arXiv:2611.30386v1 [math.AG] 23 Nov 2026

数域的拟阿贝尔 Cousin 群：伽罗瓦轨道判据与完整列表

KARL OELJEKLAUS

Dedicated to the memory of Aldo Andreotti and Alan T. Huckleberry

Abstract. 设 K 是一个至少有一个复位的数域。选择在每个位 $K \to \mathbb{C}$ 上的一个嵌入 S，可将 K 的整数环嵌入为 $\mathbb{C}^n$中的离散子群，其中 K的素位数为 n 。商群 $T_{K,\,S}$ 是一个 Cousin 群；若 K 是全虚域，则它是一个复环面。我们精确确定了 $T_{K,\,S}$ 何时为拟阿贝尔群。答案是一个伽罗瓦判据： K 的伽罗瓦闭包中，没有任何复共轭会交换所选的两个复嵌入。等价地， S 来自一个子域：该子域在 K的最大实子域的每个位上方至多有一个复位。对于全虚的 K，这就是关于具有复乘的阿贝尔簇的志村—谷山定理；我们的结果将其推广到了所有数域。我们还求出了 N´eron–Severi 群的秩，并证明 $T_{K,\,S}$ 要么是拟阿贝尔群，要么只有常值亚纯函数。

Résumé. *Groupes de Cousin quasi-abéliens des corps de nombres : un critère d'orbites galoisiennes et la liste complète.* 设 K 为一个至少含有一个复素位的数域。在每个位选择 S 一个嵌入 $K \to \mathbb{C}$ 后，整数环 K 可作为 $\mathbb{C}^n$的离散子群嵌入，其中`n 是 K的素位数。商空间T_{KS} 是一个 Cousin群；当 K 为全虚数域时，它是一个复环面。我们精确´确定了T_{KS} 何时为拟阿贝尔。答案是一个Galois判据： K 的伽罗瓦闭包中不存在任何复共轭会交换所选复嵌入中的两个。等价地， S 来自某个子域，该子域在 K的最大全实子域的每个位之上至多有一个复位。对于 K 全虚数的情形，这就是Shimura和Taniyama关于具有复乘法的阿贝尔´´簇的定理；我们的结果将其´推广到所有数域。我们还求出了N´éron–Severi群的秩，并证明T_{KS} 要么是拟阿贝尔的，要么不具有非恒定亚纯函数。

1. Introduction

设 K 为一个数域，它有 r_1 个实位和 r_2 个复位，因此其次数为 $\delta = r_1 + 2r_2$；设 $\mathcal{O}_K$ 为其整数环。在每个位处选择一个嵌入 $K \to \mathbb{C}$；我们将这一选择称为 S。将 $\mathcal{O}_K$ 嵌入 $\mathbb{C}^{r_1+r_2}$ 并除掉所得的子群。结果 $T_{K,\,S}$ 是一个维数为 r_1+r_2 的复阿贝尔李群。当 K 为全虚时（$r_1 = 0$），它是一个复环面；而关于它何时为阿贝尔簇的问题，已由 Shimura 和 Taniyama [24] 解决。当 K 具有实位和复位时，$T_{K,\,S}$ 是一个 Cousin 群：它不是紧的，并且没有非常数的全纯函数 [5, 21, 2]；参见定理 12.1。此时，阿贝尔簇的恰当类比是 拟阿贝尔 群，即 Andreotti 和 Gherardelli 意义下带有充足黎曼形式的群。这个名称源于 Severi。对于 Cousin 群而言，拟阿贝尔性与拟射影性等价；这一点由 Abe 在一般情形下证明 [1], ，参见 [4,主要定理 3.2。21]。

对这些群的研究可追溯至 Andreotti 和 Gherardelli [5, 6]；另见 [17, 16, 2, 26]。它们是自然的研究对象。Dodson 证明，若一个拟阿贝尔簇的自同态代数包含一个次数尽可能大的数域，那么它便来自该域的嵌入，并以该域的一个格代替 $\mathcal{O}_K$ [16]。这些群也出现在复几何中。令 $\mathbb{H}$ 为上半平面。那么$T_{K,\,S}$ 包含区域（$\mathbb{H}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$）$/\mathcal{O}_K$，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号：32M05；次分类号：11R32，11G15，14K22，22E10，05C25。
Key words and phrases. 拟阿贝尔簇，环面群，Cousin 群，数域，黎曼形式，复共轭，伽罗瓦群，CM 型，N´eron–Severi 群。

该区域对适当的单位群取商所得的紧致商空间，正是 Oeljeklaus 和 Toma 的流形 [21, 7]。

另一个动机来自数域与交换代数群之间的经典对应。域 $\mathbb{Q}$ 给出 $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^\times$，其挠点——单位根——生成了 $\mathbb{Q}$的阿贝尔扩张。虚二次域给出具有复乘的椭圆曲线，而 CM 域给出 Shimura 和 Taniyama 的阿贝尔簇。Valli`eres 提议将这一列表继续扩展，纳入任意数域的群 $T_{K,\ S}$，并将$\mathcal{O}_K$ 替换为 K的任意格。他详细研究了非全实的三次域；这些域给出维数为 2、秩为 3 [27]的 Cousin 群。对于 $r_2 = 1$，Dioguardi Burgio、Falcone 和 Galici 证明，$T_{K,\ S}$ 是椭圆曲线 C 被 $(\mathbb{C}^\times)^{r_1}$扩张所得的群。他们将其表示为 C的广义雅可比簇，并在三次域情形下通过 K 的分式理想描述其挠点 [13]。Di Bartolo 和 Falcone [9]确定了椭圆曲线的广义雅可比簇的周期；另见 [12, 10]。在判别式满足某些假设的情况下，Dioguardi Burgio 证明，每个具有 $r_2 = 1$ 的数域都可作为一个环面群的自同态代数出现，且该群的实秩比其复秩大一 [11]。广义雅可比簇源自 Rosenlicht [22]。它们是用线性群扩张曲线的雅可比簇而得的交换代数群，Serre 将其作为几何类域论的基础 [23]。对于 $r_2 \geq 2$，自然的类比是用环面扩张阿贝尔簇。这类扩张恰好是 Andreotti 和 Gherardelli 意义下的 0 型拟阿贝尔群 [5, 4]。这也是我们要探究哪些群$T_{K,\ S}$ 是拟阿贝尔群的原因之一。

哪些数对（K，S）对应拟阿贝尔群？对于 $r_2 = 1$，它们全都对应拟阿贝尔群 [5, 17]。已有若干已知的族 [5, 6, 15, 3], ，它们都源自两种构造。第一种称为迹形式判据，它利用 K 的一个全实子域 K_0，该子域上方的复位 K 分布得较为分散：每个位上至多有一个。这个名称让人想起这些群最初被证明为拟阿贝尔群的方式：借助形如 $\mathrm{Tr}_{K_0/\mathbb{Q}} \circ \Phi$ 的黎曼形式，即从 K_0 到 $\mathbb{Q}$ 取迹，其中 K上的一个合适的 K_0值交错形式 Φ。对于 CM 域和$K_0 = K^+$，这是 Shimura 和 Taniyama 的经典形式 $\mathrm{Tr}^{K/\mathbb{Q}}(\nu x\bar{y})$，其中 $\bar{\nu} = -\nu$，因为 $\mathrm{Tr}^{K/K_0}(\nu x\bar{y}) = \nu(x\bar{y} - \bar{x}y)$ 属于 K_0。第二种构造由 Dodson 提出，它将一个拟阿贝尔群从子域 [15]提升上来。Dodson 还证明了一个初步的逆命题。若T_K，S 有一个特殊对角形状的充足黎曼形式，那么 S 便是从一个在全实域 [15, 之上为二次扩张的子域提升而来的（命题 2.2]）。Abe 证明，每个 T_K，S 都带有一个厄米形式，它在复方向上为正，且其虚部取值于某个实数域的整数环中，不一定取值于 $\mathbb{Z}$ [2, （定理 4.3]）。他指出，当时尚不清楚这类群距离拟阿贝尔群究竟有多远。另一方面，Umeno 证明，对于 $K = \mathbb{Q}(2^{1/5})$ 以及 S 的一种取法，T_K的 N´eron–Severi 群为零，因此T_K，S只有常值亚纯函数 [26]。Dioguardi Burgio 通过对 Umeno 的周期关系进行显式计算，将这一结果推广到了纯单生成五次域，以及一类具有本质多项式的五次域；每种情形下均针对 S 的一种取法（ [10, §3.2.1]）。本文将彻底回答这个问题。答案有两种形式。

第一条是用伽罗瓦群表述的判据（定理2.1）：$T_{K,\ S}$ 是拟阿贝尔的，当且仅当伽罗瓦闭包的任一复共轭都不会交换所选复嵌入中的两个。这里，复共轭是指伽罗瓦闭包在某个嵌入到 $\mathbb{C}$ 的嵌入下，由复共轭诱导的自同构。其背后的思想很简单。将 K 上的一个有理交错形式写成按嵌入索引的坐标形式。要成为厄米形式的虚部，某些系数必须为零，而正定性要求另一些系数非零。但伽罗瓦群会置换一个有理形式的系数，因此一个零值会沿着整个轨道传播。这就给出了一个方向。对于另一个方向，我们证明，在具有所需零值的实形式中，有理形式是稠密的，并取一个接近某个按构造具有正定性的实形式的有理形式。

第二种形式是一个列表（定理 2.4）。上述两种构造结合起来便给出了全部结果：$T_{K,\ S}$ 是拟阿贝尔的，当且仅当 S 来自某个子域 K'，使得在最大实子域 K^+ 的每个素位之上，至多有一个复位

K'。这个子域是唯一的，并且不依赖于 S。根据 Dodson 定理，每个拟阿贝尔T_{KS} 都同源于某个群的幂，而迹形式判据可直接应用于该群（推论 10.3）。对于给定的 K ，拟阿贝尔群 T_{KS} 的数量因此为 0 或 2^{r_2}（K_c）。这里， K_c 是一个仅由伽罗瓦群和复共轭决定的子域，而 r_2（K_c）是其复位的数量。证明从第一个判据出发，不再回到黎曼形式。一切都发生在同一个图 Γ中。其顶点是 K的嵌入；当某个复共轭交换其中两个嵌入时，就在它们之间连边。一个拟阿贝尔 S 给出了复嵌入的正常二着色：相同颜色的两个嵌入之间绝不会有边相连。事实证明，这是一个很强的限制： Γ 的每个连通分支随后必为二分图或完全多部图，而各部构成伽罗瓦群的一个区块系。子域 K_c 就是与这个区块系相对应的子域。我们所使用的少量图论概念将在第 8 节和第 10 节中回顾。

余下各节给出一些推论。N´eron–Severi 群的秩是轨道长度之和（第 6 节）。迹形式判据和 Dodson 提升定理可由轨道判据简短地证明（第 7 节）。志村—谷山定理有两种推导方式：一方面，它是列表中的 $r_1 = 0$ 情形；另一方面，还可通过直接计数论证得到（第 11 节）。迹形式判据还有一个逆命题。它表明，$T_{K,S}$ 对于 每个 S都是拟阿贝尔的，当且仅当迹形式判据对 $K_0 = K^+$成立。除 $\mathbb{Q}$ 和自身之外没有其他子域的域，例如次数为素数的域，只有在 $r_2 = 1$时才产生拟阿贝尔群。如果该判据不满足，那么 $T_{K,S}$ 只有常值亚纯函数（第 12 节）。第 13 节包含一些例子。

2. 设置与陈述

2.1. 群 $T_{K,\,S}$。 令 $\Sigma = \mathrm{Hom}(K,\ \mathbb{C})$。它由实嵌入 $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$以及 r_2 对复共轭嵌入组成。我们始终假设 $r_2 \geq 1$。一个代表元系 是一个集合

$$S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}, \tau_1, \dots, \tau_{r_2}\}$$

其中每个位恰含一个嵌入：所有实嵌入，以及每对复共轭嵌入中的一个。这样的系统共有 2^{r_2} 个。固定 S 后，我们对复嵌入编号，使得 $\tau_1, \dots, \tau_{r_2}$ 是 S 中的嵌入；它们的共轭元 $\bar\tau_1, \dots, \bar\tau_{r_2}$ 是不属于 S 的复嵌入。令 $g = r_1 + r_2$ 并

$$u\colon K \to \mathbb{C}^g, \quad u(a) = \big(\rho(a)\big)_{\rho\in S}, \qquad \Lambda = u(\mathcal{O}_K), \qquad T_{K,S} = \mathbb{C}^g/\Lambda.$$

$\mathbb{R}$-线性扩张 $u_{\mathbb{R}}\colon K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ 是一个同构，因此 Λ 是秩为 δ 的离散群，其实张成空间为 $\mathbb{R}\Lambda = \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$，而 $\mathbb{R}\Lambda$ 的最大复子空间是

$$F = \mathbb{R}\Lambda \cap \mathrm{i}\,\mathbb{R}\Lambda = \{0\} \times \mathbb{C}^{r_2}.$$

2.2. 拟阿贝尔群。 按照 Andreotti 和 Gherardelli 的说法， [6, 4], 对于T_K充足黎曼~形式S , H 是定义在 $\mathbb{C}^g$ 上的厄米形式，满足

$$\widetilde{H} \text{ is positive definite on } F \qquad \text{and} \qquad \operatorname{Im}\widetilde{H}(\Lambda \times \Lambda) \subseteq \mathbb{Z},$$

并且 $T_{K,\,S}$ 当且仅当它具有一个拟阿贝尔形式。正定性只要求在 F上成立，也就是说，只要求在复位的 r_2坐标上成立。实方向上不施加任何条件；这正是非紧情形与众不同之处。对于 $r_1 = 0$ ，我们有 $F = \mathbb{C}^g$，而充足黎曼形式就是经典意义下的黎曼形式。

Andreotti 和 Gherardelli 提出这一定义，用于描述具有代数簇结构的商空间 [5, 6]。Abe [1]一般性地证明了环面群是拟阿贝尔的当且仅当它是拟射影的；参见 [4, 定理 3.1.18 和主定理 3.2.21]。对于 $r_1 = 0$ 而言，这就是经典结论：带有黎曼形式的复环面是阿贝尔簇。

