{SHI}}(M,\gamma,S,-\lambda),$$
$$\underline{\mathbf{SHI}}(-M,\gamma,S,\lambda)\cong\mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{SHI}}(M,\gamma,S,\lambda),\mathbb{C}),$$

其中这些同构是典范的，并且关于相对$\mathbb{Z}/2$-分次是齐次的。

(3) 若 (M,γ) 是强平衡的，且 S' 是另一个弱可容许曲面 *wit* h

$$[S',\partial S']=[S,\partial S]\in H_2(M,\partial M;\mathbb{Z}),$$

那么 S 和 S' 定义相同的相对分次。更准确地说，我们有

$$\underline{\mathbf{SHI}}(M,\gamma,S',\lambda)=\underline{\mathbf{SHI}}(M,\gamma,S,\lambda+r(S',t)-r(S,t)),$$

其中 $r(S,t)$ 是 *[Juh08,* 定义 *3.8],* 中的旋转数，它依赖于由强平衡条件给出的某个平凡化 t 。我们知道差值$r(S',t)-r(S,t)$与 t 的选择无关。对于任意平衡的 (M,γ)，假设 S'由 S 经 p_+ 次正稳定化和 p_- 次负稳定化得到（参见 *[Li21b,* 定义 *3.1]*及图 *4*）。那么 S' 仍然是弱可容许的，并且我们有

$$\underline{\mathbf{SHI}}(M,\gamma,S',\lambda)=\underline{\mathbf{SHI}}(M,\gamma,S,\lambda-p_++p_-).$$

(4) 如果 S 对于 $p\in\mathbb{Z}_+$ 有多个分量 $\underline{\{S_q\}_{q\in p}}$，那么我们有

$$\underline{\mathbf{SHI}}(M,\gamma,S,\lambda)=\bigoplus_{\substack{\vec{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{Z}^p\\ \lambda=\sum_{q=1}^p\lambda_q}}\underline{\mathbf{SHI}}(M,\gamma,\{S_q\}_{q\in\underline{p}},\vec{\lambda}).$$

(5) 若 $|\lambda|>c(S)$，则 $\underline{\mathbf{SHI}}(M,\gamma,S,\lambda)=0$。

(6) 若 S 没有闭分支，且定义了一个缝合流形分解 $(M,\gamma) \overset{S}{\rightsquigarrow}(M',\gamma')$，则

$$\underline{\mathbf{SHI}}(M,\gamma,S,c(S)) \cong \underline{\mathbf{SHI}}(M',\gamma').$$

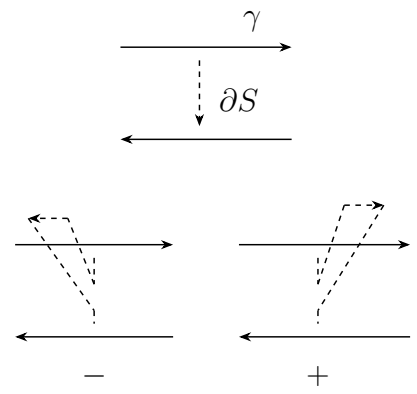


FIGURE 4. 曲面 S靠近虚线边界 ∂S处的正稳定化（+）和负稳定化（−）。

证明。 如果 (4.1) 中的 $c(S)$ 为偶数，则通过与闭曲面 S 相关的 μ-算子进行特征分解来构造分次；该闭曲面在闭包 $\mathscr{D}$ 中的 $(M,\ \gamma)$ 内延拓了 S，其中 λ是特征值，且根据 [KM10b，命题 7.5]，它属于 $2\mathbb{Z}$。多重分次由对彼此可交换的 μ-算子取同时广义特征空间得到。 [Li21b、GL23] 中的结果表明，此分次与辅助选择无关。

如果 $c(S)$ 为奇数，则我们对 S 进行正稳定化或负稳定化，使其成为可容许的。然后，我们通过术语 (3) 中的重整化来定义分次。根据 [Wan22，推论 4.18]，稳定化选择的无关性得以成立。

式（1）由上述分次定义得出。

式（2）中的第一个等同来自这样一个事实：$-S$ 是 $-S$ 和μ（$-S$）$=-\mu$（S）的一个闭包。式（2）中的两个同构基于这样一个事实：若（$Y,\ R,\ \omega$）是（$M,\ \gamma$）的一个闭包，则（$Y,\ -R,\ \omega$）是（$M,\ -\gamma$）的一个闭包，而（$-Y,\ R,\ \omega$）是（$-M,\ \gamma$）的一个闭包。第一个同构是 ϕ^2，见 [BS23，公式（2.1）和定理 2.5]，或见 [BS26，公式（2.2）中的四个同构之一]（我们选择其中一个，使其为典范的），它取决于相对的 $\mathbb{Z}/4$ 或 $\mathbb{Z}/8$-分次。第二个同构由配对诱导

$$I(Y,\omega)\otimes I(-Y,\omega)\to\mathbb{C}$$

该配对由典范迹余边界映射定义。

关于稳定化，条件 (3) 的特殊情形可由 [Li21b，命题 4.9] 和[Wan22，命题 4.17]推出。条件 (3) 的一般情形隐含在 [Wan22，引理 4.42]以及 [Wan22，命题 4.12]的证明中。只需验证，在[Wan22，引理 4.42] 的假设下，差值

