arXiv:2611.30400v1 [math.OA] 23 Nov 2026

# 无理非交换索伦诺伊德的 Morita等价分类

PAULO CARRILLO ROUSE、LAURENT GUILLAUME 和 JEAN RENAULT

ABSTRACT. 给定一个素数 $p$，我们将 a $p$-角定义为 $p$-solenoid $\mathcal{S}_p$ 中的一个元素，或者等价地，定义为 $\mathbf{R}\times\mathbf{Q}_p$ 中模 $\mathbf{Z}[1/p]$ 的一个元素。非交换 $p$-solenoid，或等价地，$p$-旋转代数，是由一个 $p$-角定义的 $C^*$-代数，其定义方式与非交换环面或通常的旋转代数由一个角定义的方式相同。我们根据它们的 $p$-角，对这些 $C^*$-代数在无理情形下的强莫里塔等价进行了完整分类，同时也对相关群胚的莫里塔等价进行了分类；更确切地说，我们得到如下分类结果：两个无理的 $p$-角定义强莫里塔等价的非交换 solenoid，当且仅当它们定义同构的维数群，当且仅当它们模 $GL_2(\mathbf{Z}[1/p])$ 同余，当且仅当它们定义莫里塔等价群胚。该结果以不同的证明方式推广了 Latr´emoli`ere 和 Packer 此前得到的关于同构分类的结果。我们还根据真 $G$-空间，给出了射影 $C^*$-模的几何构造；这些模通过平移穷尽维数群，并通过群胚等价实现所有相关的莫里塔等价。

## INTRODUCTION

无理旋转 C*-代数已得到广泛研究，并由 Rieffel 在 [14] 中进行了分类；它们也以非交换环面或克罗内克叶状结构 C*-代数等不同形式出现，是该理论的基础。本文表明，将 $\mathbf{Z}$替换为 $\mathbf{Z}[1/p]$（其中 $p$ 是一个素数）后，对应 C*-代数的研究可以完全以相同的方式进行。由于维数群是这些 C*-代数的完备不变量，本文的大部分篇幅都用于研究它。本文的另一特点是着重介绍几何构造。特别是，我们的 C*-代数之间的 Morita 等价自然由群胚等价实现，如 [10] 所示；投射模的维数则作为体积获得。事实上，这种几何方法正是撰写本文的主要动机，旨在补充 Latr´emoli`ere 和 Packer 的文章 [9] ；该文引入了这些代数，并通过 C*-代数技术对其进行了研究。

下面介绍各节的内容及其主要结果。第一节
介绍关于$\mathbf{Q}_p$ 进数域及其整数环$\mathbf{Z}_p$的预备知识。主要研究对象是环$\mathbf{Z}[1/p]$，其对偶群是 $p$进溶子群 $\mathcal{S}_p$。关键事实是，正如$\mathbf{Z}$ 是$\mathbf{R}$ 的离散子群，且商空间为$\mathbf{S^1}$, $\mathbf{Z}[1/p]$ 是$\mathbf{R}\times\mathbf{Q}_p$ 的离散子群，且商空间为 $\mathcal{S}_p$。

第二节讨论 $p$角及其维数群。这纯粹是代数问题。$p$角是 $\mathcal{S}_p$的一个元素，或者等价地说，是$\mathbf{R}\times\mathbf{Q}_p$ 模$\mathbf{Z}[1/p]$的一个元素。 $p$角的维数群有两种定义方式：一种是归纳极限，另一种更好的方式是将其定义为$\mathbf{Z}[1/p]^2$ 的子群（定义 2.6）。值得注意的是，这里出现了两种正性：$\mathbf{R}_+$ 中的 $\mathbf{R}$ 和$\mathbf{Z}_p$ 中的$\mathbf{Q}_p$。主要结果是推论 2.17：当且仅当 $p$角模 GL(2,$\mathbf{Z}[1/p]$)同余时，维数群才同构。

第三节给出了非交换螺旋体和无理$p$旋转代数的定义。为了证明这些 C*-代数彼此同构，并且

它们是正则对易关系的泛 C*-代数，我们给出一个一般性结果，即定理 3.2。该结果使用部分傅里叶变换，并可由 [13, 定理 7.8]推得。由此很容易将非交换螺旋体表示为（通常的）无理代数的归纳极限；这是 [9], 的一项基本结果。进而可得，它们的维数群就是前一节中定义的维数群。

第四节给出了投射 C*-模及 Morita 等价的几何构造。该构造是在一个相当一般的框架下建立的，其中包括通常的无理旋转代数。我们没有使用克罗内克叶状结构的 C*-代数作为无理旋转代数的稳定模型，而是使用 $\mathbb{Z}^2$ 通过嵌入将 $\mathbb{R}$ 上的作用定义为将 $(k,l)$ 送到 $k\alpha + l$ 的 C*-代数（根据定理 3.2，这些 C*-代数是同构的）。类似地，我们的稳定模型是作用 $[1/p]^2$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}_p$ 上的变换群胚 $G$，该作用通过由 $p$-角定义的嵌入给出。第一个结果（定理 4.2 和推论 4.3）给出了 $G = \Gamma \ltimes X$ 与 $\Gamma/\Gamma_1 \ltimes X/\Gamma_1$ 之间的群胚等价 $Z$，其中 $\Gamma$ 是在局部紧空间 $X$ 上连续作用的局部紧群，而 $\Gamma_1$ 是 $\Gamma$ 的闭正规子群，并且在 $X$ 上自由且真地作用。此外（命题 4.5），如果 $\mu$ 是 $X$ 上的不变测度，$\Gamma$ 是离散的，且 $X/\Gamma_1$ 是紧的，那么 $C^*(Z)$ 作为 $C^*(G)$ 上关于由 $\mu$ 定义的迹的投射 C*-模，其维数等于 $X/\Gamma_1$ 的横截测度。我们将这些结果应用于 $\Gamma = \mathbb{Z}[1/p]^2$ 在 $X = \mathbb{R}\times\mathbb{Q}_p$ 上的作用。取 $\Gamma_1$ 为 $\Gamma$ 的一维子群，便可穷尽 $C^*(G)$ 的维数群中次数为 0 的正部分（命题 4.7）。当 $\Gamma_1$ 为极大的时，$\Gamma/\Gamma_1 \ltimes X/\Gamma_1$ 的群胚 $C^*$-代数是一个非交换 $p$-solenoid（命题 4.4）。最后一个结果（命题 4.9）描述了与满足我们假设的两个子群 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 相关联的 $\Gamma/\Gamma_1 \ltimes X/\Gamma_1$ 与 $\Gamma/\Gamma_2 \ltimes X/\Gamma_2$ 之间群胚等价的拓扑结构。

第五节用定理5.1这一单一陈述，总结了关于非交换螺旋体 Morita 等价分类的结果。

附录再现了 [12] 中的结果，正文中会用到这些结果。

## 1. Preliminaries

我们回顾正文中使用的定义和一些基本结果。关于这一主题，我们的参考文献是 [16, 第 1], 章；如需详细论述，请读者参阅该章。我们假设 $p$是一个素数，尽管当 $p$ 为任意整数时，许多定义和结果仍然成立。主要对象包括

$\mathbf{Z}[1/p]$ = 进有理数的群；它同时也是一个欧几里得环；$\mathcal{S}_p = p$螺旋体；
$\mathbf{Q}_p$ = 进数域；$\mathbf{Z}_p$ = 进整数环。

由于$\mathbf{Z}[1/p]$ 是$\mathbf{Q}$的子群，因此它既是$\mathbf{R}$ 的子群，也是$\mathbf{Q}_p$的子群。它在$\mathbf{R}$中和$\mathbf{Q}_p$中都稠密。$\mathbf{Q}_p$ 中的元素写成洛朗级数

$$x = \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n p^n, \quad \text{where} \quad x_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

如果 $x_{n_0} \neq 0$, $n_0 = v(x)$ 是 $x$ 的赋值。$p$-进范数为 $|x|_p = p^{-v(x)}$。$p$-进整数是满足 $v(x) \geq 0$ 的 $p$-进数。每个 $x \in \mathbf{Q}_p$ 都有一个整数部分

$$[x] = \sum_{n=0}^{\infty} x_n p^n \quad \text{belonging to } \mathbf{Z}_p.$$

定义它的小数部分 $\{x\} = x - [x]$，它属于 $\mathbf{Z}[1/p]$。

通过欧几里得算法，$\mathbf{N}$ 嵌入到 $\mathbf{Z}_p$ 中。由此可推得$\mathbf{Q}$ 嵌入到 $\mathbf{Q}_p$ 中。它是一个稠密子域。

复数域 $\mathbf{R}$ 的基本特征是 $e(t) = \exp(i2\pi t)$。它建立了$\mathbf{R}\hat{}$与其对偶$\mathbf{R}$之间的同构： $t \mapsto \chi_t$, 其中 $\chi_t(s) = e(ts)$。类似地，$\mathbf{Q}$的基本特征是$p$ $e_p(x) = e(\{x\})$，其中 $\{x\}$ 是 $x$的小数部分。它建立了$\mathbf{Q}_p$ 与其对偶$\mathbf{Q}_p$ 之间的同构： $x \mapsto \chi_x$，其中 $\chi_x(y) = e_p(xy)$。

$p$-溶度群 $\mathcal{S}_p$ 定义为$\mathbf{Z}[1/p]$的对偶群。由于$\mathbf{Z}[1/p]$ 是归纳极限

$$\mathbf{Z}[1/p] = \varinjlim(\mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z} \xrightarrow{p} \dots)$$

$\mathcal{S}_p$ 是射影极限

$$\mathcal{S}_p = \varprojlim(\mathbf{T} \xleftarrow{z^p} \mathbf{T} \xleftarrow{z^p} \dots)$$

$\hat{}$其中$\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ 通过对偶性 $\langle z, n\rangle = z^n$与$\mathbf{Z}$ 相对应。

关于$\mathbf{Z}[1/p]$ 的最重要结果类似于$\mathbf{Z}$的经典性质 :

(i) $\mathbf{Z}$ 是$\mathbf{R}$的离散子群；$\hat{}$ (ii) 商群$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 被识别为$\mathbf{Z}$。

**定理 1.1.** $\mathbf{Z}[1/p]$ 嵌入$\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$ 中，且是一个离散子群。

证明。我们选取嵌入 $x \mapsto (x, -x)$。为后文之便，记 $j : \mathrm{Z}[1/p] \to \mathrm{R}$ 为嵌入到 R 中的嵌入，记 $j_p : \mathrm{Z}[1/p] \to \mathrm{Q}_p$ 为嵌入到 $Q_p$ 中的嵌入，并记 $J = (j, -j_p)$ 为将该嵌入到 $\mathrm{R} \times \mathrm{Q}_p$中的嵌入。注意到， $V = (-1, 1) \times \mathrm{Z}_p$ 是 $\mathrm{R} \times \mathrm{Q}_p$的一个开子集。我们证明 $J(\mathrm{Z}[1/p]) \cap V = \{(0, 0)\}$。事实上，若 $x = \sum_m^n x_i p^i \in \mathrm{Z}[1/p]$ 属于 $\mathrm{Z}_p$，则 $m \geq 0$。这意味着 $|x| \geq 1$ ，除非 $x = 0$。□

注意，我们本可以使用 $J' = (j,\ j_p)$，而不使用 $J = (j,\ -j_p)$。

**定理 1.2**。 商群 $(\text{实数域} \times \mathbf{Q}_p)/\mathbf{Z}[1/p]$ 可识别为 $p$-*solenoid* $\mathcal{S}_p$。

证明。由对偶性， $J, J' : \mathrm{Z}[1/p] \to$实数域$\times \mathrm{Q}_p$是严格且单射的，从而得到 $\hat{}J, \hat{}J' : \hat{}\mathrm{R} \times \hat{}\mathrm{Q}_p \to \mathcal{S}_p\hat{}$严格且满射。我们按上述方式将 R 和 $\mathrm{Q}_p$ 与其对偶群等同。我们验证 $j : \mathrm{R} \to \mathcal{S}_p$由 $\hat{}\ j(t) = (e(t/p^n))$ 给出，并且 $\hat{}\ j_p : \mathrm{Q}_p \to \mathcal{S}_p$由 $\hat{}\ j_p(x) = (e_p(x/p^n))$ 给出。因此，$\hat{}J, \hat{}J'$分别由 $\hat{}J(t, x) = (e(t/p^n - \{x/p^n\})$ 和 $\hat{}J'(t, x) = (e(t/p^n + \{x/p^n\})$ 给出。它们是满射的。可以验证，$\hat{}J'$的核是 $J$的像。□

我们保留正合列

$$0 \to \mathbf{Z}[1/p] \xrightarrow{J} \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p \xrightarrow{j'} \mathcal{S}_p \to 1.$$

**引理 1.3**。 设 $H$ 是拓扑群 $G$ 的子群。假设存在 $1 \in G$ 的一个邻域 $V$，使得 $V \cap H = \{1\}$。那么，

（i） $H$ 是离散子群；（ii） $G$ 的每个子集 $U$，若与每个陪集 $xH$ 相交且满足 $U^{-1}U \subset V$，则是商映射 $\pi :\ G \to G/H$ 的基本域。

证明。 对所有 $h \in H$， $Vh \cap H = \{h\}$。若 $U$ 与每个陪集 $xH$ 相交，则 $\pi\ (U) = G/H$。假设 $x,\ y \in U$ 且 $\pi\ (x) = \pi\ (y)$ 。那么 $x^{-1}y$ 属于 $U^{-1}U \cap H$，因此等于 $\mathbf{1}$。□

我们将此引理应用于 $H = J(\mathbf{Z}[1/p])$ 和 $G = \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$。

**推论 1.4**。 $[0,1) \times \mathbf{Z}_p$ 是该商映射的基本域

$$\pi = \hat{J}' : \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p \to \mathcal{S}_p$$