2.3. 伽罗瓦数据。设 K 是 K 在 $\mathbb{C}$中的伽罗瓦闭包，并令 $G=$ 为 Gal$(K/\mathbb{Q})$。一般而言， K 严格大于 K。事实上， $K=K$ 意味着 K 在 $\mathbb{Q}$上是伽罗瓦的；于是K 的所有嵌入都有相同的像，因此 K 是全实或全虚的，而前一种情形因 $r_2\geq 1$而被排除。因此，只要 $r_1\geq 1$，就有 $K\neq K$ 。对于 $r_1=0$，等号成立当且仅当这些域是伽罗瓦域，例如分圆域；但也包括诸如 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\zeta_3)$ 这样的非 CM 域。我们始终将 K 视为 $\mathbb{C}$的一个固定子域。于是， K 到 $\mathbb{C}$ 的每个嵌入都将的值取在 K中，从而 $\Sigma=\mathrm{Hom}(K,K)$。群 G 通过 $\gamma\cdot\rho=\gamma\circ\rho$传递地作用在 Σ 上。 $\mathbb{C}$ 的复共轭将 K 映到自身，并限制为一个 $c\in G$。它固定实嵌入，并交换τ_j 和 $\bar{\tau}_j$。它的共轭元 $\gamma c\gamma^{-1}$ 就是 K 从其到 $\mathbb{C}$ 的其他嵌入中继承的复共轭；我们将它们全部称为 K的复共轭。一般而言，它们与 c不同。字母 c专用于特指的那个复共轭，即 $\mathbb{C}$的复共轭的限制；对于嵌入，“实”和“复”这两个词始终指的是它： ρ 为实的当且仅当 $c\rho=\rho$。我们记 $\mathcal{D}$ 为复共轭的集合，记 $N=\langle\mathcal{D}\rangle$为它们生成的 G 的正规子群。

群 G 还作用于不同嵌入构成的无序对集合 $\{\rho,\rho'\}$ 。有两类对值得关注：

- 对角对 $\{\tau_j,\bar{\tau}_j\}$, $j=1$、……、 r_2。它们是 c 的二循环，且不依赖于 S；
- 禁对 $\{\tau_j,\tau_k\}$， $j\neq k$：两个不同的复嵌入构成的对，且二者都属于 S。与对角对不同，它们依赖于 S：若将 $\bar{\tau}_j$ 置入 S ，以替代 τ_j，禁对 $\{\tau_j,\tau_k\}$ 就会变为 $\{\bar{\tau}_j,\tau_k\}$。它们仅在 $r_2\geq 2$时存在。其名称源自引理 4.1：满足 (H) 的形式在这些对上必须取零。

定理 2.1 （轨道判据）。设 K 是一个满足 $r_2\geq 1$ 的数域，并令 S 为一个代表元系。以下条件等价。

(a) $T_{K,\ S}$ 是拟阿贝尔的。*(b)* 没有任何 G在嵌入有序对上的轨道同时包含一个对角对和一个禁对。*(c)* K 的复共轭不会互换属于 S的两个不同复嵌入τ_j 和 τ_k 。

条件 (b) 和 (c) 仅涉及 Σ上的置换群 G 、元素 c 和集合 S。因此，判断$T_{K,\ S}$ 是否为拟阿贝尔的，是一个有限组合问题。可以立即看出以下三种情形。

推论 2.2。*(i)* 若 $r_2=1$，则$T_{K,\ S}$ 是拟阿贝尔的。

(ii) 若 $r_2\geq 2$ 和 G 在嵌入对上作用传递（例如，当 G 在 Σ上传递地作用且为2-传递时），则对任意 S，$T_{K,\ S}$ 都不是拟阿贝尔的。*(iii)* 若 K 是 *CM* 域，则 c 在 G中是中心的，并且对每个 S，$T_{K,\ S}$ 都是阿贝尔簇。

证明。 对于 $r_2=1$，不存在禁对。在情形 (ii) 中，只有一个轨道，其中包含两类对：由于 $r_2\geq 1$，对角对存在；由于 $r_2\geq 2$，禁对也存在。

(iii) 设 $K=K(\sqrt{\beta})$，其中 L 上的全实且 β 的共轭元全负。根是 K 的伽罗瓦闭包，L 上的全实且 β 的共轭元全负。根是 K 的伽罗瓦闭包，其中 L 上的全实且 β 的共轭元全负。根是 K 的伽罗瓦闭包，而这些共轭元均为全负。在 K 到 $\mathbb{C}$ 的每个嵌入下，复共轭因此固定 L，并改变这些平方根各自的符号。因此，K 的所有复共轭都重合，即 c 在 G 中是中心元。于是唯一的复共轭就是 c 本身，它将每个 τ_j 与 $\bar{\tau}_j\notin S$ 互换。因此，定理 2.1 的条件 (c) 成立，并且 $T_{K,\ S}$ 是阿贝尔簇，因为它是紧的 $r_1=0$。□

(i) 部分是经典结果：这样的群有无穷多种方式纤维化于椭圆曲线上 [5, 17]；另见 [15, 注 3.2]。

第（iii）部分是经典事实：每个 CM 域的 CM 型都会给出一个阿贝尔簇；参见定理 11.2 ，其中给出了紧致情形下的一般性表述。

第（ii）部分涵盖了伽罗瓦群为完整对称群的域，这是一般情形。它还涵盖 $K=\mathbb{Q}(2^{1/5})$（符号为（1，2））的情形：其中存在阶为 20 的 Frobenius 群，它在五个嵌入上是 2-传递的。这恢复了 Umeno 的结果 [26]。

2.4. 子域、块与提升。 第二个主要结果用子域来表述。子域 始终是 K的子域。

嵌入与位。 对于子域 L，令 $\Sigma(L)=\mathrm{Hom}(L,\mathbb{C})$。若嵌入 $\iota\in\Sigma(L)$ 满足实 条件，即 $\iota(L)\subseteq\mathbb{R}$，也就是说，若 $c\circ\iota=\iota$。 L 的实位是其实嵌入，其复位是非实嵌入的对 $\{\iota,c\circ\iota\}$；$r_1(L)$ 和 $r_2(L)$ 分别表示它们的数量。若 $L\subseteq L'$ 是子域，则 L' 的一个位位于 L 的某个位之上，该位由将其嵌入限制到 L而得到。

块。 限制映射 $\rho\mapsto\rho|_L$ 将 Σ 映到 $\Sigma(L)$ 上，并且与 G 的作用可交换。其纤维

$$\Sigma_\iota=\{\rho\in\Sigma:\ \rho|_L=\iota\},\qquad \iota\in\Sigma(L),$$

是 L上的块。它们划分了 Σ，每个块含有 $[K:L]$ 个元素，并且 G 对它们进行置换：$\gamma\Sigma_\iota=\Sigma_{\gamma\iota}$。反过来， Σ 的每个由 G 置换的划分，都恰好由~个子域以这种方式产生。（将 Σ 与 G/G_K相对应，其中 $G_K=\mathrm{Gal}(K/K)$；这类划分对应于介于 G_K 和 G之间的子群，因而对应于 K的子域。）更大的子域给出更细的划分。特别地， G 的一个正规子群的轨道，就是某个子域上的块。由于 $c\Sigma_\iota=\Sigma_{c\iota}$，嵌入 ι 是实嵌入，当且仅当 c 将块 Σ_ι 映射到自身；这样的块由实嵌入以及成对的复共轭嵌入组成，后者正是 K 在 ι之上的复位。

域 K^+。 如果一个子域的所有嵌入都是实嵌入，则称其为全实 子域。两个全实子域的复合域仍然是全实的，因此 K 具有一个最大实子域，记为 K^+。如果子域 L 包含 K^+，那么 K^+ 也是L的最大实子域。 K^+ 上的块可以用复共轭来描述。

引理 2.3。 K 的两个嵌入属于同一个 N-轨道，当且仅当它们在 K^+上的限制相同；也就是说， N-轨道就是关于 K^+的块。 G-不变的 Σ 划分的所有块均在 c 作用下保持不变，当且仅当该划分比按 N-轨道划分更粗。

~证明。 设 L 是介于 $\mathbb{Q}$ 与 K之间的一个域。它的嵌入是形如 $\gamma|_L$ 且满足 $\gamma\in G$的限制，并且 $\gamma|_L$ 是实的，当且仅当 $\gamma^{-1}c\gamma$ 逐点固定 L 。因此， L是全实的，当且仅当~ N 固定 L。所以， N 的不动域是 K的最大实子域，而它与 K的交为 K^+。将 Σ与 G/G_K等同起来。 N的 γG_K-轨道是 $N\gamma G_K=\gamma NG_K$，且为 $NG_K=\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K^+)$，因为其不动域是 $K\cap\widetilde{K}^N=K^+$。因此， N的 $\gamma|_K$-轨道由在 K^+上与 γ 一致的嵌入组成。关于最后一个断言： c将 G-不变划分的每个块映射到自身，当且仅当 c 的每个共轭元都如此；也就是说，当且仅当 N 如此。这意味着每个块都是 N-轨道的并。□

提升。 设 K' 为一个子域， $S'\subseteq\Sigma(K')$ 为 K' 的一个代表元系。遵循 Dodson [15], 的说法，我们称 S 是从 S' 提升而来的，如果

(L1) K 上方没有实位，且

(L2) $S=\{\rho\in\Sigma:\ \rho|_{K'}\in S'\}$。

若不满足 (L1)，则 (L2) 中定义的集合就不是代表元系。若 S 是从某个 S'提升而来的，我们就称 S 是从 K' 提升而来的；此时， $S'=\{\iota:\ \Sigma_\iota\subseteq S\}$ 由 S 确定。每个 S 都是从其自身 K 提升而来的。就 K' 上方的块而言， S 是从 K' 提升而来的，当且仅当每个块都位于 S 或 $\Sigma\setminus S$ 中，并且每个被 c 映至自身的块都由实嵌入组成。若 (L1) 成立，则从 K' 提升而来的系统与 K' 的代表元系之间存在双射，因此这样的系统有 $2^{r_2(K')}$ 个。

可容许对。 一个子域对 $(K',\ K_0)$，其中 $K_0\subseteq K'$，当且仅当 可容许 K_0 为全实域，且在 K_0 的每个位之上至多有一个 K' 的复位。由于 $\mathbb{Q}$ 是具有一个位的全实域，$(K',\ \mathbb{Q})$ 可容许，当且仅当 $r_2(K')\le 1$。

我们约定如下字母用法： K' 是构造 时所取的子域， K_0 是一个可容许对中的全实成员，并且 K^+ 始终是K的最大全实子域。字母 K_c 专用于一个特定的子域，该子域由 G和 c在第10节中构造。

定理 2.4（完整列表）。 设 K 为一个数域， $r_2 \geq 1$ ，且 S 为一个代表元系。以下各项等价。

(a) $T_{K,\,S}$ 是拟阿贝尔的。*(b)* S 来自一个子域 K' ，且 (K', K^+) 是可容许的。特别地， $K^+ \subseteq K'$，并且在 K^+ 的每个位之上至多有一个 K'的复位。*(c)* S 来自一个子域 K' ，使得 $(K'$

$, K_0)$ 对于某个子域 $K_0 \subseteq K'$是可容许的 .

此外，假设某个 $T_{K,\,S}$ 是拟阿贝尔的。那么，对于所有拟阿贝尔的 $T_{K,\,S}$，*(b)* 中的同一个子域 K' 均成立，且不存在其他子域。我们将其记为 K_c；第 *10*节将用 G 和 c对其进行描述。拟阿贝尔的 $T_{K,\,S}$ 恰好是那些 S 来自K_c的，并且共有 $2^{r_2}\,(K_c)$ 个。

蕴含关系 (b)⇒(c) 显然成立，其中 $K_0 = K^+$，而 (c)⇒(a) 将迹形式判据与 Dodson 提升定理（第 7 节）结合起来。核心内容是 (a)⇒(b)，这部分占据第 8–10 节。条件 (c) 包含引言中的两种构造： $K' = K$ 是迹形式判据，而 $K_0 = \mathbb{Q}$表示 S 是从一个子域 K' 提升而来，且 $r_2(K') = 1$。对 r_1 不作任何假设。对于 $r_1 = 0$ ，定理给出 Shimura–Taniyama 结果（第 11 节）。

注 2.5（其他格）。 在两个定理中，环 $\mathcal{O}_K$ 都可以替换为 K 的任意秩为 δ的有限生成子群 $\mathfrak{a}$ ，例如一个整环或一个分式理想。事实上， $\mathfrak{a}$与 $\mathcal{O}_K$ 可公度：每一个都包含另一个的某个整数倍。因此，群$\mathbb{C}^g/u(\mathfrak{a})$ 与 $T_{K,S}$ 同源，并且其中一个群的充足黎曼形式乘以适当的整数倍后，就是另一个群的充足黎曼形式。这些正是引言中引用的 Dodson 结果所涉及的群 [16]。对于分式理想，文献 [12] 也对它们进行了考察。

3. Riemann forms as rational forms on K

我们首先将问题从 $\mathbb{C}^g$ 转移到 K。令 $F_K = u_{\mathbb{R}}^{-1}(F) \subseteq K \otimes \mathbb{R}$；它由满足对所有实数 σ_i均有 $\sigma_i(x) = 0$ 的x 组成。它带有复结构 $J = u_{\mathbb{R}}^{-1} \circ \mathrm{i} \circ u_{\mathbb{R}}$，因此$\tau_j(Jx) = \mathrm{i}\,\tau_j(x)$。对于 $\mathbb{Q}$-双线性形式 E在 K上，我们将其 $\mathbb{R}$-双线性扩张记为 $E_{\mathbb{R}}$，定义在$K \otimes \mathbb{R}$上。

命题 3.1。 $T_{K,\,S}$ 是拟阿贝尔的，当且仅当存在交错的 $\mathbb{Q}$-双线性形式E： $K \times K \to \mathbb{Q}$ 使得

(I) ： $E(\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K) \subseteq \mathbb{Z}$； **(H)** ： $E_{\mathbb{R}}(Jx,\ Jy) = E_{\mathbb{R}}(x,\ y)$ 对所有 x、$y \in F_K$均成立； **(P)** ： 形式 $H(x,\ y) = E_{\mathbb{R}}(Jx,\ y) + \mathrm{i}\,E_{\mathbb{R}}(x,\ y)$ 在 F_K上是正定的。

条件 (H) 恰好说明 H 对于复结构 J是厄米的。证明依赖一个简单的扩张引理。我们使用坐标 $(\zeta, z) \in \mathbb{C}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ 在 $\mathbb{C}^g$ 上，使得$W := \mathbb{R}\Lambda = \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ 且 $F = \{0\} \times \mathbb{C}^{r_2}$。厄米形式对第一个变量是线性的。

引理 *3.2.* 设 ω是 W上的实交替形式，满足 $\omega(iv, iw) = \omega(v, w)$，其中 $v, w \in F$。那么 存在 $\mathbb{C}^g$上的厄米形式 H，其在 $W \times W$上的虚部为 $H = \omega$，并且 $H(v, w) = \omega(iv, w) + i\,\omega(v, w)$，其中 $v, w \in F$。

