arXiv:2611.30401v1 [cs.CG] 23 Nov 2026

聚光太阳能电站组件形状缺陷检测算法

J.M. D´ıaz-B´a˜nez*, †* M. Medr´an-Navarro*

摘要

聚光太阳能（CSP）技术提供了一种可调度的可再生能源解决方案，能够通过高容量热能储存弥合间歇性发电与电网需求之间的差距。然而，聚光太阳能电站的整体热力学效率和成本效益，关键取决于光学质量，以及分布在广阔太阳能场中的数千个反射曲面的精确几何对准。形状缺陷检测算法已成为自动化镜面轮廓测量、追踪流动光斑和诊断对准问题的重要工具。本文提出了一种面向聚光太阳能应用的全新几何形状检测技术框架，并引入了 *parabolicity* 的概念。该概念在这一领域引出了一类优化问题，并为计算几何领域的后续研究指出了一个可能的方向。本文提出了精确算法和近似算法，并通过仿真生成的合成数据集开展了实验研究。

1 引言

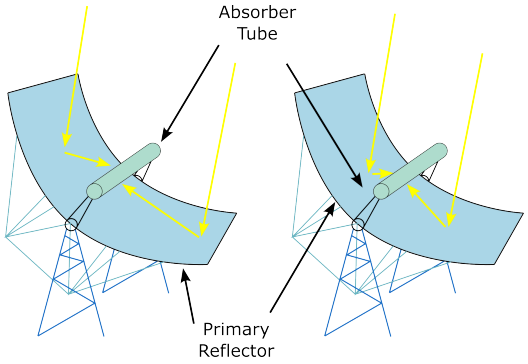
作为欧盟持续推进电力和供热系统脱碳工作的一部分， [1], 聚光太阳能（CSP）作为一种可再生能源技术，再度受到关注。与将阳光直接转化为电力的光伏系统不同，聚光太阳能利用聚集的太阳辐射产生热能。这些热能可以储存起来，并在之后用于发电，从而提供一定的灵活性，可与光伏和风能等具有波动性的可再生能源互补。

聚光太阳能电站采用多种反射式集热器，包括抛物槽和中央接收器系统。在抛物槽式集热器（PTC）中，曲面镜面将入射太阳辐射聚焦到沿反射器焦线布置的线性接收管上。接收器吸收的热能传递给工质，随后用于发电 [2]。图 1 展示了典型的抛物槽式集热器。

*西班牙塞维利亚大学应用数学第二系。 {dbanez, mirmednav}@us.es †通讯作者。



（a）聚光太阳能 [3]的图片。



（b）管和反射器。

图1：抛物槽式集热器。

抛物槽式集热器的工作原理依赖于抛物线的聚焦特性。由于太阳与地球之间的距离很远，入射太阳辐射可以近似视为平行光线。当这些光线平行于抛物线的对称轴时，它们会被反射至焦点。在抛物槽中，这种聚焦特性沿反射器的长度延伸，将辐射聚集到接收管上（图 2）。

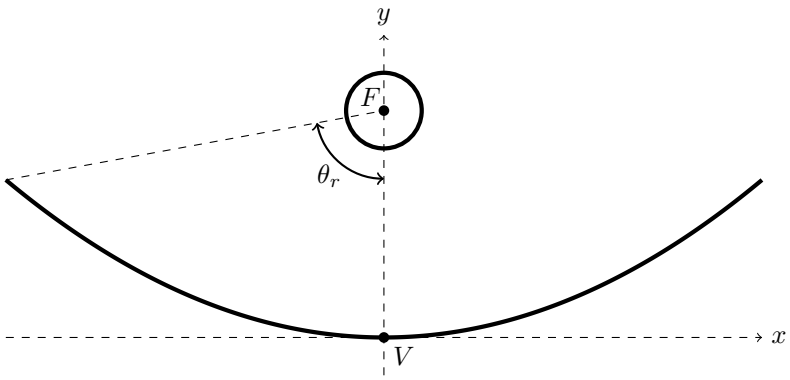


图2：抛物槽反射器的截面，显示接收器位于抛物线轮廓的几何焦点处。

抛物槽式集热器的光学性能取决于其反射器几何形状的准确性。与名义抛物形状的偏差可能改变反射光线的方向，并减少接收器截获的辐射量。这些偏差可能源于制造缺陷、重力下垂或运行期间的结构变形。因此，对其几何特征进行表征有助于评估反射器的状态。