将$(\alpha,\ \mathbf{a})$ 映射为$(e(\alpha/p^n + \{\mathbf{a}/p^n\}))_n$。

## 2. $p$-ANGLES AND THEIR DIMENSION GROUPS

在本节中， $\pi$： **实数域** $\times \mathbf{Q}_p \to \mathcal{S}_p$ 表示商映射 $\pi(\alpha,\ \mathbf{a}) = (e(\alpha/p^n + \{\mathbf{a}/p^n\}))_n$， 而 $J$: $\mathbf{Z}[1/p] \to$ **实数域** $\times \mathbf{Q}_p$ 表示包含映射 $J(x) = (x,\ -x)$。我们有正合列

$$0 \to \mathbf{Z}[1/p] \xrightarrow{J} \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p \xrightarrow{\pi} \mathcal{S}_p \to 1.$$

类比于通常将角定义为模$\mathbf{Z}$的实数，我们给出如下定义。

**定义 2.1.** 我们将 $p$-角定义为 $\mathcal{S}_p$中的一个元素 $\zeta = (\zeta_n)$。等价地，我们将其视为 $\vec{\alpha} = (\alpha,\ \mathbf{a}) \in$ **实数域** $\times \mathbf{Q}_p$ 模$\mathbf{Z}[1/p]$中的一个元素：对于所有 $x \in \mathbf{Z}[1/p]$，$(\alpha,\ \mathbf{a})$和$(\alpha + x,\ \mathbf{a} - x)$定义同一个$p$-角。该对应关系由 $\zeta = \pi(\alpha,\ \mathbf{a})$给出，即对于所有 $n \in \mathbf{N}$， $\zeta_n = e(\alpha/p^n + \{\mathbf{a}/p^n\})$。

注意，在基本域 $[0,1) \times \mathbf{Z}_p$ 中，每个 $p$-角 $\zeta$ 都有且仅有一个代表元（$\alpha$,$\mathbf{a}$）。若（$\alpha, \mathbf{a}$）$\in [0,1) \times \mathbf{Z}_p$，我们记为

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \quad \text{where} \quad a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

并将$\mathbf{a}/p^n$ 分解为其小数部分与整数部分之和:

$$\frac{\mathbf{a}}{p^n} = \{\frac{\mathbf{a}}{p^n}\} + [\frac{\mathbf{a}}{p^n}].$$

然后引入以下记号:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{\alpha}{p^n} + \{\frac{\mathbf{a}}{p^n}\} = \frac{1}{p^n}(\alpha + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i) \\
\mathbf{a}_n &= \frac{\mathbf{a}}{p^n} - \{\frac{\mathbf{a}}{p^n}\} = \frac{1}{p^n}\sum_{i=n}^{\infty} a_i p^i = [\frac{\mathbf{a}}{p^n}] \\
\mathbf{a}^{(n)} &= p^n\{\frac{\mathbf{a}}{p^n}\} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i
\end{aligned}$$

我们注意到归纳关系

$$p\alpha_{n+1} = \alpha_n + a_n.$$

**引理 2.1**。 利用上述记号，我们有:

(i) $(\alpha_n, \mathbf{a}_n)$ 定义相同的 $p$-角，即 $p^{-n}(\alpha,\ \mathbf{a})$,(ii) $\zeta_n = e(\alpha_n)$,(iii) 若 $0 < \alpha < 1$，则对所有 $n \in \mathbf{N}$， $0 < \alpha_n < 1$ (iv) $p\alpha_{n+1} = \alpha_n + a_n$.

请注意，正如 Latr´emoli`ere 和 Packer 所做的那样，可以将 $p$-角定义为实数序列 $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$，满足 $0 \le \alpha_0 < 1$，且 $p\alpha_{n+1} - \alpha_n$ 属于 $\{0, 1, \dots, p-1\}$。它定义了 $\zeta \in \mathcal{S}_p$，使得 $\zeta_n = \epsilon(\alpha_n)$。可以在 $\mathbf{Z}p$ 中恢复 $a_n = p\alpha_{n+1} - \alpha_n$ 和 $\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$。

**引理 2.2**。 设 $\zeta = (\zeta_n) \in \mathcal{S}_p$ 是由$(\alpha, \mathbf{a}) \in (0,1) \times \mathbf{Z}p$给出的一个 $p$-角，则

*(i)* $\zeta \mapsto (\zeta_n)$ 是一个由 $(\beta, b) \in (0, 1) \times Zp$ 给出的 $p$-角，其中 $\beta = 1 - \alpha$ 且 $b = \sigma(a)$ *def* $= \sum_{i=0}^{\infty}(p - 1 - a_i)p^i$。此外，对于所有 $n \in N$，我们有 $\beta_n = 1 - \alpha_n$。 *(ii)* $\zeta$ 的 $k$-平移 $\eta$，记为 $\eta = S_k\zeta$，定义为 $\eta_n = \zeta_{n+k}$，是一个 $p$-角。它由 $(\alpha_k, a_k)$ 给出，或等价地由 $p^{-k}(\alpha, a)$ 给出。

证明。 对于 (i)，使用公式 $-\mathbf{a} = 1 + \sigma(\mathbf{a})$。断言 (ii) 显然成立。 □

**定义 2.2.** 于是我们称

(i) $(1 - \alpha, \sigma(\mathbf{a}))$ 是 $(\alpha,\mathbf{a})$ 的共轭，(ii) $(\alpha_k,\mathbf{a}_k)$ 是 $(\alpha,\mathbf{a})$ 的 $k$-平移。有时我们记作：$\alpha_k = S_k\alpha$、$\mathbf{a}_k = S_k\mathbf{a}$ 以及$S_k(\alpha,\mathbf{a}) = (\alpha_k, \mathbf{a}_k)$。

如前所述，就 $(\alpha,\mathbf{a})$ 而言， $k$-平移相当于乘以 $p^{-k}$。事实上，

$$\vec{\alpha}_k \overset{\text{def}}{=} (\alpha_k, \mathbf{a}_k) = p^{-k}(\alpha + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i, \mathbf{a} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i)$$

等价于 $p^{-k}\vec{\alpha}$。就 $\zeta$ 而言， $k$-平移相当于取 $p^{-k}$ 次幂。我们可以写作 $S_k\zeta = \zeta^{(p^{-k})}$。

共轭和平移这两种运算都可以用矩阵形式表示。给定一个系数属于$\mathbf{Z}[1/p]$ 的矩阵 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$，以及属于$\mathbf{R}$ 或$\mathbf{Q}p$ 的 $x$，使得 $bx + d \neq 0$，我们记作：

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} x = \frac{ax + c}{bx + d}.$$

给定 $(s, x) \in$ **实数域** $\times \mathbf{Q}p$，记作

$$(t, y) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (s, x) \quad \text{if} \quad t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} s \quad \text{and} \quad y = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix} x.$$

**定义 2.3**。 我们称实数域 $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}p$ 中的两个元素 $(\alpha,\mathbf{a})$ 和 $(\beta,\mathbf{b})$ 为

(i) 通过矩阵 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}[1/p])$ 同余，当且仅当

$$(\alpha, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (\beta, \mathbf{b}),$$

(ii) 模 $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}[1/p])$[（分别模 $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})$] ）同余，当且仅当它们通过 $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}[1/p])$ 中的矩阵（分别通过 $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})$] 中的矩阵）同余。

注记 2.1。 由于中心

$$Z = \{\begin{pmatrix} \epsilon p^{-n} & 0 \\ 0 & \epsilon p^{-n} \end{pmatrix}, n \in \mathbf{Z}, \epsilon = \pm 1\}$$

若 $\mathrm{GL}(2,\ \mathbf{Z}[1/p])$ 的作用是恒等映射，则 $\mathrm{GL}(2,\ \mathbf{Z}[1/p])$ 在 $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}p$ 上的作用可经由 $\mathrm{PGL}(2,\ \mathbf{Z}[1/p]) = \mathrm{GL}(2,\ \mathbf{Z}[1/p])/Z$ 分解。因此，我们可以说模 $\mathrm{PGL}(2,\ \mathbf{Z}[1/p])$ 同余，而不是模 $\mathrm{GL}(2,\ \mathbf{Z}[1/p])$ 同余。

**引理 2.3**。 若 $(\alpha,\mathbf{a})$ 和 $(\beta,\mathbf{b})$ 模 $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}[1/p])$ 同余，则存在 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}[1/p])$ 使得

$$(\alpha,\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (\beta,\mathbf{b})$$

并满足 $b\beta + d > 0$ 和 $v(-b\mathbf{b} + d) = 0$。

证明。 根据假设，存在 $\begin{pmatrix} a & c \\ b' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}[1/p])$ 使得

$$(\alpha,\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} (\beta,\mathbf{b}).$$

令 $\epsilon$ 为 $b'\beta + d'$ 的符号， $n = v(-b'\mathbf{b} + d')$。于是

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon p^{-n} & 0 \\ 0 & \epsilon p^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$$

满足所需条件。 □

**命题 2.4**。设 $(\alpha,\mathbf{a}) \in$ **实数域** $\times$ **有理数集**$_p$。

(i) 给定 $x \in \mathbf{Z}[1/p]$， $(\alpha,\ \mathbf{a})$ 与 $(\alpha + x,\mathbf{a} - x)$ 可通过矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 实现同余。(ii) $(1-\alpha,\sigma(\mathbf{a}))$ 与 $(\alpha,\ \mathbf{a})$ 可通过矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 实现同余。(iii) 给定 $k \in \mathbf{N}$， $S_k(\alpha,\ \mathbf{a})$ 与 $(\alpha,\mathbf{a})$ 可通过矩阵 $\begin{pmatrix} p^{-k} & \{p^{-k}\mathbf{a}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 实现同余。

在定义 $p$-角的维数群之前，我们先回顾无理旋转的情形。根据定义，无理实数 $\alpha$ 的维数群是$\mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}$ 的子群，并按照$\mathbf{R}$ 的通常序排序。下一个定理将回顾这些维数群的分类及其代数证明，因为对于 $p$-角的维数群，我们也将得到类似的结果和类似的证明。不过，我们注意到，Rieffel 在 [14] 给出了一个有趣的证明：他使用相应 C*-代数的 Morita 等价，而非定理 2.13。

**定理 2.5**。 [7, 定理 14。23] 令 $A$ 表示正无理实数的集合。设$\alpha$ 和 $\beta$ 为非零无理实数。当且仅当存在 $a$、$b$、$c$、$d$ 属于**整数集**，使得**整数集**$\alpha+$**整数集** 与**整数集**$\beta+$**整数集** 作为有序群同构时，才有

(i) $ad - bc = \pm 1$, (ii) $b\beta + d > 0$(iii) $\alpha = (a\beta + c)/(b\beta + d)$。

此外，(**整数集**$\alpha +$ **整数集**,1) 与(**整数集**$\beta +$ **整数集**,1) 作为带单位元的有序群同构，当且仅当 $b = 0$。此时， $d = 1$ 和 $a = \pm 1$。

证明。 证明可由下图推出：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} & \xrightarrow{j_\alpha} & \mathbf{Z}\alpha+\mathbf{Z} \\ {\scriptstyle M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times r} \\ \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} & \xrightarrow{j_\beta} & \mathbf{Z}\beta+\mathbf{Z} \end{array}$$

其中 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 和 $j_\alpha(x,\ y) = x\alpha + y$。若 $M$ 存在，则令 $r = b\beta + d$即可得到一个交换图，从而得到从 $\mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}\beta + \mathbf{Z}$的序同构。反过来，设 $\varphi : \mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\beta + \mathbf{Z}$ 是有序子群的一个同构。作为群同构，它由一个矩阵 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in GL(2，**Z**)给出。此外，根据 Hion 的一个结果（见定理 2.13），两个 $\mathbf{R}$ 子群之间的序同构必然是乘以某个 $r > 0$。由此便得到上述交换图。必然有 $r\alpha = a\beta + c$和 $r = r1 = b\beta + d$。或者，也可以由这些关系得到 $a$，$b$，$c$，$d$。在保持单位元的情形下，$r = 1$。因此 $b = 0$ 和 $d = 1$。□

现在我们将 $p$-角的维数群定义为一个归纳极限。随后将给出一个内在的等价定义（定义 2.6）。

**定义 2.4**。设 $(\alpha, \mathbf{a}) \in$ **实数域** $\times$ **整数**$_p$。我们将维数群 $G(\alpha, \mathbf{a})$ 定义为由 1 和序列 $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 生成的**实数域** 的子群，并赋予**实数域**上的通常序。

**命题 2.6**。设 $(\alpha, \mathbf{a}) \in$ **实数域** $\times$ **整数**$_p$ 且 $G_n =$ **整数**$\alpha_n +$ **整数** 对 $n \in$ **自然数**。(i) 子群序列$(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 递增，且 $G(\alpha, \mathbf{a}) = \bigcup_{n\in\text{自然数}} G_n$。(ii) 对所有 $n \in$ **自然数**，$G(\alpha_n, \mathbf{a}_n) = G(\alpha, \mathbf{a})$。

证明。**(i)** 由于 $\alpha_n = p\alpha_{n+1} - a_n$，它属于 **整数**$\alpha_{n+1} +$ **整数**。因此，**整数**$\alpha_n +$ **整数** $\subset$ **整数** $\alpha_{n+1} +$ **整数**。**(ii)** $G(\alpha_n, \mathbf{a}_n) = \bigcup_{i\geq n} G_i = \bigcup_{i\geq 0} G_i = G(\alpha, \mathbf{a})$。□

**推论 2.7**。维数群 $G(\alpha, \mathbf{a})$ 仅取决于由$(\alpha, \mathbf{a})$定义的 $p$-角 $[\alpha, \mathbf{a}]$。从现在起，将其记作 $G[\alpha, \mathbf{a}]$。

我们的研究将仅限于下文所定义的无理 $p$-角。

**引理 2.8**。对于 $\zeta = \pi(\alpha, \mathbf{a}) \in \mathcal{S}_p$，以下条件等价：(i) 存在 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $\zeta_n$ 是单位根；(ii) 存在 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $\alpha_n$ 是有理的；(iii) 对于所有 $n \in \mathbf{N}$，$\zeta_n$ 都是单位根；(iv) 对于所有 $n \in \mathbf{N}$，$\alpha_n$ 都是有理的。

证明。设 $\zeta_n^k = 1$，其中 $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$。那么 $\zeta_{n-1}^k = \zeta_n^{pk} = 1$。另一方面，关系 $\zeta_n = \zeta_{n+1}^p$ 给出 $\zeta_{n+1}^{pk} = \zeta_n^k = 1$。□