证明。我们逐块构造 H。在 F上令 $H_F(z, z') = \omega(\mathrm{i}z, z') + \mathrm{i}\,\omega(z, z')$； ω 关于 i 的不变性正是使 H_F 成为厄米形式的原因。在实方向上，令 $A = (\omega(e_k, e_l))$ 为实反对称 $r_1 \times r_1$ 矩阵，并令 $H_1(\zeta, \zeta') = \mathrm{i}\sum_{k,l} A_{kl}\,\zeta_k \zeta_l'$；这是厄米的，并且对于实的 s, s'， $\mathrm{Im}\ H_1(s, s') = \omega(s, s')$。对于混合项， $\lambda_k(z) = \omega(e_k, z)$ 是 $\mathbb{C}^{r_2}$上的实线性形式，而 $\mu_k(z) = -\lambda_k(\mathrm{i}z) + \mathrm{i}\,\lambda_k(z)$ 是满足 $\mathrm{Im}\,\mu_k = \lambda_k$ 的唯一共轭线性形式。令 $\beta(\zeta, z') = \sum_k \zeta_k\,\mu_k(z')$，并且

$$\widetilde{H}\big((\zeta, z), (\zeta', z')\big) = H_1(\zeta, \zeta') + \beta(\zeta, z') + \overline{\beta(\zeta', z)} + H_F(z, z').$$

这是厄米的。对于 s'，实的，$\mathrm{Im}\ \beta(s,\ z') = \omega(s,\ z')$，且 $\mathrm{Im}\,\overline{\beta(s',\ z)} = -\omega(s',\ z) = \omega(z,\ s')$，因此 $\widetilde{H} = \omega$ 上的 Im，以及在 F 上仅剩下 H_F。□

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$命题 3.1 的证明。设 H 为一个充足黎曼形式，并令 $E(a,b) = \mathrm{Im}\ H(u(a)\ u(b))$，其中 $a,b \in K$。它是交替的，在 $\mathcal{O}_K$ 上取整数值，因此是有理的，因为 K 中的任意元素的某个倍数都属于 $\widetilde{\ }\ \mathcal{O}_K$。其在实数上的延拓为 $E_{\mathbb{R}}(x,y) = \mathrm{Im}\ H(u_{\mathbb{R}}x, u_{\mathbb{R}}y)$。恒等式 $\mathrm{Im}\ H(\mathrm{i}v, \mathrm{i}w) = \mathrm{Im}\, H(v,w)$ 给出 (H)。由 $\mathrm{Im}\ H(\mathrm{i}v, w) = \mathrm{Re}\ H(v,w)$，可得在 F_K 上 $H(x,y) = \backsim H(u_{\mathbb{R}}x, u_{\mathbb{R}}y)$，且它是正的：这就是 (P)。

反过来，设 E 满足 (I)、(H) 和 (P)。将 $E_{\mathbb{R}}$ 传输到 W，通过 $u_{\mathbb{R}}$ 并应用引理3.2。$\widetilde{\ }$所得的厄米形式 H 限制在 F 上时，等于 H的传输；根据 (P)，它是正的，$\widetilde{\ }$并且根据 (I)，$\mathrm{Im}\ H(\Lambda\times\Lambda) = E(\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K) \subseteq \mathbb{Z}$ □

4. Coordinates indexed by the embeddings

固定 $\mathcal{O}_K$ 的一组整基 $\omega_1, \dots, \omega_\delta$。它是 K 的 $\mathbb{Q}$-基，并且对于每个包含 $\mathbb{Q}$ 的域 k，它都是 k 上 $K \otimes_{\mathbb{Q}} k$ 的一组基。对于 $x \in K \otimes k$，我们用 $[x] \in k^\delta$ 表示其坐标向量。令

$$M = \big(\rho(\omega_a)\big)_{\rho\in\Sigma,\ 1\le a\le\delta} \in M_\delta(\widetilde{K}),$$

每个嵌入对应一行。对于 $x \in K\otimes\mathbb{C}$，向量 $M[x]$ 为 $(\rho(x))_{\rho\in\Sigma}$，其中 $\rho(x)$ 表示 ρ 的 $\mathbb{C}$-线性扩张。矩阵 M 可逆，因为 $(\det M)^2$ 是 K 的判别式。因此，$x \mapsto M[x]$ 将 $K\otimes\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{C}^\Sigma$ 对应起来。设 $e_\rho \in K\otimes\widetilde{K}$ 为满足 $M[e_\rho]$ 在 ρ 处取单位向量的元素；其坐标向量 $[e_\rho]$ 是 M^{-1} 的第 ρ 列。于是，每个 $\backsim x \in K\otimes\mathbb{C}$ 都是 $x = \sum_\rho \rho(x)\, e_\rho$。（$e_\rho$ 是代数 $K\otimes K$ 的本原幂等元，但我们不会用到这一点。）

伽罗瓦群以最简单的方式作用于 M。对于 $\gamma \in G$，令 $\gamma(M)$ 表示将 γ 应用于每个条目后得到的结果。由于 $\gamma(\rho(\omega_a)) = (\gamma\rho)(\omega_a)$，$\gamma(M)$ 中索引为 ρ 的行就是 M 中索引为 $\gamma\rho$ 的行：

$$\gamma(M) = P_\gamma M, \tag{1}$$

其中，P_γ 是置换矩阵，对于任何按 Σ 编索引的矩阵 X，其行的 $(P_\gamma X)_\rho = X_{\gamma\rho}$。换言之：$\gamma$ 对 M 的行进行置换。对于 $\gamma = c$，这表示为 $M = P_c M$。

形式的条目。对于一个域 $k \supseteq \mathbb{Q}$，$K\otimes k$ 上的交替 k-双线性形式 E 由其格拉姆矩阵 $B = (E(\omega_a,\ \omega_b)) \in \mathrm{Alt}_\delta(k)$ 给出，通过 $E(x,\ y) = [x]^{\mathsf{T}} B\,[y]$；我们将格拉姆矩阵为 B 的形式记为 E^B。K 上的有理形式对应于 $\mathrm{Alt}_\delta(\mathbb{Q})$，而 $K\otimes\mathbb{R}$ 上的实形式对应于 $\mathrm{Alt}_\delta(\mathbb{R})$。它们各自都以相同的格拉姆矩阵延拓到 $K\otimes\mathbb{C}$，我们对延拓仍使用同一个字母。$E = E^B$ 的条目矩阵为

$$\mathcal{E}(B) = (M^{-1})^{\mathsf{T}}\, B\, M^{-1} = \big(E_{\rho\rho'}\big)_{\rho,\rho'\in\Sigma}, \qquad E_{\rho\rho'} = E(e_\rho, e_{\rho'}),$$

且由于 $[x] = M^{-1}(M[x])$，

$$E(x,y) = (M[x])^{\mathsf{T}}\, \mathcal{E}(B)\, (M[y]) = \sum_{\rho,\rho'\in\Sigma} \rho(x)\, \rho'(y)\, E_{\rho\rho'}. \tag{2}$$

在 B 中，有理性显而易见；正如我们将看到的，复结构在 $\mathcal{E}(B)$ 中也显而易见。这些条目是反对称的，$E_{\rho'\rho} = -E_{\rho\rho'}$，因此说 E 在无序对上为零是有意义的。具体而言，$\mathcal{E}(B)$ 的定义给出

$$E^B_{\rho\rho'} = \sum_{a,b=1}^{\delta} (M^{-1})_{a\rho}\, (M^{-1})_{b\rho'}\, B_{ab}.$$

$\rho(\omega_a)$ 的项属于 $\widetilde{K}$，因此 M^{-1} 的项也属于 $\widetilde{K}$。于是，每个 $E^B_{\rho\rho'}$ 都是格拉姆矩阵中各项 B_{ab} 的线性组合，其系数属于 K，且不依赖于 B。特别地，当 B 是有理的时，$E^B_{\rho\rho'} \in \widetilde{K}$。

字典。令 $x, y \in F_K$，并记 $z_j = \tau_j(x)$、$w_k = \tau_k(y)$。那么 $\sigma_i(x) = 0$ 且 $\bar\tau_j(x) = \bar z_j$，而 J 将 z_j 乘以 i，并将 $\bar z_j$ 乘以 $-$i。用 M 表示，

$$M[Jx] = \Delta_S\, M[x] \qquad (x \in F_K),$$

whe关于 Δ_S，在每个 σ_i 处取值为 0、在每个 τ_j 处取值为 i、在每个 $-$ 处取值为 i 的对角矩阵 .

引理 4.1。设 E 是 $K \otimes \mathbb{R}$ 上的实交替形式。

(i) $E_{c\rho,\ c\rho'} = \overline{E_{\rho\rho'}}$ 对所有 ρ、ρ' 均成立。*(ii)* 对于 x、$y \in F_K$，

$$E(Jx, Jy) - E(x, y) = -2 \sum_{j,k} \Big(E_{\tau_j\tau_k}\, z_j w_k + E_{\bar\tau_j\bar\tau_k}\, \bar z_j \bar w_k \Big).$$

因此，当且仅当 E 在所有禁对上均为零时，E 满足 *(H)*。*(iii)* 如果 E 满足 *(H)*，则 $H(x, y) = E(Jx, y) + \mathrm{i}E(x, y) = \sum_{j,\ k} h_{jk}\, z_j \bar w_k$ 其中 $h_{jk} = 2\mathrm{i}\, E_{\tau_j\bar\tau_k}$。因此，当且仅当厄米矩阵 $h = (h_{jk})$ 为正定时，*(P)* 成立。特别地，对于每个 j，*(P)* 蕴含 $E_{\tau_j\bar\tau_j} \neq 0$：$E$ 不在任何对角对上为零。

证明。(i) 格拉姆矩阵 B 是实的。在 $\mathcal{E}(B) = (M^{-1})^{\mathsf T} B M^{-1}$ 中取复共轭并利用 $M = P_c M$，从而 $\overline{M^{-1}} = M^{-1} P_c^{\mathsf T}$，我们得到

$$\overline{\mathcal{E}(B)} = P_c\, (M^{-1})^{\mathsf T} B M^{-1} P_c^{\mathsf T} = P_c\, \mathcal{E}(B)\, P_c^{\mathsf T},$$

这就是逐项成立的 (i)。

(ii) 由（2）和 $M[Jx] = \Delta_S M[x]$,

$$E(Jx, Jy) - E(x, y) = (M[x])^{\mathsf T} \big(\Delta_S\, \mathcal{E}\, \Delta_S - \mathcal{E} \big) (M[y]).$$

x 和 y 在实嵌入处的坐标均为零。在 $(\tau_j, \bar\tau_k)$ 和 $(\bar\tau_j, \tau_k)$ 处，矩阵 $\Delta_S \mathcal{E} \Delta_S$ 与 $\mathcal{E}$ 具有相同的元素，因为 $\mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i}) = 1$；在 (τ_j, τ_k) 和 $(\bar\tau_j, \bar\tau_k)$ 处，符号则改变。这便得到了该公式。其右侧对所有 z, w 都为零，当且仅当所有 $E_{\tau_j\tau_k}$ 和 $E_{\bar\tau_j\bar\tau_k}$ 均为零，因为这两个和关于 (z, w) 分别是全纯和反全纯的。由 (i) 可知，后者是前者的共轭元，而且 $E_{\tau_j\tau_j} = 0$ 无论如何都成立。因此，(H) 意味着对于 $j \neq k$，$E_{\tau_j\tau_k} = 0$ 。

（iii）同理

$$H(x, y) = E(Jx, y) + \mathrm{i}E(x, y) = (M[x])^{\mathsf T}\, (\Delta_S + \mathrm{i}I)\, \mathcal{E}\, (M[y]).$$

对角矩阵 $\Delta_S + \mathrm{i}I$ 在 τ_j 处为 $2\mathrm{i}$，在 $\bar\tau_j$ 处为 0，并且 x 在实嵌入下的坐标均为零。因此，只有 τ_j 的行有贡献：$H(x,\ y) = 2\mathrm{i} \sum_{j,\ k} \big(E_{\tau_j\tau_k} z_j w_k + E_{\tau_j\bar\tau_k} z_j \bar w_k \big)$。在条件 (H) 下，第一个求和为零。□

总结如下：条件（H）要求禁对上的值为零，而条件（P）要求对角对上的值非零。问题在于，有理的形式 能否同时做到这两点。下一个引理是唯一涉及有理性的地方。

引理 4.2（伽罗瓦等变性）。设 $B \in \mathrm{Alt}_\delta(K)$ 和 $\gamma \in G$，并令 $\gamma(B)$ 表示对每个条目应用 γ 所得的结果。那么

$$E^{\gamma(B)}_{\gamma\rho,\gamma\rho'} = \gamma\big(E^B_{\rho\rho'}\big) \qquad \textit{for all } \rho, \rho' \in \Sigma.$$

特别地，如果 E 是有理形式，则 $E_{\gamma\rho,\ \gamma\rho'} = \gamma\,(E_{\rho\rho'})$；如果 E 在一对元素上为零，那么它在该对元素的整个 G-轨道上都为零。

证明。对所涉及矩阵的每个元素应用 γ；这一操作与求和、乘积、转置和逆矩阵运算可交换。根据（1），$\gamma(M^{-1}) = (P_\gamma M)^{-1} = M^{-1} P_\gamma$，因此

$$\gamma\big(\mathcal{E}(B)\big) = \big(M^{-1} P_\gamma^{\mathsf T}\big)^{\mathsf T}\, \gamma(B)\, M^{-1} P_\gamma^{\mathsf T} = P_\gamma\, \mathcal{E}\big(\gamma(B)\big)\, P_\gamma^{\mathsf T}.$$

该条目 右侧中指数为（ρ，ρ'）的 y 是 $E^{\gamma(B)}_{\gamma\rho\ \gamma\rho'}$。如果 B 是有理的，则 $\gamma(B) = B$。 □

5. Proof of the orbit criterion

(b) $\Leftrightarrow$ (c)。对角对的 G-轨道由形如 $\gamma\{\tau, c\tau\} = \{\gamma\tau, (\gamma c\gamma^{-1})\gamma\tau\}$ 的对组成，其中 τ 是一个复嵌入。这些恰好是满足以下条件的对：$\{\rho, c'\rho\}$，其中 c' 是 K 的复~复共轭。因此，当且仅当某个复共轭将 τ_j 映射到 τ_k时，禁对 $\{\tau_j, \tau_k\}$ 才属于某个对角对的轨道。

(a) $\Rightarrow$ (b). 设 $T_{K,\ S}$ 是拟阿贝尔的，并设 E 为命题 3.1给出的有理形式。假设某个 $\gamma \in G$ 将一个禁对 $\{\tau_k, \tau_l\}$ 映到一个对角对 $\{\tau_j, \bar{\tau}_j\}$。由引理 4.1(ii)，E 在 $\{\tau_k, \tau_l\}$上为零。由引理 4.2 可知，它在 $\{\tau_j, \bar{\tau}_j\}$ 上也为零，这与引理 4.1(iii) 矛盾。

(b) $\Rightarrow$ (a). 这个方向需要构造。令 $\mathcal{P}$ 为不包含禁对的点对的 G-轨道之并。由 (b)，每个对角对都属于 $\mathcal{P}$。考虑在 $\mathcal{P}$之外为零的形式空间：

$$V = \{B \in \mathrm{Alt}_\delta(\mathbb{Q}) :\ E^B_{\rho\rho'} = 0 \text{ for all pairs } \{\rho, \rho'\} \notin \mathcal{P}\},$$
$$Y = \{B \in \mathrm{Alt}_\delta(\mathbb{R}) :\ E^B_{\rho\rho'} = 0 \text{ for all pairs } \{\rho, \rho'\} \notin \mathcal{P}\}.$$