$$\chi(F\cap R_-(\gamma))-\chi(F\cap R_+(\gamma))$$

与 $r(S,\ t)-r(T,\ t)$ 相同，这可直接由 [Juh08，定义 3.8] 中旋转数的定义验证。

如果每个分量 S_q 都是可容许的，则在一个公共闭包中选取扩张 S_q，使它们的并集是 S的一个扩张 S。于是，式（4）可由下式推出

$$\mu(\overline{S}) = \sum_{q=1}^{p} \mu(\overline{S}_q).$$

如果某些 $c(S_q)$ 为奇数，则先对这些分量进行稳定化，再应用 Term (3) 抵消分次平移。

For 可容许的 S，Term (5) 由 [KM10b，命题 7.5] 以及单位元可得

$$-\chi(\overline{S}) = c(S). \tag{4.2}$$

如果 $c(S)$ 为奇数，则对正稳定化和负稳定化分别应用可容许的情形，并使用 Term (3)。

对于可容许的 S，Term (6) 由 [LY22，定理 2.21(2)]可得。如果 $c(S)$ 为奇数，令 S^+ 为 S的正稳定化。沿 S 和 S^+ 的分解由 [LY22，引理 2.25(1)]给出微分同胚的缝合流形。由于 $c(S^+) = c(S) + 1$，Term (3) 和可容许的情形给出

$$\underline{\mathbf{SHI}}(M, \gamma, S, c(S)) = \underline{\mathbf{SHI}}(M, \gamma, S^+, c(S^+)) \cong \underline{\mathbf{SHI}}(M', \gamma').$$

□

4.2. 主要定理的证明。 我们通过结合前几节的结果，证明引言中的主要定理。

定理 *1.1* 的证明。 将 S_l 在 ∂M 附近且远离 L 稳定化后，选择一个公共闭包（Y、R、ω），使得它们延拓为闭曲面 S_l（参见 [GL23，引理 5.2] 的证明）。根据命题 4.7(3)，这些稳定化在 M 以及所有 $M_\epsilon(L)$ 上产生相同的分次平移。令 L 表示 Y 中的诱导链环。于是，对于任意 $\epsilon \in \{0,1\}^n$，$(Y_\epsilon(L)\ R、\omega)$ 是 $(M_\epsilon(L)\ \gamma)$ 的一个闭包。对于 $\vec{0} = (0, \ldots\ldots, 0)$，令 $L_{\vec{0}}$ 表示由 $Y_{\vec{0}}$ 中实心环面的核心给出的链环，并进行框架化，使得对核心进行 0-手术得到原来的 1-手术，而进行 1-手术得到原来的流形。

我们将 [Ye26，定理 8.21] 应用于与 $L_{\vec{0}}$ 相关且具有 $r = 2 + k$ 和这些子流形的手术立方体

$$\widetilde{Z}_{1,i} = I \times \mathrm{pt},\ \widetilde{Z}_{2,i} = I \times R,\ \text{and}\ \widetilde{Z}_{2+l,i} = I \times \overline{S}_l \text{ for } i \in [1, n].$$

Let

$$\overline{\mathscr{X}} \in \mathsf{End}^r(\mathsf{Fun}(\square^n, \mathsf{D}_2^c(\mathbb{C})))$$

为配备同伦相干交换算子的超立方体。对于任意 $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$，令

$$\mathscr{X}_{\vec{\lambda}} = \mathrm{Eig}^{n,r}_{\vec{\lambda}}(\overline{\mathscr{X}}) : \square^n \to \mathsf{D}_2^c(\mathbb{C})$$

$\vec{}$表示定义 2.9 中与特征值 λ 对应的广义特征空间。根据定义 4.3 和命题 4.7，我们考虑

$$\mathscr{X}_{(2,2g(R)-2)} = \bigoplus_{\vec{\lambda}' \in \mathbb{C}^k} \mathscr{X}_{(2,2g(R)-2,\vec{\lambda}')}.$$

该谱序列由 [Lur17, §1.2.2] 以及超立方体上的立方体过滤推出（参见 [Ye26, 定义 7.5]）。谱序列的收敛性则由

[Ye26, 定理8.21 (3)] 以及 [Ye26, 注 7.18]中描述的迭代过程推出。注意，根据命题 4.7 (1)，曲面的可容许性意味着只有满足 $\vec{\lambda}' \in (2\mathbb{Z})^k$ 的直和项在同调上可能非零，从而得到曲面多重分次。□

定理 *1.4* 的证明。根据 [BS22a，第 4], 节，在给 (M, γ_ϵ) 附加接触1-手柄后，旁路正合三角可实现为 $(-M, -\gamma)$ 的某个适当闭包上的手术正合三角的特例，而旁路映射则是相应协边映射的限制。我们将在下文讨论丛集的选择。

注意，在 [BS22a 第 4 节 (16)–(19) 中旁路正合三角的证明里（另见 [LY25，第 8] 节），人们选择平衡缝合流形在三个顶点处的特殊闭包，使得手术正合三角中的原带框结围成一个一次穿孔环面，其框架由该环面诱导。引入该环面的存在性，是为了消去手术正合三角中在三维流形和4维协边上出现的额外丛集。尽管可以像 [BS21 第 2 节那样，通过同调技巧同时消去全部三个三维流形上的丛集，2], 但对于三个协边，至多只能对其中两个这样做。

完整的证明使用自然性结果 [BS15] 来联系不同的闭包选择。由于我们只考虑 $SHI(M, \gamma_\epsilon)$ 之间的旁路映射，因此可以允许旁路正合三角中另外两个映射之一包含额外的丛集，从而使旁路正合三角对于所选的特殊闭包实际上成为一个手术正合三角。这一修改对于我们在链环谱序列中的应用是必要的。

如 [BS22a，图 7], 所示的结情形中那样，我们选择 $(-Y_{\vec{1}},\ -R,\ \omega)$ 的一个特殊闭包 $(-M,\ -\gamma_{\vec{1}})$，使得手术链环 $L_{\vec{1}} \subset -Y_{\vec{1}}$ 的每个分量都界定一个与其他分量不相交的带孔环面，并且具有由该环面诱导的框架。在应用定理 1.1 的证明时，我们将稳定化曲面的配对弧与带孔环面的辅助弧一同选取，使同一个闭包实现曲面分次。手术边给出具有上述丛选择的旁路映射。填充后，每个额外的子午线都是同调平凡的，因为相应的经线界定一个带孔环面，而 1-手术消去了经线与子午线之和。根据[Ye26，第 7.19], 条备注，因此我们可以移除额外的丛集，而不改变曲面分次。

