arXiv:2611.30379v1 [math.GN] 23 Nov 2026

强交连续偏序集

谢一峰[a]，赵彬[a]，*

[a]陕西师范大学数学与统计学院，西安，*710119*，中国

摘要

本文的主要目的是引入并研究强交连续偏序集。研究表明，一个偏序集是强交连续的，当且仅当每个元素的远低于元素集合的 Scott 闭包与其主理想重合。此外，本文证明，每个强交连续偏序集的 Scott 拓扑都有一个由 Scott 开滤子构成的基，并构造了一个非连续的可数强交连续有向完备偏序集。对于具有一步闭包性质的偏序集，强交连续性等价于连续性。此外，一个偏序集是连续的，当且仅当它是强交连续的，且其 Scott 空间是核紧的。因此，每个核紧的强交连续有向完备偏序集都有一个清醒的 Scott 空间。

关键词： 强 meet 连续偏序集，一步闭包，连续偏序集，Scott 拓扑，核紧性*2020* 年数学主题分类： 06B35, 54D70, 54D45

1. 引言

Scott 拓扑和远小于关系在域理论中起着基础性作用[1, 6]。特别地，连续偏序集中的元素可以由远低于给定点的元素所成的有向集近似，而这一序理论性质与其 Scott 拓扑的结构密切相关。研究偏序集在何种条件下能够由其近似元素恢复，并寻求连续性的拓扑刻画，是很自然的。

交连续性提供了连续性的一种弱化形式，它是通过 Scott闭包和有向上确界来表述的[3]。研究连续性的另一种方法是

*通讯作者。电子邮箱： zhaobin@snnu.edu.cn（赵彬）

提交至《*Topology and its Applications*》的预印本

通过一步闭包性质来研究，该性质用有向上确界表述 Scott闭包。一步闭包、弱一步闭包与交连续性之间的关系已有研究 [5, 8]。特别地，具有一步闭包性质的偏序集不一定是连续的。偏序集是连续的，当且仅当它既是拟连续的又是交连续的 [4]。这些结果引出了这样一个问题：是否存在比交连续性更强、但仍弱于连续性的偏序集？它可以与适当的序理论的或拓扑条件相结合，以刻画连续偏序集。

本文研究强交连续偏序集。由此可知，每个连续偏序集都是强交连续的，而每个强交连续偏序集都是交连续的。我们构造了一个非连续的可数强交连续有向完备偏序集。随后，我们探讨哪些附加条件能够使强交连续偏序集成为连续偏序集。对于强交连续偏序集，我们证明，一步闭包和弱一步闭包各自都等价于连续性。在拓扑方面，我们证明，Scott 开滤子构成每个强交连续偏序集的 Scott 拓扑的一个基。由此，我们利用 Scott 空间的核紧性以及存在这样的滤子基，刻画了连续偏序集；特别地，一个强交连续偏序集是连续偏序集，当且仅当它的 Scott 空间是核紧的。

本文结构安排如下。第2 节回顾一些基本概念和结果。第3节引入强交连续偏序集，阐述其基本性质，并给出可数有向完备偏序集的例子。第4节专门讨论强交连续偏序集类中的连续性刻画。最后，第5 节总结主要结果，并指出未来研究的一个方向。

2. 预备知识

我们回顾本文中用到的序理论和拓扑学中的一些概念与结果。更多细节可参见 [1, 2, 6]。

设 $(P, \leq)$ 是一个偏序集。对于 $A \subseteq P$，令 $\downarrow A = \{x \in P\colon \exists\, a \in A,\ \ x \leq a\}$且 $\uparrow A = \{x \in P\colon \exists\, a \in A,\ \ a \leq x\}$。非空子集 $D \subseteq P$ 若为有向的，则对于每个有限子集 $F \subseteq D$，都存在 $d \in D$，使得对所有$f \in F$，$f \leq d$ 成立。令 $\mathcal{D}^{\vee}(P) = \{D \subseteq P\colon D \neq \varnothing,$ D是有向的，且 $\bigvee D$存在$\}$。如果 P 的每个非空有向子集都有上确界，则 P 是一个有向完备偏序集 （dcpo）。子集 $U \subseteq P$ 是*Scott* 开 的，如果 $U = \uparrow U$，并且

对于每个 $D \in \mathcal{D}^{\vee}(P)$, $\bigvee D \in U$ 蕴含 $D \cap U \neq \varnothing$。Scott开集的拓扑记作 $\sigma(P)$，相应的空间记作 ΣP。我们用 $\Gamma(P)$ 表示 Scott 闭子集族，并分别用 cl_{σ} 和 int_{σ} 表示 Scott闭包和内部算子。特别地，$\mathrm{cl}_{\sigma}\{x\} = \downarrow x$ 和 $\mathrm{cl}_{\sigma}(\downarrow A) = \mathrm{cl}_{\sigma} A$。远小于关系 记作 $a \ll x$，当且仅当$\forall\, D \in \mathcal{D}^{\vee}(P)$ $x \leq \bigvee D$，则 $\exists\, d \in D,\ \ a \leq d.$令 $\Downarrow x = \{a \in P\colon\ a \ll x\}$且 $\Uparrow a = \{x \in P\colon\ a \ll x\}$。偏序集 P 是连续 的，如果对于每个 $x \in P$，集合 $\Downarrow x$ 都是有向的，且 $\bigvee \Downarrow x = x$。连续 dcpo 称为域。

引理 2.1 ([1])。 设 P 是一个偏序集。若对每个 $x \in P$，都存在一个有向集 $E_x \subseteq \Downarrow x$ 使得 $\bigvee E_x = x$，则 P 是连续的。