每个禁对都位于 $\mathcal{P}$之外，因此根据引理 4.1(ii)，V 或 Y 中的每个形式都满足 (H)。我们证明 V 在 Y中稠密，并且 Y 包含一个满足 (P) 的形式。取一个与之足够接近的有理形式即可。

我们使用一个标准下降引理。

引理 5.1 (伽罗瓦下降)。设 $L/\mathbb{Q}$ 是伽罗瓦群为 Γ_L 的有限伽罗瓦扩张，且 $U \subseteq L^m$ 是一个 L-子空间，满足对所有 $\gamma \in \Gamma_L$ 均有 $\gamma(U) = U$，其中 γ 作用于坐标。则 U 由 $U \cap \mathbb{Q}^m$ 在 L 上张成。

证明。我们对 L^m 中的向量逐坐标取迹 $\mathrm{Tr}^{L/\mathbb{Q}}$。由于 $L/\mathbb{Q}$ 是伽罗瓦扩张，对于 $\xi \in L^m$，有 $\mathrm{Tr}^{L/\mathbb{Q}}(\xi) = \sum_{\gamma\in\Gamma_L} \gamma(\xi)$，且该向量属于 $\mathbb{Q}^m$。

设 (κ_i) 是 L 在 $\mathbb{Q}$ 上的一组基。L 在 $\mathbb{Q}$ 上的迹形式非退化，因此存在 L 在 $\mathbb{Q}$ 上的一组对偶基 (κ_i^*)，满足若 $i = j$，则 $\mathrm{Tr}^{L/\mathbb{Q}}(\kappa_i\kappa_j^*) = 1$，否则为 0。每个 $\xi \in L^m$ 都可写为 $\xi = \sum_j \kappa_j^* q_j$，其中 $q_j \in \mathbb{Q}^m$，于是 $\mathrm{Tr}^{L/\mathbb{Q}}(\kappa_i\xi) = \sum_j \mathrm{Tr}^{L/\mathbb{Q}}(\kappa_i\kappa_j^*)\, q_j = q_i$。因此

$$\xi = \sum_i \kappa_i^*\ \mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(\kappa_i\xi) \qquad (\xi \in L^m).$$

现在令 $\xi \in U$。对于每个 i，向量 $\kappa_i\xi$ 属于 U，因此对于任意 $\gamma \in \Gamma_L$，$\gamma(\kappa_i\xi)$ 也属于其中，于是 $\mathrm{Tr}^{L/\mathbb{Q}}(\kappa_i\xi) \in U \cap \mathbb{Q}^m$。根据上面的公式，$\xi$ 是这些向量的 L-线性组合。由于 $U \cap \mathbb{Q}^m$ 包含于 U，其 L-张成空间恰为 U。□

~第 1 步：V 在 Y 中稠密。令 $U \subseteq \mathrm{Alt}_\delta(K)$ 由与 V 和 Y 相同的方程定义。$\mathcal{P}$ 之外的点对集合是 G-稳定的，因此由引理 4.2 可知，对于所有 $\gamma \in G$，$\gamma(U) = U$。~根据引理 5.1，U 在 K 上由 $U \cap \mathrm{Alt}_\delta(\mathbb{Q}) = V$ 张成。这些方程的系数~属于 K，而线性方程组的秩不会因扩域而改变。因此，它们在 $\mathrm{Alt}_\delta(\mathbb{C})$ 中的解空间是 U 的 $\mathbb{C}$-张成空间，因而也是 V 的张成空间。现在取 V 的一个 $\mathbb{Q}$-基 (v_i)；它在 $\mathbb{C}$ 上仍线性无关。若一个实矩阵 $B = \sum_i t_i v_i$ 满足 $t_i \in \mathbb{C}$，且属于 Y，则$\sum_i (t_i - \bar{t}_i)$ $v_i = B - \bar{B} = 0$，所以所有 t_i 都是实数。因此，Y 是 V 的 $\mathbb{R}$-张成空间，而 V 在 Y 中稠密。

步骤 *2*：一个正实形式。在 $K \otimes \mathbb{R}$ 置入

$$E^0(x, y) = \sum_{j=1}^{r_2} \mathrm{Im}\big(\tau_j(x)\,\overline{\tau_j(y)}\big) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{j=1}^{r_2} \big(\tau_j(x)\bar{\tau}_j(y) - \bar{\tau}_j(x)\tau_j(y)\big).$$

右侧已经是关于坐标的 $\mathbb{C}$-双线性形式，因此根据（2），E^0 的条目在 $E^0_{\tau_j\bar{\tau}_j} = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}$、$E^0_{\bar{\tau}_j\tau_j} = -\frac{1}{2\,\mathrm{i}}$ 处为 0，其余位置也为 0。因此，E^0 支撑在对角对上，而这些对角对位于 $\mathcal{P}$ 中：其格拉姆矩阵属于 Y。其厄米矩阵为 $h = (2\mathrm{i}E^0_{\tau_j\bar{\tau}_k}) = I$，也就是说，为 $H(x,\ y) = \sum_j z_j\bar{w}_j$。

步骤 3：结论。根据引理 4.1(iii)，映射 $B \mapsto h(B) = (2\mathrm{i}E^B_{\tau_j\bar{\tau}_k})$ 是从 Y 到厄米 $r_2 \times r_2$ 矩阵的 $\mathbb{R}$-线性映射，并且 $h = I$ 作用于 E^0的格拉姆矩阵。正定矩阵构成一个开集。根据步骤 1，存在一个有理的 $B \in V$，使其足够接近 E^0 的格拉姆矩阵，从而 $h(B)$ 仍然是正定的。形式 E^B 是有理的，并满足（H）和（P）。B 的条目具有公共分母 d，并且由于 ω_a 构成 $\mathcal{O}_K$的 $\mathbb{Z}$-基，形式 dE^B 在 $\mathcal{O}_K$上是整的。因此，dE^B 满足（I）、（H）和（P），并且 T_K, S 根据命题 3.1 是拟阿贝尔的。□

6. The Néron–Severi group

设 $X = \mathbb{C}^n/\Lambda_X$ 是一个环面群。X 的 N´eron–Severi 群 N´eron–Severi(X) 是 X 上全纯线丛的第一陈类群。它可以识别为交错形式 $E\colon \Lambda_X \times \Lambda_X \to \mathbb{Z}$ 的群，其中这些形式在 $\mathbb{R}\Lambda_X$ 上的实扩张满足 $E(\mathrm{i}v,\ \mathrm{i}w) = E(v,\ w)$，对于 $\mathbb{R}\Lambda_X$ 中最大复子空间里的 $v,\ w$。见 [4] 和 [25, 26]。充足黎曼形式给出 N´eron–Severi(X) 中的一个元素，但一般而言，N´eron–Severi(X) 中的元素不一定处处为正。

对于 $X = T_{K,\ S}$ 我们将所有内容通过 K 搬运到 u，如第 3 节所述。于是群 N´eron–Severi($T_{K,\ S}$) 由 $\mathcal{O}_K$ 上取值于 $\mathbb{Z}$ 且满足 (H) 的交替形式组成。由于每个有理形式的某个倍数在 $\mathcal{O}_K$ 上都是整的，空间 N´eron–Severi$(T_{K,\ S})\otimes\mathbb{Q}$ 由 K 上满足 (H) 的有理交错形式组成。定理 2.1 的证明计算了这个空间。

命题 6.1。对于一个点对轨道 O，设 V_O 为K 上在 O之外各项均为零的有理交错形式空间。则维数$_{\mathbb{Q}}\, V_O = |O|$，且

$$\text{Néron–Severi}(T_{K,S}) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_O V_O,$$

其中 O 遍历不含任何禁对的 G-点对轨道。特别地，

$$\operatorname{rank} \text{Néron–Severi}(T_{K,S}) = \sum_{O\ \textit{without forbidden pairs}} |O|.$$

证明。由引理 4.1（ii）和 4.2，有理形式满足（H），当且仅当它在每个包含禁对的轨道上均为零。设 $E = E^B$ 为这样的形式，并设 O 为一个轨道。设$\mathcal{E}_O$ 为这样一个矩阵：在有序点对（$\mathcal{E}$（B）处ρ，ρ'与 $\{\rho, \rho'\} \in O$ 一致，在其他处均为 0，并令 $B_O = M^{\mathsf{T}}\mathcal{E}_O M$。由于 O是 G-稳定的，引理 4.2给出 γ（$\mathcal{E}_O$）$= P_\gamma \mathcal{E}_O P_\mathsf{T}\gamma$，并结合（1）

$$\gamma(B_O) = M^{\mathsf{T}} P_\gamma^{\mathsf{T}}\, P_\gamma \mathcal{E}_O P_\gamma^{\mathsf{T}}\, P_\gamma M = B_O \qquad (\gamma \in G)$$

因此 B_O 是有理的，且 $B = \sum_O B_O$。该和是直和，因为支集位于不同处的形式 t 轨道具有不相交的非零项集合。这就证明了该分解。

关于维数，令 $\widetilde{K}$ 为 $\mathbb{Q}$ 上 K 的伽罗瓦闭包，$\widetilde{\mathrm{Alt}}_\delta(B)$ 的矩阵构成的空间。由于 $B \mapsto \mathcal{E}(B)$ 是到由 Σ索引的交错矩阵空间上的线性双射，且一个支集为 O 的此类矩阵对于 O中的每一对都有一个自由项，因此有 $\dim_{\widetilde{K}} U_O = |O|$。根据引理 4.2，$U_O$ 在 G下稳定，所以引理 5.1 表明，它由 $V_O = U_O \cap \mathrm{Alt}_\delta(\mathbb{Q})$ 张成。~在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关的有理矩阵在 K上仍然线性无关；因此 $\dim_{\mathbb{Q}} V_O = \dim_{\widetilde{K}} U_O = |O|$。□

特别地，N´eron–Severi$(T_{K,\ S}) \neq 0$ 只要某个轨道不包含禁对，便$T_{K,\ S}$ 只有当这些轨道包含所有对角对时才是拟阿贝尔的。秩为正但 $T_{K,\ S}$ 却不是拟阿贝尔的例子见第13节。

7. Totally real subfields and lifting

设 $K_0 \subseteq K$ 为全实域，其嵌入为 ι_1、……、ι_m。$\Sigma_i = \Sigma_{\iota_i}$ 在 K_0 上的每个块都在 c 作用下映射到自身，因此它由 a_i 个实嵌入和 b_i 对复共轭嵌入组成，其中 $a_i + 2b_i = [K\colon\ K_0]$。数 b_i 统计了 K 中位于 K_0 的第 i 个位之上的复位数。因此，对于所有 i，当且仅当 $b_i \leq 1$ 时，(K、K_0) 才是可容许的。

定理 7.1（迹形式判据）。如果 K 包含一个全实子域 K_0，且对所有i都有 $b_i \le 1$，也就是说，如果 (K, K_0) 是可容许的，那么对于任意代表元系S，T_K、S 都是拟阿贝尔的。

证明。称一对嵌入为 K_0之内，若二者位于之上的同一个块中；否则称为 G 之间的。由于 G 会置换这些块，每个 $\{\tau_j, c\tau_j\}$ -对轨道要么只由之内的有序对组成，要么只由之间的有序对组成。对角对 c 属于之内，因为 $\{\tau_j, \tau_k\}$ 将每个块映射到自身。禁对τ_j 属于之间：若 τ_k 和 Σ_i位于同一个块中，那么$\bar\tau_j$ 和 $\bar\tau_k$也会如此，而 $b_i \ge 2$。因此，定理2.1 的条件 (b) 成立。□

该定理包含了此前发现的几个族，共有三个。Dodson 研究了全实域 [15] 的二次扩张；在此情形下，$b_i \le 1$ 是自动成立的。Andreotti 和 Gherardelli 研究了三次扩张 K/K_0，其在 K_0 的任何位上都不是全实的：在 K_0 的每个位之上，K [5, §4.2] 都有一个实位和一个复位；另见 [6]。Abe 研究了任意相对次数的扩张，且在 K_0 [3] 的每个位之上恰有一个复位。在后两个族中，对所有 i，$b_i = 1$：该扩张在 K_0 上是均匀的。定理 7.1 只要求 $b_i \le 1$，因此 $b_i = 0$ 可出现在 K_0 的某些位上，而 $b_i = 1$ 可出现在其他位上。对于 $K_0 = \mathbb{Q}$，该定理归结为推论 2.2(i)。这些结果最初是借助形如 $\mathrm{Tr}_{K_0/\mathbb{Q}} \circ \Phi$ 的黎曼形式证明的，这也正是该判据名称的由来。上述证明无需选择形式。

下面转而讨论第 2.4 节定义的提升。若 S 是从 K' 的代表元系 S' 提升而来，则根据 (L1)，K 的复位位于 K' 的复位之上；因此 $r_2(K') \ge 1$，并且 $T_{K',S'}$ 有定义。

定理 7.2 (Dodson [15,定理 3.1])。设 S 是从子域 K' 的代表元系 S' 提升而来，并设 $m = [K : K']$。

(a) $T_{K,S}$ 与 $(T_{K',S'})^m$ 同源；若 $\mathcal{O}_K$ 是自由的 $\mathcal{O}_{K'}$-模，则它与后者同构。***(b)*** 若 $T_{K',S'}$ 是拟阿贝尔的，则 $T_{K,S}$ 也是拟阿贝尔的。

证明。(a) 选取 $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathcal{O}_K$，使其构成 K 在 K' 上的一组基；若存在 $\mathcal{O}_{K'}$-基，则同时选取一组 $\mathcal{O}_K$ 的 $\mathcal{O}_{K'}$-基。对于 $\iota \in S'$，令 $\rho_{\iota,1}, \dots, \rho_{\iota,m}$ 为 K 中延拓 ι 的嵌入。根据 (L2)，它们属于 S；当 ι 遍历 S' 时，这些嵌入恰好构成 S 的全部元素。相应地排列 $\mathbb{C}^g$ 的坐标。对于满足 $a_i \in K'$ 的 $x = \sum_i a_i \beta_i$，

$$\rho_{\iota,k}(x) = \sum_{i=1}^{m} \rho_{\iota,k}(\beta_i)\, \iota(a_i).$$

令 $A\colon (\mathbb{C}^{S'})^m \to \mathbb{C}^g$ 为将 $(v_1, \dots, v_m)$ 映射到坐标为$\sum_i \rho_{\iota,k}(\beta_i)\,(v_i)_\iota$的向量的 $\mathbb{C}$-线性映射。则

$$A\big(u'(a_1), \dots, u'(a_m)\big) = u\Big(\sum_i a_i \beta_i\Big),$$

其中，u' 是对于 (K', S') 的映射 u。映射 A 是分块对角的，对于每个 $\iota \in S'$，都有一个 $m \times m$ 块$B_\iota = (\rho_{\iota,k}(\beta_i))_{k,i}$，且 $(\det B_\iota)^2 = \iota\big(\mathrm{disc}^{K/K'}(\beta_1, \dots, \beta_m)\big) \ne 0$。因此，$A$是一个同构。它将 Λ'^m（其中 $\Lambda' = u'(\mathcal{O}_{K'})$）映射到 $\Lambda_1 = u\big(\bigoplus_i \mathcal{O}_{K'} \beta_i\big)$，后者是 Λ的一个有限指数子群。因此，A 诱导出一个同构 $(T_{K',S'})^m \cong \mathbb{C}^g/\Lambda_1$，继而得到核为 Λ/Λ_1 的同源$\mathbb{C}^g/\Lambda_1 \to \mathbb{C}^g/\Lambda$。如果 β_i 构成一个 $\mathcal{O}_{K'}$-基，则 $\Lambda_1 = \Lambda$。