最后，我们对滤过复形取对偶，并通过 $\epsilon \mapsto \vec{1} - \epsilon$ 反转立方体指标。对偶旁路映射给出第一个微分。根据命题 4.7 的第 (2) 项，分次 λ 中的直和项 $\vec{}$ $\vec{}$ 对应于分次 $-\lambda$ 中的直和项。□

注 4.8. 在定理 1.4 的证明中，如果微分不必由旁路映射给出，我们也可以使用 $(-M, -\gamma)$ 的任意闭包来完成证明，其中亏格 $g(R)$ 足够大，代价是允许流形和余边界上出现额外的丛集。在这种情况下，协边映射的限制不再是 [BS22a, §4] 意义下的旁路映射。

5. Mixed hypercube

在本节中，我们使用假设 2.13 中的特殊闭包来证明定理 2.15。我们采用第 2.3 节和第 4.1 节中的记号，尤其是假设 2.13 中的记号。注意，$(M,\ \gamma_{\vec{0}})$ 的闭包 $(Y_{\vec{0}},\ R)$ 确实是定义 4.2 中的标记奇闭包 $(Y_{\vec{0}},\ R,\ \omega)$，其中

丛集 ω 作为附加数据。由于 ω 是一维的，因此可以使其与所有和旁路映射相关的手术曲线 $C_i^{\pm}$ 不相交。

沿用 [Ye26，构造 7.10], 我们将把带有丛集的流形和余边界分别记为 $\mathbb{Y} = (Y, \omega)$、$\mathbb{W} = (W, \nu_W)$ 和 $\mathbb{X} = (X, \nu_X)$。为简便起见，我们还记作 $n = \{1, \dots, n\}$。

对于复合律，$W = W_1 \circ W_0$ 上的子群 Φ 是 $H^1(W; \mathbb{Z}/2)$ 的最大子群，其对每个 W_i 的限制都是 Φ_i，正如 [Ye26]的引言中所述。在我们的情形中，W_0 的每个连通分支恰好有一个出射边界分支，因为手术保持分量不变，而切除只会将它们合并。因此，对于公共边界 Y，$H^0(W_0; \mathbb{Z}/2) \to H^0(Y; \mathbb{Z}/2)$ 是满射的。取 $\mathbb{Z}/2$ 系数的 Mayer–Vietoris 序列给出

$$H^0(W_0) \oplus H^0(W_1) \longrightarrow H^0(Y) \xrightarrow{\delta} H^1(W) \xrightarrow{\rho} H^1(W_0) \oplus H^1(W_1).$$

第一个映射是满射的，因此 $\delta = 0$ 和 ρ 是单射的。如果 $\Phi_0 = \Phi_1 = 0$，具有这些限制的最大子群是 $\ker \rho = 0$。这适用于复合的每个阶段，因此我们可以将所有余边界子群 Φ 及其边界限制 ϕ 都取为平凡的。

5.1. 步骤 I：超盒复形。在这一步中，我们为所有闭三维流形构造 2^n 超立方体。

对于 $s = \vec{+} = (+, \dots, +)$，根据 [Ye26，构造 7.11],，我们得到一个超立方体

$$\mathscr{X}^{\vec{+}} = \mathscr{X}[\mathbb{Y}_{\vec{0}} \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{n} \mathbb{Y}_{\varphi_j}, \{C_i^+\}_{i \in \underline{n}}] : \square^n \to \mathrm{BI}^{\partial}, \tag{5.1}$$

其中 BI^{∂} 表示瞬子余边界的 ∞-范畴，具有[Ye26，定义 5.6]中引入的完整边界条件。此外，将 $\mathscr{X}^+$ 与 ∞-范畴瞬子函子复合

$$CI : \mathrm{BI}^{\partial} \to \mathsf{D}_2^c(\mathbb{Z})$$

再应用 [Ye26，备注 6.2] 中的函子以及导出张量函子 $- \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{L}} \mathbb{C}$，即可得到 $\mathsf{D}_2^c(\mathbb{C})$中的超立方体复形。为简便起见，本节中我们始终记作 $\mathsf{D} = \mathsf{D}_2^c(\mathbb{C})$。

对于一般的 $s \in \{+, -\}^n$，假设 2.13 (4) 和 [Ye26，构造 7.11] 确定一个超立方体

$$\mathscr{X}^s = \mathscr{X}[\mathbb{Y}_{\vec{0}} \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{n} \mathbb{Y}_{\varphi_j}, \{\mathbb{W}_i^{s_i,\prime}\}_{i \in \underline{n}}] : \square^n \to \mathrm{BI}^{\partial}. \tag{5.2}$$

上述超立方体是来自 [Ye26、备注 2.3 和 7.13] 的超盒的压缩。另请注意，除了 $\vec{0} \in \square^n$之外，$\square^n$ 中其他对象的像可能会随 s而变化，这取决于哪些映射环面 $\mathbb{Y}_{\varphi_j}$ 仍作为独立分支保留。再次地，我们应用 CI以得到一个超立方体复形。为简便起见，我们滥用记号，继续用 $\mathscr{X}^s$表示所得的超立方体复形。

5.2. 第二步：缝合瞬子同调。 在这一步中，我们在 $\mathbb{C}$ 上工作，并按照定义 4.3 和定理 1.1 的证明转向缝合瞬子同调，从而每个映射环面都贡献一个 1 维的最高特征子空间。通过固定齐次生成元，我们在转入曲面多重分次之前得到 2^n 超立方体复形。