在本研究中，利用激光扫描生成的点云来表征反射器几何形状。本研究的主要目标是开发并评估专为聚光太阳能环境设计的几何形状检测算法。本研究涵盖理论几何优化和实验。我们引入抛物性 这一概念，将其作为衡量形状偏离理想抛物线形状程度的几何度量。我们开发并比较了不同的计算算法

以估算这一量，随后可用它来定义反射器的形状公差。评估所提出的方法时，特别关注其识别模拟几何缺陷的能力。

本文的主要贡献如下：

1. 抛物性的概念与算法形式化： 我们提出了一个数学框架，用于在存在噪声的现场观测条件下，计算二维曲线和三维曲面的精确及近似抛物性度量。

2. 算法设计： 我们提出了用于太阳能反射面板自动特征提取、边界检测和表面斜率重建的精确方法与近似方法。此外，还提出了高效优化方法，用于测量离散点集的抛物性，从而衔接抽象计算几何与实际太阳能工程之间的差距。

3. 验证与性能分析： 我们研究了所提算法在合成数据集上的性能。

本文其余部分安排如下：第2节回顾聚光太阳能领域现有的光学测量技术、标准几何形状检测文献，以及计算几何中经典的圆锥曲线拟合方法。第3节定义抛物环带和点集的抛物性，阐述我们采用宽度这一概念的理由，并在三维和二维空间中陈述问题。第4节介绍两种算法，用于在已知对称轴的情况下求解二维问题。第5节针对二维无向问题提出一种精确算法和两种算法近似方法。第6节介绍实验设置，说明生成抛物槽点云的步骤、注入误差及其抛物性度量。第7节展示实验结果并讨论其局限性。最后，第8节总结核心发现，并指出计算几何在可再生能源领域的未来研究方向。

2 相关工作

抛物线槽式集热器（PCTs）中镜面缺陷的经典测量方法包括通过光学测试识别斜率误差；然而，过去几十年间，研究人员也探索了其他方法，以识别几何偏差及其相关的潜在退化问题。这些方法包括摄影测量[4], ，这是一种通过一张或多张图像研究并确定物体尺寸与形状的技术；以及偏折测量，它通过研究镜面所产生的特定物体的反射来检查镜面。一项新兴案例研究采用激光扫描技术生成抛物线槽式结构的三维模型，之后可对其几何形状进行研究。例如，De As´ís L´opez 等人 [5] 的研究表明，地面激光扫描设备可用于

从槽体背面，也就是非反射面测量镜面结构的几何形状；这是因为从正面观察时，镜面的镜面会使图像产生失真。Salamanca 等人 [6] 的研究展示了抛物槽激光扫描的另一种用途：通过将点云与由槽体理想制造参数构成的规范图像进行比较，评估截获率及其他几何偏差。Guidi 等人 [7]还提出了一种方法，通过对槽体后部进行激光扫描，并将扫描结果与有限元模型进行比较，测量其变形，从而评估该流程的准确性。

较新的研究包括 [8], ，其中使用两种不同的激光扫描设备获取同一座太阳能发电厂的点云。所用设备的先进软件能够校正激光测量中的镜面变形；研究结果还包括比较间隔18个月进行的两次不同扫描，以检测两次扫描之间的差异。识别出的主要缺陷是抛物线轮廓上下边缘处的系统性变形。

在所有这些文章中，抛物槽的点云精度达到数毫米量级，即 Guidi 等人 [7] 显示不确定度小于3.6毫米；文中指出，激光扫描设备的布设比摄影测量或偏折测量等替代方法更简单。因此，通过航空或地面激光扫描方法识别镜面缺陷是一种颇有前景的替代方案，同时也需要设计相应的公式，以测量并分类最终点云中观察到的误差。

在本研究中，我们提出了一种用于测量抛物柱面形状误差缺陷的新概念。正如我们将在下一节中定义的那样，这一度量受到现有概念的启发，例如圆柱度——在计量学中，它被视为圆柱形状的公差单位 [9], [10]；以及最小宽度环带，它同样用于确定环形件应用中的容差。现行的 ISO 12180-1:2011 已定义了与圆柱度概念相关的不同术语，其中包括局部圆柱度偏差的度量，即圆柱面上一点相对于参考圆柱的偏差，且该偏差沿参考圆柱的法向量方向 [11]。