引理 2.2 ([1])。 若 P 是连续的，则远小于关系具有插值性质。此外，$\{\Uparrow a\colon a \in P\}$ 是 $\sigma(P)$的一个基。

若 $\forall\, x \in P$、 $\forall\, D \in \mathcal{D}^{\vee}(P)$ $x \leq \bigvee D$蕴含$x \in \mathrm{cl}_{\sigma}(\downarrow x \cap \downarrow D)$，则偏序集 P是交连续的。对于拓扑空间 X，令 $\mathcal{O}(X)$表示其开集格。对于 V、$U \in \mathcal{O}(X)$，定义 $V \ll U$ 当且仅当 U 的每个开覆盖都有一个有限子族覆盖 V。若 $\forall\ x \in U \in \mathcal{O}(X)\ \exists\ V \in \mathcal{O}(X)\ x \in V \ll U.$，则空间 X 是核紧的。若拓扑空间 X 的非空子集 A满足：若 $\forall U$、$V \in \mathcal{O}(X)$ $A \cap U \neq \varnothing$ 且$A \cap V \neq \varnothing$, 则 $A \cap U \cap V \neq \varnothing.$，则称其为不可约子集。若每个非空不可约闭子集都是某个唯一点的闭包，则称 T_0 空间为清醒空间。Scott开滤子是 P的一个非空、下有向的 Scott 开子集。

3. 强交连续偏序集

本节将引入强交连续偏序集，并探讨其基本性质。我们考察它与连续性和交连续性的关系，并构造一个非连续的可数强交连续有向完备偏序集。

定义 3.1. 若偏序集 P 满足：对于每个$x \in P$以及每个族 $\mathscr{D} \subseteq \mathcal{D}^{\vee}(P)$，只要对每个 $D \in \mathscr{D}$都有 $x \leq \vee D$，就有 $x \in \mathrm{cl}_{\sigma}\big(\downarrow x \cap \bigcap_{D \in \mathscr{D}} \downarrow D\big)$.，则称其为强交连续

定理 3.2. 设 P 为一个偏序集，以下条件等价:

(i) P 是强交连续的;

(ii) $x \in \mathrm{cl}_{\sigma}(\Downarrow x)$ 对每个 $x \in P$;

(iii) $\mathrm{cl}_\sigma(\Downarrow x) = \downarrow x$ 对每个 $x \in P$;

(iv) $x \in U$ 蕴含对于每个 $x \in P$ 和 $U \in \sigma(P)$。

证明。 对于每个 $x \in P$，令 $\mathscr{D}_x = \{D \in \mathcal{D}^\vee(P) : x \leq \bigvee D\}$。我们首先断言

$$\Downarrow x = \downarrow x \cap \bigcap_{D \in \mathscr{D}_x} \downarrow D. \qquad (*)$$

事实上，若 $a \ll x$，则 $a \leq x$，且对于每个 $D \in \mathscr{D}_x$，都存在 $d \in D$使得 $a \leq d$，因此 $a \in \downarrow x \cap \bigcap_{D \in \mathscr{D}_x} \downarrow D$。反过来，若 $a \in \downarrow x \cap \bigcap_{D \in \mathscr{D}_x} \downarrow D$，且$D \in \mathcal{D}^\vee(P)$ 满足 $x \leq \bigvee D$，则 $D \in \mathscr{D}_x$，从而 $a \in \downarrow D$；这意味着对于某个 $d \in D$，有 $a \leq d$，这就证明了 $a \ll x$。

(i)⇒(ii)。应用定义3.1于族 $\mathscr{D}_x$ 并利用$(*)$，我们得到$x \in \mathrm{cl}_\sigma(\downarrow x \cap \bigcap_{D \in \mathscr{D}_x} \downarrow D) = \mathrm{cl}_\sigma(\Downarrow x)$。

(ii)⇒(i)。令 $\mathscr{D} \subseteq \mathcal{D}^\vee(P)$，使得对于每个 $D \in \mathscr{D}$都有 $x \leq \bigvee D$。则 $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}_x$，因此由（$*$）可得， $\Downarrow x \subseteq \downarrow x \cap \bigcap_{D \in \mathscr{D}} \downarrow D.$ 。对两边取 Scott 闭包并应用 (ii)，我们得到

$$x \in \mathrm{cl}_\sigma(\Downarrow x) \subseteq \mathrm{cl}_\sigma\left(\downarrow x \cap \bigcap_{D \in \mathscr{D}} \downarrow D\right).$$

(ii)⇔(iii)。由于 $\Downarrow x \subseteq \downarrow x$ 且 $\downarrow x$ 是 Scott 闭集，我们总有 $\mathrm{cl}_\sigma(\Downarrow x) \subseteq \downarrow x$。因此，等式 $\mathrm{cl}_\sigma(\Downarrow x) = \downarrow x$ 成立，当且仅当 $x \in \mathrm{cl}_\sigma(\Downarrow x)$。

(ii)⇔(iv)。这由闭包的标准邻域刻画可得。

□

命题 3.3。 每个连续偏序集都是强交连续的，每个强交连续偏序集都是交连续的。

证明。 假设 P 是连续的。对于每个 $x \in P$，集合 $\Downarrow x$ 是有向的，并且 $\bigvee \Downarrow x = x$。因此 P 根据定理 3.2是强交连续的。若 P是强交连续的，则在定义 3.1 中取 $\mathscr{D} = \{D\}$，恰好表明 P 是交连续的。