对于 $\vec{+} \in \{+, -\}^n$，假设 2.13 (2) 确保与正旁路映射相关联的手术曲线 $\{C_i^+\}_{i \in \underline{n}}$ 与嵌入曲面 R 不相交。我们还假设

pt 是 $Y_{\vec{0}}$ 中一个与所有手术曲线及曲面 R 不相交的点。我们也用 pt 和 R 表示手术后闭包中的诱导子流形。如假设 2.13 (3) 中所述，用 R_{φ_i} 表示映射环面 Y_{φ_i} 中的纤维曲面，以及经典范协边后诱导的曲面。类似地，我们用 pt_{φ_j} 表示 Y_{φ_j} 中一个与 R_{φ_j} 及典范协边区域不相交的点，以及经此协边后诱导的点。

As i在定理 1.1 的证明中，我们将 [Ye26, 定理 8.21] 应用于手术立方体

$$\mathscr{X}[\mathbb{Y}_{\vec{0}} \sqcup \coprod_{j=1}^{n} \mathbb{Y}_{\varphi_j}, \{C_i^+\}_{i\in\underline{n}}] \tag{5.3}$$

在 (5.1) 中，其中 $r = 2 + 2n$ 以及子流形

$$\widetilde{Z}_{1,i} = I \times \mathrm{pt},\ \widetilde{Z}_{2,i} = I \times R,\ \widetilde{Z}_{2j+1,i} = I \times \mathrm{pt}_{\varphi_j},\ \widetilde{Z}_{2j+2,i} = I \times R_{\varphi_j} \text{ for } i,j \in \underline{n}. \tag{5.4}$$

由此我们在 $\mathscr{X}^+$ 上得到同伦相干交换算子

$$\overrightarrow{\mathscr{X}^{+}} \in \mathsf{End}^{2+2n}(\mathsf{Fun}(\square^n, \mathsf{D})). \tag{5.5}$$

按照定义 2.9，对于 $g = g(R) = g(R_{\varphi_j})$ 和 $\vec{\lambda}_0 = (2,\ 2g-2,\ \ldots\ldots,\ 2,\ 2g-2)$，令

$$\mathscr{X}^{\vec{+}}_{\vec{\lambda}_0} : \square^n \to \mathsf{D} \tag{5.6}$$

表示相应的广义特征空间。根据 [KM10b, 定理 7.7 和命题 7.4], ，映射环面上具有单值化 φ_j 和 φ_j^{-1}的切除蕴含

$$I(\mathbb{Y}_{\varphi_j})_{2,2g-2} \cong \mathbb{C}. \tag{5.7}$$

对每个 j，固定一个 $I(\mathbb{Y}_{\varphi_j})_{2,2g-2}$ 的齐次生成元，并利用由此得到的同构，消去每个子立方体上的映射环面因子。特别地，对于 $s = \vec{+}$，这将 $\mathscr{X}^{+}_{\vec{\lambda}_0}$ 识别为

$$\mathscr{X}[\mathbb{Y}_{\vec{0}}, \{C_i^+\}_{i\in\underline{n}}].$$

一般 $s \in \{+,-\}^n$ 的情形类似。通过与 CI 复合，再与 $\mathbb{C}$ 取张量积，我们将 (5.2) 中的超立方体 $\mathscr{X}^s$ 视为

$$\mathscr{X}^s : \square^n \to \mathsf{D}_2^c(\mathbb{C}).$$

将 Ye26 定理 8.21] 应用于 (5.4)，可得到 $\mathscr{X}^s$ 上 $2+2n$ 个同伦相容交换的算子。取与 $\vec{\lambda}_0 = (2, 2g-2, \ldots, 2, 2g-2)$ 对应的广义特征空间时，重要的是注意到，在 (2.18) 中典范协边的靶中， R_{φ_j} 与 R 同伦；类似地，pt_{φ_j} 与 pt 同伦。由推论 2.10，与 $(\mathrm{pt}\ R, \mathrm{pt}_{\varphi_j}, R_{\varphi_j})$ 关联的算子的 $(2, 2g-2, 2, 2g-2)$-广义特征空间，与前两个算子的 $(2, 2g-2)$-广义特征空间一致。

使用（5.7）中的固定齐次生成元，我们移除剩余的映射环面因子，得到超立方体复形

$$\{\mathscr{X}^s_{\vec{\lambda}_0}\}_{s\in\{+,-\}^n} : \square^n \to \mathsf{D}. \tag{5.8}$$

在公共子立方体上采用相同的辅助数据时，这些复形在这些子立方体上彼此一致，因此在施加曲面多重分次之前，这些复形满足假设 2.11。注意，这些算子在这些子立方体上也彼此一致。

5.3. **第三步：曲面多重分次**。 在最后一步中，我们使用与可容许曲面相关联的曲面余边界 (2.20)，进一步分解超立方体复形 (5.8)，并证明进一步分解仍满足混合条件，这正是假设 2.11 中的陈述。

与 (5.5) 中一样，对于 $s = \vec{+}$，我们将 [Ye26 定理 8.21] 应用于手术立方体 (5.1)，其中包含$r = 2 + 2n + k$ 和 (5.4) 中的子流形，以及

$$\widetilde{Z}^{\vec{+}}_{2+2n+l,i} = I \times \overline{S}^{\vec{+}}_l \text{ for } i \in \underline{n}, l \in \underline{k}. \tag{5.9}$$

根据假设 2.13 (1) 和 (2.20)。于是，除 (5.5) 外，还有进一步的同伦相干交换算子，记作

$$\overline{\overline{\mathscr{X}}}^{\vec{+}} \in \mathsf{End}^{2+2n+k}(\mathsf{Fun}(\square^n, \mathsf{D})). \tag{5.10}$$