(b) 设 $\widetilde{H'}$ 是$T_{K'}$的充足黎曼形式，S'。m 份的正交和是 $(T_{K'}, S')^m$的 $\widetilde{}$充足黎曼形式。通过 A 将其传递为 $\mathbb{C}^g$上的厄米形式 H_1。于是 H_1 $\widetilde{}$在 $\mathbb{R}\Lambda_1 = \mathbb{R}\Lambda$的最大复子空间（即 F）上为正，并且 $\mathrm{Im}\ H_1(\Lambda_1 \times \Lambda_1) \subseteq \mathbb{Z}$。若 e 是 Λ_1 在 Λ中的指数，则 $e\Lambda \subseteq \Lambda_1$。由于对于$\lambda$、$\mu \in \Lambda$，$\mathrm{Im}\big(e^2 \widetilde{H}_1\big)(\lambda, \mu) = \mathrm{Im}\ \widetilde{H}_1(e\lambda, e\mu) \in \mathbb{Z}$，形式 $e^2 \widetilde{H}_1$ 是T_K、S的充足黎曼形式。□

(b)也可以由轨道判据的条件 (c) 得出，该条件展示了此判据如何处理提升。

(b) 的第二种证明。设复共轭 $c' = \gamma c \gamma^{-1}$ 互换 $\tau_j \neq \tau_k$ 和 S 中的元素，并设 $\tau_j \in \Sigma_\iota$。若 c' 将块 Σ_ι 映到自身，则 c 固定 $\gamma^{-1}\iota$，因此它是 K' 的一个实嵌入。根据 (L1)， $\Sigma_{\gamma^{-1}\iota}$ 的所有元素都是实的，也就是说，它们都被 c 固定；由于 $\Sigma_\iota = \gamma\Sigma_{\gamma^{-1}\iota}$，共轭元 c' 逐点固定 Σ_ι，因此 $c'\tau_j = \tau_j$，矛盾。否则， τ_k 位于块 $\Sigma_{c'\iota} \neq \Sigma_\iota$ 中，且根据 (L2)， ι、$c'\iota \in S'$。根据 (L1)，两者都是复的，因为 τ_j 和 τ_k 都是。在 K' 的伽罗瓦闭包上， c' 的限制是一个复共轭，它互换 ι 和 $c'\iota$，因此条件 (c) 对 (K', S') 不成立，并且根据定理 2.1，$T_{K',S'}$ 不是拟阿贝尔的。□

定理的证明 *2.4, (c)⇒(a).* 设 (K', K_0) 可容许，且 S 由 S'提升而来。将定理 7.1应用于域 K' 及其全实子域 K_0，可知 $T_{K',S'}$ 是拟阿贝尔的；其假设恰好是 (K', K_0) 的可容许性。由定理 7.2(b)，$T_{K,S}$ 是拟阿贝尔的。□

8. The conjugation graph

现在我们证明定理 ⇒2.4 的蕴含关系 (a)(b)。其依据是定理 2.1中 (c) 形式的轨道判据，以及引理 2.3。黎曼形式不再发挥作用：余下的工作是研究复共轭作为 Σ 的置换。

我们只用到图论中的少数几个概念，且所讨论的图都没有自环或重边。若一条边连接两个顶点，则这两个顶点**相邻**，或互为**邻接点**。对于顶点集合 X，其**导出子图** 在 X 上的顶点集为 X，并包含原图中两端都属于X的每一条边。**游走** 是顶点组成的有限序列，其中任意两个相邻的顶点都相邻；**路径** 是不含重复顶点的游走。若图中任意两个顶点之间都存在一条游走，则称该图**连通**。它的**连通分支** 是极大的连通导出子图；我们也用同一术语指称这些子图的顶点集。**三角形** 是由三个两两相邻的顶点组成的集合。图的**自同构** 是一个将边映射为边的顶点集双射。

图的**正常2-着色**是将其顶点集划分为两个集合，即**颜色类**，使得没有边连接同一类中的两个顶点。若图具有正常的 2-着色，则称其为**二分图**。二分图不含三角形，因为三个顶点中必有两个顶点颜色相同。连通二分图的正常 2-着色除交换两个颜色类外是唯一的：一个顶点所属的颜色类决定其邻接点的颜色类，继而决定这些邻接点的邻接点的颜色类，如此沿着游走依次确定。

回顾第2.3节， $\mathcal{D} = \{\gamma c \gamma^{-1} : \gamma \in G\}$ 是$\backsim_K$的复共轭集合，它是 G的一个对合共轭类，并且 $N = \langle \mathcal{D} \rangle$ 是它生成的子群。由于 $\mathcal{D}$ 在共轭作用下稳定， N 是 G的正规子群；它在 Σ 上的轨道是 K^+之上的块（引理2.3）。

定义8.1。 共轭图 Γ的顶点集为 Σ；若某个 $d \in \mathcal{D}$ 将两个不同的嵌入互换，则它们相邻。记作 $\rho \sim \rho'$。对于 $d \in \mathcal{D}$，令 $R(d)$表示被 d 固定的嵌入集，令 $C(d)$表示被 d移动的嵌入集。设 $R = R(c)$和 $C = C(c)$分别为实嵌入和复嵌入。对于 $X \subseteq \Sigma$， $\Gamma[X]$ 表示导出子图。

Γ 的顶点是嵌入，全文均沿用这一称谓。因此，实嵌入或复嵌入是指属于 R 或 C的嵌入，也就是说，被 c固定或移动的嵌入；对于另一个$d \in \mathcal{D}$，我们会明确说明嵌入是被 d固定还是移动。邻接关系和邻接点始终是指 Γ。

由于 $\mathcal{D}$ 是一个共轭类，每个 $\gamma \in G$ 都是 Γ的一个自同构。特别地， c 也是如此。每一对 $\{\tau, c\tau\}$ 和 $\tau \in C$都构成一条边。

引理 8.2。 *(a)* Σ 的每个嵌入都会被某个 $d \in \mathcal{D}$移动。特别地，每个 N-轨道至少包含两个嵌入。*(b)* Γ 的连通分支就是 N-轨道，即 Σ 在 K^+上的块。

证明。 (a) 被 $\mathcal{D}$ 的每个元素固定的嵌入，也被 N 固定。由于 N 是正规群，由 N 固定的嵌入集合在 G 的作用下映射到自身，因此该集合要么为空，要么等于整个 Σ，因为 G 是传递的。它并非整个 Σ，因为 $c \in N$ 会置换复嵌入，而且 $r_2 \geq 1$。

(b) 一条边连接 ρ 与 $d\rho$，其 $d \in N$，因此它始终处于一个 N-轨道内。反过来， 中的每个元素都是 $d_k \cdots d_1$ 个 $\mathcal{D}$ 中元素的乘积，序列 ρ、 $d_1\rho$、 $d_2d_1\rho$、.....在去掉重复的相邻项后，便成为 Γ 中的一条游走；当某个 d_i 固定当前嵌入时，就会出现这些重复项。最后一个断言见引理 2.3。 □

轨道判据转化为一个关于着色的陈述。

命题 8.3. $T_{K,\,S}$ 是拟阿贝尔的，当且仅当 $C = (S \cap C) \sqcup (cS \cap C)$ 是 $\Gamma[C]$的正常2-着色。因此，某个 $T_{K,\,S}$ 是拟阿贝尔的，当且仅当 $\Gamma[C]$是二分图；此时， 2^{r_2} 个 S 代表元系中恰有 2^k 个给出一个拟阿贝尔 $T_{K,\,S}$，其中 k 是 $\Gamma[C]$的连通分支数。

证明。 根据定理 2.1(c)， $T_{K,\,S}$ 是拟阿贝尔的，当且仅当 Γ 没有边连接 $S \cap C$的两个嵌入。应用自同构 c后，同样的结论也适用于 $cS \cap C = c(S \cap C)$，而这两个集合构成了 C的一个划分。反过来，如果 $C = X \sqcup Y$是一个正常二着色，那么每条边 $\{\tau, c\tau\}$的一端都在 X中，因此 $S = R \cup X$ 是一个代表元系，且条件 (c) 对它成立。如上所述，二分图的正常二着色由每个连通分支中一个嵌入的颜色决定；这给出了数目 2^k。□

从现在起，我们假设

$$(\star) \qquad \Gamma[C] \text{ is bipartite.}$$

若 $d = \gamma c \gamma^{-1}$，则 $C(d) = \gamma C$ 且 $\Gamma[C(d)] = \gamma\,\Gamma[C]$。因此，以任意 $d \in \mathcal{D}$ 替代 c，$(\star)$ 都成立；下面针对 c 证明的所有结论，对每个 $d \in \mathcal{D}$也都成立。我们经常以下述较弱形式使用 $(\star)$：三个两两相邻的嵌入不会同时被同一个复共轭移动，例如 d，因为它们会在 $\Gamma[C(d)]$中构成一个三角形。

三角形。 假设 $(\star)$ 仅涉及导出子图 $\Gamma[C(d)]$, $d \in \mathcal{D}$。图 Γ本身完全可能包含三角形，而下一个引理将说明如何产生三角形：只要某个复共轭将一个被 d移动的嵌入与一个被 d固定的嵌入互换，我们就会在 Γ 中得到一个经过被 d固定的嵌入的三角形。因此，即使满足 $(\star)$， Γ 一般也不是二分图。

引理 8.4 (三角形引理)。 设 $d, d' \in \mathcal{D}$，并且 d' 将一个嵌入$x \in C(d)$ 与一个嵌入 $r \in R(d)$互换。那么 r, x 和 dx 两两相邻，且 d' 固定dx。

证明。 d' 交换了 r 和 x，而 d 交换了 x 和 dx。共轭元 $dd'd$ 将 dx 映到$dd'x = dr = r$，因此它交换了 r和 dx。因此， $\{r, x, dx\}$ 是 Γ中的一个三角形；它不包含在 $\Gamma[C(d)]$, 中，因为 d 固定了 r。复共轭 d' 移动了 r 和 x；如果它也移动了 dx，那么该三角形就会位于 $\Gamma[C(d')]$,中，而（$\star$）排除了 d' 。□

下一个引理指出，将一个复嵌入映到另一个复嵌入的复共轭，会固定附近的实嵌入。

引理 8.5. 设 $d \in \mathcal{D}$ 和 $x \in C$ 满足 $dx \in C$ 和 $dx \neq x$。那么 d 会移动 cx，而 d 固定每个与 x 相邻的实嵌入。

证明。 假设 d 固定 cx。那么 c 交换 $x \in C(d)$ 和 $cx \in R(d)$，而引理 8.4应用于这对（d， c）时指出， c 固定 dx。但是 dx 是复的。因此 d 同时移动 x 和 cx。

现在令 $r \in R$ 与 x相邻，并令 $d_1 \in \mathcal{D}$ 交换它们。根据引理 8.4，应用于（c， d_1），嵌入 r、 x、 cx 两两相邻。如果 d 移动了 r，它就会将这三个全部移动。□

9. The structure of an N-orbit

我们保留假设（$\star$）。

引理 9.1。 设 O 是一个具有 $C \cap O \neq \emptyset$ 的 N-轨道。那么 $\Gamma[C \cap O]$ 是连通的，并且 O 的每个实嵌入都有一个复邻点。

ˆ 证明。固定 $x \in C \cap O$，令 Z 为其在 $\Gamma[C]$ 中所属的连通分支，并令 Z 为 Z 与那些有邻接点位于 Z 中的实嵌入之并。由引理 8.2，$Z \subseteq O$；而 Z 的任一嵌入的邻接点都属于 Z，因为复嵌入属于 Z。我们证明，对每个 ˆ ˆ$d \in \mathcal{D}$，都有 $dZ \subseteq Z$。那么 Z 在 N 下稳定，因此 $Z = O$。于是 $C \cap O = Z$，并且 O 的每个实嵌入在 Z 中都有一个邻接点。

ˆ ˆ 对于 $\rho \in Z$，嵌入 $d\rho$ 是 ρ 或 ρ的邻接点，因此它属于 Z。现在设 $r \in Z$ 为实，设 $a \in Z$ 是 r的邻接点，并设 $d_1 \in \mathcal{D}$ 交换 a 和 r。只需在 Z中找到 dr 的一个邻接点即可。若 da 为复，则 $da \in Z$，因为它是 a 或 a的复邻点；而共轭元 dd_1d 交换 da 和 dr。若 da 为实，则将引理 8.4应用于有序对 (c, d)，可知 d 固定 ca。共轭元 cd_1c 交换 ca 和 $cr = r$，因此 $d(cd_1c)d$交换 ca 和 dr；并且 $ca \in Z$，因为它是 a的复邻点。□

假设 $C \cap O \neq \emptyset$ 并不总是成立：一个 N-轨道可能只由实嵌入组成，如例 13.1所示。这样的轨道仍会被其他复共轭移动（引理8.2），而将引理9.1应用于这些复共轭，便可在第10节处理该情形。

因此，对于每个与 C 相交的 N-轨道 O，图 $\Gamma[C \cap O]$ 除交换颜色外恰有一种正常二着色。我们将两个颜色类记为 $C \cap O = P_O \sqcup Q_O$。自同构 c 将 $C \cap O$ 的每个嵌入映射到一个邻接点，因此它交换这两个颜色类：$Q_O = cP_O$。设 S 为一个满足T_K、s 为拟阿贝尔的代表元系。根据命题 8.3，$S \cap C$和 $cS \cap C$ 构成 $\Gamma[C]$的正常二着色。根据引理 9.1，$\Gamma[C \cap O]$是连通的，因此它是 $\Gamma[C]$ 的一个连通分支。因此，$S \cap C \cap O$是 P_O或 Q_O：S恰好包含两个颜色类中的一个。

对于 N-轨道 O 中的 ρ，令

$$\Pi(\rho) = \{\rho\} \cup \{\rho' \in O : \rho' \not\sim \rho\},$$

将该嵌入与其在 N-轨道中的非邻接点放在一起。这个集合仅由 Γ 确定。

引理 9.2. 设 O 是一个同时包含实嵌入和复嵌入的 N-轨道，并且 $x \in C \cap O$。那么，在 $\Gamma[C \cap O]$ 中，x 与 O 的颜色类之外的每个嵌入都相邻。因此，$\Pi(x)$就是这个颜色类。