□

下面我们构造一个可数强交连续有向完备偏序集，它不是连续的。这说明命题 3.3 中的第一个蕴含的逆命题不成立。

Let

$$P_{\mathrm{w}} = \{\varepsilon\} \cup \bigcup_{k \geq 1} \mathbb{N}_+^k,$$

其中 ε 是长度为零的空序列。我们将序列 s 的长度记为 $|s|$, 并分别将非空序列 s 的首项和末项记为 f(s) 和 $v(s)$。然后定义由下列内容生成的关系 $\preccurlyeq$ 于 P_{w} 上

(i) 当 $a \leq b$ 时, $sa \preccurlyeq sb$; 或
(ii) 当 $a \leq c$ 时, $sabt \preccurlyeq sct$,
其中 s, $t \in P_{\mathrm{w}}$ 且 a, b, $c \in \mathbb{N}_{+}$。并令 $u \preccurlyeq \varepsilon$ 对每个 $u \in P_{\mathrm{w}}$ 都成立。显然可以验证, $\preccurlyeq$ 是 P_{w} 上的偏序。

引理 3.4. 设 $(P_{\mathrm{w}}, \preccurlyeq)$ 为上述定义的偏序集, 且设 $u, v \in P_{\mathrm{w}}$。若$u \preccurlyeq v$, 则 $|u| \geq |v|$. 若 $|u| = |v| = m \geq 1$, 则 $u \preccurlyeq v$ 当且仅当$u_i = v_i\,(1 \leq i < m)$ 且 $u_m \leq v_m$.

证明. 设 $u = w_0 \preccurlyeq w_1 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq w_r = v$ 为一条定义步骤链。由 (i)、(ii) 以及 $w \preccurlyeq \varepsilon$, $|u| = |w_0| \geq |w_1| \geq \cdots \geq |w_r| = |v|$. 若 $|u| = |v| = m \geq 1$, 则 $|w_j| = m(0 \leq j \leq r)$ $w_j = pb_j$, $|p| = m-1$, $u_m = b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_r = v_m$. 这里 $p = (u_1, \ldots\ldots, u_{m-1}) = (v_1, \ldots\ldots, v_{m-1})$。这是因为只有 (i) 能保持正长度。反过来, $u_i = v_i$ $(1 \leq i < m)$ 且 $u_m \leq v_m$ 蕴含 $u \preccurlyeq v$, 依据是 (i)。 □

引理 3.5. 令$(P_{\mathrm{w}}, \preccurlyeq)$ 为上文定义的偏序集。对每个 $s \in P_{\mathrm{w}}$, 令$C_s = \{sn : n \in \mathbb{N}_{+}\}$, 则 C_s 是一个有向链, 且 $\bigvee C_s = s$。

证明. 由 (i), $s1 \preccurlyeq s2 \preccurlyeq \cdots$。因此 C_s 是一个有向链, 因为其中任意两个元素中较大的那个都是 C_s中的上界。此外, 对每个$n \in \mathbb{N}_{+}$, 都有 $sn \preccurlyeq s$: 若 $s = \varepsilon$, 则由 ε的极大性可知; 否则, 令$s = ta$, 关系 (ii) 给出 $tan \preccurlyeq ta = s$。

令 $\varnothing \neq E \subseteq C_s$ 满足 $\{v(e) : e \in E\}$ 无界, 并令 y 为 E的一个上界。若 $y = \varepsilon$, 则 $s \preccurlyeq y$。设 $y \neq \varepsilon$, 并选取满足 $n > v(y)$ 的 $sn \in E$。由引理 3.4, $sn \preccurlyeq y \implies |y| \leq |s| + 1, |y| \neq |s| + 1$, 故$|y| = |s|$。因此, s 是 E的最小上界。由于 $\{v(e) : e \in C_s\} = \mathbb{N}_{+}$无界, 故 $\bigvee C_s = s$。 □

命题 3.6。 设 $(P_{\mathrm{w}}, \preccurlyeq)$ 为上述定义的偏序集, 则每个非空有向集 $D \subseteq P_{\mathrm{w}}$ 都有上确界。也就是说, P_{w} 是一个可数有向完备偏序集。

证明。令 $m = \min\{|d| : d \in D\}, D_m = \{d \in D : |d| = m\}$. 选取 $d_0 \in D_m$。对于任意 $d \in D$, 存在 $e \in D$ 使得 $d \preccurlyeq e$, 并且 $d_0 \preccurlyeq e$ 由 D 是一个有向偏序集。根据引理 3.4, $m \leq |e| \leq |d_0| = m$, 所以 $|e| = m$, 也就是说, $e \in D_m$并且 $d \preccurlyeq e \in D_m$。因此, D_m 是有向集 D的共尾子集, 故 D_m 是有向的。如果 $m = 0$, 那么 $\varepsilon \in D$, 所以 $\varepsilon = \max D$。现在假设

$m \geq 1$。根据引理 3.4， D_m 中的任意两个元素的前 $m-1$项都相同，因此存在一个序列 s，满足 $|s| = m-1$，使得 $D_m \subseteq C_s$。如果$\{\upsilon(d) : d \in D_m\}$ 有界，那么 D_m 是一个有限链，因此有一个最大元素 d^*；由于 D_m 是 D的共尾子集， d^* 也是D的最大元素，并且 $\bigvee D = d^*$。如果 $\{\upsilon(d) : d \in D_m\}$ 无界，那么将引理 3.5 应用于 $E = D_m$ 可得 $\bigvee D_m = s$；由于 D_m 在 D中共尾，有向上确界相同，因此 $\bigvee D = \bigvee D_m = s$。 □

引理 3.7。 设 $(P_{\mathrm{w}}, \preccurlyeq)$ 为上述定义的偏序集，对每个$x \in P_{\mathrm{w}}$ 和 $i, j \in \mathbb{N}_+$，有 $xij \ll x$。