于是我们得到 (5.6) 的进一步特征分解，记作

$$\mathscr{X}^{\vec{+}}_{\vec{\lambda}_0} = \bigoplus_{\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^k} \mathscr{X}^{\vec{+}}_{(\vec{\lambda}_0, \vec{\lambda})}. \tag{5.11}$$

由命题 4.7 (1)(5)，我们知道，只有有限多个 $\vec{\lambda} \in (2\mathbb{Z})^k$ 对应的直和项是非平凡的。

对于一般的 $s \in \{+, -\}^n$，曲面协边不再是乘积协边，而会涉及 (2.20) 中的曲面协边。同伦相干交换算子的存在性由假设 2.13 (4) 保证。注意，这里我们只需要以下事实：

$$\left\{(W_i^{s_i,\prime}, \{\widetilde{Z}^{s,\prime}_{i,l}\}_{l \in [1,k]})\right\}_{i \in [1,n]} \tag{5.12}$$

支撑在不相交区域中，这比条件 (2.24) 弱。我们将利用条件 (2.24) 中的完整条件来验证混合条件。

对于 $i \in \underline{n}$ 和 $l \in \underline{k}$，我们取

$$\widetilde{Z}^s_{2+2n+l,i} = \widetilde{Z}^{s,\prime}_{i,l} \tag{5.13}$$

取自 (2.23)，其中映射环面分量中位于方向 i 上未使用的曲面上的乘积圆柱不予采用。所得带算子的超立方体复形记为

$$\overline{\overline{\mathscr{X}}}^{s} \in \mathsf{End}^{2+2n+k}(\mathsf{Fun}(\square^n, \mathsf{D})). \tag{5.14}$$

如同 (5.11) 及其后的讨论，我们有

$$\mathscr{X}^s_{\vec{\lambda}_0} = \bigoplus_{\vec{\lambda} \in (2\mathbb{Z})^k} \mathscr{X}^s_{(\vec{\lambda}_0, \vec{\lambda})} \tag{5.15}$$

并且只有有限多个非平凡直和项。

此外，由于 $F^s_{i,\,l}$ 是映射环面中的一个环面族，根据 [KM10b 的命题 7.5], ，我们知道在 (5.7) 的直和项上，$\mu(F^s_{i,\,l})$ 的唯一特征值是 0。特别地，广义特征空间 (5.7) 包含于 $\mu(F^s_{i,\,l})$ 对应特征值 0 的广义特征空间中。因此，与.....相关的特征分解

$$\mu(\overline{S}^s_l \sqcup F^s_{i,l}) = \mu(\overline{S}^s_l) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \mu(F^s_{i,l})$$

与关联于 $\mu(S^s_l)$ 的特征分解一致。我们使用第二步中的相同齐次生成元，去除剩余的映射环面因子。

现在我们验证假设 2.11。我们给出详细论证，因为对应于不同 $s \in \{+,-\}^n$ 的算子不再相同。我们首先引入以下定义。

定义 5.1. 设 $\square^n = (0 \rightrightarrows 1)^n$，其中每个坐标中的两条箭头分别标记为 $+$ 和 $-$。$\square^n$ 的一个带符号子立方体 F，是通过将某些坐标固定为 0 或 1，并在其余每个坐标中选择一条箭头得到的。记 $\square_F \subset \square^n$ 为所得的子-∞-范畴，记 $\mathcal{F}$ 为按包含关系排序的带符号子立方体偏序集。

我们有

$$\widetilde{\square}^n = \operatorname*{colim}_{F \in \mathcal{F}} \square_F, \ \mathsf{Fun}(\widetilde{\square}^n, \mathsf{D}) = \lim_{F \in \mathcal{F}^{\mathrm{opp}}} \mathsf{Fun}(\square_F, \mathsf{D}). \tag{5.16}$$

对于 $n = 1$，第一个恒等式是两个 Δ^1 沿其公共边界的推出。一般情形成立，是因为 ∞-范畴的 ∞-范畴 Cat 中的积在每个变量上分别保持余极限。应用 $\mathsf{Fun}(-, \mathsf{D})$ 得到第二个恒等式 [Lur24, 01FJ, 05UR]。

因此，为构造混合立方体，我们对每个$F \in \mathcal{F}$ 给出一个对象 $\mathscr{X}_F \in \mathsf{Fun}(\square_F, \mathsf{D})$，并给出同构 $\mathscr{X}_F \to \mathscr{X}_G|_{\square_F}$，其中 $F \subset G$，且这些同构沿子立方体包含链相容。

考虑图 5 中 $n = 2$ 和 $k = 1$ 的情形。每个顶点都属于全部四个带符号正方形，因此我们在该顶点对全部四个算子 T^s 取同时广义特征分解。每条带符号边都属于两个正方形，因此我们在边图表上对对应的两个算子取同时广义特征分解。在带符号边的每个端点处，全部四个算子的每个同时广义特征空间都自然地包含到边图表中该端点处、对应于边上两个算子的相同特征值的直和项中。这些包含映射沿带符号子立方体的链彼此相容。对于一个包含在带符号正方形某条边中的顶点，包含到该顶点处正方形直和项的映射，与经由边直和项的复合一致。

接下来考虑一般情形。固定一个带符号子立方体 F，其初始顶点为 ϵ，终端顶点为 ϵ'。对于将 F的符号扩展为 $s \in \{+,-\}^n$ 的情形，考虑限制

$$\mathscr{X}^s_{\vec{\lambda}_0}|_{\square_F} : \square_F \to \mathsf{D}. \tag{5.17}$$

对于任意两个这样的符号向量 s，t，我们将证明，这些限制在曲面多重分次上相差一个平移，并且典范同构。也就是说，我们有

$$\mathscr{X}^s_{(\vec{\lambda}_0, \vec{\lambda})}|_{\square_F} \cong \mathscr{X}^t_{(\vec{\lambda}_0, \vec{\lambda} + \vec{\alpha}^{s,t})}|_{\square_F}, \tag{5.18}$$