**定义2.5.** 如果满足引理中的条件，我们称 $\zeta \in \mathcal{S}_p$ 为单位根，或称$(\alpha_0,\ \mathbf{a}_0) \in$ **实数域** $\times$ **有理**$_p$；否则称其为无理的。

若$(\alpha,\ \mathbf{a})$是无理的，我们通过基$(\alpha_n,\ 1)$将 $G_n = \mathbf{Z}\alpha_n + \mathbf{Z}$ 与$\mathbf{Z}^2$ 视为同一对象。从 $G_n$ 到 $G_{n+1}$ 的嵌入矩阵为 $\begin{pmatrix} p & 0 \\ -a_n & 1 \end{pmatrix}$。从 $G_0$ 到 $G_n$的嵌入矩阵为 $\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ -^{(n)} & 1 \end{pmatrix}\mathbf{a}$。

我们对**实数域**$\times$**有理**$_p$ 中元素的维数群所作的第二个定义，基于以下观察。

**命题2.9**。设$(\alpha,\ \mathbf{a}) \in$ **实数域** $\times \mathbf{Z}_p$。从 $G[\alpha, \mathbf{a}]$ 到$\mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p]$ 的映射定义为

$$k\alpha_n + l \quad to \quad (p^{-n}k, l + k\{p^{-n}\mathbf{a}\})$$

(i) 定义良好；(ii) 是群同态；(iii) 是单射；(iv) 其值域由满足 $x\mathbf{a} - y \in \mathbf{Z}_p$的$(x, y) \in \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p]$ 中的元素构成；(v) 其逆映射将$(x, y)$ 映射为 $x\alpha + y$。

证明。 (i) 该映射定义良好：若将 $\alpha_n$ 替换为 $p\alpha_{n+1} - a_n$，则有：

$$k\alpha_n + l = k(p\alpha_{n+1} - a_n) + l = kp\alpha_{n+1} + l - ka_n$$

它被映射为

$$(p^{-(n+1)}kp, l - ka_n + kp\{p^{-(n+1)}\mathbf{a}\}) = (p^{-n}k, l + k\{p^{-n}\mathbf{a}\}).$$

(ii) 通过将 $n$取足够大， $G(\alpha,$ a) 中的任意一对元素都可写成 $(k\alpha_n+l,\ k'\alpha_n+l')$ 的形式。于是，它们的和 $(k + k')\alpha_n + (l + l')$ 被映射为 $(p^{-n}(k + k'),\ (l + l') + (k + k')\{p^{-n}\mathbf{a}\})$，这正是 $k\alpha_n + l$与 $k'\alpha_n + l'$的像之和。

(iii) 若 $(p^{-n}k,\ l + k\{p^{-n}\mathbf{a}\}) = (0,\ 0)$，则 $k = 0$且 $l = 0$。因此 $k\alpha_n + l = 0$。设 $x = p^{-n}k$ 且 $y = l + k\{p^{-n}\mathbf{a}\}$，其中 $n \in \mathbf{N}$ 且 $k,\ l \in \mathbf{Z}$。那么，

$$x\mathbf{a} - y = p^{-n}k\mathbf{a} - l + k\{p^{-n}\mathbf{a} = k[p^{-n}\mathbf{a}] - l$$

属于 $\mathbf{Z}_p$。反过来，设 $(x, y) \in \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p]$，使得 $v(x\mathbf{a} - y) \geq 0$。我们需要找到$n \in \mathbf{N}$ 以及 $k$, $l \in \mathbf{Z}$，使得 $x = p^{-n}k$ 且 $y = l + k\{p^{-n}\mathbf{a}\}$。若 $x \in \mathbf{Z}$，则可取 $n = 0$,$k = x$ 和 $l = y$。事实上，由于 $y - x\mathbf{a}$ 和 $x\mathbf{a}$ 属于 $\mathbf{Z}_p$，所以 $y = y - x\mathbf{a} + x\mathbf{a}$ 也属于 $\mathbf{Z}_p$。由于 $y$也属于 $\mathbf{Z}[1/p]$，因此 $y$ 属于 $\mathbf{Z}$。若 $x \in \mathbf{Z}[1/p] \setminus \mathbf{Z}$，则将 $x = p^{-n}k$ 写成 $k$ 与$p$互质的形式。这唯一确定了 $n \in \mathbf{N}$ 和 $k \in \mathbf{Z}$。接下来只需证明 $l = y - k\{p^{-n}\mathbf{a}\}$ 是整数。由于 $l$ 属于 $\mathbf{Z}[1/p]$，只需证明它属于 $\mathbf{Z}_p$。我们有：

$$\begin{aligned} l &= y - k\{p^{-n}\mathbf{a}\} \\ &= y - x\mathbf{a} + x\mathbf{a} - k\{p^{-n}\mathbf{a}\} \\ &= y - x\mathbf{a} + p^{-n}k\mathbf{a} - k\{p^{-n}\mathbf{a}\} \\ &= y - x\mathbf{a} + k(p^{-n}\mathbf{a} - \{p^{-n}\mathbf{a}\}) \\ &= (y - x\mathbf{a}) + k[p^{-n}\mathbf{a}] \end{aligned}$$

由于 $y - x\mathbf{a}$、 $k$ 和 $[p^{-n}\mathbf{a}]$ 属于 $\mathbf{Z}_p$， $l$也属于其中。
(iv) 若 $(x, y) = (p^{-n}k, l + k\{p^{-n}\mathbf{a}\})$，则

$$x\alpha + y = p^{-n}k\alpha + k\{p^{-n}\mathbf{a}\} + l = k\alpha_n + l.$$

□

这个命题启发了我们对$\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$中元素的维数群所作的第二种定义。

**定义** **2.6.** 我们将 $(\alpha, \mathbf{a}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$的维数群定义为有序阿贝尔群 up

$$G'(\alpha, \mathbf{a}) = \{(x, y) \in \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p] : v(x\mathbf{a} - y) \geq 0\},$$

$$G'(\alpha, \mathbf{a})^+ = \{(x, y) \in G'(\alpha, \mathbf{a}) : x\alpha + y \geq 0\}.$$

必要时，我们将用单位元 (0,1) 对其进行规范化。

注意，作为一个群， $G'(\alpha,$ a) 仅取决于 $\mathbf{a}$。

**命题 2.10.** 假设$(\alpha, \mathbf{a}) \in$ **实数域** $\times \mathbf{Z}_p$. 那么映射 $j_\alpha : (x, y) \mapsto x\alpha + y$ 是从$(G'(\alpha,\mathbf{a}), (0, 1))$ 到$(G[\alpha, \mathbf{a}], 1)$的保单位元有序群同构。

证明。 这直接由 $G'(\alpha,\mathbf{a})$ 的定义和命题2.9得出。

□

我们回顾一下，映射 $x \mapsto \{x\} + \mathbf{Z}$ 是从 $\mathbf{Q}_p$ 到 $\mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z}$ 的群同态，其核为$\mathbf{Z}_p$。这给出了商空间（$\mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p]$）$/G'$（$\alpha$，$\mathbf{a}$）的一个便捷描述:

**命题 2.11**。 设 $(\alpha, \mathbf{a}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$。群短正合列

$$0 \to G'(\alpha, \mathbf{a}) \xrightarrow{i} \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p] \xrightarrow{\tau_{\mathbf{a}}} \mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z} \to 0,$$

其中， $i$ 是包含映射， $\tau_{\mathbf{a}}(x, y) = \{x\mathbf{a} - y\} + \mathbf{Z}$，是正合的。

证明。 $i$ 的单射性和 $\tau_{\mathbf{a}}$ 的满射性是显然的。根据定义， $i(G'(\alpha, \mathbf{a}))$ 是 $\tau_{\mathbf{a}}$的核。□

与 $G[\alpha,\mathbf{a}]$相反， $G'(\alpha, \mathbf{a})$ 取决于 $\mathbf{a}$ 的 $p$-角的代表元（$\alpha$，$\mathbf{a}$）。

**命题2.12**。 设 $c \in \mathbf{Z}[1/p]$。那么，自同构 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ 将 $G'(\alpha,\mathbf{a})$ 映到

$$G'(\alpha - c, \mathbf{a} + c).$$

证明。若 $x' = x$ 且 $y' = cx + y$，则 $x'(\alpha - c) + y' = x\alpha + y$ 且 $x'(\mathbf{a} - c) - y' = x\mathbf{a} - y$. □

以下这些经典且颇为相似的结果，是我们主要定理的关键组成部分。

**定理 2.13**。 *(Hion)* 设 $G$ 和 $H$ 是赋有自然序的**实数域** 的子群。假设 $G \neq 0$。若 $\varphi$ 是从 $G$ 到 $H$ 的序同构，则存在实数 $r > 0$，使得对于所有 $g \in G$， $\varphi(g) = rg$。

证明。 参见 [5,第四章第 1]节，其中给出了一个优美的证明。 □

**定理 2.14.** 设 $f$ 是群 $\mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z}$的一个自同构。存在一个单位元$\rho$属于 $\mathbf{Z}_p$，使得对所有 $x \in \mathbf{Z}[1/p]$， $f(x + \mathbf{Z}) = \{\rho x\} + \mathbf{Z}$。记作 $f = \rho\cdot$。对应关系$\rho \mapsto \rho\cdot$ 是单位群 $\mathbf{Z}_p^\times$与 自同构群$(\mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z})$之间的一个同构。

证明。 参见 [6, 第 VIII 章，第 43 节，例 3]。 □

**引理 2.15.** 设 $G$ 是一个群，且 $\varphi: G'(\alpha,\mathbf{a}) \to G$ 是一个群同态。那么 $\varphi$可以唯一地延拓为一个群同态 $\tilde{\varphi}: \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p] \to G$。

证明。我们首先注意到 $\mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p] = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} p^{-n}G'(\alpha, \mathbf{a})$。事实上，设 $(x, y) \in \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p]$ 且 $m = v(x\mathbf{a} - y)$。若 $m \geq 0$，则 $(x, y)$ 按定义属于 $G'(\alpha, \mathbf{a})$。若 $m = -n < 0$,$v(p^n(x\mathbf{a} - y)) = n + m = 0$，因此 $(x', y') = p^n(x, y)$ 属于 $G'(\alpha, \mathbf{a})$，且 $(x, y)$ 属于 $p^{-n}G'(\alpha, \mathbf{a})$。下面证明，若 $(x, y) = p^{-n}(x', y')$，其中 $(x', y') \in G'(\alpha, \mathbf{a})$，则 $\tilde{\varphi}(x, y) = p^{-n}\varphi(x', y')$ 定义了一个 $\tilde{\varphi}$ 无歧义的映射。事实上，若 $p^{-n}(x', y') = p^{-m}(x'', y'')$ 且 $m \leq n$，则 $(x', y') = p^{n-m}(x'', y'')$，且 $\varphi(x', y') = p^{n-m}\varphi(x'', y'')$。因此 $p^{-n}\varphi(x', y') = p^{-m}\varphi(x'', y'')$。由于 $\tilde{\varphi}$ 在 $p^{-n}G'(\alpha, \mathbf{a})$ 上的限制是一个群同态，且 $\mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p]$ 是 $p^{-n}G'(\alpha, \mathbf{a})$ 的递增并，故 $\tilde{\varphi}$ 是一个群同态。唯一性显然。□

**定理 2.16.** 设 $(\alpha,\mathbf{a})$ 和 $(\beta,\mathbf{b})$ 属于 $(\textbf{实数域} \setminus \mathbf{Q}) \times \mathbf{Q}_p$。

*1.* 每个有序群同构 $\varphi: G'(\alpha,\mathbf{a}) \to G'(\beta,\mathbf{b})$ 都唯一地延拓为群同构 $\tilde{\varphi}: \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p] \to \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p]$，其由矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}[1/p])$给出。

*2.* 由矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$定义的群自同构 $\psi$： $\mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p] \to \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p]$ 限制为有序群同构 $\varphi$： $G'$（$\alpha$、$\mathbf{a}$） $\to G'$（$\beta$、$\mathbf{b}$） 当且仅当满足以下四个条件

(i) $v(-b\mathbf{b}+d)=0$(ii)
$(-b\mathbf{b}+d)\mathbf{a}=a\mathbf{b}-c$(iii)
$b\beta+d>0$(iv) $(b\beta+d)$
$\alpha=a\beta+c.$

证明。 1. 引理 2.15 给出了群同构 $\tilde{\varphi}$ 的存在性和唯一性。已知 $\mathbf{Z}[1/p]\times\mathbf{Z}[1/p]$ 的每个群自同构都由一个矩阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in$GL(2，$\mathbf{Z}[1/p]$) 给出。

2. 设 $\psi$ 是由矩阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in$ GL(2，$\mathbf{Z}[1/p]$) 给出的 $\mathbf{Z}[1/p]\times\mathbf{Z}[1/p]$ 的自同构。假设 $\psi(G'(\alpha,\mathbf{a}))=G'(\beta,\mathbf{b})$。于是 $\psi$ 下降为 $\mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z}$ 的自同构 $\psi$ 。根据定理 2.14，存在 $\rho\in\mathbf{Z}_p^\times$ 使得 $\psi=\rho\cdot$。下图是交换图，其中 $\varphi$ 是 $\psi$ 在 $G'(\alpha,\mathbf{a})$ 上的限制，而 $\tau_{\mathbf{a}}$，$\tau_{\mathbf{b}}$ 已在命题 2.11 中定义。

$$\begin{array}{ccccc} G(\alpha,\mathbf{a}) & \longrightarrow & \mathbf{Z}[1/p]\times\mathbf{Z}[1/p] & \xrightarrow{\tau_{\mathbf{a}}} & \mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\rho\cdot} \\ G(\beta,\mathbf{b}) & \longrightarrow & \mathbf{Z}[1/p]\times\mathbf{Z}[1/p] & \xrightarrow{\tau_{\mathbf{b}}} & \mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z} \end{array}$$