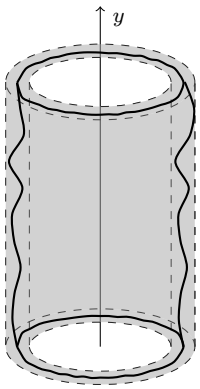


图 3：圆柱度偏差示意图，物体被限制在两个同心圆柱之间。

正如我 如前所述，圆柱度作为一种定义，也是测量零件圆度的一种方法 ce

因此，它适用于需要高精度的行业，例如旋转零件的配合 [12]。最小区域圆柱等圆柱度定义依据圆柱的几何性质，而非统计平均值。它们在特定几何特征内定义公差带；与采用最小二乘法进行的配合相比，后者往往会高估形状公差，可能导致不必要的拒收 [13]。

这些度量和区域的计算并非易事，数十年来一直是研究对象。尤其是，人们进行了大量研究，探寻用于解决这些问题的线性和凸表述，从而有效降低计算复杂度。经过恰当定义后，几何问题的原始多项式复杂度可以降低。该领域最知名的结果之一是，固定维数线性问题可在线性时间内求解，所需时间与约束数量成正比n [14]；这一结果也被广泛应用于 ε近似解，作为高效替代方案 [10]。

解决最小区域问题的另一种知名方法，是将其定义为切比雪夫最佳拟合算法。对于最常见的形状——条带、圆盘、球体和圆柱面——其解由解区域边界上的接触点决定。对于有限点集，这些问题具有组合性质；基于库恩-塔克方程的现有优化软件已能够计算其近似值，如 [15]所述。其他计算几何技术还包括基于沃罗诺伊图的方法 [16], ，用于构建稳健的算法。

在二次曲面领域，我们注意到 Zhang 等人 [17], 的工作：他们针对多种三维二次曲面（包括抛物柱面），通过启发式算法评估形状误差的最小区域。Har-Peled 和 Varadarajan [18] 提出了一种通用方法，可获得形状拟合算法的线性 ε近似值，该方法也可推广到某些最小区域问题。最后，尽管其他研究并未明确将其作为衡量最小区域误差的方法，但它们探索了通过最小化特定抛物特征（例如 [19]），将离散数据点拟合到抛物形状的算法。

然而，抛物线以及更广泛而言，二次曲面的拟合仍然是一个尚未解决的问题。定义这些形状的几何公差有多种方式，而每种方式都构成一个需要单独研究的最佳拟合问题。

3 问题陈述

3.1 预备知识

通常，平面上的抛物线定义为到一个固定点（称为焦点）和一条直线（称为准线）距离相等的点的轨迹。

在坐标系 XY 中，竖直抛物线的经典形式为：

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{where } a \neq 0$$

而未给出方向时，则用一般圆锥曲线方程表示:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{where } B^2 - 4AC = 0$$

抛物柱面是沿着与平面法向量平行的固定方向延伸平面抛物线而形成的三维曲面。等价地说，它是沿垂直于其所在平面的方向——即挤出轴——平移抛物线所生成的曲面，因此垂直于该方向的截面保持不变。