其中 (2.15) 给出

$$\vec{\alpha}^{s,t} = \sum_{\substack{\epsilon_i = \epsilon'_i = 0 \\ t_i = -}} f_i - \sum_{\substack{\epsilon_i = \epsilon'_i = 0 \\ s_i = -}} f_i.$$

前面的 $2 + 2n$ 算子

$$\mu(\mathrm{pt}),\ \mu(R),\ \mu(\mathrm{pt}_{\varphi_1}),\ \mu(R_{\varphi_1}),\ \ldots,\ \mu(\mathrm{pt}_{\varphi_n}),\ \mu(R_{\varphi_n}) \tag{5.19}$$

与如何 F 的符号无关。固定映射环面因子的识别后，在施加曲面多重分次之前，(5.17) 中的限制彼此一致。

在这个公共子立方体上，对所有 F 符号的延拓 s，取 (5.13) 中的曲面算子 T^s_l。根据假设 2.13 (4) 和 [Ye26，它们在同伦意义下相交换，

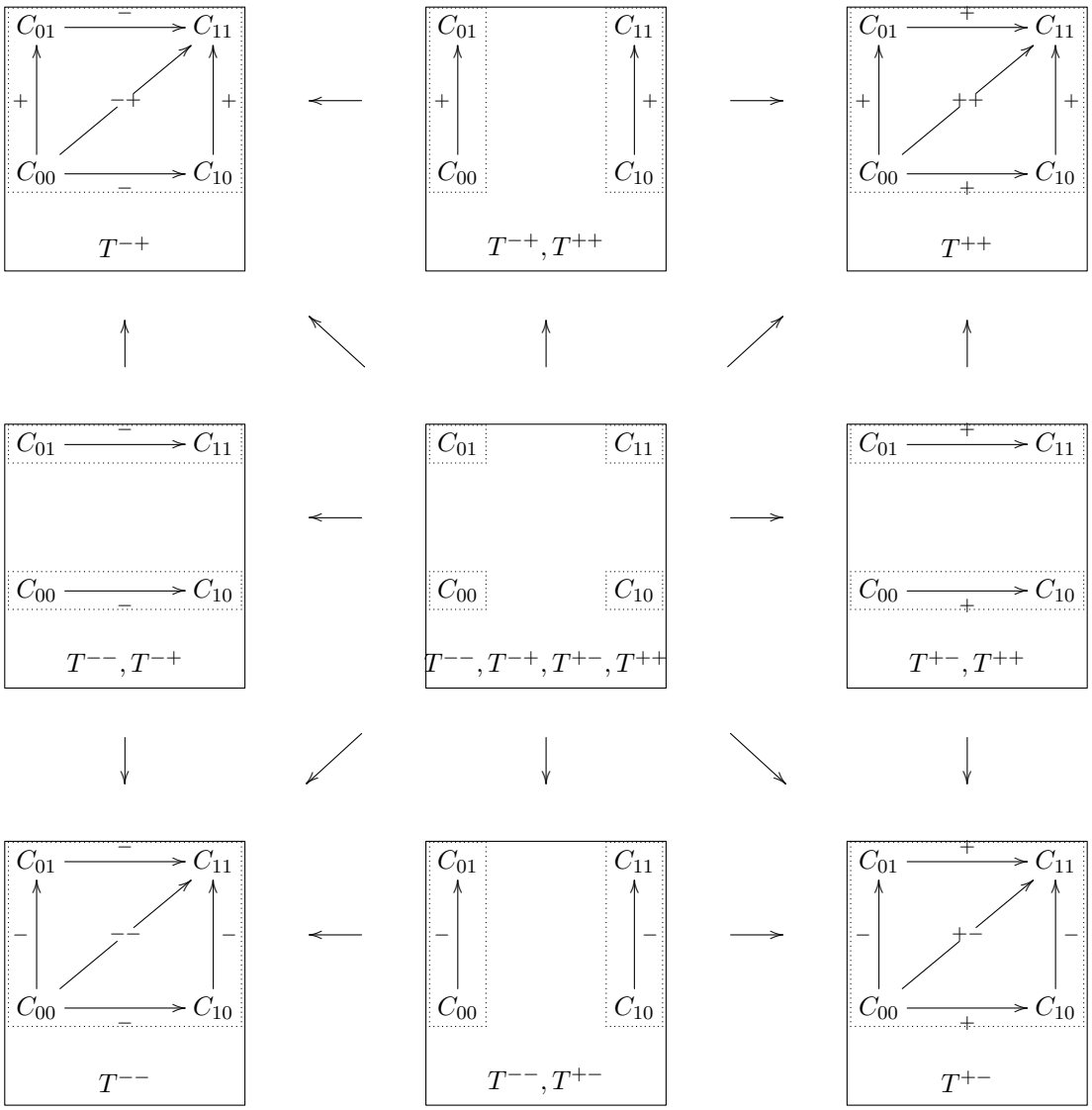


FIGURE 5. 当 $n = 2$ 且 $k = 1$ 时，子立方体和算子的一个示例。

定理 8.21]。我们在公共子立方体上使用相同的辅助数据，因此 $\square_G$ 上的算子 $F \subset G$ 限制为 $\square_F$ 上相应的子族。令 $\mathscr{X}_F$ 为 $\square_F$ 上曲面算子的同时广义特征空间的直和。

由 (2.15) 可知，在 $\square_F$ 的每个顶点，同时广义特征空间非零仅当 $\vec{\lambda}^t = \vec{\lambda}^s + \vec{\alpha}^{s,t}$。由于 s 和 t 在 F 变化的坐标上相同，因此移位与顶点无关。根据推论 2.8，忘掉某些算子后，剩余算子对应的广义特征空间是具有这些特征值的同时广义特征空间的直和。在非零直和项上，任一 s 的特征值都能确定其余所有特征值。因此，自然嵌入到相应 s 的广义特征空间中，在每个顶点处都是同构，故在函子范畴 Fun($\square_F$, D) 中也是同构。这就得到 (5.18)。