证明。 不妨设 $x \in P_O$。
步骤 1：O 的每个实嵌入都与 O 的每个复嵌入相邻。设 $r \in R \cap O$。由引理 9.1，r 有一个复邻点，且 $\Gamma[C \cap O]$ 连通。因此，只需证明：若 $r \sim a$ 和 $a \sim b$ 满足 a、$b \in C$，则 $r \sim b$。令 d_1 交换 a 和 r，并令 d 交换 a和 b。由引理 8.5，d 固定 r。因此，dd_1d 交换 $da = b$ 和 $dr = r$。

步骤 2：x 与每个 $w \in Q_O$ 都相邻。若 $w = cx$，则无需证明；因此设 $w \neq cx$。取 $r \in R \cap O$。由步骤 1，存在 d_x、$d_w \in \mathcal{D}$，使得 d_x：$x \leftrightarrow r$，且 d_w：$w \leftrightarrow r$。若 d_w固定 x，则 $d_wd_xd_w$ 交换 x 和 w，结论成立。假设 d_w 移动了 x。嵌入 d_wx 不可能是复嵌入：否则，引理 8.5 将推出 d_w 固定 r，而后者与 x相邻；但 $d_wr = w$。因此，d_w 将复嵌入 x 与一个实嵌入互换，并由引理 8.4 固定 cx。其共轭元 $e = cd_xc$ 交换 r 和 cx，所以 d_wed_w 交换 $d_wr = w$ 和 $d_w(cx) = cx$。但是，w 和 cx 都属于 Q_O，而同色的两个嵌入并不相邻。因此，d_w 确实固定了 x。

根据步骤 1 和步骤 2，$\Pi(x) \subseteq P_O$。反之，$P_O \subseteq \Pi(x)$，因为同一种颜色的两个嵌入并不相邻。□

10. 规范子域及列表的证明

还需要用到图论中的另一个概念。若一个图的顶点集被划分为完全多部的非空集合，即部，并且当且仅当两个顶点属于不同的部时它们相邻，则称该图为完全多部图。只有两个部时，称为完全二部图。例如，引理9.2 表明，$\Gamma[C \cap O]$ 对于包含实嵌入和复嵌入的每个 P_O 轨道 Q_O，都是具有部 N的完全二部图 O；同一颜色类中的两个嵌入之间没有边相连。

如果 O 不包含实嵌入，那么 $\Gamma[C\cap O]=\Gamma[O]$ 未必是完全二部图：在例13.4 中，它是一个立方体图。

假设（$\star$）。令 $d\in\mathcal{D}$，并令 O 为一个与 $C(d)$相交的 N-轨道。由引理 9.1 应用于 d可知，图 $\Gamma[C(d)\cap O]$ 是连通的；而由 d 的（$\star$）可知它是二分图；因此，除交换颜色外，它恰有一种正常二着色。我们称它的两个颜色类为 O中 d的两个半部。因此， c 的两个半部为集合 P_O 和 Q_O。元素 $\gamma\in G$ 将 O 中 d 的两个半部映到 γO中 $\gamma d\gamma^{-1}$ 的两个半部，因为它是 Γ的自同构，并将 $C(d)$映到 $C(\gamma d\gamma^{-1})$。

命题 10.1。 假设($\star$)。所有 N-轨道中全部 $d\in\mathcal{D}$的两个半部构成 Σ 的一个 G-不变划分 $\mathfrak{B}$，该划分细化为 N-轨道的划分。包含在 C中的 $\mathfrak{B}$ 之块是集合 P_O 和 Q_O，对应于与 C相交的 N-轨道 O；所有其他块均由实嵌入组成。此外，对于每个 N-轨道 O，要么 $\Gamma[O]$ 是二分图，且 O 中的块是它的两个颜色类；要么 $\Gamma[O]$是完全多部图，其部为 O中的块。

证明。 由引理 8.2(a)，每个嵌入都会被某个 $d\in\mathcal{D}$移动，因此位于 d的某个半部中。设 X 和 Y 是 d 和 d' 中属于同一 N- 轨道 O 的半部，并设 $\rho\in X\cap Y$。我们证明 $X=Y$。

首先假设 $\Gamma[O]$ 是二分的。由引理 8.2(b)，它是连通的，而 d 是 $\Gamma[O]$ 的一个自同构，将 ρ 映到一个邻接点。因此 d 交换 $\Gamma[O]$ 的两个颜色类，并移动 O 的每个嵌入。因此 $C(d)\cap O=O$，且 d 在 O 中的半部就是 $\Gamma[O]$的颜色类。对 d'也同样成立，所以 $X=Y$。

现在假设 $\Gamma[O]$ 不是二分的。那么 d 固定了 O的某个嵌入：否则$O\subseteq C(d)$，并且 $\Gamma[O]=\Gamma[C(d)\cap O]$ 将由（$\star$）对 d推出二分性。因此 O 既包含被 d 固定的嵌入，也包含被 d移动的嵌入；将引理 9.2 应用于 d，可得 $X=\Pi(\rho)$。同理 $Y=\Pi(\rho)$，所以 $X=Y$。由于 O 的每个嵌入都位于某个半部中， O中的块就是集合 $\Pi(\rho)$；根据 Π的定义， O 的两个嵌入相邻，当且仅当它们位于不同的块中。

因此，这些半部构成 $\mathfrak{B}$ Σ的一个划分。它细化为 N-轨道的划分，并且在G下不变，因为 G 将半部映到半部。若 O 与 C相交，则 c的半部 P_O 和 Q_O 覆盖$C\cap O$，所以 O 中的其他块由实嵌入组成。若 O 与 C不相交，则$O\subseteq R$。□

定义 10.2. 假设（$\star$）。典范子域 K_c 是 K 的子域，其块构成命题 $\mathfrak{B}$的划分10.1。

它存在，因为 $\mathfrak{B}$ 在 G下不变（第2.4节）。由于 $\mathfrak{B}$ 细化了 N-轨道；这些轨道是 K^+上的块，因此我们有 $K^+\subseteq K_c$。根据构造， K_c 仅取决于 G 和 c，而不取决于 S。

定理2.4（a）的证明，$\Rightarrow$（b）。设$T_{K,\,S}$ 是拟阿贝尔的。由命题8.3，$\star$）成立，并且$S\cap C$ 是 $\Gamma[C]$的颜色类之并；由引理9.1， $S\cap C\cap O$ 对于每个与 C相交的 Q_O -轨道，均为 P_O 或 Q_O 。我们证明 S是从 K_c提升而来的，并且（K_c， K^+）是可容许的。

$\mathfrak{B}$的每个块都位于 S或 $\Sigma\setminus S$中：实块位于 $R\subseteq S$中，而其他块则是集合P_O、 Q_O。被 c 映射到自身的块不可能是 P_O 或 Q_O，因此它由实嵌入组成。于是 S 是从 K_c提升而来的。 K_c 在 K^+ 的某个位之上的嵌入，是相应的 N—轨道 O内的块；其中的复嵌入是那些被 c移动的嵌入：若 O 与 C相交，则为这一对P_O、 Q_O ，否则为空。因此， K_c 在 K^+的每个位之上至多有一个复位；换言之，(K_c、 K^+)是可容许的。□

定理 2.4最后一部分的证明。 假设某个 $T_{K,\,S}$ 是拟阿贝尔的。由命题 8.3，($\star$)成立，并且我们刚刚看到，对于每个拟阿贝尔$T_{K,\,S}$，(b)均对 $K'=K_c$ 成立。现在设 K' 是一个子域，对于某个 S，(b)成立；我们证明 $K'=K_c$。由于 $K^+\subseteq K'$， K' 上的块细化了 N-轨道。 K' 上的一个块若 c 映到自身，则对应于 K'的一个实位，因此根据(L1)，它由实嵌入组成，并且 c 逐点固定该块。由于 K' 上的块划分具有 G-不变性，每个 $d\in\mathcal{D}$ 同样逐点固定其映到自身的 K' 上的每个块；特别地，没有 $d\in\mathcal{D}$ 会交换同一块中的两个嵌入。现在设 O 是一个与 C相交的 N-轨道。根据可容许性， c在 O内部至多交换一对块，因此对于某个块 $B\neq cB$，有 $C\cap O=B\sqcup cB$。这些

两个块构成了 $\Gamma[C\cap O]$的正常二着色；根据引理 9.1，它是连通的；因此$\{B,cB\}=\{P_O,Q_O\}$。于是 c的半部是 K'上的块，并且根据 G-不变性，每个 $d\in\mathcal{D}$的半部也都是 Σ 的一个划分（命题 10.1），因此 K' 上的块恰好是 $\mathfrak{B}$的那些块，并且 $K'=K_c$。

特别地，拟阿贝尔T_{KS} 恰好是那些 S 从 K_c提升而来的对象：每个拟阿贝尔 S 都从 K_c 提升而来；反过来，根据将蕴含关系 (c)⇒(a) 应用于可容许对 (K_c,K^+)，每个从 K_c 提升而来的 S 都是拟阿贝尔的。从 K_c 提升而来的系统与 K_c的代表元系构成双射，而这样的代表元系有 $2^{r_2(K_c)}$个。这与命题 8.3 一致： $r_2(K_c)$是与 C相交的 N-轨道数；根据引理 9.1，这也是 $\Gamma[C]$的连通分支数。□

结合 Dodson 定理，这份列表连同$T_{K,\,S}$ 便完整列出了所有在同源意义下的拟阿贝尔对象。

推论 10.3。 设$T_{K,\,S}$ 为拟阿贝尔对象，令 $m=[K:\ K_c]$ 且 $S_c=\{\iota\in\Sigma(K_c):\ \ \Sigma_\iota\subseteq S\}$。则$T_{K,\,S}$ 与 $(T_{K_c,\,S_c})^m$同源；若 $\mathcal{O}_K$ 是自由 $\mathcal{O}_{K_c}$-模，则二者同构。根据迹形式判据，因子$T_{K_c,\,S_c}$ 是拟阿贝尔的，该判据应用于 K_c 及其全实子域 K^+；事实上，对于 K_c的任意代表元系 S' ，$T_{K_c,\,S'}$ 都是拟阿贝尔的。

证明。 根据定理 2.4， S 提升自 K_c，而 S_c 是 K_c 的代表元系，正是由该代表元系提升而来。定理 7.2(a) 给出同源关系，并在自由情形下给出同构。由于（K_c， K^+）是可容许的，定理 7.1 适用于域 K_c 及其子域 K^+。□

换言之，在同源意义下，每个拟阿贝尔群 $T_{K,\,S}$ 都是某个群的幂，而迹形式判据可直接应用于该群，其中 K^+ 是全实子域。当 $K_c=K$ 时，如例 13.1和例 13.2所示，该推论并未带来新结果。在例 13.3中， K_c 是三次域 L ，其 $r_2(L)$ 为 $=1$；四维群 $T_{K,\,S_+}$ 与二维拟阿贝尔群 $T_{L,\,S'}$的平方同源，其中 S' 是 S_+ 提升自的代表元系 L 。

11. 推论

11.1. 同时考虑所有代表元系。迹形式判据能使所有 S 同时成为拟阿贝尔群。这是唯一可能的方式。

推论 11.1。以下条件等价。

(a) $T_{K,\,S}$ 对每个代表元系 S都是拟阿贝尔群。*(b)* (K,K^+) 是可容许的： K^+ 的每个位上方至多有一个 K的复位。*(c)* (K,K_0) 对某个全实子域 K_0是可容许的。

证明。(b)⇒(c)显然，而(c)⇒(a)是定理7.1。假设(a)成立。由定理2.4 ，所有 2^{r_2}系统都来自 K_c，这样的系统共有 $2^{r_2(K_c)}$ 个；因此 $r_2(K_c)=r_2$。令 O 为一个与 C相交的 N-轨道。在 K^+ 中对应的位上方， K 有 $|P_O|$ 个复位，而 K_c有一个。对这些轨道求和，得到 $r_2=\sum_O|P_O|$ 且 $r_2(K_c)=\sum_O 1$。因此，对每个 O都有 $|P_O|=1$ ，这就是(b)。□

对于单个 S ，迹形式判据还不够，还需要提升：参见例 13.3。

11.2. 紧情形。 对于 $r_1=0$, $T_{K,\,S}$ 是一个复环面，我们将其记为 A_S。这里$F=\mathbb{C}^g$，充足黎曼形式就是黎曼形式；根据黎曼定理， A_S 是阿贝尔簇，当且仅当它在我们的意义下是拟阿贝尔的。回忆一下， K' 是一个*CM* 域，当且仅当它是某个全实域的全虚二次扩张；CM 域的代表元系称为*CM* 型。

定理 11.2 (Shimura–Taniyama [24]；另见 [19, 第 1])。 设 K 是全虚的。那么， A_S 是阿贝尔簇，当且仅当 S 是由某个 *CM* 子域 $K'\subseteq K$（可能为 $K'=K$）的 *CM* 型提升而来。在这种情况下， A_S 与$(A_{S'})^{[K:K']}$同源。

证明。 设 S 由 CM 域 K'的 CM 型 S' 提升而来，令 K_0' 为满足 $[K':K_0']=2$的全实子域。 K_0' 的每个位上方恰好有 K'的一个位，且它

是复数域。因此（K'，K_0'）是可容许的，并且 A_S 根据定理 2.4是一个阿贝尔簇。同源性由定理 7.2（a）给出。

反之，设 A_S 是一个阿贝尔簇。根据定理 2.4，S 从 K_c 提升而来，且（K_c，K^+）是可容许的。由于 $r_1 = 0$，每个 N-轨道 O 都包含于 C 中，因此由命题 10.1，K_c 在 O 中的块为 P_O 和 Q_O。于是，在 K^+ 的每个嵌入之上恰有两个 K_c 的嵌入，且二者都是复的。因此 $[K_c\colon\ K^+] = 2$ 和 K_c 是全虚的：K_c 是一个 CM 域，K^+ 是其全实子域，而 $S' = \{\iota\colon\ \Sigma_\iota \subseteq S\}$ 是 K_c 的一个 CM 型。□

反之，也可以直接通过计数由轨道判据得到。

反向命题的第二个证明。设 A_S 是一个阿贝尔簇，因此定理2.1的条件 (c) $r_1 = 0$，c 在 Σ 上没有不动点，其任何共轭元 c'也都没有不动点。因此 (c) 表明$c'(S) \cap S = \emptyset$。由于 $|S| = |\Sigma|/2$，这意味着

$$c'(S) = \Sigma \setminus S = c(S) \qquad \text{for every complex conjugation } c'.$$