例如，截面为 $y = ax^2+bx+c$ 、挤出方向为 z轴的抛物柱面可表示为

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

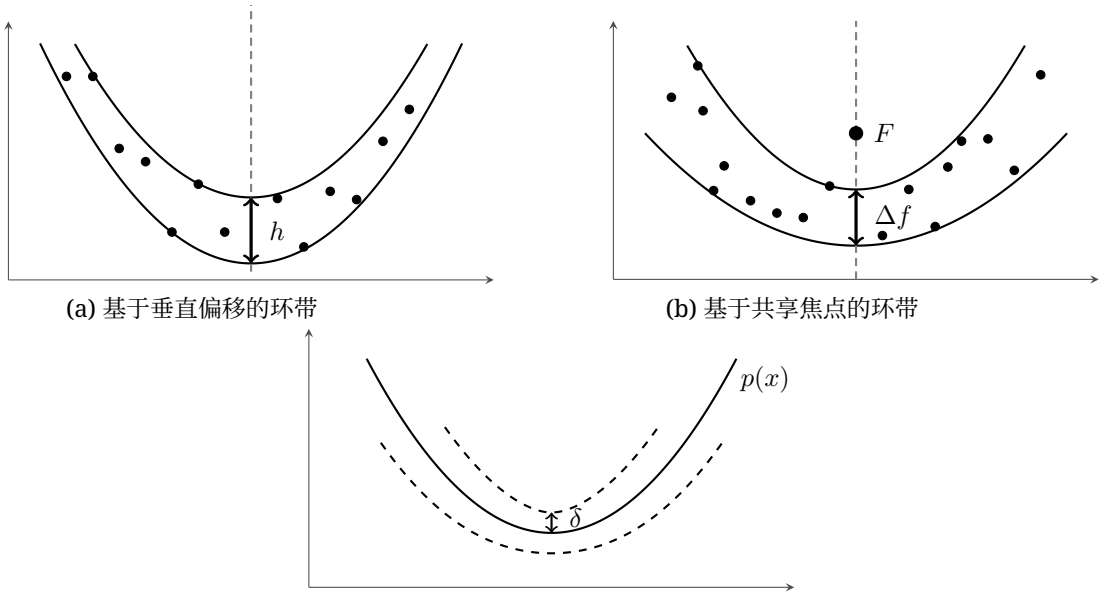
定义 3.1. 抛物环带定义为三维空间中位于两个抛物柱面之间的点的轨迹。抛物环带的宽度是两个曲面之间的间距。

首先想到的方法是最小二乘法，但它有一些需要注意之处。最小二乘拟合会得出使残差平方和最小的抛物线，这反映的是数据的平均情况。另一方面，形状公差关注的是另一个问题，即需要多窄的区域才能容纳所有测量点。通过取最小二乘拟合的极端残差所得到的环带确实包含这些点，因此其宽度至少与最小宽度一样大。正因如此，它往往会夸大形状误差；在质量控制中，这会导致拒收实际上符合公差要求的零件 [13]。最小区域的定义才与我们要解决的问题相符，因此本文采用这一方法。

宽度有许多可能的定义，具体取决于所考虑的度量。例如，如果两个抛物柱面具有相同的对称轴方向，且一个曲面是另一个曲面的平移，那么宽度就是沿轴方向的距离。另一种可能性是固定焦点，并将宽度定义为边界抛物线之间焦距的变化量。我们在图4中展示了一些示例。

请注意，如果我们将环带的宽度选为相对于参考抛物线或中心抛物线的法向距离——在三维情况下，分别为抛物柱面——如正交距离拟合中所采用的那样，则所得区域通常不再是抛物环带。假设包围曲面是平面曲线的柱面延拓，则其平面截面是参考抛物线的偏移曲线。根据 Farouki 和 Neff 的推论2.3 [20], ，非退化抛物线的偏移曲线具有六次代数次数。因此，所得的包围曲面通常不是抛物柱面。

在本研究中，我们将宽度视为沿轴方向的距离，并探讨计算宽度的不同方法。将两个相同的抛物线沿其公共轴方向平移，可得到更简单的公式，因为此时点到抛物线的偏差可以是线性的。我们将在



(a) 基于垂直偏移的环带　(b) 基于共享焦点的环带

(c) 基于法向距离的环带

图4：不同宽度示例的剖面图

后续章节中利用这一点。

通过以下定义，我们引入本文的主要研究对象。

定义 3.2。如果包含 S 的最小抛物环带的宽度等于 ρ，则称点集 S 的抛物性为 ρ 。

3.2 三维问题陈述

尽管可以通过多种方式将抛物性定义为一种最小区域度量，本文聚焦于一种特定构造：将两个相同的抛物线沿其对称轴相对平移。在三维空间中，这一构造可扩展为两个抛物柱面，由此得到以下形式化问题。

问题 3.3。给定有限点集 $S \subseteq \mathbb{R}^3$，求一个包含 S的最小宽度抛物环带。该环带由两个相同的抛物柱面围成，二者沿其平面轮廓的对称轴相对平移。环带的宽度定义为该平移的大小，而最小宽度即为 S的抛物性。

3.3 二维问题陈述

假设已知抛物柱面的挤出轴，我们可以将点集 $S \subseteq \mathbb{R}^3$ 投影到与该轴正交的平面上。这样，原问题就简化为一个二维实例，随后可使用平面技术求解。这将是本工作的主要研究范围。