对于 $F \subset G$，忘掉仅出现在 $\square_F$ 上的算子后，得到的自然嵌入与限制到 $\square_F$ 的 $\square_G$ 上广义特征空间中的自然嵌入相同。正如图 5 所示，这些嵌入沿子立方体包含所构成的链彼此相容，因为可以依次忘掉算子。取直和便得到同构 $\mathscr{X}_F \to \mathscr{X}_G|_{\square_F}$，进而由 (5.16) 得到混合立方体。

在（2.15）中重新分次后，选择粘合图表的一个 dg 神经代表元，并将分次的 SHI 群作为其顶点复形。于是，每个 $D^s_{\epsilon,\,\epsilon'}$ 都只取决于相应的带符号区间（参见 [Ye26，构造 7.7]），因此假设 2.11 成立。

References

[AM25] Mohammed Abouzaid 和 Ciprian Manolescu。《Heegaard Floer 理论中的典范定向》。arXiv:2510.20062，v1，2025年。[Aok26] Ko Aoki。《层-谱伴随》。《数学年刊》，396(2)：第30号论文，20页，2026年。[ATZ23] Akram Alishahi、Linh Truong 和 Melissa Zhang。《分歧双重覆盖的 Khovanov 同调与对合 Heegaard Floer 同调》。arXiv:2305.07172，v1，2023年。[BD95] P. J. Braam 和 S. K. Donaldson。《Floer 关于瞬子同调、纽结与手术的工作》。载于《Floer 纪念文集》，数学进展丛书第133卷，第195–256页。Birkhäuser，巴塞尔，1995年。[Ber10] Julia E. Bergner。《（∞，1）-范畴综述》。载于《迈向高阶范畴》，IMA 数学及其应用卷第152卷，第69–83页。Springer，纽约，2010年。[Ber20] Julia E. Bergner。《（∞，n）-范畴模型综述》。载于《同伦论手册》，CRC 出版社/Chapman Hall 数学丛书手册系列，第263–295页。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2020年。[Bha24] Deeparaj Bhat。《瞬子理论中的手术正合三角》。arXiv:2311.04242，v3，2024年。[BHL19] John A. Baldwin、Matthew Hedden 和 Andrew Lobb。《论 Khovanov-Floer 理论的函子性》。《数学进展》，345：1162–1205，2019年。[BHS23] Robert Burklund、Jeremy Hahn 和 Andrew Senger。《高度连通的几乎闭流形的边界》。《数学学报》，231(2)：205–344，2023年。[Blo11] Jonathan M. Bloom。《单极子 Floer 同调中的链外科谱序列》。《数学进展》，226(4)：3216–3281，2011年。[BLY23] John A. Baldwin、Zhenkun Li 和叶帆。《缝合瞬子同调与 Heegaard 图》。《组合数学》，159(9)：1898–1915，2023年。[BS15] John A. Baldwin 和 Steven Sivek。《缝合单极子与瞬子同调中的自然性》。《微分几何杂志》，100(3)：395–480，2015年。[BS16a] John A. Baldwin 和 Steven Sivek。《缝合单极同调中的接触不变量》。《数学论坛·西格玛》，4：e12，82页，2016年。[BS16b] John A. Baldwin 和 Steven Sivek。《瞬子 Floer 同调与接触结构》。《数学精选》（新系列），22(2)：939–978，2016年。[BS21] John A. Baldwin 和 Steven Sivek。《框架瞬子同调与同痕》。《拓扑学杂志》，14(4)：1113–1175，2021年。[BS22a] John A. Baldwin 和 Steven Sivek。《Khovanov 同调可检测三叶结》。《杜克数学杂志》，171(4)：885–956，2022年。