证明。 我们先考虑定义步骤 (i) 和 (ii)。对于 $a \leq c$ 和 $d \leq e$， $sabtd \preccurlyeq sabte \preccurlyeq scte$, $sabtd \preccurlyeq sctd \preccurlyeq scte$ 都是有效的链。第二种排列将 (ii) 型步骤放在 (i) 型步骤之前。同理，对于 $b \leq b'$ 和$a \leq c$，链 $sab \preccurlyeq sab' \preccurlyeq sc$ 可以替换为 $sab \preccurlyeq sc$。通过依次应用这些交换，可以选择一条从 x 到 $z = tb \neq \varepsilon$ 的链，使其形式为 $x = w_0 \preccurlyeq w_1 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq w_\ell = ta \preccurlyeq tb = z, a \leq b,$其中从$w_{r-1}$ 到 w_r 的每一步都是 (ii) 型步骤。附加 ij 后，仍保持各步骤均为 (ii) 型。因此，对于 $k \geq j$, $xij = w_0ij \preccurlyeq w_1ij \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq w_\ell ij = taij \preccurlyeq tbj \preccurlyeq tbk = zk.$特别地,

$$xij \preccurlyeq zk \qquad \text{whenever } x \preccurlyeq z \neq \varepsilon \text{ and } k \geq j. \tag{1}$$

对于 $z = \varepsilon$，对 $c = a$ 反复应用 (ii)，再应用 (i)，可得

$$xij \preccurlyeq \big(\mathrm{f}(xij)\big) \preccurlyeq (k) \qquad \big(k \geq \mathrm{f}(xij)\big). \tag{2}$$

设 $D \in \mathcal{D}^\vee(P_{\mathrm{w}})$，并假设 $x \preccurlyeq \bigvee D = z$。若 D 有最大元d^*，则 $xij \preccurlyeq x \preccurlyeq z = d^* \in D.$。否则，根据命题 3.6，存在一个共尾集 $E \subseteq D \cap C_z$，满足 $\{\upsilon(e) : e \in E\}$ 无界。若 $z \neq \varepsilon$，取$zk \in E$ 使得 $k \geq j$；由 (1)， $xij \preccurlyeq zk$。若 $z = \varepsilon$，取 $(k) \in E$ 使得$k \geq \mathrm{f}(xij)$；由 (2)， $xij \preccurlyeq (k)$。两种情况下均有 $D \cap {\uparrow} xij \neq \varnothing$。由于 D 是任意的， $xij \ll x$。 □

定理 3.8。 设 $(P_{\mathrm{w}}, \preccurlyeq)$ 为上文定义的偏序集，则偏序集 P_{w} 是可数强交连续有向完备偏序集，而 P_{w} 不连续。

证明。由命题 3.6， P_{w} 是一个可数的有向完备偏序集。设 $x \in P_{\mathrm{w}}$ 和 $H \in \Gamma(P_{\mathrm{w}})$，其中 $\Downarrow x \subseteq H$。由引理 3.7， $\{xij : i, j \in \mathbb{N}_+\} \subseteq \Downarrow x \subseteq H.$ 对于每个 $i \in \mathbb{N}_+$，由引理 3.5和 $H \in \Gamma(P_{\mathrm{w}})$ $\bigvee_{i \in \mathbb{N}_+} xi \in H.$ H $x \in \bigcap\{H \in \Gamma\ P_{\mathrm{w}} \quad \Downarrow x \subseteq H\} = \ _\sigma \Downarrow x\ .$可得

$xi = \bigvee_{j \in \mathbb{N}_+} xij \in H.$。又因为 $i \in \mathbb{N}_+$是任意的，( ): cl ( )。因此，由定理 3.2， P_{w} 是强交连续的。

固定 $x \in P_{\mathrm{w}} \setminus \{\varepsilon\}$ 并令 $m = |x| \geq 1$。对于 $u \ll x$，引理 3.5 给出$x = \bigvee_{n\in\mathbb{N}_+} xn$, $u \preccurlyeq xn$，其中某个 $n \in \mathbb{N}_+$.。由引理 3.4 可知$|u| \geq m+1$。假设 $|u| = m+1$。由引理 3.4， $u = xr$，其中某个 $r \in \mathbb{N}_+$。$x^+ = (x_1, \ldots, x_{m-1}, v(x) + 1)$。由于 $x \preccurlyeq x^+ = \bigvee_{n\in\mathbb{N}_+} x^+n$和 $u \ll x$，存在 $n \in \mathbb{N}_+$ 使得 $xr = u \preccurlyeq x^+n$, $|xr| = |x^+n| = m+1$.。现在由引理 3.4 可得 $x = x^+$，这就产生了矛盾。我们已经证明

$$|u| \geq m+2 \text{ for every } u \ll x. \tag{†}$$

设 $a = x11$ 和 $b = x21$。由引理 3.7， a， $b \in \Downarrow x$。假设 $c \in \Downarrow x \cap \uparrow a \cap \uparrow b$。由（†）和引理 3.4， $m+2 \leq |c| \leq \min\{|a|, |b|\} = m+2$.因此 $|a| = |b| = |c| = m+2$。并且 $a = x11 \preccurlyeq c$， $b = x21 \preccurlyeq c$. 但是由引理 3.4， $(c_1, \ldots, c_{m+1}) = x1$， $(c_1, \ldots, c_{m+1}) = x2$，矛盾。因此 $\Downarrow x \cap \uparrow a \cap \uparrow b = \varnothing$， $\forall\, a$， $b \in \Downarrow x$.。因此， $\Downarrow x$ 不是有向的，且P_{w} 不是连续的。□