定义 3.4. 二维中的抛物线廊道定义为平面上位于两条抛物线之间的点的轨迹。抛物线廊道的宽度是沿对称轴垂直测量的两条曲线之间的间距。参见图*5*。

问题 3.5. （可变轴方向的最小宽度抛物线廊道）。给定一个由 n 中的 $p_i = (x_i, y_i)$ 点组成的集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$，求一个方向向量 $d = (\cos\theta, \sin\theta)$ 以及两条共用由该方向确定的公共轴的抛物线，使抛物线廊道的宽度最小。

注 3.6. 根据抛物线的孔径 a，我们区分两种边界情况，以及另一种点集已被假定具有大致抛物线形状的情况。

1. 当 $a \to 0$ 时：抛物线会变成直线，问题也就简化为寻找包含所有点的最小宽度带。*2.* 当 $a \to \infty$ 时：抛物线会变得高度弯曲，顶点的最优位置将趋向于使顶点靠近这些点。*3.* 对于大致沿抛物线形状分布、但带有一些噪声的点，最优方向会使抛物线轴与点分布的自然轴对齐，从而使抛物环带所需的厚度最小。

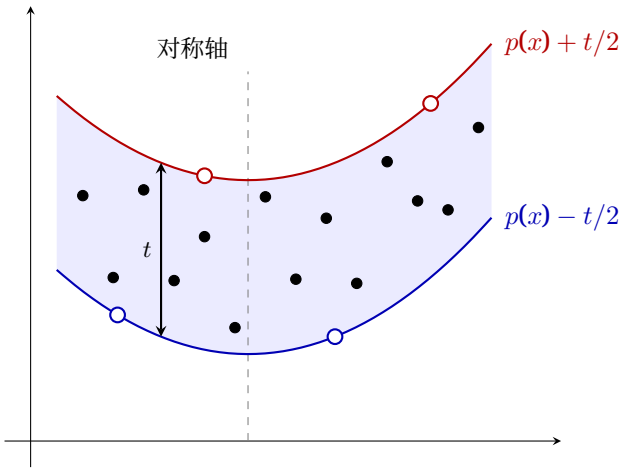


图5：点集的最小宽度抛物线廊道。两条边界沿对称轴彼此平移，t 表示待最小化的宽度。空心圆标示出恰好位于边界上的点。

4 定向问题的算法

第一种方法是假设轴方向已知。不失一般性，我们假设抛物线的轴为竖直方向（如果轴是倾斜的，之后可以旋转点集）。因此，这两条抛物线的形式为：

- 下抛物线： $y_u = ax^2 + bx + c_1$
- 上抛物线： $y_l = ax^2 + bx + c_2$,

其中，对于两者， a 和 b 相同，因为其中一个是另一个的平移。目标是在满足以下条件的情况下，将垂直差值 $t = c_2 - c_1$最小化：对于集合中的每个点（x_k， y_k）：

$$ax_k^2 + bx_k + c_1 \leq y_k \leq ax_k^2 + bx_k + c_2.$$

4.1 线性规划方法

由于相对于我们要确定的参数（a， b， c_1， t），所有约束都是线性的，因此可以使用线性规划高效地求解此问题。

综合以上考虑，我们得到以下形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \tag{1}$$

其中， $c = (0,\ 0,\ 0,\ 1)^T$和 $x = (a,\ b,\ c_1,\ t)^T$，约束定义如下：

$$A_{i*} = \begin{cases} \begin{pmatrix} x_i^2 & x_i & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{for } i = 1, \ldots, n \\ \begin{pmatrix} -x_{i-n}^2 & -x_{i-n} & -1 & -1 \end{pmatrix} & \text{for } i = n+1, \ldots, 2n \end{cases}$$

$$b_{i*} = \begin{cases} y_i & \text{for } i = 1, \ldots, n \\ -y_{i-n} & \text{for } i = n+1, \ldots, 2n \end{cases}$$

$$\text{with } A \in \mathbb{R}^{2n \times 4},\ b \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$$