这一计数步骤是问题的核心。它表明，每个乘积 $c\,c'$ 都保持S。令 N_0 为由这些乘积生成的子群。它是正规子群，因为 $\gamma(c\,c')\gamma^{-1} = (c\cdot\gamma c\gamma^{-1})^{-1}(c\cdot\gamma c'\gamma^{-1})$。它保持 S，因此不包含 c，并且 $N = N_0 \cup cN_0$ 因为$c' = c(c\,c')$。

N_0-轨道是子域 K'上的块。由于 N_0 保持 S，集合 S 是N_0-轨道的并。由于 c正规化 N_0，它将每个 N_0-轨道 Ω 映到 N_0-轨道 $c\Omega$，而该轨道位于 S的另一侧；因此 c 不固定任何块，且 K' 是全虚的。N-轨道是集合 $\Omega \cup c\Omega$。根据引理 2.3，它们是 K^+上的块；因此 $K^+ \subseteq K'$ 和 $[K'\colon\ K^+] = 2$，且K' 是一个 CM 域。最后，S 是从 $S' = \{\iota\colon \Sigma_\iota \subseteq S\}$提升而来，其中对于每个 ι，ι和 $c\iota$ 恰有一个属于其中：这是 K'的一个 CM 型。□

在两种证明中，CM 域都是 K_c，它只取决于 G 和 c。（在第二种证明中，每个 N-轨道 O 由两个 N_0-轨道组成，而 $S \cap O$ 是其中之一；它也是 P_O中的一个，Q_O。）论证中既不涉及自同态代数，也不涉及 Rosati 对合；它们是 Shimura–Taniyama 更精细结论所必需的，例如 $\mathrm{End}^0(A_S)$ 的描述，而该判据并未涉及这一点。当 $r_1 \geq 1$时，计数这一步恰好会失效：此时$|S| < |\Sigma|/2$，复共轭可能固定 S 中的嵌入，也可能将它们映到实嵌入，而乘积 $c\,c'$ 未必保持 S。这就是一般情形需要第8–10节中更精细分析的原因；在这些章节中，CM 域被区块系 $\mathfrak{B}$取代。

11.3. **没有中间子域的域**。

推论 11.3. 假设 K 除了 $\mathbb{Q}$ 和 K 外没有其他子域，或者等价地说，G 在 Σ 上作用是本原的。那么 $T_{K,\ s}$ 是拟阿贝尔的，当且仅当 $r_2 = 1$。特别地，当 $[K\colon\ \mathbb{Q}]$ 是素数时，此结论适用。

证明。对于 $r_2 = 1$，这就是推论 2.2(i)。设 T_K、s 为拟阿贝尔域。根据定理 2.4，S 是从一个子域 K' 提升而来的，其中（K'，K^+）是可容许的，且 K' 是 $\mathbb{Q}$ 或 K。它不可能是 $\mathbb{Q}$：$\mathbb{Q}$ 的唯一一个位是实位，而 K 的复位位于其上方，这被 (L1) 排除。因此 $K' = K$，且（K，K^+）是可容许的。由于 $r_2 \geq 1$，K 并非全实，因此 $K^+ = \mathbb{Q}$；而可容许性表明，K 至多有一个复位。□

在素数次数情形下，还可以直接利用轨道判据进行论证；该论证还表明，每个有序对轨道都包含一个对角对。

注 11.4. 设 $[K\colon\ \mathbb{Q}] = p$为奇素数且 $r_2 \geq 2$。素数次数 p 的传递群是 2-传递的或可解的，而可解群共轭于仿射群 $\mathrm{AGL}(1,p)$ 的一个子群（Burnside 和 Galois；例如参见 [14]）。在第一种情形下，推论 2.2(ii)适用。在第二种情形下，将 Σ 与 $\mathbb{F}_p$ 等同，使得 $G = \{x \mapsto ax + b\colon\ \ a \in U$、$b \in \mathbb{F}_p\}$ 对于子群 $U \leq \mathbb{F}_p^\times$成立；$G$ 包含所有平移，因为它包含一个阶为 p的元素。阶为 2 的元素 $x \mapsto ax + b$ 具有 $a^2 = 1$，而 $x \mapsto x + b$ 的阶为 p，除非 $b = 0$；因此 c 具有形式 $x \mapsto -x + b$。通过平移坐标，不妨设 $c(x) = -x$；于是 $-1 \in U$，且唯一的实嵌入为 0。一个对 $\{x, y\}$ 通过平移可移至 $\{0, y - x\}$，然后通过

U，因此其 G-轨道由陪集 $(y-x)\,U$在 $\mathbb{F}_p^\times/U$中的位置确定；由于 $-1\in U$，这不取决于 x 和 y的次序。对角对 $\{k,-k\}$属于陪集 $2kU$的轨道，而每个陪集 aU 都具有这种形式，其中 $k=a/2$。因此每个轨道都包含一个对角对。由于 $r_2\geq 2$ 存在一个禁对，并且它与一个对角对属于同一轨道。定理 2.1的条件 (b) 不成立。

12. Meromorphic functions

该判据所决定的内容比表面上看起来的更多。当其条件不满足时，$T_{K,\ S}$ 上的亚纯函数只有常数函数。

定理 12.1。 设 $r_2\geq 1$ 且 $T=T_{K,\ S}$。

(a) 如果 $r_1\geq 1$，T 上的每个全纯函数都是常数： T 是 *Cousin* 群。***(b)*** T 要么是拟阿贝尔的，要么 T 上的每个亚纯函数都是常数。

对于 $r_1=0$，***(b)*** 部分表示，复环面 T 是阿贝尔簇，或者代数维数为 0。特别地， T 上的每个亚纯函数为常数，当且仅当定理 *2.1* 和 *2.4* 中的等价条件不满足。

(a) 部分是已知的。它可追溯至 Andreotti 和 Gherardelli [5, §4，命题 6], ，其证明见 [21, 引理 2.4] 和 [2, 命题 4.1]。我们给出一个简短证明，因为同样的论证也能证明 (b)。

我们使用两个经典约化。对于连通复阿贝尔李群 X ，存在一个最大的连通闭复子群 H_0 ，在其每个陪集上，全纯函数都为常数；并且 $X/H_0\cong\mathbb{C}^a\times(\mathbb{C}^\times)^b$ （Morimoto [20]；另见 [4]）。现在假设 X 上的每个全纯函数都为常数。那么存在 X 的一个连通闭复子群Z_0 ，使得 X/Z_0 是拟阿贝尔的或平凡的，并且 X 上的每个亚纯函数都是 X/Z_0 上某个亚纯函数的拉回。这就是 Capocasa 和 Catanese 的亚纯约化（或拟阿贝尔约化） [8, 定义 2.18 和定理 2.20] ；另见 [4]。对于复环面，这就是经典的代数约化。

这两个子群在各自的性质下都是极大的。若每个定义在 X 上的亚纯函数在某个连通子群 W 的陪集上都是常数，那么 W 在 X/Z_0 中的像是平凡的，因为拟阿贝尔群在亚纯意义下可分离 [4, 主定理 3.2.21]；因此 $W\subseteq Z_0$。同理，全纯函数可以分离 $\mathbb{C}^a\times(\mathbb{C}^\times)^b$中的点。现在设 φ 是 X 的一个具有有限核的满射全纯自同态。若 f 是定义在 X上的亚纯函数，那么 $f\circ\varphi$也是亚纯函数，因此它在 Z_0的陪集上为常数。由此， f 在 $\varphi(Z_0)$的陪集上为常数，且 $\varphi(Z_0)\subseteq Z_0$。这两个群都是连通闭群，且维数相同，因此$\varphi(Z_0)=Z_0$。同样的论证给出 $\varphi(H_0)=H_0$。

取 K 的一个本原元，并将其乘以一个正整数，使其属于 $\mathcal{O}_K$。将所得元素记为 α；于是 $\alpha\in\mathcal{O}_K$ 且 $K=\mathbb{Q}(\alpha)$。对角矩阵 $A_\alpha=\operatorname{diag}(\rho(\alpha))_{\rho\in S}$满足 $A_\alpha u(a)=u(\alpha a)$，因此 $A_\alpha\Lambda\subseteq\Lambda$。由于 $\alpha\neq 0$，它诱导出一个具有有限核的满射自同态φ_α ，其定义域为 T 。其特征值 $\rho(\alpha)$、 $\rho\in S$两两不同，因为 $K=\mathbb{Q}(\alpha)$的不同嵌入在 α上的取值不同。

引理 12.2 （刚性）。 设 $W\subseteq T$ 是一个带有 $\varphi_\alpha(W)=W$ 的连通闭复子群。则 $W=0$ 或 $W=T$。

证明。 设 $V\subseteq\mathbb{C}^g$ 是 W 的李代数，从而对于投影 $\pi\colon\mathbb{C}^g\to T$，有 $W=\pi(V)$，且有 $A_\alpha V=V$。记 $\mathbb{C}^g$ 的单位向量为 ϵ_ρ、 $\rho\in S$。由于 A_α 的特征值互不相同， V 由若干个 ϵ_ρ 张成。

群 $\Lambda\cap V$ 在 A_α 的作用下映射到自身，因此它对应于 $\mathcal{O}_K$ 的一个 $\mathbb{Z}[\alpha]$-子模。如果它包含带有 $a\neq 0$ 的 $u(a)$，那么对于所有 $k\geq 0$，它都包含 $u(a\alpha^k)$，并且 a， $a\alpha$、……、 $a\alpha^{\delta-1}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。因此， $\Lambda\cap V$ 的秩为 0 或 δ。

如果秩为 δ，那么 $\Lambda\cap V$在 Λ中具有有限指数，因此 V包含 $\mathbb{R}\Lambda$，而后者在 $\mathbb{C}$上张成 $\mathbb{C}^g$；因此 $V=\mathbb{C}^g$ 和 $W=T$。

设秩为 0，但 $V\neq 0$，例如 $\epsilon_\rho\in V$。于是 $\epsilon_\rho\in\mathbb{R}\Lambda$，因此 $V_0=V\cap\mathbb{R}\Lambda$ 是一个非零实子空间。由于 W 是闭的， $V+\Lambda=\pi^{-1}(W)$ 是闭的，从而 $(V+\Lambda)\cap\mathbb{R}\Lambda=V_0+\Lambda$ 也是闭的，

其在 $\mathbb{R}\Lambda/V_0$ 中的像也是如此。该像是一个实向量空间中维数为 $<\delta$ 的可数闭子群。不是离散的闭子群包含一条直线，而直线是不可数的。因此该像是离散的，其秩为 $<\delta$。但它同构于 Λ，因为 $\Lambda\cap V_0=0$，且 Λ 的秩为 δ。这一矛盾表明 $V=0$。□

定理的证明 *12.1.* (a) 设 $r_1\geq 1$，并设 H_0 为全纯约化的子群。它在 φ_α作用下保持不变，因此由引理 $H_0=0$或 $H_0=T$ 可得12.2. 若 $H_0=0$，则$T\cong\mathbb{C}^a\times(\mathbb{C}^\times)^b$，且其基本群 $a+b=g$的秩至多为 $\mathbb{Z}^b$。但 g的基本群为 T，秩为 Λ。因此 $\delta=g+r_2>g$。 $H_0=T$

(b) T上的每个全纯函数都是常值函数：若 $r_1\geq 1$，则由 (a) 可知；而且 T在$r_1=0$时是紧的。因此 T有一个亚纯约化 Z_0，且同样在 φ_α作用下保持不变。若 $Z_0=0$，则 $T=T/Z_0$ 是拟阿贝尔群。若 $Z_0=T$，则每个亚纯函数都是某个点上的函数的拉回，因此它是常值函数。最后一个断言由定理 2.1 和 2.4得出，因为正维数的拟阿贝尔群具有非常值亚纯函数 [8, 1]。□

对于群$T_{K,\,S}$ 因此，拟阿贝尔与仅有常值亚纯函数之间不存在中间情形。当 $r_1\geq 1$时，甚至可以令 α 为单位元；这是 Za¨ımi、Bertin 和 Aljouiee 的定理 [28, （定理 1）4]；此时 φ_α 是一个自同构。这里并不需要这一点，而且当 $r_1=0$时，一般也无法做到。Kazama 和 Umeno [18]证明了，N´eron–Severi 群消失的环面群仅有常值亚纯函数；Umeno 将这一结果用于 $\mathbb{Q}(2^{1/5})$ [26]。定理12.1 不需要任何此类假设：对于S_- 例13.3 中的情形，以及例13.5 的二面体情形，N´eron–Severi 群的秩为正，但每个亚纯函数仍然都是常值函数。一般的 Cousin 群可以有真亚纯约化，例如由一个拟阿贝尔群与一个仅有常值亚纯函数的群构成的直积。

13. Examples and remarks

在所有例子中，判定依据要么是子域上的块结构，要么是轨道的形态。对于较小的情形，我们给出共轭图 Γ。

例 13.1（次数 9，符号 (5，2)）。设 $\mu^3-4\mu-1=0$ 且 $K=\mathbb{Q}(\alpha)$，其中 $\alpha^3-\alpha=\mu$。三次域 $\mathbb{Q}(\mu)$ 是全实的；在它的三个实位上，多项式 $x^3-x-\mu$ 分别有 3、1 和 1 个实根，因此 $b=(0,\,1,\,1)$。根据定理 7.1， $T_{K,\,S}$ 对所有四个系统S都是拟阿贝尔的。这里 $K^+=\mathbb{Q}(\mu)$，因为 K 不是全实域，且在 $\mathbb{Q}(\mu)$ 与K之间不存在严格介于两者之间的域；而 $K_c=K$。对于 $K=\mathbb{Q}(\eta)$，其中 $\eta^3+4\beta\eta+4=0$ 在 $\mathbb{Q}(\beta)=\mathbb{Q}(\zeta_9)^+$ 上的情形也同样成立，$\beta^3-3\beta+1=0$，其中 $b=(1,\,1,\,0)$。

例13.2（两个三角形）。设 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{3})$ 的符号为 (2, 2)。在 $K^+=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的每个实位上都有一个实位和一个复位，因此根据定理 7.1，全部四个 S 都给出拟阿贝尔群。其中两个来自 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ 的提升，后者具有 $r_2=1$；另外两个并非来自任何真子域的提升。复共轭作用于 3 的三个立方根上，成为三个对换，并固定 $\sqrt{2}$。因此， Γ 由两个三角形组成，分别对应于 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的每个嵌入；每个嵌入都具有一个实嵌入和两个复嵌入。 $\Pi(\rho)$ 的各部由单个嵌入组成，且 $K_c=K$。这是 Andreotti 和 Gherardelli 所述情形的一个实例：全实域的三次扩张。根据命题 6.1，对于从 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ 提升的两个系统，N´eron–Severi 群的秩为 12；对于另外两个系统，秩为 9。