图表的交换性给出了方程

$$\{x(\rho\mathbf{a})-y\}=\{x(a\mathbf{b}-c)-y(-b\mathbf{b}+d)\}\pmod 1$$

对所有 $x,y\in$ Z$[1/p]$ 均成立。由基本特征 $e_p(x)=e(\{x\})$ 的连续性、Q$p$ 的特征以及 Z$[1/p]$ 在 $Q_p$ 中的稠密性，可得对所有 $y\in$Q$p$ 均有 $e_p(\rho y)=e_p((-b\mathbf{b}+d)y)$。由于 $e_p$ 建立了 Q$p$ 的自对偶性，故 $\rho=-b\mathbf{b}+d$。类似地，可得 $\rho\mathbf{a}=a\mathbf{b}-c$。进一步假设 $\psi$ 保持 $G'(\alpha,\mathbf{a})$ 和 $G'(\beta,\mathbf{b})$ 的序。令 $J_\alpha(x,y)=x\alpha+y$ 以及 $J_\beta(x,y)=x\beta+y$，其中 $(x,y)\in$ Z$[1/p]\times$ Z$[1/p]$。于是，$\psi$ 诱导出 $J_\alpha(G'(\alpha,\mathbf{a}))$ 与 $J_\beta(G'(\beta,\mathbf{b}))$ 之间的序同构，而这两个对象都是 R 的子群。根据定理 2.13，存在一个实数 $r>0$，使下图交换

$$\begin{array}{ccccc} G(\alpha,\mathbf{a}) & \longrightarrow & \mathbf{Z}[1/p]\times\mathbf{Z}[1/p] & \xrightarrow{J_\alpha} & \mathbf{R} \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ G(\beta,\mathbf{b}) & \longrightarrow & \mathbf{Z}[1/p]\times\mathbf{Z}[1/p] & \xrightarrow{J_\beta} & \mathbf{R} \end{array}.$$

由图表的交换性可得 $r=b\beta+d$ 和 $r\alpha=a\beta+c$。

反之，假设条件 (i) 至 (iv) 均成立。给定 $(x,y)\in\mathbf{Z}[1/p]\times\mathbf{Z}[1/p]$和 $(x',y')=\psi(x,y)$，我们有

$$x'\mathbf{b}-y'=x(a\mathbf{b}-c)+y(b\mathbf{b}-d)=(-b\mathbf{b}+d)(x\mathbf{a}-y).$$

因此，若 $v(-b\mathbf{b}+d)=0$，则 $v(x'\mathbf{b}-y')=v(x\mathbf{a}-y)$。这意味着 $\psi(G'(\alpha,\mathbf{a}))=G'(\beta,\mathbf{b})$。我们还有

$$x'\beta+y'=x(a\beta+c)+y(b\beta+d)=(b\beta+d)(x\alpha+y).$$

因此，若 $b\beta+d>0$，则 $x'\beta+y'$ 与 $x\alpha+y$ 同号。这意味着 $\psi(G'(\alpha,\mathbf{a})^+)=G'(\beta,\mathbf{b})^+$

□

**推论 2.17**。 设$(\alpha,\mathbf{a})$ 和$(\beta,\mathbf{b})$ 属于(**实数域** $\setminus\mathbf{Q}$) $\times\mathbf{Q}_p$。则以下条件等价:

(i) $(\alpha, \mathbf{a})$ 和 $(\beta, \mathbf{b})$ 模 $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}[1/p])$ 同余，并且(ii) $G'(\alpha,\mathbf{a})$ 和 $G'(\beta, \mathbf{b})$ 作为有序群同构。

证明。 (i)⇒ (ii) 。根据引理 2.3，存在 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}[1/p])$，使得

$$(\alpha, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (\beta, \mathbf{b})$$

并且满足 $b\beta + d > 0$ 和 $v(-b\mathbf{b} + d) = 0$。于是 $\psi\colon \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p] \to \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p]$由矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 定义的映射满足定理 2.16 的条件 (i) 至 (iv)。因此，它限制为一个有序群同构 $\varphi\colon G'(\alpha, \mathbf{a}) \to G'(\beta,\mathbf{b})$。

(ii) ⇒ (i) 设 $\varphi\colon G'(\alpha,\mathbf{a}) \to G'(\beta,\mathbf{b})$ 是一个有序群同构。定理 2.16 的条件 (ii) 和 (iv) 表明，$(\alpha, \mathbf{a})$ 和 $(\beta,\mathbf{b})$ 通过扩张 $\tilde{\varphi}$ 的矩阵的转置而同余。□

注记 2.2。 例如，利用维数群作为归纳极限的定义可以证明，条件 (i) 可替换为存在 $k, l \in \mathbf{N}$ 使得$S_k(\alpha, \mathbf{a})$ 和 $S_l(\beta,\mathbf{b})$ 模 $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})$ 同余。

注记 2.3。 该推论给出了无理非交换 solenoid 在 Morita 等价下的分类。

**推论 2.18**。 设 $(\alpha, \mathbf{a})$ 和 $(\beta,\mathbf{b})$ 属于$(\mathbf{实数域} \setminus \mathbf{Q}) \times \mathbf{Q}^p$。那么以下条件等价：

(i) 存在 $k, l \in \mathbf{N}$ 使得 $S_k(\alpha,\mathbf{a})$ 和 $S_l(\beta,\mathbf{b})$ 相等或共轭；(ii) 维数群 $(G'(\alpha,\mathbf{a}) \ u)$ 和 $(G'(\beta, \mathbf{b}) \ u)$ 作为带单位元的有序群同构，其中单位元为 $u = (0,1)$。

证明。 矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 固定 $u$ 当且仅当 $b = 0$ 且 $d = 1$。此时， $a = \pm 1$ 和 $c$ 是任意的。于是，定理 2.16 的条件 (ii) 和 (iii) 等价于 (i)。 □

注 2.4。 该推论给出了 [9] 的无理非交换索伦诺伊德在同构意义下的分类。定理 4.2 中也有这一分类，且该定理还讨论了有理非交换索伦诺伊德。两者的证明不同。

## 3. The twisted group $(\mathbf{Z}[1/p]^2, \ \sigma)$ and the commutation relations.

我们首先考虑一个一般框架： $H$ 和 $K$ 是局部紧阿贝尔群，且 $\hat{}\varphi\colon H \to K$ 是连续同态。群 $H$ 和 $K$ 采用加法记号。它们的 $\hat{}\ \hat{}$对偶群 $H$ 和 $K$ 采用乘法记号。与 $\varphi$ 相关联的对象为：

（i）由 $\sigma(x, \ y) = \langle \varphi(x_2) \ y_1 \rangle$ 定义的 2-余循环 $\sigma \in Z^2(K \times H, \ \mathbf{T})$，其中下标 1 和 2 分别表示第一和第二个分量；（ii） $H$ 在 $\hat{}K$ 上定义的平移作用 $\chi.h = \chi\varphi(h)$。

**命题 3.1**。 关系 $W(k, h) = U(k)V(h)$ 在以下两者之间给出双射对应：(i) 满足条件的酉表示对$(U, V)$，其中 $U$ 的酉表示为 $K$， $V$的酉表示为 $H$，满足

$$U(k)V(h) =< \varphi(h), k > V(h)U(k) \tag{1}$$

(ii) $\sigma$表示 $W$ 的酉表示，即满足：

$$W(x+y)=\sigma(x,y)W(x)W(y) \tag{2}$$

证明。 假设 $W$ 满足 (ii)。定义 $U(k)=W(k,\ 0)$ 和 $V(h)=W(0,\ h)$。于是

$$\begin{array}{rcl} V(h)U(k) & = & W(0,h)W(k,0) \\ & = & \sigma((0,h),(k,0))^{-1}W(k,h) \\ & = & <\varphi(h),k>^{-1} W(k,h) \\ U(k)V(h) & = & W(k,0)W(0,h) \\ & = & \sigma((k,0),(0,h))^{-1}W(k,h) \\ & = & W(k,h) \end{array}$$

这就得到 (i) 中的关系。

反过来，假设 $(U,V)$ 如 (i) 所述。定义 $W(k,h)=U(k)V(h)$。我们来检验 $W$ 是否满足 (ii) 中的关系。若 $x$ 和 $y$ 均属于同一个子群 $H$ 或 $K$，则 $\sigma(x,y)=1$，且该关系成立。假设 $x=(k,0)$ 属于 $K$，而 $y=(0,h)$ 属于 $H$。于是，记 $x=(x_1,x_2)$ 和 $y=(y_1,y_2)$，可得 $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2)$，因此

$$\begin{array}{rcl} W(x+y) & = & U(x_1+y_1)V(x_2+y_2) \\ & = & U(x_1)U(y_1)V(x_2)V(y_2) \\ & = & U(x_1)<\varphi(x_2),y_1>V(x_2)U(y_1)V(y_2) \\ & = & <\varphi(x_2),y_1>W(x)W(y) \\ & = & \sigma(x,y)W(x)W(y) \end{array}$$

□

**定理 3.2**。 以下 C*-代数自然同构

(i) $C^*(K\times H,\sigma)$；(ii) $C^*(K\rtimes_\varphi H)$；(iii) $C^*(K\ltimes_{\varphi^*}H)$，

其中 $\varphi^*:K\to H$ 是 $\varphi$ 的转置的复共轭。

证明。 这是 [13, 定理 7.8]，的一个特例，更多细节请参阅该定理；不过，我们也可以简要概述证明并给出相关公式。给定 $f\in C_c(G,\sigma)$，我们定义其部分傅里叶变换。这是定义在 $K\times H$ 上的函数 $f$，其定义如下

$$\hat{f}(\chi,h)=\int_K f(k,h)\langle\chi,k\rangle dk.$$

这是一个连续函数。它关于第一个变量 $\chi$ 的支集并不紧，但其 $I$-范数有界。我们回顾一下，卷积乘积和对合在完备化 $L^1(\hat{K}\rtimes_\varphi H)$ 上的定义公式，与在 $C_c(\hat{K}\rtimes_\varphi H)$ 上的相同。给定 $f,\ g\in C_c(G)$，我们有

$$\begin{array}{rcl} f*g(k,h) & = & \displaystyle\int_G f(k+k',h+h')g(-k',-h')\sigma((k+k',h+h'),(-k',-h'))dk'dh' \\ & = & \displaystyle\int_{K\times H} f(k+k',h+h')g(-k',-h')\langle\varphi(h+h'),-k'\rangle dk'dh' \\ \widehat{f*g}(\chi,h) & = & \displaystyle\int f(k+k',h+h')g(-k',-h')\langle\varphi(h+h'),-k'\rangle\langle\chi,k\rangle dk'dh'dk \\ \hat{f}*\hat{g}(\chi,h) & = & \displaystyle\int_H \hat{f}(\chi,h+h')\hat{g}(\chi\varphi(h+h'),-h')dh' \\ & = & \displaystyle\int_H\int_K f(k,h+h')\langle\chi,k\rangle dk\int_K g(k',-h')\langle\chi\varphi(h+h'),k'\rangle dk'dh' \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int f(k,h+h')g(k',-h')\langle\chi,k\rangle\langle\chi\varphi(h+h'),k'\rangle dkdk'dh' \\
&= \int f(k,h+h')g(k',-h')\langle\chi,k\rangle\langle\chi,k'\rangle\langle\varphi(h+h'),k'\rangle dkdk'dh' \\
&= \int f(k,h+h')g(k',-h')\langle\chi,k+k'\rangle\langle\varphi(h+h'),k'\rangle dkdk'dh' \\
&= \int f(k,h+h')g(-k',-h')\langle\chi,k-k'\rangle\langle\varphi(h+h'),-k'\rangle dkdk'dh' \\
&= \int f(k+k',h+h')g(-k',-h')\langle\chi,k\rangle\langle\varphi(h+h'),-k'\rangle dkdk'dh'
\end{aligned}
$$

我们还有

$$
\begin{aligned}
f^*(k,h) &= \overline{f(-k,-h)\sigma((k,h),(-k,-h)} \\
&= \overline{f(-k,-h)\langle\varphi(h),-k\rangle} \\
\widehat{f^*}(\chi,h) &= \int f^*(k,h)\langle\chi,k\rangle dk \\
&= \int \overline{f(-k,-h)}\langle\chi\varphi(h),k\rangle dk \\
(\hat{f})^*(\chi,h) &= \overline{\hat{f}(\chi\varphi(h),-h)} \\
&= \overline{\int f(k,-h)\langle\chi\varphi(h),k\rangle dk} \\
&= \overline{\int f(-k,-h)\langle\chi\varphi(h),-k\rangle dk} \\
&= \int \overline{f(-k,-h)}\langle\chi\varphi(h),k\rangle dk
\end{aligned}
$$

$\hat{}$ $C^*(K \rtimes_\varphi H)$ 的表示由一对 $(M,V)$ 给出，其中 $M$ 是 $\hat{}C_0(K)$ 的表示， $V$ 是 $H$ 在同一希尔伯特空间上的酉表示，并满足协变关系

$$(CR) \quad V(h)^{-1}M(\varphi)V(h) = M(\varphi\circ\alpha_h)$$

$\hat{}$其中 $\varphi \in C_0(K)$ 和 $\alpha_h(\chi) = \chi\varphi(h)$。通过盖尔范德变换， $M$ 对应于 $K$ 的一个酉表示 $U$。该对应关系为

$$M(\hat{f}) = \int f(k)U(k)dk$$

其中 $f \in C_c(K)$ 和 $\hat{} f(\chi) = \int f(k)\langle\chi,k\rangle dk$。现在我们证明，$(M,V)$ 满足 (3) 当且仅当 $(U,V)$ 满足 (1)。设 (1) 成立。那么

$$
\begin{aligned}
V(h)^{-1}M(\hat{f})V(h) &= \int f(k)V(h)^{-1}U(k)V(h)dk \\
&= \int f(k)\langle\varphi(h),k\rangle U(k)dk
\end{aligned}
$$

$\hat{}$ 由于 $g(k) = f(k)\langle\varphi(h)\ k\rangle$ 的盖尔范德变换是 $f\circ\alpha_k$:

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\chi) &= \int f(k)\langle\varphi(h),k\rangle\langle\chi,k\rangle dk \\
&= \int f(k)\langle\chi\varphi(h),k\rangle dk
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \hat{f}(\chi\varphi(h)) \\ &= \hat{f}\circ\alpha_h(\chi) \end{aligned}$$