也就是说，我们有 $2n$ 个约束。前 n 个约束确定抛物环带的下界，接下来的 n 个约束定义环带的上界。

请注意，无需施加 $t >= 0$ ，因为对于每个 i 和 $i + n$ 行，它都可以通过将限制 $Ax \leq b$ 中给出的相应不等式相加得到。

定理 4.1. 问题 *3.5* 的定向版本可在 $O(n)$ 时间内求解。

证明。 为证明可行性，考虑任意有限点集 $\{(x_k, y_k)\}_k$。那么我们可以设定 $a = b = 0$,$c_1 = \min_k y_k$ 和 $t = \max_k y_k - \min_k y_k$，这始终满足条件 $Ax \le b$。由于我们的目标函数有下界，且我们是在闭集 $P = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax \le b\}$上进行最小化，因此最优值可取且有限。

我们现已证明，**(1)** 中的 $2n$ 边界在 $\mathbb{R}^4$ 中定义了一个可行集。此外，由于维数 d 是固定的（$d = 4$），因此可以应用 Megiddo 的结果 [14]，在 $O(n)$ 时间内解决该问题。 □

4.2 替代算法

以下结果给出了支撑点集的一个有用刻画。它受到切比雪夫多项式逼近及其等波动性质 [21] 的启发。

引理 4.2. *给定一组点 $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$，其横坐标互不相同，并且给定 **(1)** 中描述的问题，且该问题有唯一的环带解，则存在四个支撑点 $x_{k_1} < x_{k_2} < x_{k_3} < x_{k_4}$，按横坐标排序后，交替位于最小化环带的上边界和下边界上。*

证明。 令 $p(x)$ 为描述最小化环带的中心抛物线，其中 t 为该环带的最小抛物性和宽度，并令 S 为支撑点集。由于我们的线性规划维数固定为 $d = 4$，根据线性规划的性质，我们知道集合 $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ 中至少应有四个点，且等号恰好在以下情形成立：

$$Ax = b,$$

这等同于说，对于这些点，$p(x_k) = y_k \pm t/2$。反证法，假设在我们的支撑组中，满足交替性质的连续点对至多有两对。对于这些连续点对，比如说 x_k 和 x_{k+1}，我们选取一个点 $z_k \in (x_k,\ x_{k+1})$。至多会有两个新点 z_k，因为我们的支撑集需要在每条边界上至少包含一个点，即上边界和下边界各一个。于是存在一个二次多项式 $q(x)$，使得对所有 z_k，$q(z_k) = 0$。

现在 我们定义 $\tilde{p}(x) = p(x) + \varepsilon q(x)$，其中 $\varepsilon > 0$ 足够小，使其仍位于环带内。取 e:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min_k\{|y_k - p(x_k) - \frac{t}{2}|, |y_k - p(x_k) + \frac{t}{2}|\} \quad \forall x_k \notin S$$

由此可得 $\varepsilon \neq 0$。我们还可以在点集上缩放 $q(x)$，使得 $1 = \max_k |q(x_k)|$。于是，在 $x_k \notin S$ 中有 $|\tilde{p}(x) - y_k| < t/2$。根据先前对其根的选取方式，我们可以要求 $q(x)$ 满足：对于所有点 $x_k \in S$，$\text{sign}(q(x_k)) = \text{sign}(y_k - p(x_k))$ 成立。

1. 如果 $y_k - p(x_k) = t/2$ 则 $\tilde{p}(x_k) = p(x_k) + \varepsilon q(x_k) > p(x_k) = y_k - t/2$ 且 $|\tilde{p}(x_k) - y_k| < t/2$。

2. 如果 $y_k - p(x_k) = -t/2$，那么 $\tilde{p}(x_k) = p(x_k) + \varepsilon q(x_k) < p(x_k)$，并且 $|\tilde{p}(x_k) - y_k| < t/2$。

因此，新的多项式 $\tilde{p}(x)$ 定义了一条抛物线，因为它是一个二次多项式，其抛物性小于 t，这就产生了矛盾，并且支撑点交替排列。 □

请注意，该命题确认了上述四个支撑点的存在，但也可能有其他点与环带边界相交。该命题仅断言，我们可以在这些点中找到一个具有交替性质的子集：上、下、上、下，或反之。

以下结果可用于在 a 为正的情况下减少约束数量，也就是说，当最优抛物线为凸时。

L引理 4.3. 设 $\mathcal{P} = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ 为有限点集，且 p 为凸函数，满足

$$y_k \geq p(x_k), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

如果约束在索引 j 处是活跃的，即 $y_j = p(x_j)$，那么 (x_j, y_j) 位于 $\mathcal{P}$ 的凸包上。如果 p 严格凸，则 (x_j, y_j) 是该凸包的一个顶点。