例 13.3（八面体）。令 $K=\mathbb{Q}(\theta)$，其符号为 (2,2)。这里 $\theta^2=2+\lambda$ 与 $\lambda^3=2$，且 $G=C_2\wr S_3$的阶为 48。固定该多项式的一个非实根，并再次将其记作 θ。除实嵌入 σ_1 和 σ_2 外，还有四个复嵌入$\bar{\ }$ $\bar{\ }$，我们以生成元的像命名为： θ、 $-\theta$、 θ 和 $-\theta$。在 $L=\mathbb{Q}(\lambda)$之上，$\bar{\ }$有一个实位和一个复位，块为 $\{\sigma_1,\sigma_2\}$、 $\{\pm\theta\}$ 和 $\{\pm\theta\}$，而 c交换后两个块。唯一的真子域是 $\mathbb{Q}$ 和 L，因此 $K^+=\mathbb{Q}$，并且只有一个N-轨道。图 Γ 是八面体图，有六个顶点和十二条边：完全多部图$K_{2,2,2}$，其各部是 L之上的三个块。每个嵌入

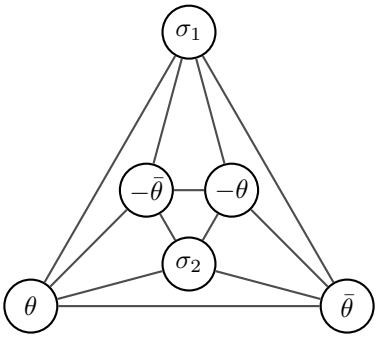

FIGURE 1. 共轭图 $\Gamma = K_{2,\,2,\,2}$ 例 13.3。对顶点构成了 L 上的三个块；它们是仅有的不以边相连的顶点对。$^{-}$ $^{-}$复嵌入张成四环 $\theta,\ \theta,\ -\theta,\ -\theta$。

都与其所在块之外的四个嵌入相邻，而这三个块正是三对对顶点；见图1。因此 $K_c = L$，恰有两个系统给出拟阿贝尔群，即从 L提升而来的两个系统。对于 $S_+ = \{\sigma_1, \sigma_2, \theta, -\theta\}$，该群是拟阿贝尔群。$^{-}$ $^{-}$对于 $S_- = \{\sigma_1, \sigma_2, \theta, -\theta\}$ 则不是：元素 $\gamma \in G$ 改变 $\{\pm\theta\}$ 上的符号而固定其他嵌入，由此得到的复共轭 $\gamma c \gamma^{-1}$ 交换 θ 和 $-\bar{\theta}$。根据定理12.1，T_{K,S_-} 只有常值亚纯函数，尽管根据命题6.1，其 N´eron–Severi 群的秩为 3：L之上的各块内的三对构成一个不含禁对的轨道。因此，答案取决于 S，而不只取决于 K。由于 $K^+ = \mathbb{Q}$ 和$r_2 = 2$，没有任何一对 (K, K_0) 是可容许的：拟阿贝尔群 T_{K,S_+} 来自提升，而非来自 K上的迹形式判据。

例 13.4（立方体）。设 $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$为 t^3-3t+1的根，因此 $K_0 = \mathbb{Q}(\beta_1) = \mathbb{Q}(\zeta_9)^+$是一个循环三次域。恰有一个 β_j 为负，且 $\beta_1\beta_2\beta_3 = -1$。取 β_j 的平方根 r_j并令 $\theta = r_1 + r_2 + r_3$ 和 $u = r_1r_2r_3$，使得 $u^2 = -1$。由于 $\sum_j \beta_j = 0$ 和$\sum_{j<k} \beta_j\beta_k = -3$，可得 $\theta^4 = -12 + 8u\theta$，因此

$$\theta^8 + 24\theta^4 + 64\theta^2 + 144 = 0.$$

设 $K = \mathbb{Q}(\theta)$。$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 的任意非空子集的乘积都不是 K_0中的平方，因为$\widetilde{\ }$每个这样的乘积在 K_0的某个实位上为负。因此 $K = K_0(r_1,\ r_2,\ r_3)$的次数为 24，且 $G = (\mathbb{Z}/2)^3 \rtimes C_3$：正规子群 $(\mathbb{Z}/2)^3 = \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K_0)$独立地改变$r_j$ 的符号，而 C_3 则将它们循环置换。这八个数 $\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3$ 彼此不同，因此 $[K :\ \mathbb{Q}] = 8$，且 K 是由 C_3固定的域。它是全虚的，并包含 $u = (\theta^4 + 12)/(8\theta)$，即 -1的一个平方根。

复共轭 c 改变带有 $\beta_j < 0$ 的r_j 的符号，并固定另外两个。因此，$\mathcal{D}$ 由三个单独的符号改变组成：$N = (\mathbb{Z}/2)^3$、$K^+ = \mathbb{Q}$，并且只有一个 N-轨道。由于 N 在 Σ上简单传递地作用，我们可以将 Σ 识别为$(\mathbb{Z}/2)^3$，，于是 Γ 就是立方体图。它是二分图，四个偶权顶点和四个奇权顶点分别构成两个颜色类，但它不是完全二部图：两个对顶点颜色不同且不相邻。这两个颜色类是位于 $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\mathrm{i})$之上的块，因为 u 在偶权符号改变下保持不变，而在其他改变下变号。因此 $K_c = \mathbb{Q}(\mathrm{i})$。十六个系统中，恰有两个给出拟阿贝尔群；在这里它们是阿贝尔簇：这两个系统是从 $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$提升而来的。根据推论 10.3，它们同源于 E^4，其中 $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$。

例13.5（五次域）。对于 $K = \mathbb{Q}\left(2^{1/5}\right)$，$G$ 是一个阶为20的 Frobenius 群，且为2-传递群；对于由 $x^5 - 5x + 12$定义的域，G 是阶为10的二面体群。两者的符号均为（1，2），且在这两种情况下，根据推论11.3，对于任意 S，$T_{K,\,S}$ 都不是拟阿贝尔的。在二面体情形中，嵌入对应于五边形的顶点；点对的轨道是五条边和五条弦。一对对角点属于边的轨道，另一对属于弦的轨道，因此每个禁对都与一对对角点属于同一轨道，尽管 N´eron–Severi$(T_{K,\,S})$ 的秩为 5

根据命题6.1。推论11.3 适用于所有符号为（1，2）的五次域。这类域的三维群$T_K,\ S$ 见 [12, 定理 4.2–4。4]和 [10, §3。2]。无论如何选择 S，它们都不是拟阿贝尔的；根据定理12.1 ，它们的所有亚纯函数都是常数。这一结果涵盖了 [26] 和 [10, §3.2。1], 中的计算，那里针对特定五次域讨论了 S 的一种选择。

例 13.6（$K = \mathbb{Q}(2^{1/9})$，符号 (1, 4)）。嵌入为 $2^{1/9}\zeta_9^k$、 $k \in \mathbb{Z}/9$ 和 $G = \mathbb{Z}/9 \rtimes (\mathbb{Z}/9)^\times$，其作用为 $k \mapsto ak + b$。根据两个指数之差是单位元还是属于 $\{3, 6\}$，点对有两个轨道。对角对 $\{1, 8\}$ 和 $\{3, 6\}$属于不同的轨道，因此每个轨道都包含一个对角对，而对于 16 个系统 S中的任一个，T_K、S 都不是拟阿贝尔的。用定理 2.4 的术语来说：除了 $\mathbb{Q}$ 之外，唯一的真子域是 $\mathbb{Q}(2^{1/3})$，而 S 无法从该子域提升，因为在其位于实位之上的位置有 K的复位；并且 $K^+ = \mathbb{Q}$，而 $r_2 = 4$。

备注 13.7（证明所用内容）。 除了轨道判据和引理 2.3，第 2.4 节中定理 8–10 的证明仅用到 $\mathcal{D}$ 是传递置换群中的一个对合共轭类，且 $\Gamma[C]$ 是二分图。因此，这是关于这类共轭类的一个论断：如果该共轭类中一个对合所移动的元素诱导出 Γ的二分子图，那么 Γ 的每个连通分支都是二分图或完全多部图，且这些部构成一个区块系。

Use of AI tools

根据现行编辑政策，作者声明在本项工作中使用了人工智能系统 Claude（Anthropic）。该人工智能系统不是本文作者。主要思想、研究项目和必要的参考文献资料均完全由作者提供。

论证。 人工智能系统用于构思和检验论证，主要涉及第 6 节以及完整列表的证明（第 8–10 节）。它还提出了目前第 8–10 节的组织方式，以及引理 5.1 目前形式的证明。第 13 节示例中的计算性结论（多项式的不可约性和符号、伽罗瓦群、N´eron–Severi 群的秩）借助计算机进行了核验；示例 13.4的伽罗瓦群则另用 Maple 独立确认。主要结果、其表述以及证明策略均由作者提出。

撰写。 第 6 节和 8–10 节的正文以及第13 节的例子，部分借助人工智能系统撰写。对于其他各节，仅使用人工智能系统修改措辞和呈现方式。人工智能系统还协助准备了 LaTeX 源文件。

引文。 参考文献资料基本由作者提供；人工智能系统仅偶尔用于核查参考文献。所有参考文献，包括所引定理的编号，均由作者根据原始资料进行了核对。

所有陈述和证明均已由作者核查，作者对本文内容承担全部责任。

References

[1] Y. Abe, *On toroidal groups*, 日本数学会杂志 41 (1989), 第 4 期, 699–708。（引用见第 1、3 和 19 页。）[2] Y. Abe, $\mathfrak{o}_{K_0}$*-quasi-abelian varieties with complex multiplication*, 《数学论坛》25 (2013), 第 4 期, 677–702。（引用见第 1、2 和 18 页。）[3] Y. Abe, *Quasi-abelian varieties given by certain algebraic number fields*, 《富山数学杂志》36 (2013/14), 27–36。（引用见第 2 和 11 页。）[4] Y. Abe, K. Kopfermann, *Toroidal Groups*, 《数学讲义》 1759, 施普林格 , 2001。（引用见第 1 、 2 、 3 、 10 和 18 页。）[5] A. Andreotti, F. Gherardelli, *Varietà quasi-abeliane a moltiplicazione complessa*, 载于：几何研讨会，1972–73 年度，II（F. Gherardelli 讲述），全球分析中心出版物，佛罗伦萨，1973，463–488。（引用见第 1、2、3、4、11 和 18 页。）[6] A. Andreotti, F. Gherardelli, *Some remarks on quasi-abelian manifolds*, 载于：全球分析及其应用，第二卷，国际原子能机构，维也纳，1974，203–206。（引用见第 1、2、3 和 11 页。）[7] L. Battisti, K. Oeljeklaus, *Holomorphic line bundles over domains in Cousin groups and the algebraic dimension of Oeljeklaus–Toma manifolds* 2 **58** 2015 2, 273 285 ，《爱丁堡数学会会刊》（ ）（ ），第 – 期。（引用见第 2 页。）

[8] F. Capocasa, F. Catanese, *Periodic meromorphic functions*, 《数学学报》166 (1991), 27–68。（引用见第 18 和 19 页。）[9] A. Di Bartolo, G. Falcone, *The periods of the generalized Jacobian of a complex elliptic curve*, 《几何进展》15 (2015), 第 1 期, 127–131。（引用见第 2 页。）[10] A. Dioguardi Burgio, *On toroidal groups in relationship with generalized Jacobians, and non-totally realnumber fields*, 博士论文，巴勒莫大学（与卡塔尼亚大学和墨西拿大学联合培养项目，第 XXXVII 届），2025。（引用见第 2 和 21 页。）[11] A. Dioguardi Burgio, *On the ring of endomorphisms of a certain class of quasi-Abelian varieties arising from non-totally real number fields* 10 1142 1793042127500163 ，《国际数论杂志》，即将出版，doi: . /S .（引用见第 2 页。）[12] A. Dioguardi Burgio, G. Falcone, *Periodic functions toroidal groups generalized Jacobians and fractional* , , , , 《数学科学杂志（纽约）》（），– doi: . /s - - 07572-z。（引用见第 2、6 和 21 页。）[13] A. Dioguardi Burgio, G. Falcone, M. Galici, *Non-totally real number fields and toroidal groups*, J. Th´eor. Nombres Bordeaux 36 (2024), 第 1 期, 339–359, doi:10.5802/jtnb.1281。（引用见第 2 页。）[14] J. D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation Groups*, 数学研究生教材 163，施普林格，1996。（引用见第 17 页。）[15] B. Dodson, *A new example of quasi-abelian varieties, and its characterization*, 《意大利数学联盟通报》（第 5 辑）16-A (1979), 545–553。（引用见第 2、4、5 和 11 页。）[16] B. Dodson, *Fibrations of quasi-abelian varieties*, 《意大利数学联盟通报》增刊（1980），第 2 期（泛函分析与应用），283–317。（引用见第 1 和 6 页。）[17] F. Gherardelli, *Varietà quasi abeliane a moltiplicazione complessa*, 《米兰数学与物理研讨会报告》57 (1987), 31–36。（引用见第 1、2 和 4 页。）[18] H. Kazama, T. Umeno, *Toroidal groups without non-constant meromorphic functions*, 《九州数学杂志》71 (2017), 第 1 期, 129–137。（引用见第 19 页。）[19] S. Lang, *Complex Multiplication*, 《数学科学基础丛书》255，施普林格，纽约，1983。（引用见第 16 页。）[20] A. Morimoto, *On the classification of noncompact complex abelian Lie groups*, 《美国数学会会刊》123 (1966), 200–228。（引用见第 18 页。）[21] K. Oeljeklaus, M. Toma, *Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields*, 《傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）》55 (2005), 第 1 期, 161–171。（引用见第 1、2 和 18 页。）[22] M. Rosenlicht, *Generalized Jacobian varieties*, 《数学年刊》（第 2 辑）59 (1954), 505–530。（引用见第 2 页。）[23] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes* 1959 *Algebraic* , *Groups and Class Fields* 117, 1988 2 赫尔曼出版社，巴黎，。英文译本：，《数学研究生教材》，施普林格，（引用见第 页。）[24] G. Shimura, Y. Taniyama, *Complex Multiplication of Abelian Varieties and its Applications to Number Theory* 6, 1961 1 16 ，《日本数学会出版物》，日本数学会，东京，。（引用见第 和 页。）[25] T. Umeno, *Period matrices for quasi-abelian varieties*, 《日本数学杂志》（新辑）29 (2003), 第 1 期, 117–133。（引用见第 10 页。）[26] T. Umeno, *On arithmetic toroidal groups*, 《Filomat》31 (2017), 第 1 期, 103–106, doi:10.2298/FIL1701103U。（引用见第 1、2、5、10、19 和 21 页。）[27] D. Valli`ères, *Connected abelian complex Lie groups and number fields*, J. Th´eor. Nombres Bordeaux 24 (2012), 第 1 期, 201–229。（引用见第 2 页。）[28] T. Za¨ımi, M. J. Bertin, A. M. Aljouiee, *On number fields without a unit primitive element*, 《澳大利亚数学会通报》93 (2016), 420–432。（引用见第 19 页。）

Aix Marseille Univ, CNRS, I2M, 3 place Victor Hugo, Case 19, 13331 Marseille Cedex 3, Franc e
Email address: karl.oeljeklaus@univ-amu.fr