命题 3.9. 设 P 是强 *meet* 连续偏序集，则对每个$x \in P$， $\bigvee \Downarrow x = x$ 和 $\Downarrow x$ 都是 *Scott* 不可约的。

证明. 固定 $x \in P$。由于 P是强交连续的， $x \in \mathrm{cl}_\sigma(\Downarrow x)$。若 y 是 $\Downarrow x$的上界，则 $\Downarrow x \subseteq \downarrow y$。由于 $\downarrow y$ 是 Scott 闭集， $\downarrow x = \mathrm{cl}_\sigma(\Downarrow x) \subseteq \downarrow y$，因此 $x \leq y$。于是 $\bigvee \Downarrow x = x$。

令 U， $V \in \sigma(P)$ 都与 $\Downarrow x$相交，并选取 $a \in U \cap \Downarrow x$ 和 $b \in V \cap \Downarrow x$。由于 U和 V都是上集，且 a， $b \leq x$，我们有 $x \in U \cap V$。于是$U \cap V \in \sigma(P)$，因此定理 3.2(iv) 得出 $U \cap V \cap \Downarrow x \neq \varnothing$。因此 $\Downarrow x$ 是不可约的。□

定理 3.10. </style}设 是一个偏序集。当且仅当 (P) $U = \bigcup_{a\in U} \Uparrow a$.时， P 是强交连续的。

证明. 包含关系 $\bigcup_{a\in U} \Uparrow a \subseteq U$ <style id='6}由 $\Uparrow a$的定义立即可得。反向包含恰好表示每个 $x \in U$ 都满足 $U \cap \Downarrow x \neq \varnothing$，这就是定理 3.2的条件 (iv)。□

4. 连续与强交连续之间的关系

现在我们研究强交连续偏序集何时是连续的，并给出若干等价刻画。

令 P 为任意偏序集，且 $A \subseteq P$。定义

$$A' := \{x \in P : D \in \mathcal{D}^{\vee}(P),\ D \subseteq \downarrow A.x = \vee D\},$$

$$A'' := \{x \in P : \exists D \in \mathcal{D}^{\vee}(P),\ D \subseteq {\downarrow}A,\ x \leq \bigvee D\}.$$

那么偏序集 P 具有一步闭包[8]，如果 $A' = \mathrm{cl}_\sigma\, A$ 对每个 $A \subseteq P$都成立；并且弱一步闭包[5]，如果 $A'' = \mathrm{cl}_\sigma\, A$ 对每个 $A \subseteq P$都成立。

命题 4.1 ([5])。 偏序集 P 具有一步闭包，当且仅当它是交连续的并且具有弱一步闭包。

定理 4.2 ([8])。 每个连续偏序集都具有一步闭包。

例 4.3 ([5])。 令 $\mathbb{R}_\ell$ 表示索根弗雷直线，并令 $K(\mathbb{R}_\ell)$ 表示其非空紧饱和子集按反向包含构成的偏序集。那么 $K(\mathbb{R}_\ell)$ 具有一步闭包，但不是连续的。

本小节的主要结果表明，在强交连续性下，一步闭包或弱一步闭包均与连续性等价。

定理 4.4。 对于偏序集 P，以下条件等价：

(i) P 是连续的；

(ii) P 是强交连续的，并且具有一步闭包；

(iii) P 是强交连续的，并且具有弱一步闭包；

(iv) 对每个 $x \in P$， x 都是 ${\Downarrow}x$ 的一个有向子集的上确界；

(v) $x \in (\Downarrow x)'$ 对每个 $x \in P$成立。

证明。 (i)⇒(ii)。这由命题 3.3 和定理4.2得出。

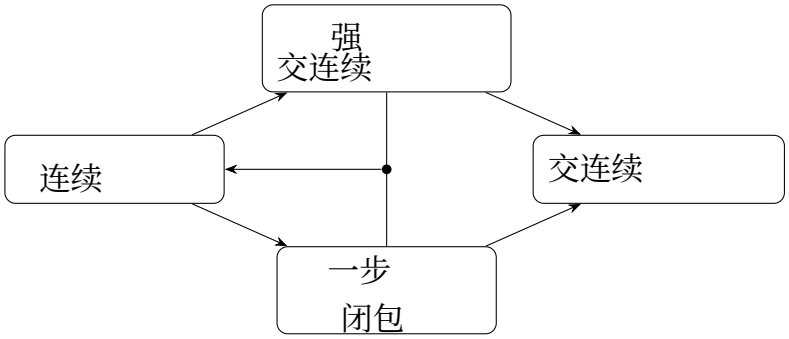
(ii)⇒(iii)。如果 P 具有一步闭包，那么它也具有弱一步闭包，因为对每个 $A \subseteq P$， $A'' = {\downarrow}A' = {\downarrow}\,\mathrm{cl}_\sigma\, A = \mathrm{cl}_\sigma\, A$。

(iii)⇒(iv)。固定 $x \in P$。由定理 3.2(iii)，我们有 $\mathrm{cl}_\sigma({\Downarrow}x) = {\downarrow}x$，因此$x \in ({\Downarrow}x)''$。根据算子 $''$ 的定义，存在一个有向集$E_x \subseteq {\downarrow}{\Downarrow}x = {\Downarrow}x$ 使得 $x \leq \bigvee E_x$。另一方面， $E_x \subseteq {\Downarrow}x \subseteq {\downarrow}x$推出 $\bigvee E_x \leq x$。因此 $\bigvee E_x = x$，这就证明了 (iv)。