证明。 假设 (x_j, y_j) 不位于 $\mathcal{P}$ 的凸包上，并设 (x_i, y_i)、(x_l, y_l) 为下凸包上跨越 x_j 的边的端点，因此对于某个 $\lambda \in (0, 1)$，有 $x_j = \lambda x_i + (1-\lambda) x_l$，且 $\lambda y_i + (1-\lambda) y_l < y_j$；否则，$(x_j, y_j)$ 就会位于凸包上。于是，根据 p 的凸性以及这两个点的可行性，

$$p(x_j) \leq \lambda\, p(x_i) + (1-\lambda)\, p(x_l) \leq \lambda y_i + (1-\lambda) y_l < y_j,$$

与 $y_j = p(x_j)$ 矛盾，因此活跃点必须是一个顶点。 □

前两个引理给出了定义最优解的点的性质，而下面的内容给出了最优性的充分条件。

引理4.4。 给定一组点 $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$，并令 $p(x) = ax^2 + bx + c$ 为一个二次多项式。定义 $e = \text{最大值}_{k=1, \ldots, n} |y_k - p(x_k)|$，并假设存在四个点 (x_{k_l}, y_{k_l})，其 $l = 1, \ldots, 4$ 按顺序排列，使得 $x_{k_1} < x_{k_2} < x_{k_3} < x_{k_4}$，并且：

(i) $e = |y_{k_l} - p(x_{k_l})|$，对于 $l = 1, \ldots, 4$。

(ii) $sg(y_{k_l} - p(x_{k_l})) = -sg\left(y_{k_{l+1}} - p(x_{k_{l+1}})\right)$，也就是说，残差的符号交替变化 n.

那么 $p(x)$ 是问题 *(1)* 的最优解。

证明。 为证明此引理，我们首先注意到，问题 (1) 针对给定点集所取得的最小值等价于写作：

$$t = 2 \min_{p \in \Pi_2} \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - p(x_k)| \tag{2}$$

其中 $\Pi_2 = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a, \ b, \ c \in \mathbb{R}\}$ 是次数不超过二次的多项式集合。

现在，设 ρ 是与问题 (1) 相关的抛物性，而 $\hat{}p$ 是我们点集的最小宽度环带的中心抛物线。我们将证明

$$\rho \geq 2e = 2|y_{k_l} - p(x_{k_l})|$$

用反证法，假设这不成立，且 $\max_k |y_k - \hat{}p(x_k)| < e$。那么对于每个 (x_{k_l}, y_{k_l})，可得：

$$p(x_{k_j}) - \hat{p}(x_{k_j}) = (y_{k_j} - \hat{p}(x_{k_j})) - (y_{k_j} - p(x_{k_j}))$$

根据 (i)，我们有 $|y_{k_l} - \hat{}p(x_{k_j})| < e = |y_{k_j} - p(x_{k_j})|$，这意味着 $\text{sg}(p(x_{k_j}) - \hat{}p(x_{k_j})) = -\text{sg}(y_{k_j} - p(x_{k_j}))$。由于这些值在 $x_{k_1} < \cdots < x_{k_4}$ 处交替，根据假设 (ii)，$p - \hat{}p$ 在这四个点处也交替变号。然而，由于 $p - \hat{}p$ 是一个在三个不同点处变号的二次多项式，它必有三个不同根。因此 $p - \hat{}p \equiv 0$，但 $\max_k |y_k - \hat{}p(x_k)| < e$，这显然矛盾。因此$\rho \geq 2e$，而假设中的多项式 p 满足 $2e = 2\max_{k=1,\ldots,n} |y_k - p(x_k)|$，这意味着 p 是问题 (2) 的最优解，并返回最小宽度环带。

□

引理 4.2 和 4.4 刻画了最优性，并且都导出一个结果，使得实现 Remez交换算法 [22]成为可能。该算法通过迭代求解由每次选取的四个有序点构成的交换系统，并计算交换系统返回的抛物线的最大误差来实现。要使这一方法奏效，交换系统必须返回唯一的抛物线，下面的引理将证明这一点。

引理 4.5. 设 $x_{j_1} < x_{j_2} < x_{j_3} < x_{j_4}$ 为四个互不相同的横坐标。则下列系统（称为交换系统）

$$ax_{j_i}^2 + bx_{j_i} + c + (-1)^i h = y_{j_i} \qquad i = 1, \ldots, 4, \tag{3}$$