[BS22b] Bhargav Bhatt 和 Peter Scholze。《棱镜与棱镜上同调》。《数学年刊》（第二辑），196(3)：1135–1275，2022年。[BS23] John A. Baldwin 和 Steven Sivek。《瞬子与 L-空间手术》。《欧洲数学会杂志》（JEMS），25(10)：4033–4122，2023年。[BS26] John A. Baldwin 和 Steven Sivek。《框架瞬子同调与同痕，II》。《美国数学会汇刊》，379(2)：825–865，2026年。[DK90] S. K. Donaldson 和 P. B. Kronheimer。《四维流形的几何》。牛津数学专著丛书。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1990年。牛津科学出版物丛书。[Don02] S. K. Donaldson。《杨-米尔斯理论中的 Floer 同调群》，剑桥数学论丛第147卷。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。在 M. Furuta 和 D. Kotschick 协助下完成。[Flo88] Andreas Floer。《三维流形的一个瞬子不变量》。《数学物理通讯》，118(2)：215–240，1988年。[Flo90] Andreas Floer。《瞬子同调、手术与纽结》。载于《低维流形几何》，第1卷（达勒姆，1989年），伦敦数学会讲义系列第150卷，第97–114页。剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[Fre21] Jesse Freeman。《含 $\mathbb{Z}[i]$系数的单极子 Floer 同调中的手术正合三角》。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2021年。博士论文——麻省理工学院。[GL23] Sudipta Ghosh 和 Zhenkun Li。《缝合单极子与瞬子 Floer 同调的分解》。《数学精选》（新系列），29(3)：第40号论文，60页，2023年。[GZ24] Sudipta Ghosh 和 Ian Zemke。《纽结 Floer 同调中的连通和与有向系统》。arXiv:2303.06491，v2，2024年。[HHSZ26] Kristen Hendricks、Jennifer Hom、Matthew Stoffregen 和 Ian Zemke。《对合对偶纽结手术公式》。《辛几何杂志》，24(2)：227–302，2026年。[Juh06] Andr´as Juh´asz。《全纯圆盘与缝合流形》。《代数与几何拓扑》，6：1429–1457，2006年。[Juh08] Andr´as Juh´asz。《Floer 同调与曲面分解》。《几何与拓扑》，12(1)：299–350，2008年。[KM07] Peter B. Kronheimer 和 Tomasz S. Mrowka。《单极子与三维流形》，新数学专著丛书第10卷。剑桥大学出版社，剑桥，2007年。[KM10a] Peter B. Kronheimer 和 Tomasz S. Mrowka。《瞬子 Floer 同调与亚历山大多项式》。《代数与几何拓扑》，10(3)：1715–1738，2010年。[KM10b] Peter B. Kronheimer 和 Tomasz S. Mrowka。《纽结、缝合线与切除》。《微分几何杂志》，84(2)：301–364，2010年。[KM11] Peter B. Kronheimer 和 Tomasz S. Mrowka。《Khovanov 同调是一个纽结-´检测器》。《高等科学研究所数学出版物》，113：97–208，2011年。[KM21] P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka。《瞬子与 Bar-Natan同调》。《组合数学》，157(3)：484–528，2021年。[KMOS07] Peter B. Kronheimer、Tomasz S. Mrowka、Peter S. Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。《单极子与透镜空间手术》。《数学年刊》（第二辑），165(2)：457–546，2007年。[Li20] Zhenkun Li。《接触结构、切除与缝合单极同调》。《代数与几何拓扑》，20(5)：2553–2588，2020年。[Li21a] Zhenkun Li。《缝合单极子与瞬子 Floer 理论中的粘合映射与协边映射》。《代数与几何拓扑》，21(6)：3019–3071，2021年。

[Li21b] Zhenkun Li. 通过缝合研究单极子理论与瞬子理论中的纽结同调。《辛几何杂志》，19(6):1339–1420，2021年。[Li24] Jiakai Li. 实单极子与从 Khovanov 同调出发的谱序列。arXiv:2406.00152，v1，2024年。[Lin19] Francesco Lin. Khovanov 同调的 Bar-Natan 变形与对合单极子 Floer 同调。《数学年刊》，373(1-2):489–516，2019年。[LRS23] Jianfeng Lin、Daniel Ruberman 和 Nikolai Saveliev。关于 Frøyshov 不变量与单极子 Lefschetz 数。《微分几何杂志》，123(3):523–593，2023年。[Lur09a] Jacob Lurie. 高阶拓扑斯理论，《数学年刊研究》丛书第170卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年。[Lur09b]Jacob Lurie. 关于拓扑场论的分类。载于《数学当前进展》，2008年，第129–280页。Int. Press，萨默维尔，马萨诸塞州，2009年。[Lur17] Jacob Lurie. 高阶代数。https://www.math.ias.edu/lurie/papers/HA.pdf，2017年。[Lur18] Jacob Lurie. 谱代数几何。https://www.math.ias.edu/~lurie/ papers/SAG-rootfile.pdf，2018年。[Lur24] Jacob Lurie. Kerodon。https://kerodon.net，2024年。[LY22] Zhenkun Li 和叶帆。瞬子 Floer 同调、缝合与 Heegaard 图。《拓扑学杂志》，15(1):39–107，2022年。[LY23] Zhenkun Li 和叶帆。缝合瞬子同调的增强欧拉示性数。《国际数学研究公告》（IMRN），页码 rnad066，2023年4月。[LY25] Zhenkun Li 和叶帆。任意域上纽结手术的瞬子维数。arXiv:2511.17877，v1，2025年。[MO25] Ciprian Manolescu 和 Peter Ozsv´ath。链环上的 Heegaard Floer 同调与整数手术。《几何与拓扑》，29(6):2783–3062，2025年。[OS04] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。全纯圆盘与三维流形不变量：性质及应用。《数学年刊》（第2辑），159(3):1159–1245，2004年。[OS05] Peter S. Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。关于分支双重覆盖的 Heegaard Floer 同调。《数学进展》，194(1):1–33，2005年。[QY26] Haochen Qiu 和叶帆。整数上的单极子三角。arXiv:2606.29882，v1，2026年。[Ram24]Maxime Ramzi。与推出有关的函子范畴。https://sites.google.com/view/maxime-ramzi-en/notes/fun-with-pushouts，2024年。[Sai23] Shunya Saito. 周期三角范畴的倾斜理论。《数学杂志》，304(3):论文第47号，34页，2023年。[Sca15] Christopher W. Scaduto. 瞬子与奇 Khovanov 同调。《拓扑学杂志》，8(3):744–810，2015年。[Sta24]Stacks 项目作者。Stacks 项目。https://stacks.math. columbia.edu，2024年。[Wan22] Joshua Wang. 分裂链环的美容交叉猜想。《几何与拓扑》，26(7):2941–3053，2022年。[Wan25] Joshua Wang. 彩色 sl(N) 同调与 SU(N) 表示。《数学进展》，474:论文第110314号，73页，2025年。[Wei94] Charles A. Weibel. 同调代数导论，《剑桥高等数学研究》丛书第38卷。剑桥大学出版社，剑桥，

1994年。[Ye26] Fan Ye. 瞬子给出的无穷范畴 TQFT。arXiv:2606.29902，v2，2026年。[Zem26] Ian Zemke. 具有环面边界的带边流形与链环手术公式，第29卷，收录于欧洲数学会回忆录。欧洲数学会（EMS），柏林，2026年。

Simons Laufer Mathematical Sciences Institute
Email address: longket@alumni.princeton.edu

School of Mathematical Sciences, Peking University
Email address: flyye@math.pku.edu.cn