ˆ ˆ 对于 $\varphi = f$，我们有（3）。根据稠密性，这对所有 $\varphi \in C_0(K)$都成立。下面证明其逆命题。固定 $h \in H$。关系式

$$\int f(k)V(h)^{-1}U(k)V(h)dk = \int f(k)\langle\varphi(h),k\rangle U(k)dk$$

对所有 $f \in C_c(K)$，且函数 $k \mapsto V(h)^{-1}U(k)V(h)$ 和 $k \mapsto \langle\varphi(h)\ k\rangle U(k)$ 的连续性蕴含等式

$$V(h)^{-1}U(k)V(h) = \langle\varphi(h),k\rangle U(k).$$

□

非交换环面的基本交换关系为

$$UV = \zeta VU,$$

其中 $\zeta = e^{2i\pi\alpha}$ 和 $\alpha \in$**实数域**$/Z$。这里 $H = K =$**Z** 且 $\varphi$: **Z** $\to$ **T** 由 $\zeta = \varphi(1)$ 确定。该关系的表示即为扭曲群 C*-代数$C^*(\mathbf{Z}^2,\sigma)$ 的表示，其中 $\sigma(x,y) = \zeta^{x_1y_2}$。回想一下，射影表示中起作用的是反对称双特征 $\sigma^{(2)}(x,y) = \sigma(x,y)\sigma(y,x)^{-1} = \zeta^{\det(x,y)}$，其中 $\det(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1$。

**引理 3.3**。同态 $\varphi$： $Z[1/p] \to \mathcal{S}_p$ 完全由 $\varphi$下 *1* 的像 $\zeta = \varphi$（1）决定。如果 $\zeta =$ （$\zeta_n$），那么 $\langle\varphi$（$1/p^k$） $1/p^l\rangle = \zeta_{k+l}$。

证明。我们首先证明，$\langle\varphi(1/p^k)\ 1/p^l\rangle$ 仅取决于 $k+l$：将 $1/p^k$ 替换为 $p^l(1/p^{k+l})$，并将 $1/p^l$ 替换为 $p^k(1/p^{k+l})$，可得

$$\langle\varphi(1/p^k),1/p^l\rangle = \langle\varphi(1/p^{k+l}),1/p^{k+l}\rangle^{(p^{k+l})}.$$

我们将其记为 $\zeta(k+l)$。特别地

$$\zeta(n) = \langle\varphi(1),1/p^n\rangle = \zeta_n.$$

□

如果 $\varphi(1) = \zeta$，则可将 $\varphi(x) = \zeta^x$ 写作 $x \in \mathbf{Z}[1/p]$。如果 $(\alpha_0,\ \mathbf{a}_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$ 是 $\zeta$的一个代表元，那么 $\zeta^x = \pi(x\alpha_0,\ x\mathbf{a}_0)$，且这不依赖于所选的代表元。如果 $x = k/p^n$，其中 $n \in \mathbf{N}$ 和 $k \in$**Z**，则有 $\zeta^x = (S_n\zeta)^k$，其中 $S_n$ 是 $n$-移位。$\varphi$ 的像为

$$\mathbf{Z}[1/p].\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta^x, x \in \mathbf{Z}[1/p]\}.$$

**定义 3.1.** 设 $\zeta \in \mathcal{S}_p$ 是一个无理的 $p$-角。

(i) 非交换 $\zeta$-溶胶体是 C*-代数 $A_\zeta = C^*(\mathbf{Z}[1/p]^2,\sigma)$，其中 $\sigma(x,y) = \langle\zeta, x_1y_2\rangle$。(ii) $p$-角的无理旋转 C*-代数 $\zeta$ 是 C*-代数

$$\underline{A}_\zeta = C^*(\mathbf{Z}[1/p] \ltimes_\zeta \mathcal{S}_p)$$

其中，$\mathbf{Z}[1/p]$ 在 $\mathcal{S}_p$ 上的平移作用由同态 $\varphi : \mathbf{Z}[1/p] \to \mathcal{S}_p$ 给出，满足 $\varphi(1) = \zeta$。

若 $\zeta=\pi(\alpha,\ \mathbf{a})$，我们也可以使用下标 $(\alpha,\ \mathbf{a})$ 代替 $\zeta$。稍微滥用一下术语，我们也称群胚 $\mathbf{Z}[1/p]\ltimes_\zeta \mathcal{S}_p$ 为非交换 $p$-溶胶。

$Z[1/p]^2$ 的自然生成元为 $u_k=(1/p^k,\ 0)$ 和 $v_l=(0,\ 1/p^l)$。它们满足 $u_k=pu_{k+1}$ 和 $v_l=pv_{l+1}$。

类似于非交换环面的情形，给定一个 $p$-角 $\zeta=(\zeta_n)\in\mathcal{S}_p$，记作 $\hat{}J'(\alpha,\ \mathbf{a})=(e(\alpha/p^n+\{\mathbf{a}/p^n\}))$，我们考虑对易关系

$$(*)\quad V_lU_k=\zeta_{k+l}U_kV_l;\quad U_k=U_{k+1}^p,\quad V_l=V_{l+1}^p.$$

作为命题 3.1 的一个特例，我们得到

**命题 3.4**。设 $\zeta\in\mathcal{S}_p$ 为一个无理的 $p$-角。

(i) $(*)$ 的泛 C*-代数是扭曲群 C*-代数 $C^*(\mathbf{Z}[1/p]^2,\sigma)$，其中 $\sigma(x,y)=\langle\zeta,x_1y_2\rangle$，这里我们将 $\zeta\in\mathcal{S}_p$ 视为 $\mathbf{Z}[1/p]$ 的一个特征。(ii) C*-代数 $A_\zeta$ 和 $A_{\bar{\zeta}}$ 同构。

注意，$\sigma^{(2)}=\zeta\circ\det$，其中 $\det:\mathbf{Z}[1/p]^2\to\mathbf{Z}[1/p]$ 由 $\det(x,y)=x_1y_2-x_2y_1$ 给出。

**命题 3.5**。$A_\zeta=\varinjlim B_n$，其中 $B_n$ 是一个非交换 $\zeta_n$-环面。

证明。令 $u_k,v_l$，其中 $k,l\in\mathbf{N}$ 是 $A_\zeta$ 的典范生成元。由于 $v_lu_k=\zeta_{k+l}u_kv_l$，由 $u_k$ 和 $v_l$ 生成的 $A_\zeta$ 中的 C*-子代数 $A_{k,l}$ 是一个非交换 $\zeta_{k+l}$-环面。系统 $(A_{k,l})$，$(k,l)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$（其中 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 赋予乘积序）是归纳的，并且 $\bigcup A_{k,l}$ 在 $A_\zeta$ 中稠密。这意味着 $A_\zeta=\varinjlim A_{k,l}$。如果愿意，我们可以考虑子系统 $(A_{k,k})$ $k\in\mathbf{N}$，它具有相同的极限。□

我们发现，将 $A_\zeta$ 写成以下对象的归纳极限很方便

$$A_{0,0}\to A_{1,0}\to A_{1,1}\to\cdots\to A_{k,k-1}\to A_{k,k}\to\cdots$$

我们将其写作

$$B_0\to B_1\to B_2\to\cdots\to B_{2k-1}\to B_{2k}\to\cdots$$

其中 $B_{2k-1}=A_{k,\ k-1}$，且 $B_{2k}=A_{k,\ k}$。于是 $B_n$ 是参数为 $\zeta_n$ 的非交换环面。

**命题 3.6.** C*-代数 $A_\zeta$ 有唯一的迹态 $\tau$。

证明. 参见 [13, 注 7.14] 或 [8,命题 32]。 □

我们注意到，$C^*$（$\mathbf{Z}[1/p]\ltimes_\zeta\mathcal{S}_p$）的迹态 $\tau$ 由紧群 $\mathcal{S}_p$ 上的归一化 Haar 测度给出。根据将 $A_\zeta$ 定义为无理旋转 C*-代数的归纳极限，很容易得到其 K 理论。

**命题 3.7**。设 $(\alpha,\mathbf{a})\in(\textbf{实数域}\setminus\textbf{复数域})\times\textbf{复数域}^p$ 且 $\zeta=\pi(\alpha,\mathbf{a})$。那么 $(K_0(A_\zeta),[1])$ 作为带单位的有序群，同构于 $(G'(\alpha,\mathbf{a}),(0,1))$。

证明。不失一般性，我们可以假设 $\mathbf{a}\in\mathbf{Z}^p$。由于 $A_\zeta=\varinjlim B_n$，$K_0(A_\zeta)=\varinjlim K_0(B_n)$。此外，归纳系统的态射保持单位元。限制 $\tau_n$ 从 $\tau$ 到 $B_n$ 是其唯一的迹态。我们知道，$\tau_n$ 诱导了从 $K_0(B_n)$ 到 $\mathbf{Z}\alpha_n+\mathbf{Z}\subset\mathbf{R}$ 的有序群同构，并将 $\mathbf{1}$ 映射为 $\mathbf{1}$。设 $e$ 是 $B_n$ 的一个投影，其迹为 $\alpha_n$，而 $[e]_n$ 是其在 $K_0(B_n)$ 中的类。我们将 $e$ 视为由 $B_{n+1}$ 定义 $[e]_{n+1}$ 于 $K_0(B_{n+1})$ 中的一个投影。它在基 $(\alpha_{n+1},\mathbf{1})$ 下的分解由以下方程给出

$$\alpha_n=p\alpha_{n+1}-a_n.$$

如果我们希望这样做（但计算它并不需要这样做），可以将 $K_0(A_\zeta) = \text{极限}_{\longrightarrow} K_0(B_n)$ 表示为以下群的归纳系统的归纳极限：

$$\mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2 \to \cdots \to \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2 \to \cdots$$

其中，从层级 $n$ 到层级 $n+1$ 的态射由矩阵 $\begin{pmatrix} p & 0 \\ -a_n & 1 \end{pmatrix}$ 给出。然而，迹立即定义了一个保持单位元的有序群同构，将 $K_0(A_\zeta)$ 映到 $G(\alpha, \mathbf{a}) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{Z}\alpha_n + \mathbf{Z}$。为得出结论，我们回顾命题 2.10。□

注意，由迹态 $\tau$ 诱导的 $(G'(\alpha, \mathbf{a}), (0, 1))$ 的态由 $[\tau](x, y) = x\alpha + y$ 给出，其中 $(x, y) \in G'(\alpha, \mathbf{a})$。

## 4. Construction of projective C*-modules.

自 M. Rieffel 和 P. Green 关于 C*-代数强莫里塔等价的奠基性工作以来，特别是关于变换群 C*-代数的工作（参见 [15] 及其中的参考文献），在 $C^*(G)$ 上构造 C*-模 $C^*(X)$（其中 $G$ 是一个群胚，$X$ 是一个真 $G$- 空间）已广为人知（附录中对此作了简要回顾）。我们在此假设，本节中的局部紧空间和局部紧群胚均为豪斯多夫的。

我们首先回顾放大的概念，它给出了群胚等价的一个重要例子。第 2 节 [17] 对其进行了广泛研究，在 [18] 中称其为“膨胀”。

**命题 4.1.** [17, 命题 2.7] 设 $H$ 为一个局部紧群胚，$X$ 为一个局部紧空间，且 $\pi\colon X \to H^{(0)}$ 为连续、开且满射的映射。那么

$$X * H * X \overset{\text{def}}{=} \{(x, h, y) \in X \times H \times X : \pi(x) = r(h), \pi(y) = s(h)\}$$

具有自然的局部紧群胚结构，其单位空间为 $X$。

乘法律为 $(x, h, y)(y, k, z) = (x, hk, z)$。拓扑是 $X \times H \times X$ 的子空间拓扑。我们称 $X * H * X$ 为沿着 $\pi$ 的 $H$ 的放大。空间

$$X * H = \{(x, h) \in X \times H : \pi(x) = r(h)\}$$

是 $X * H * X$ 与 $H$ 之间的群胚等价（[17, 命题 2.29] 和 [18, 例 2.37]）。

我们关注以下情形：局部紧群 $\Gamma$ 连续作用于局部紧空间 $X$，且 $\Gamma_1$ 是 $\Gamma$ 的闭正规子群，并且该作用限制在 $\Gamma_1$ 上是自由且真作用。我们将商映射记为 $\rho : \Gamma \to \Gamma/\Gamma_1$ 和 $\pi : X \to X/\Gamma_1$。那么 $\Lambda = \Gamma/\Gamma_1$ 按照 $\rho(g)\pi(x) = \pi(gx)$ 连续作用于 $X/\Gamma_1$，其中 $(g, x) \in G \times X$。

**定理 4.2**。假设局部紧群 $\Gamma$ 在局部紧空间 $X$ 上连续作用，且 $\Gamma_1$ 是 $\Gamma$ 的闭正规子群，使得作用在 $\Gamma_1$ 上的限制是自由且真的。那么半直积群胚 $G = \Gamma \ltimes X$ 同构于沿着 $\pi$ 对半直积群胚 $H = \Gamma/\Gamma_1 \ltimes X/\Gamma_1$ 作的放大。

证明。我们首先注意到，放大 $X * H * X$ 可以写成

$$X * \Lambda * X = \{(y, \lambda, x) \in X \times \Lambda \times X : \pi(y) = \lambda\pi(x)\}.$$

我们考虑映射

$$\begin{aligned} f : \Gamma \times X &\to X * \Lambda * X \\ (g, x) &\mapsto (gx, \rho(g), x) \end{aligned}$$

映射 $f$是满射：给定 $(y,\ \lambda,\ x) \in X \times \Lambda \times X$使得 $\pi(y) = \lambda\pi(x)$，我们选取 $g \in \Gamma$使得 $\lambda = \rho(g)$。于是有 $\pi(y) = \pi(gx)$。因此，存在 $g_1 \in \Gamma_1$ 使得 $y = g_1 gx$。那么 $(y,\ \lambda,\ x) = f(g_1 g,\ x)$。

映射是单射：假设 $(g'y,\ \rho(g')\ y) = (gx,\ \rho(g)\ x)$。那么，首先 $y = x$。方程$\rho(g') = \rho(g)$给出：对某个 $g_1 \in \Gamma_1$，有 $g' = g_1 g$。方程 $g_1 gx = gx$ 给出 $g_1 = e$，因为 $\Gamma_1$ 在 $X$上自由作用。因此 $g' = g$。