(iv)⇒(i)。这正是引理2.1。

(iv)⇔(v)。由于 ${\Downarrow}x$ 是下集，因此我们有 ${\downarrow}{\Downarrow}x = {\Downarrow}x$ ，而 $({\Downarrow}x)'$ 的元素恰好是 ${\Downarrow}x$ 的有向子集的上确界。 □

我们可以看出，强交连续性与一步闭包的合取刻画了连续性。迄今为止建立的蕴含关系总结如下图所示。



命题 4.5 ([8])。 设 P 是一个具有一步闭包的偏序集。那么，对每个 $\Uparrow a = \mathrm{int}_\sigma(\uparrow a)$，都有 $a \in P$。

根据命题4.5，在一步闭包条件下，远上集 $\Uparrow a$ 与主滤子的 Scott 内部 $\uparrow a$相同。这提示我们考察 $\Uparrow a$ 的 Scott 开性，以及在强交连续性下 $\ll$ 的插值性质。

定理 4.6。 设 P 是一个强交连续偏序集，以下条件等价：

(i) P 是连续的；*(ii)* 对每个 $x \in P$，$\Downarrow x$ 都是有向的；*(iii)* 对每个 $a \in P$，$\Uparrow a \in \sigma(P)$；*(iv)* $\ll$具有插值性质；*(v)* 对每个 $x \in P$，$\Downarrow x = \bigcup_{b \ll x} \Downarrow b$；*(vi)* 若 $a, b \ll x$，则 $x \in \mathrm{int}_\sigma(\uparrow a \cap \uparrow b)$。

证明。 (i)⇒由连续性的定义可得 (ii)，而 (i)⇒(iv) 由引理 2.2得出。

(iv)⇒(iii)。固定 $a \in P$。根据 $\ll$的传递性，集合 $\Uparrow a$ 是一个上集。令 $D \in \mathcal{D}^\vee(P)$ 满足 $\bigvee D \in \Uparrow a$，也就是说，$a \ll \bigvee D$。根据插值性质，

存在 $b \in P$ 满足 $a \ll b \ll \bigvee D$，接着存在 $d \in D$ 满足 $b \leq d$。由此可得 $a \ll d$，因此 $d \in \Uparrow a$ 且 $D \cap \Uparrow a \neq \varnothing$。所以 $\Uparrow a \in \sigma(P)$。

(iii)⇒**(ii)**. 令 $x \in P$ 且 a，$b \in \Downarrow x$。则 $\Uparrow a$ 和 $\Uparrow b$ 是 x的 Scott 开邻域，因此 $\Uparrow a \cap \Uparrow b \in \sigma(P)$ 包含 x。由定理 3.2**(iv)**，存在 $c \in \Downarrow x$ 使得 $c \in \Uparrow a \cap \Uparrow b$，也就是说，$a \ll c$ 且 $b \ll c$；于是 a，$b \leq c$。因此$\Downarrow x$是有向的。

(ii)⇒**(i)**。这由命题 3.9得出，该命题指出 $\bigvee \Downarrow x = x$对每个 $x \in P$均成立：结合 **(ii)**，这恰好就是连续性的定义。

(iv)⇔(v)。包含关系 $\bigcup_{b \ll x} \Downarrow b \subseteq \Downarrow x$ 始终成立，而反向包含关系恰好意味着：$a \ll x$ 蕴含对某个 b，有 $a \ll b \ll x$ 。

(iii)⇒(vi)。若 a，$b \ll x$，则 $x \in \Uparrow a \cap \Uparrow b$ 和 $\Uparrow a \cap \Uparrow b$ 是 Scott 开集。由于 $\Uparrow a \cap \Uparrow b \subseteq \uparrow a \cap \uparrow b$，我们得到 $x \in \mathrm{int}_\sigma(\uparrow a \cap \uparrow b)$。

(vi)⇒**(ii)**。设 a，$b \in \Downarrow x$。由 **(vi)**，$\mathrm{int}_\sigma(\uparrow a \cap \uparrow b)$ 是 x的 Scott 开邻域，因此定理 3.2**(iv)** 给出 $c \in \Downarrow x \cap \uparrow a \cap \uparrow b$。于是 $a \leq c$，$b \leq c$ 且$c \ll x$，这证明了 $\Downarrow x$ 是有向集。 □

引理 4.7。 若非空下有向集 F 被有限个上集 $U_1, \ldots, U_m$覆盖，则对于某个 j，有 $F \subseteq U_j$。

证明。 如果每个 $1 \leq j \leq m, F \not\subseteq U_j$。对于每个 $1 \leq j \leq m$，选取 $z_j \in F \setminus U_j$，然后选取 $z \in F$，使得对于每个 j都有 $z \leq z_j$；这样的 z 存在，因为 F 是下有向的。由于 U_j 覆盖 F，我们有 $z \in U_j$，其中某个 j成立。因为 U_j 是上集且 $z \leq z_j$，这意味着 $z_j \in U_j$，与 z_j的选择矛盾。 □

引理 4.8。 设 P 是一个偏序集。如果 $\forall\, x \in U \in \sigma(P)$，存在 $a \in U$ 使得 $x \in \mathrm{int}_\sigma(\uparrow a)$，那么 P 是连续的。

证明。 对于每个 $x \in P$，令 $B_x = \{a \in P : x \in \mathrm{int}_\sigma(\uparrow a)\}$. 由于 $\mathrm{int}_\sigma(\uparrow a) \in \sigma(P)$ 且 $\mathrm{int}_\sigma(\uparrow a) \subseteq \uparrow a$，每个 $a \in B_x$ 都满足 $x \in \uparrow a$；此外，若 $D \in \mathcal{D}^\vee(P)$ 且 $x \leq \bigvee D$，则存在 $d \in D \cap \mathrm{int}_\sigma(\uparrow a)$，并且 $a \leq d$。这表明 $B_x \subseteq \Downarrow x$。在假设中取 $U = P$，得到 $B_x \neq \varnothing$。