留待读者验证映射 $f$ 是一个群胚同态。
映射 $f$ 显然是连续的。为证明 $f$是同胚，我们证明 $f$ 是真映射。设 $A,\ B$ 是 $X$ 的紧子集，$K$ 是 $\Lambda$的紧子集。存在 $\Gamma$ 的一个紧子集 $L$，使得 $K \subset \rho(L)$。由于 $\Gamma_1$ 在 $X$上真作用，集合

$$K_1 = \{g_1 \in \Gamma_1 : g_1^{-1} L^{-1} B \cap A \neq \emptyset\}$$

是紧的。因此，$f^{-1}(B \times K \times A)$包含于紧集 $LK_1 \times A$中：事实上，设 $x \in A$、$gx \in B$ 且 $\rho(g) \in K$。存在 $g_1 \in \Gamma_1$ 和 $g' \in L$，使得 $g = g' g_1$。条件 $g' g_1 x \in B$ 意味着 $g_1 x \in L^{-1} B$。于是 $x$ 属于 $g_1^{-1} L^{-1} B \cap A$，$g_1$ 属于$K_1$，且 $g = g' g_1$ 属于 $LK_1$。□

**推论 4.3**。使用上述记号，空间

$$X * H = \{(x, \lambda, \pi(y)) : x, y \in X, \lambda \in \Lambda,\quad \pi(x) = \lambda\pi(y)\} = X \times \Lambda,$$

赋予动量映射 $r(x, \lambda) = x$ 和 $s(x, \lambda) = \lambda^{-1}\pi(x)$ 后，左侧 $G$-作用 $g(x, \lambda) = (gx, \rho(g)\lambda)$ 对于 $g \in \Gamma$，以及右侧 $H$-作用 $(x, \lambda)\mu = (x, \lambda\mu)$ 对于 $\mu \in \Lambda$，构成一个 $(G, H)$-等价关系。

在我们的情形中，$X$ 是一个群，$\Gamma$ 在 $X$ 上的作用由群同态$j : \Gamma \to X$给出，即 $gx = j(g)x$。于是，$\Gamma/\Gamma_1$ 在 $X/\Gamma_1$ 上的作用由诱导同态 $j' : \Gamma/\Gamma_1 \to X/\Gamma_1$给出。

**命题 4.4**。考虑 $\Gamma = \mathbf{Z}[1/p]^2$ 通过同态给出的在 $X = \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$ 上的平移作用

$$J_{(\alpha,\mathbf{a})} : \Gamma \to \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p : (x, y) \mapsto (x\alpha + y, x\mathbf{a} - y),$$

其中 $(\alpha, \mathbf{a}) \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \times \mathbf{Q}_p$，并令 $G$ 为半直积 $\Gamma \ltimes_{(\alpha,\mathbf{a})} X$。那么

*(i)* 对于每个满足 $a\mathbf{a} - b \neq 0$ 的 $(a, b) \in \mathbf{Z}[1/p]^2$，$\Gamma_1 = \mathbf{Z}[1/p](a, b)$ 在 $X = \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$ 上的作用都是自由且真作用。因此，$X \times (\Gamma/\Gamma_1)$ 是一个自由且真左 $G$-空间，从而给出 $G$ 与 $(\Gamma/\Gamma_1) \ltimes (X/\Gamma_1)$ 之间的等价关系。*(ii)* 此外，若存在 $c, d \in \mathbf{Z}[1/p]$ 使得 $ad - bc = 1$，则 $(\Gamma/\Gamma_1) \ltimes (X/\Gamma_1)$ 同构于非交换 $p$-溶胶 $\mathbf{Z}[1/p] \ltimes_{(\beta,\mathbf{b})} \mathcal{S}_p$，其中

$$(\beta, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} (\alpha, \mathbf{a}).$$

证明。对于 (i)，我们证明 $\Gamma_1 = \mathbf{Z}[1/p](a, b)$ 满足定理 4.2 的假设。乘以 $(a\alpha + b, -a\mathbf{a} + b)$ 是局部紧加法群 $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$ 的一个自同构，它将子群 $J_{(\alpha,\mathbf{a})}(\mathbf{Z}[1/p](0, 1)) = \mathbf{Z}[1/p](1, -1)$ 映射到子群$J_{(\alpha,\mathbf{a})}(\mathbf{Z}[1/p](a, b)) = \mathbf{Z}[1/p](a\alpha + b, a\mathbf{a} - b)$。为便于后文参考，我们注意到此自同构的模为 $|a\alpha + b|\,|-a\mathbf{a} + b|_p$。我们已经看到，$\mathbf{Z}[1/p](1, -1)$ 是一个离散

子群，属于$\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$。由此可知，$J_{(\alpha,\mathbf{a})}(\mathbf{Z}[1/p](a,b) = \mathbf{Z}[1/p](a\alpha+b, a\mathbf{a}-b)$ 是$\mathbf{Z}[1/p](1,-1)$在此自同构下的像，也是$\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$ 的离散子群。因此，它在$\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$ 上自由且真地作用。

对于 (ii)，我们通过同态 $(x,y) \mapsto -bx+ay$ 将 $\Gamma/\Gamma_1$ 映射到 $\mathbb{Z}[1/p]$，并通过同态 $(t,x) \mapsto \pi(t/r, x/\rho)$ 将 $X/\Gamma_1$映射到 $\mathcal{S}_p$，其中 $\pi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p \to \mathcal{S}_p$ 是通常的商映射，$r = a\alpha+b$ 且 $\rho = a\mathbf{a}-b$。于是，诱导同态 $j'\colon \Gamma/\Gamma_1 \to X/\Gamma_1$成为同态 $j'' : \mathbb{Z}[1/p] \to \mathcal{S}_p$。根据引理 3.3，这样的同态由 $j''(1)$ 确定。由关系 $ad-bc=1$ 可得，$j''(1) = \pi(\beta, \mathbf{b})$，其中$\beta = \dfrac{c\alpha+d}{a\alpha+b}$ 且 $\mathbf{b} = \begin{matrix} c & -d \\ a & -b \end{matrix}\mathbf{a}$。□

特别地，当 $(a,\ b,\ c,\ d) = (0,\ 1,\ 1,\ 0)$ 时，得到非交换的 $p$-solenoid $\mathbf{Z}[1/p] \ltimes_{(\alpha,\mathbf{a})} \mathcal{S}_p$。

群胚等价 $X \times (\Gamma/\Gamma_1)$ 在 $G = \Gamma \ltimes_{\alpha,\ \mathbf{a}} X$ 与 $H = \Gamma/\Gamma_1 \ltimes X/\Gamma_1$ 之间实现了它们的 C*-代数的 Morita 等价，以及它们的 $K$-理论群的同构。通过迹可以轻松识别这些 $K_0$-群。下面我们将按如下方式展开。首先回顾一下：局部紧群胚的单位空间 $G^{(0)}$ 上的 Radon 测度 $\mu$，若相对于 Haar 系统 $(G,\ \lambda)$ 满足不变性条件 $\mu \circ \lambda = (\mu \circ \lambda)^{-1}$，则定义了全 C*-代数 $C^*(G,\ \lambda)$ 上的迹 $\tau_\mu$，使得对于 $f \in C_c(G)$，有 $\tau_\mu(f) = \int_{G^{(0)}} f_{|G^{(0)}} d\mu$；并且在主 $G$-空间范畴上有一个横截测度 $\Lambda_\mu$（参见 [1, 附录 A.1，章节$\mathbf{a}$]）。

**命题 4.5**。假设 $\Gamma$ 是一个在局部紧空间 $X$ 上连续作用的离散群，并且 $\Gamma_1$ 是一个正规子群，其在 $X$ 上的作用是自由且真的。设 $\mu$ 是 $X$ 上的一个 *Radon* 测度，且关于群胚 $G = \Gamma \ltimes X$ 不变。若 $X/\Gamma_1$ 是紧的，则投射 *C**-模 $C^*(X \times (\Gamma/\Gamma_1))$ 的 $\tau_\mu$-维数为 $\Lambda_\mu(X/\Gamma_1)$。

证明。这是 [12, 命题 5.5.6]的一个特例，该命题在附录中以命题 A.2 的形式重述。□

在我们的情形中，$\Gamma = \mathbf{Z}[1/p]^2$ 通过平移 $J_{(\alpha,\mathbf{a})}$作用于 $X = \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$，其中 $(\alpha,\mathbf{a}) \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \times \mathbf{Q}_p$。我们考虑测度 $\mu = \lambda \times \lambda_p$，其中 $\lambda$ 是 $\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度，$\lambda_p$ 是 $(\mathbf{Q}_p, +)$ 的归一化 Haar 测度。

**推论 4.6**。令 $\Gamma, X, J_{(\alpha,\mathbf{a})}, \mu$ 如上。令 $\Gamma_1 = \mathbf{Z}[1/p](a,b)$，其中 $a,b) \in \mathbf{Z}[1/p]^2$满足 $a\mathbf{a}-b \neq 0$。则投射 *C**-模 $C^*(X \times (\Gamma/\Gamma_1))$ 的 $\tau_\mu$-维数为 $|a\alpha+b||a\mathbf{a}-b|_p$。

证明。我们已经看到，$\mathbb{Z}[1/p](1,-1)$ 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ 的离散子群。商空间为 $\mathcal{S}_p$，其体积为 1。子群 $J_{(\alpha,\mathbf{a})}(\mathbb{Z}[1/p](a, b\mathbf{a}-b)) = \mathbb{Z}[1/p](a\alpha+b, a\mathbf{a}-b)$ 是 $\mathbb{Z}[1/p](1,-1)$ 在乘以 $(a\alpha+b, -a\mathbf{a}+b)$ 这一自同构下的像，其模为 $|a\alpha+b|\,|-a\mathbf{a}+b|_p$。商空间的体积就是一个基本域的测度。我们已经看到，$[0,1) \times \mathbb{Z}_p$ 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}[1/p](1,-1)$ 的一个基本域。因此，$[0, a\alpha+b) \times (a\mathbf{a}-b)\mathbb{Z}_p$ 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}[1/p](a\alpha+b, a\mathbf{a}-b)$ 的一个基本域。因此，商空间的体积为 $|a\alpha+b||a\mathbf{a}-b|_p$。综上，$Z(a,b) = X \times (\Gamma/\mathbb{Z}[1/p](a,b))$ 是一个主 $G$-空间，其中 $G = \Gamma \ltimes X$，从而得到维数为 $|a\alpha+b|\,|a\mathbf{a}-b|_p$ 的投射 C*-模 $C^*(Z(a,b))$。□

我们将 $[C^*(Z(a,\ b))]$ 记作其在 $C^*(G)$ 的 $K_0$-群中的类。因此，我们定义映射

$$\Phi : \{(a,b) \in \Gamma : a\mathbf{a}-b \neq 0\} \to K_0^+(C^*(G)) : (a,b) \mapsto [C^*(Z(a,b))]$$

使得 $\tau_*(\Phi(a,\ b))\ =|a\alpha+b|\,|a\mathbf{a}\ -b|_p$，其中 $\tau_*$ 是由迹 $\tau_\mu$ 诱导的同态。根据命题 4.4，$C^*(G)$ 与非交换 $p$- 索列诺 C*- 代数 $\mathbf{Z}[1/p]\ltimes_{(\alpha,\mathbf{a})}\mathcal{S}_p$ Morita 等价，因此它们的正锥 $K_0^+$ 同构。命题 3.7 已证明，$K_0^+(C^*(\mathbf{Z}[1/p]\ltimes_{(\alpha,\mathbf{a})}\mathcal{S}_p))$ 与 $G'(\alpha,\ \mathbf{a})^+$ 同构。于是，映射 $\Phi$ 有如下自然表达式，见以下命题。

**命题 4.7**。给定 $(a,b)\ \in\Gamma$ 使得 $a\mathbf{a}\ -b\ \neq\ 0$，$\Psi(a,b)\,{}^{\mathrm{def}}\ =\ \epsilon p^{-n}(a,b)$，其中 $n\ =v(a\mathbf{a}\ -b)$ 且 $\epsilon=\mathrm{sgn}(a\alpha+b)$，属于 $G'(\alpha,\mathbf{a})^+$。映射

$$\Psi:\{(a,b)\in\Gamma:a\mathbf{a}-b\neq0\}\to G'(\alpha,\mathbf{a})^+$$

满足

(i) $j_\alpha\circ\Psi=\tau_*\circ\Phi$；(ii) $\Psi(a',b')\ =\Psi(a,b)$ 当且仅当存在一个可逆元 $\lambda\in\mathbf{Z}[1/p]$ 使得 $(a',b')\ =\lambda(a,b)$；(iii) 其像为

$$\{(a,b)\in\mathbf{Z}[1/p]\times\mathbf{Z}[1/p]:v(a\mathbf{a}-b)=0\quad\text{and}\quad a\alpha+b\geq0\}.$$

证明。直接验证可知，$(a',b')\ =\ \Psi(a,b)$ 满足 $v(a'\mathbf{a}\ -b')\ =0$ 以及 $a'\alpha+b'\ =p^{-n}|a\alpha+b|\geq0$。

性质 (i) 显然:

$$\begin{aligned}j_\alpha\circ\Psi(a,b)\quad&=p^{-n}(a\alpha+b)\\ \tau_*\circ\Phi(a,b)\quad&=|a\alpha+b|p^{-n}\end{aligned}$$

断言 (ii)：如果 $\Psi(a',b')\ =\ \Psi(a,b)$，那么 $(a',b')\ =\ \lambda(a,b)$，其中按照该命题的记号，$\lambda\ =(\epsilon/\epsilon')p^{n-n'}$。反之，对于 $\lambda\ =\ \epsilon p^k$，若 $\epsilon\ =\ \pm1$ 且 $k\in\mathbf{Z}$，则 $\Psi(\lambda a,\lambda b)\ =\ \Psi(a,b)$。

断言 (iii)：我们已经看到，$(a',b')\ =\ \Psi(a,b)$ 满足 $v(a'\mathbf{a}\ -b')\ =\ 0$ 且 $a'\alpha+b'\ =p^{-n}|a\alpha+b|\geq0$。每个满足 $v(xa\mathbf{a}\ -b)\ =\ 0$ 且 $a\alpha+b\geq0$ 的 $(a,b)\ \in\mathbf{Z}[1/p]\times\mathbf{Z}[1/p]$ 都在像中，因为此时 $(a,b)\ =\Phi(a.b)$。□

我们回到局部紧群 $\Gamma$ 连续作用于局部紧空间 $X$的一般框架。现在假设，$\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 是 $\Gamma$ 的两个闭正规子群，它们在 $X$上自由且真地作用。我们将商映射记为 $\rho_i:\ \Gamma\to\Gamma/\Gamma_i$ 和 $\pi_i:\ X\to X/\Gamma_i$。我们还记 $\Lambda_i\ =\ \Gamma/\Gamma_i$、$H_i\ =\ \Lambda_i\ltimes X/\Gamma_i$ 和 $Z_i\ =\ X\times\Lambda_i$，后者是一个（$G$，$H_i$）-等价关系。通过复合，可以得到一个（$H_1$，$H_2$）-等价关系。我们希望更好地理解这一等价关系作为一个拓扑空间的结构。与其引入逆~等价关系 $Z_1$ 并考察 $Z_1\circ Z_2$，不如将其描述为 $Z\ =\ （Z_1*Z_2）/G$，其中$Z_1*Z_2=\{（z_1，\ z_2）:\ r（z_1）\ =r（z_2）\}$，且 $G$ 通过 $\gamma（z_1，\ z_2）\ =\ （\gamma z_1，\ \gamma z_2）$ 作用。于是，$H_1$ 的左作用和 $H_2$ 的右作用分别为

$$\eta_1[z_1,z_2]\mu_2=[z_1\eta_1^{-1},z_2\mu_2],\quad\mu_1\in\Lambda_1,\,\mu_2\in\Lambda_2.$$

具体而言，我们可以将这个（$H_1$，$H_2$）-等价关系写作 $Z\ =(\Lambda_1\times X\times\Lambda_2)/\Gamma$，其中对于 $g\ \in\ \Gamma$ 和 $\lambda_i\ \in\ \Lambda_i$，$g(\lambda_1，\ x，\ \lambda_2)\ =(\lambda_1\rho_1(g)^{-1}，\ gx，\ \rho_2(g)\lambda_2)$。动量映射 $r:\ Z\ \to\ X/\Gamma_1$ 和 $s:\ Z\ \to\ X/\Gamma_2$ 分别由 $r[\lambda_1,x,\lambda_2]\ =\ \lambda_1\pi_1(x)$ 和 $s[\lambda_1,x,\lambda_2]\ =\ \lambda_2^{-1}\pi_2(x)$ 给出。左作用和右作用定义为

$\mu_1[\lambda_1,x,\lambda_2]\mu_2=[\mu_1\lambda_1,x,\lambda_2\mu_2]$ 对于 $\mu_i\in\Lambda_i$。

给出这种（$H_1$，$H_2$）等价关系的其他表示很有意思。我们定义

$Z' = (\Gamma \times X)/(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$，其中 $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ 通过 $(g_1,\ g_2)$ $(g,\ x)$ 作用于 $\Gamma \times X = (g_1 g g_2^{-1},\ g_2 x)$。拓扑是商拓扑。动量映射 $r:\ Z' \to X/\Gamma_1$ 以及 $s:\ Z' \to X/\Gamma_2$ 分别由 $r[g,x] = \pi_1(gx)$ 和 $s[g,x] = \pi_2(x)$ 给出。左右作用分别由 $\rho_1(g')[g,x] = [g'g,x]$ 和 $[g,x]\rho_2(g') = [gg', g'^{-1}x]$给出。

我们还定义 $Z'' = \{(\pi_1(y)\ \pi_2(x)):\ x、\ y \in X$ 和 $\exists g \in \Gamma:\ y = gx\}$。拓扑是关于从 $\Gamma \times X$ 到 $Z''$ 的映射的终拓扑，该映射将 $(g,x)$ 发送到 $(\pi_1(gx)\ \pi_2(x))$。动量映射 $r:\ Z'' \to X/\Gamma_1$ 和 $s:\ Z'' \to X/\Gamma_2$ 分别为 $r(x_1,x_2) = x_1$ 和 $s(x_1,x_2) = x_2$。左右作用由 $\rho_1(g)(x_1,x_2) = (\rho_1(g)x_1, x_2)$ 以及 $(x_1,x_2)\rho_2(g) = (x_1, \rho_2(g)^{-1}x_2)$ 给出。

**命题 4.8**。令 $\Gamma$、$X$、$\Gamma_1$、$\Gamma_2$ 如上。我们假设 $\Lambda_1 = \Gamma/\Gamma_1$ 和 $\Lambda_2 = \Gamma/\Gamma_2$ 是离散的。

(i) $Z$ 和 $Z'$ 是同构的$(H_1, H_2)$-等价关系。(ii) 如果 $\Gamma$ 在 $X$ 上的作用是自由的，则这些$(H_1, H_2)$-等价关系也同构于 $Z''$。

证明。(i) 我们证明映射 $\varphi$：$\Gamma \times X \to \Lambda_1 \times X \times \Lambda_2$将$(g,x)$映射为$(\rho_1(g)\ x, e)$，从 $Z'$ 到 $Z$诱导出一个双射。由于$(g_1,g_2)(g,x) = (g_1 g g_2^{-1}, g_2 x)$被映射为

$$(\rho_1(g_1 g g_2^{-1}), g_2 x, e) = (\rho_1(g)\rho_1(g_2)^{-1}, g_2 x, \rho_2(g_2)e) = g_2(\rho_1(g), x, e),$$

该映射下降到商空间上，得到

$$\begin{array}{rcl} \dot\varphi : (\Gamma \times X)/(\Gamma_1 \times \Gamma_2) & \to & (\Lambda_1 \times X \times \Lambda_2)/\Gamma \\ [g,x] & \mapsto & [\rho_1(g), x, e] \end{array}$$

我们证明 $\dot\varphi$ 是满射：给定$(\lambda_1, y, \lambda_2)$，我们将 $\lambda_i = \rho_i(h_i)$写成其中 $h_i \in \Gamma$。于是

$$(\lambda_1, y, \lambda_2) = (\rho_1(h_1), y, \rho_2(h_2)) = h_2(\rho_1(h_1 h_2), h_2^{-1} y, e).$$

因此，$[\lambda_1, y, \lambda_2] = \dot\varphi[g,x]$，其中 $g = h_1 h_2$和 $x = h_2^{-1} y$。
我们来证明 $\dot\varphi$是单射。假设 $[\rho_1(g)\ x,\ e] = [\rho_1(h)\ y,\ e]$。存在 $g_2 \in \Gamma$使得

$$\begin{array}{rcl} (\rho_1(h), y, e) & = & g_2(\rho_1(g), x, e) \\ & = & (\rho_1(g)\rho_1(g_2)^{-1}, g_2 x, \rho_2(g_2)) \\ & = & (\rho_1(g g_2^{-1}), g_2 x, \rho_2(g_2)) \end{array}$$

这意味着，对于某个 $g_1 \in \Gamma_1$，$g_2 \in \Gamma_2$、$y = g_2 x$ 和 $h = g_1 g g_2^{-1}$。因此，

$$(h, y) = (g_1 g g_2^{-1}, g_2 x) = (g_1, g_2)(g, x)$$

并且 $[h,y] = [g,x]$。由于 $\varphi$是连续且开映射（因为我们假设 $\Lambda_i$是离散的），因此 $\dot\varphi$也如此。所以，它是一个同胚。很容易验证，这个同胚保持对应的结构。

(ii) $\Gamma \times X$ 中的两个元素 $(g,\ x)$ 和 $(h,\ y)$ 在 $Z''$ 中的像相同，当且仅当存在 $(g_1,\ g_2)$，使得 $y = g_2 x$ 且 $hy = g_1 g x$。若 $\Gamma$ 对 $X$ 的作用是自由的，则这等价于 $y = g_2 x$ 且 $h = g_1 g g_2^{-1}$。换言之，$Z''$ 和 $Z'$ 是 $\Gamma \times X$ 上同一等价关系的商空间。因此，将 $[g,x]$ 映射到 $(\pi_1(gx)\ \pi_2(x))$ 的映射 $Z'$ 到 $Z''$ 是一个同胚。容易验证，is 是从 $Z$ 到 $Z''$ 的对应同构。

□

**命题 4.9**。 假设 $\Gamma$ 是一个离散阿贝尔群，它在局部紧空间 $X$ 上自由且连续地作用。假设 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 是分别在 $X$ 上和 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{e\}$ 上真作用的子群，并且 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{e\}$。那么 $Z'$ 是由 $\Gamma/\Gamma_1\Gamma_2$ 上与 $X$ 同胚的开子集构成的不交并。

证明。我们将 $[g,x]$ $(g,x)$ 在 $Z' = (\Gamma \times X)/(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ 中的类记为 $[g,x]$。对于固定的 $g \in \Gamma$，从 $X$ 到 $Z'$ 的映射 $x \mapsto [g,x]$ 是单射：如果 [g,y]=[g,x], 存在 $(g_1, g_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ 使得 $(g,y) = (g_1 g g_2^{-1}, g_2 x)$。由于说明了 $g_1 = g_2 = e$ 和 $y = x$。由于该映射是开映射，其像是 $Z'$ 的一个开子集 $[g,X]$，而 $Z'$ 是这些开子集关于 $\Gamma$ 的并。为得出结论，我们证明：如果 $g$ 和 $h$ 模 $\Gamma_1\Gamma_2$ 同余，则 $[g,X] = [h,X]$；否则，$[g,X]$ 和 $[h,X]$ 不相交。事实上，如果 $h = g_1 g g_2^{-1}$ 且 $(g_1, g_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$，则对所有 $y \in X$,$[h,y] = [g, g_2^{-1} y]$ 均成立。另一方面，如果 $[g,x] = [h,y]$，则存在 $(g_1, g_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ 使得 $h = g_1 h g_2^{-1}$。□

我们将命题 4.9应用于该例： $\Gamma = \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p]$ 作用在 $X = \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$ 上，方式为

$$J_{(\alpha,\mathbf{a})} : \Gamma \to \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p : (x,y) \mapsto (x\alpha + y, x\mathbf{a} - y),$$

其中 $(\alpha, \mathbf{a}) \in (0, 1) \setminus \mathbf{Q} \times \mathbf{Z}_p$。令 $\Gamma_i = \mathbf{Z}[1/p]\ (a_i,\ b_i)$，$i = 1, 2$，其中 $(a_i,\ b_i) \in \Gamma$。如果 $(a_1,\ b_1)$ 和 $(a_2,\ b_2)$ 线性无关，则 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{\ (0,\ 0)\ \}$，并且根据主理想整环上有限生成模的结构定理，$\Gamma_1 + \Gamma_2$ 具有有限指数 $|n|$，其中

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \frac{n}{p^k}, \quad n \wedge p = 1.$$

因此，$(H_1,\ H_2)$-等价关系 $Z$，其中 $H_i = \Gamma/\Gamma_i \ltimes X/\Gamma_i$ 是 $|n|$ 个$\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$副本的不交并。

如果 $\Gamma_1 = \mathbf{Z}[1/p]\ (a_1,\ b_1)$，其中 $a_1$、$b_1 \in \mathbf{Z}[1/p]$ 互素，即存在 $a_2$、$b_2 \in \mathbf{Z}[1/p]$ 使得 $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$，那么 $H = \Gamma/\Gamma_1 \ltimes X/\Gamma_1$ 同构于一个无理的非交换 $p$=solenoid $\mathbf{Z}[1/p] \ltimes \mathcal{S}_p$。具体而言，首先取 $\Gamma_1 = \mathbf{Z}[1/p]\ (0, 1)$。注 2.12中的诱导同态 $j'$：$\Gamma/\Gamma_1 \to X/\Gamma_1$ 可识别为同态 $\varphi : \mathbf{Z}[1/p] \to \mathcal{S}_p$，满足 $\varphi(1) = \pi(\alpha,\ \mathbf{a})$，而 $\Gamma/\Gamma_1 \ltimes X/\Gamma_1$ 可识别为$\mathbf{Z}[1/p] \ltimes_{(\alpha,\mathbf{a})} \mathcal{S}_p$。令 $\Gamma_2 = \mathbf{Z}[1/p]\ (a,\ b)$，其中 $a$、$b \in \mathbf{Z}[1/p]$ 互素且满足$ad - bc = 1$。那么自同构 $\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$ 将 $\Gamma_1$ 映到 $\Gamma_2$。交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p] & \xrightarrow{J_{(\alpha,\mathbf{a})}} & \mathbf{R} \times Q_p \\ \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow (r,\rho) \\ \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}[1/p] & \xrightarrow{J_{(\beta,\mathbf{b})}} & \mathbf{R} \times Q_p \end{array}$$

表明

$$(\alpha, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} (\beta, \mathbf{b}).$$

因此，$\Gamma/\Gamma_2 \ltimes X/\Gamma_2$可以与$\mathbf{Z}[1/p] \ltimes_{(\beta,\mathbf{b})} \mathcal{S}_p$等同。$(H_1,\ H_2)$-等价关系 $Z$是 $|n|$ 个$\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_p$副本的不交并，其中 $a = \dfrac{n}{p^k}$ 满足 $n \wedge p = 1$。 —

## 5. Noncommutative solenoids and groupoids, Morita equivalence classification

在最后一节中，我们将用一个单独的陈述总结我们的 Morita 等价分类结果。

设 $(\alpha, \mathbf{a}) \in (0,1)\times\mathbf{Z}_p$ 为无理的。至少有两个在前一节中已经出现过的群胚：

（i）螺旋体群胚（大群胚）

$$\mathcal{G}_{(\alpha,\mathbf{a})} := \mathbf{Z}[1/p]^2 \ltimes_{J_{(\alpha,\mathbf{a})}} (\mathbf{R}\times\mathbf{Q}_p) \tag{3}$$

与通过群同态的作用相关联

$$J_{(\alpha,\mathbf{a})} : \mathbf{Z}[1/p]^2 \to \mathbf{R}\times\mathbf{Q}_p$$

由 $J_{(\alpha,\mathbf{a})}(x,y) := (x\alpha + y, x\mathbf{a} - y)$ 给出。

（ii）（小）螺旋体群胚

$$\mathcal{S}_{(\alpha,\mathbf{a})} := \mathbf{Z}[1/p] \ltimes_{(\alpha,\mathbf{a})} \mathcal{S}_p \tag{4}$$