设 $a, b \in B_x$。那么 $x \in \mathrm{int}_\sigma(\uparrow a) \cap \mathrm{int}_\sigma(\uparrow b) \in \sigma(P)$。根据假设，存在 $c \in \mathrm{int}_\sigma(\uparrow a) \cap \mathrm{int}_\sigma(\uparrow b)$，使得 $x \in \mathrm{int}_\sigma(\uparrow c)$。于是 $c \in B_x$ and$c \in \uparrow a \cap \uparrow b$，也就是说，$a \leq c$ and $b \leq c$。因此，B_x 是有向的。

最后，我们证明 $\bigvee B_x = x$。显然 x 是 B_x的上界。如果y 是 B_x 的上界，且 $x \not\leq y$，那么 $x \in P \setminus \downarrow y \in \sigma(P)$，则存在 $a \in B_x$ 满足 $a \not\leq y$，这与 y 是 B_x的上界这一假设矛盾。因此 $\bigvee B_x = x$。由于 $B_x \subseteq \Downarrow x$ 是一个上确界为x的有向集，引理 2.1 表明 P 是连续的。 □

引理 4.9。 若 P 是强交连续的，则 $\sigma(P)$ 有一个由 *Scott* 开滤子构成的基。

证明。令 $x \in U \in \sigma(P)$。我们归纳地构造一个序列 $\{a_n$： 根据定理 3.2(iv), $n \geq 0\}$，使得 $a_0 = x$ 且对每个 $n \geq 0$都有 $a_{n+1} \in U \cap \Downarrow a_n$。设 $F = \bigcup_{n\geq 0} \uparrow a_n$.。我们验证 F是一个满足 $x \in F \subseteq U$的 Scott开滤子。由于 $x = a_0 \in \uparrow a_0 \subseteq F$，且每个满足 U 的 $a_n \in U$ 都是上集，因此有$x \in F \subseteq U$。作为上集的并， F 是一个上集。为证明 F是下有向的，任取 u、$v \in F$，并选择满足 $a_m \leq u$ 和 $a_n \leq v$ 的 m、$n \geq 0$。由于 $a_{k+1} \ll a_k$ 蕴含 $a_{k+1} \leq a_k$，序列 $\{a_n\}$ 是递减的。取$k = \max\{m, n\}$，得到 $a_k \leq a_m \leq u$ 和 $a_k \leq a_n \leq v$，因此 a_k 是 u和 v的一个公共下界，且属于 F。最后，取满足 $\bigvee D \in F$的 $D \in \mathcal{D}^{\vee}(P)$。那么，对于某个 $n \geq 0$, 有 $a_n \leq \bigvee D$。由于 $a_{n+1} \ll a_n \leq \bigvee D$，存在满足 $a_{n+1} \leq d$的 $d \in D$，于是 $d \in \uparrow a_{n+1} \subseteq F$。因此 $D \cap F \neq \varnothing$，且 F是 Scott 开的。

□

定理 4.10。 设 P 是一个偏序集，则 P 连续，当且仅当 ΣP 核紧，且 $\sigma(P)$ 有一个由 *Scott* 开滤子构成的基。

证明。设 P连续。令 $x \in U \in \sigma(P)$，并根据引理 2.2 选取 $a \in U \cap \Downarrow x$。于是 $x \in \Uparrow a \subseteq \uparrow a \subseteq U.$ 此外， $\Uparrow a \ll U$：事实上，若 $\mathcal{W}$是 U的一个开覆盖，则存在包含 a的 $W \in \mathcal{W}$；又由于 W 是一个上集， $\uparrow a \subseteq W$；由此可得 $\Uparrow a \subseteq W$。因此 ΣP是核紧的。由命题 3.3 和引理 4.9， $\sigma(P)$ 有一个由 Scott 开滤子构成的基。反过来，设 ΣP 是核紧的，且 $\sigma(P)$ 有一个由 Scott 开滤子构成的基。令 $x \in U \in \sigma(P)$。由核紧性，选取 $V \in \sigma(P)$ 使得 $x \in V \ll U$，然后选取一个 Scott 开滤子 F使得 $x \in F \subseteq V$。我们断言存在 $a \in U$ 使得 $F \subseteq \uparrow a$。反设不存在。则对每个 $a \in U$，都存在 $z_a \in F$ 使得 $a \not\leq z_a$，且集合$O_a = P \setminus \downarrow z_a$、 $a \in U$都是 Scott 开的。对每个 $b \in U$，都有 $b \not\leq z_b$，所以 $b \in O_b$；因此 $\{O_a$： $a \in U\}$是 U的一个开覆盖。由于 $V \ll U$且 $F \subseteq V \subseteq U$，存在 a_1、.....、$a_m \in U$使得 $F \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} O_{a_j}$。将引理 4.7 应用于下有向集 F和上集 O_{a_1}、.....、O_{a_m}，可得 $F \subseteq O_{a_j}$，其中某个 j；但 $z_{a_j} \in F \setminus O_{a_j}$，矛盾。因此，存在 $a \in U$ 使得 $x \in F \subseteq \uparrow a \subseteq U.$。由于 F 是开集且 $F \subseteq \uparrow a$，我们有 $x \in F \subseteq \mathrm{int}_{\sigma}(\uparrow a)$。因此，根据引理 4.8， P 是连续的。