与该作用相关

$$m\cdot z := \pi(m\alpha, m\mathbf{a})\cdot z.$$

如前一节所述（特别是命题 4.4），这两个群胚等价，更确切地说，大群胚是小群胚的放大。小群胚的群胚 $C^*$-代数同构于非交换螺旋体 $A_{\pi((\alpha,\mathbf{a}))}$，命题 3.4。

我们可以陈述最终定理，它用一个简洁的陈述概括了前几节的结果。

**定理5.1.** 设 $(\alpha, \mathbf{a}),(\beta, \mathbf{b}) \in (0, 1) \times \mathbf{Z}_p$ 为无理数。那么以下条件等价：

*(i)* 非交换螺旋体 $A_{\pi(\alpha,\mathbf{a})}$ 和 $A_{\pi(\beta,\mathbf{b})}$ 是强 *Morita* 等价的 $C^*$-代数。*(ii)* 维数群 $G[\alpha, a]$ 和 $G[\beta,b]$ 作为有序群同构。*(iii)* 存在 $k,l\in N$，使得 $\mathcal{S}_k(\alpha, a)$ 和 $\mathcal{S}_l(\beta, b)$ 模 $GL(2, Z)$ 同余。*(iv)* $(\alpha, a)$ 和 $(\beta, b)$ 模 $GL(2, Z[1/p])$ 同余。*(v)*（小）螺旋体群胚 $\mathcal{S}_{(\alpha,\mathbf{a})}$ 和 $\mathcal{S}_{(\beta,\mathbf{b})}$ *Morita* 等价。

证明。$(i) \implies (ii)$：这一结果在第 3 节中得到；更明确地说，这是命题 3.7 的直接推论，因为 $A_{\pi((\alpha,\mathbf{a}))}$ 和 $A_{\pi((\beta,\mathbf{b}))}$ 之间的强 Morita 等价会诱导它们的 $K$–理论群作为有序群的同构。

$(ii) \iff (iii)$：这是推论 2.17 和注 2.2 的陈述。

$(iii) \implies (iv)$：这是命题 2.4 的直接推论。$(iii)$。

$(iv) \implies (v)$：这一结论是前一节最后一个命题的推论，我们用群胚的语言重述一下论证。假设 $(\alpha, \mathbf{a})$ 和 $(\beta, \mathbf{b})$ 通过矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}[1/p])$ 同余，也就是说

$$(\alpha, \mathbf{a}) = A\cdot(\beta, \mathbf{b}),$$

如定义 2.3 所示。考虑以下图示

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[1/p]^2 & \xrightarrow{J_{(\alpha,\mathbf{a})}} & \mathbf{R}\times\mathbf{Q}_p \\ {\scriptstyle {}^tA}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cdot(b\beta+d,-b\mathbf{b}+d)} \\ \mathbf{Z}[1/p]^2 & \xrightarrow[J_{(\beta,\mathbf{b})}]{} & \mathbf{R}\times\mathbf{Q}_p \end{array} \tag{5}$$

其中 $\cdot(b\beta+d,\ -b\mathbf{b}+d)$ 表示乘以 $b\beta+d,\ -b\mathbf{b}+d$ 的可逆元 $(\beta,\ \mathbf{b})$ 的运算，该元素属于 **实数域** $\times$ **有理数域**$_p$，由于 $(\beta,\ \mathbf{b})$ 是无理的，故其可逆。直接验证可知，上述图表是交换的，并且由于两个垂直映射都是同构，我们可以推出相关大溶胶群胚之间的群胚同构

$$\mathcal{G}_{(\alpha,\mathbf{a})}\cong\mathcal{G}_{(\beta,\mathbf{b})} \tag{6}$$

从而得到相关小溶胶群胚之间的群胚等价关系

$$\mathcal{S}_{(\alpha,\mathbf{a})}\sim\mathcal{G}_{(\alpha,\mathbf{a})}\cong\mathcal{G}_{(\beta,\mathbf{b})}\sim\mathcal{S}_{(\beta,\mathbf{b})}. \tag{7}$$

$(v)\implies(i)$：如果 $\mathcal{S}_{(\alpha,\mathbf{a})}\sim\mathcal{S}_{(\beta,\mathbf{b})}$ 是莫里塔等价群胚，那么它们会在其相关的 $C^*$-代数之间诱导出强莫里塔等价关系。□

## Appendix A. Explicit construction of projections

为方便读者起见，我们回顾真局部紧右 $G$-空间 $Z$ 的 C*-模 $C^*(Z)$ 的模运算和内积的定义，其中 $G$是一个局部紧群胚。为简单起见，我们假设 $Z$ 和 $G$是豪斯多夫的（非豪斯多夫情形见 [17]）。该构造要求为 $G$配备一个 Haar 系统 $(\lambda^x)_{x\in G^{(0)}}$，并为 $Z$ 配备一个沿矩映射 $s_Z$：$Z\to G^{(0)}$ 的纤维的 $G$-等变测度系统 $(\alpha_x)_{x\in G^{(0)}}$。这样的二元组 $(Z,\ \alpha)$ 在 [1, 附录 A 中称为一个横截函数 1]。详细内容可见 [10, 11, 17]。对于 $h,\ k\in C_c(Z)$ 和$f\in C_c(G)$，我们定义

$$h*f(z)=\int_G h(z\gamma)f(\gamma^{-1})d\lambda^{s_Z(z)}(\gamma),\qquad \langle h,k\rangle(\gamma)=\int_Z\overline{h(z\gamma^{-1})}k(z)d\alpha_{r(\gamma)}(z).$$

下一个命题是对 [12,推论 5.5.5]的一个温和推广（将“$G$ ´étale”推广为“$G$ 具有 Haar 系统”）。它出现在 [3, 第 7]节和 [4, II.8.$\beta$]的叶层代数框架中，但也隐含地出现在 [14]中。

**命题 A.1.** 设$(G,\lambda)$ 是一个带有 *Haar* 系统的局部紧豪斯多夫群胚，且$Z$ 是一个自由且真、局部紧豪斯多夫的右 $G$-空间。假设矩映射$s_Z:Z\to G^{(0)}$ 是局部同胚，且 $Z/G$ 是紧的。那么存在一个整数$n$ 和一个投影 $e\in M_n(C^*(G))$，使得 C*-模 $C^*(Z)$ 与 $eC^*(G)^n$同构。

证明。 这里， $\alpha_x$ 是离散纤维 $s_Z^{-1}(x)$的计数测度。令 $r_Z:Z\to Z/G$ 为商映射。根据 [10, 定理 2.8], ， C*-模 $C^*(Z)$上的紧算子构成的 C*-代数 $\mathcal{K}(C^*(Z))$与印迹群胚$(Z*Z)/G$的 C*-代数同构。我们的假设意味着该群胚是 ´étale 的，且具有紧单位空间。因此，其 C*-代数具有单位元，即其单位空间的示性函数 $\mathbf{1}_{Z/G}$。由有限秩算子子代数的稠密性，存在 $n\in\mathbf{N}$ 和 $h_1,\ \ldots\ldots,\ h_n\in C^*(Z)$，使得 $\mathrm{Id}=\sum_{i=1}^n|h_i\rangle\langle h_i|$。可以取投影 $e=(\langle h_i,\ h_j\rangle)\in M_n(C^*(G))$。

为了显式构造一个投影 $e \in M_n(C^*(G))$，使其给出模 $C^*(Z)$，我们求出满足下列等式的 $h_1$，……，$h_n \in C_c(Z)$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_G h_i(z\gamma)\overline{h_i(z'\gamma)} d\lambda^{s_Z(z)}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } z = z' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

具体步骤如下。我们选取相对紧开子集 $V_1$、……、$V_n$，使得对于所有 $i$，限制映射 $s_{Z|V_i}$ 是单射，并且 $(r_Z(V_1)$……、$r_Z(V_n))$ 覆盖 $Z/G$。我们选取从属于该开覆盖的单位分解 $(b_1$、……、$b_n)$。对于所有 $i$，存在 $h_i \in C_c(Z)$，其支集包含于 $V_i$ 中，并且 $\int_G |h_i(z\gamma)|^2 d\lambda^{s_Z(z)}(\gamma) = b_i(r_Z(z))$。我们所要寻找的投影为 $e = (< h_i$、$h_j >)$。□

注 A.1：特别地，如果存在 $Z$ 的一个相对紧开子集 $V$，使得 $s_{Z|V}$ 是单射且 $r_Z(V) = Z/G$，则可得到一个投影 $e = \langle h$、$h\rangle$，它属于 $C^*(G)$，并且 $C^*(Z)$ 与 $eC^*(G)$ 同构。

在下一个命题中，我们将使用横截测度理论的一些内容（参见 [2] 或 [1,附录 A.1]）。给定一个带有 Haar 系统 $(G, \lambda)$ 的局部紧群胚，一个在 $G^{(0)}$ 上的测度 $\mu$，若其按如下意义保持不变：$\mu \circ \lambda = (\mu \circ \lambda)^{-1}$，则以协调一致的方式，为每个横截函数 $(Z, \alpha)$ 赋予 $Z/G$ 上的测度 $\nu = \Lambda(\alpha)$。该测度由关系式 $\nu \circ \lambda_1 = \mu \circ \alpha$ 唯一确定，其中 $\lambda_1$ 是由 $\lambda$ 导出的沿商映射 $Z \to Z/G$ 的测度系统。明确地说，对所有 $z \in Z$，都有 $\lambda_1^{[z]} = z\lambda^{s_Z}(z)$。另一方面，不变测度 $\mu$ 在 $C^*(G)$ 上定义了一个迹 $\tau$，使得对所有 $f \in C_c(G)$，有 $\tau(f) = \int_{G^{(0)}} f(x) d\mu(x)$。我们将 $K_0(C^*(G))$ 上的诱导映射记为 $\tau_*$，并将 $K_0(C^*(G))$ 中投影 $e$ 的类记为 $[e]$。

**命题 A.2.** [12, 命题 5.5.6]. 在上一命题的假设下，设 $\mu$ 是 $G$ 的不变测度。令 $\tau$ 为由 $\mu$ 定义在 $C^*(G)$ 上的迹。那么 $\tau_*([e]) = \nu(Z/G)$，其中 $\nu$ 是 $Z/G$ 上的唯一测度，满足 $\nu \circ \lambda_1 = \mu \circ \alpha$。

证明。 按照命题证明中的 $(h_i)$ 和 $e$，我们有

$$\begin{aligned}
\tau_*([e]) &= \sum_{i=1}^{n} \tau(\langle h_i, h_i\rangle) = \sum_{i=1}^{n} \int_{G^{(0)}} \langle h_i, h_i\rangle(x) d\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{G^{(0)}} \int_Z |h_i(z)|^2 d\alpha_x d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_Z |h_i|^2 d(\mu \circ \alpha) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_Z |h_i|^2 d(\nu \circ \lambda_1) = \sum_{i=1}^{n} \int_{Z/G} \int_G |h_i(z\gamma)|^2 d\lambda^{s_Z(z)}(\gamma) d\nu(r_Z(z)) \\
&= \int_{Z/G} \Big( \sum_{i=1}^{n} \int_G |h_i(z\gamma)|^2 d\lambda^{s_Z(z)}(\gamma) \Big) d\nu([z]) = \int_{Z/G} d\nu([z]) = \nu(Z/G)
\end{aligned}$$

□

## References

[1] 复数域。 Anantharaman-Delaroche; J. Renault: *Amenable groupoids*, 《数学教学专著》 nt 数学 e 数学文献第**36**号，日内瓦，2000年。

[2] A. Connes: *Sur la théorie non commutative de l'intégration*, 载于: *Algèbres d'opérateurs*, 19–143。数学讲义，第725卷，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约（1979年）。[3] A. Connes: *A survey of foliations and operator algebras*, 载于: *Operator algebras and applications, Part I*, 521 628 38 1982 – 。纯数学专题讨论会论文集，第卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（）。[4] A. Connes: *Noncommutative Geometry*, 学术出版社（1994年）。[5] L. Fuchs: *Partially ordered algebraic systems*, 培格曼出版社，1963年。[6] L. Fuchs: *Infinite abelian groups I*, 学术出版社，1970年。[7] K. R. Goodearl: *Partially ordered abelian groups with interpolation*, 数学调查与专著，第20卷，美国数学会，1986年。[8] P. Green: *The local structure of twisted covariance algebras*, 《数学学报》140（1978年），191–250。[9] F. Latr´emoli`ere 和 J. Packer: *Noncommutative solenoids*, 《纽约数学杂志》24 A（2018年）。[10] P. S. Muhly、J. Renault 和 D. P. Williams: *Equivalence and isomorphism for groupoid C*-algebras*, 《算子理论杂志》17（1987年），3–22。[11] J. Renault: *Représentations des produits croisés d'algèbres de groupoïdes*, 《算子理论杂志》18（1987年），67–97。[12] J. Renault: *C*-algebras and dynamical systems*, IMPA数学出版物，第27届巴西数学研讨会，里约热内卢，2009年。[13] J. Renault: *Abelian twisted groupoid extensions*, 《算子理论杂志》89（2023年），101–135。[14] M. A. Rieffel: *C*-algebras associated to irrational rotations*, 《太平洋数学杂志》93（1981年），415–429。[15] M. A. Rieffel: *Applications of strong Morita equivalence to transformation group C*-algebras* *Operator* ，载 *algebras and applications Part I* 299 310 **38** 于: ， , – 。纯数学专题讨论会论文集，第卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（1982年）。[16] A. Robert: *A Course in p-adic Analysis*, 数学研究生教材，第198卷，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约（2000年）。[17] J.-L. Tu: *Non-Hausdorff groupoids, proper actions and K-theory*, 《数学文献》9（2004年），565–597。[18] D. Williams: *A tool kit for groupoid C*-algebras*, 数学调查与专著，第241卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2019年。

Institut de Mathématiques, Université de Toulouse, 31062 Toulouse, FRANCE
*Email address*: paulo.carrillo@math.univ-toulouse.frQWANTO, 2 rue d'Austerlitz, 31000 Toulouse, FRANCE*Email address*: laurent@qwanto.fr

Institut Denis Poisson (UMR 7013), Université d'Orléans et CNRS, 45067 Orléans Cedex 2,FRANCE*Email address*: jean.renault@univ-orleans.fr