□

推论 4.11. 偏序集 P 是连续的，当且仅当 P 是强交连续的，且 ΣP 是核紧的。

证明. 若 P 是连续的，则 P 根据命题 3.3，是强交连续的；并且 ΣP 如定理 4.10的证明所示，是核紧的。反向结论由引理 4.9 和定理 4.10得出。 □

推论 4.12. 设 P 是强交连续的有向完备偏序集。若 ΣP 是核紧的，则 ΣP 是清醒的。

证明. 由推论 4.11， P 是连续的。由于每个连续有向完备偏序集的 Scott 空间都是清醒的 [1]， ΣP 是清醒的。 □

命题 4.13 ([7])。 设 P 是一个有向完备偏序集，则 P 连续，当且仅当每个主理想 $\downarrow z$、 $z \in P$都是连续的。

推论 4.14. 设 P 是强交连续的有向完备偏序集，则 P 连续，当且仅当对每个 $z \in P$， $\Sigma(\downarrow z)$ 都是核紧的。此外，若每个主理想 $\downarrow z$ 中的任意两个元素在该理想中都有上确界，则 P 是连续的。

证明. 固定 $z \in P$并令 $C = \downarrow z$。对于 $U \in \sigma(C)$，定义 $\tilde{U} = U \cup (P \setminus C)$。于是 $\tilde{U} \in \sigma(P)$：显然它是一个上集；若 $D \in \mathcal{D}^{\vee}(P)$ 且 $\bigvee D \in \tilde{U}$，则或者 $\bigvee D \in P \setminus C$，此时 D 与 Scott 开集 $P \setminus C$相交；或者 $\bigvee D \in U \subseteq C$，此时 $D \subseteq \downarrow \bigvee D \subseteq C$，并且由于$\sim U \in \sigma(C)$， D与 U相交。令 $x \in U \in \sigma(C)$。由于 $x \in U \in \sigma(P)$且 P是强交连续的，根据定理 3.2(iv)，存在 $a \in U$ 使得 $a \ll_P x$。由于 $a \leq x \leq z$，我们有 $a \in C$，因此 $a \in U$；并且 C 的每个有向子集在P 中也是有向的，且上确界相同，所以 $a \ll_C x$。根据定理 3.2， C 是强交连续的。应用命题 4.13 和推论 4.11，我们得出： P 连续，当且仅当 $\forall z \in P$； $\downarrow z$ 连续，当且仅当$\forall z \in P$； $\Sigma(\downarrow z)$是核紧的。

假设每个主理想 $C = \downarrow z$ 中的任意两个元素在 C中都有上确界。令 $x \in C$。集合 $\Downarrow_C x$ 非空。给定 a、 $b \in \Downarrow_C x$，它们在 C中的上确界$a \vee_C b$存在，并且 $a \vee_C b \in \Downarrow_C x$: 若 $D \subseteq C$是有向的且满足 $x \leq \bigvee D$，则存在 d_1、 $d_2 \in D$ 使得 $a \leq d_1$ 和 $b \leq d_2$；由有向性可得存在 $d \in D$使得 d_1、 $d_2 \leq d$，因此 $a \vee_C b \leq d$。所以 $\Downarrow_C x$ 是有向的，并且由于 $\bigvee \Downarrow_C x = x$，理想 C 是连续的。由命题 4.13， P 是连续的。 □

5. 结论

在本文中，我们引入了强交连续偏序集，并用 $x \in \mathrm{cl}_{\sigma}(\Downarrow x)$ 对它们进行了刻画。所构造的可数有向完备偏序集在

本文中表明，强交连续性并不蕴含连续性。对于强交连续偏序集，连续性等价于一步闭包或弱一步闭包。每个强 meet 连续偏序集也都具有 Scott 开滤子的基；结合核紧性，这给出了连续偏序集的拓扑刻画。因此，强交连续性在序论近似、一步闭包与 Scott 空间的拓扑学之间建立了联系。在未来的工作中，找出在不假设核紧性的条件下强交连续有向完备偏序集具有 Sober Scott 空间的条件，将是有意义的。

致谢

本工作得到国家自然科学基金委员会（资助项目编号：12331016）的支持。

人工智能声明

作者声明，本文未使用任何人工智能工具。

参考文献

[1] G. Gierz、K.H. Hofmann、K. Keimel、J.D. Lawson、M. Mislove、D.S. Scott，连续格与域，《数学及其应用百科全书》第93卷，剑桥大学出版社，剑桥，2003年。[2] P.T. Johnstone，*Stone* 空间，《剑桥高等数学研究》第3卷，剑桥大学出版社，剑桥，1982年。[3] H. Kou、Y.-M. Liu、M.-K. Luo，关于 meet 连续有向完备偏序集，载于：G.Q. Zhang、J.D. Lawson、Y.-M. Liu、M.-K. Luo（编），域理论、逻辑与计算，《计算中的语义结构》第3卷，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，2003年，第117–135页。[4] X. Mao、L. Xu，基于 Scott 拓扑和sobrification的偏序集拟连续性，《Order》23（4）（2006）359–369。[5] H. Miao、Q. Li、D. Zhao，一步闭包、弱一步闭包与交连续性，《电子理论信息与计算机科学札记》2（2023）第8号，1–8。

[6] D.S. Scott，连续格，载于：F.W. Lawvere（编），拓扑斯、代数几何与逻辑，《数学讲义》第274卷，Springer，柏林，1972年，第97–136页。[7] L. Xu，偏序集上的闭区间连续性与主理想连续性，《扬州大学学报》2（4）（1999年）1–5页（中文）。[8] Z. Zou、Q. Li、W.K. Ho，通过逼近算子研究域，《逻辑方法与计算机科学》14（2:6）（2018）1–17。