有唯一解 $(a, b, c, h) \in \mathbb{R}^4$。

证明。 只需证明相应的齐次系统只有平凡解。设

$$q(x_{j_i}) = -(-1)^i h \qquad i = 1, \ldots, 4,$$

其中 $q(x) = ax^2 + bx + c$。若 $h \neq 0$，则 q 在四个有序横坐标处的取值符号交替。由连续性可知，q 必须在相邻横坐标之间的三个不相交区间内各有一个根。对于次数至多为二的非零多项式而言，这是不可能的。因此 $h = 0$。由此可知，q 在四个不同的点处为零，所以 $q \equiv 0$。因此 $a = b = c = h = 0$，且该系统非奇异。

□

4.2.1 Remez交换算法

Remez 算法 [22] 是一种用于解决极小极大逼近问题的迭代算法。它在有限集的 n 点上构造近似，并根据所达到的误差逐步改进

结果。要寻找次数至多为二次的最佳拟合多项式，可通过以下步骤进行描述：

1. 选取四个有序点 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$。

2. 求解引理 4.5 中所述的交换系统。该系统将给出一个次数不超过二的多项式 $p(x)$ 和一个误差水平 h。

3. 计算整个点集 $e_k = p(x_k) - y_k$. 上的误差，并计算最大误差，记为 $E_i = \max_{k=1,\dots,n} |e_k|$，其中 i 为当前迭代次数。

   (a) 如果 E_i 在数值容差范围内等于 h，也就是说，如果最大误差已出现在所选的四个有序点上，那么算法停止，我们便找到了满足引理 4.2 等振荡性质的最优解。

   (b) 如果 $E_0 > h$，那么我们选择一组新的四个有序点，使误差符号交替。这组点应包含误差最大的点。随后通过求解新的交换系统，继续进行下一次迭代。

4. 当满足预先设定的停止准则时，终止该过程。例如，当连续两次迭代之间的最大误差变化满足 $|E_i - E_{i-1}| < \tau_{\text{tol}}$ 时，或者达到最大迭代次数时，即可停止。

与 Remez 描述的原始系统相比，我们的问题并非对连续函数进行近似，因此经典的收敛论证无法直接证明我们实现的算法收敛，也无法保证交换过程一定能达到最优解。不过，在本文的实验部分，我们可以将 Remez 实现给出的解与线性规划表述给出的解进行比较。

5 无向问题的算法

本节研究一般情形，即对称轴未知的情况。我们提出一种精确求解该问题的算法，以及两种求近似值的方法。此外，我们还对第一种近似方法作了理论说明。

5.1 精确算法

为精确求解无向最小宽度抛物线走廊问题，我们利用代数候选曲线的排列。

假设抛物线的参数对（a，b）是固定的。在任意旋转角 θ下，使用二次项为 a 且

线性项 b 为:

$$f_{a,b}(\theta) = \max_{p_i \in P} \left(y_i(\theta) - a x_i(\theta)^2 - b x_i(\theta) \right) - \min_{p_j \in P} \left(y_j(\theta) - a x_j(\theta)^2 - b x_j(\theta) \right)$$

其中（x_i（θ） y_i（θ））是点 p_i 的旋转坐标:

$$x_i(\theta) = x_i \cos\theta + y_i \sin\theta$$

$$y_i(\theta) = -x_i \sin\theta + y_i \cos\theta$$

对于固定的（a， b），当 θ 在 $[0, \pi$ 上变化时，$f_{a,\ b}$（θ）是一条连续曲线。最优宽度函数 W^*（θ）通过在每个角度 θ 处寻找可能的最佳（a， b）得到:

$$W^*(\theta) = \inf_{(a,b)} f_{a,b}(\theta)$$

从几何上看，对于每个有效的参数对（a， b），绘制连续曲线 $f_{a,\ b}$（θ），W^*（θ）会形成这一族曲线的下包络。

现在，对于固定的方向 θ，一个抛物线廊道由 4 个参数决定：抛物线曲率 a；线性斜率 b；垂直平移 c；走廊宽度 w。由于有 4 个自由度，任意 4 个点的子集 $S = \{p_i, p_j, p_k, p_l\}$（划分为上曲线/下曲线）都会唯一确定该角度 θ 下的走廊参数（a， b， c， w）。当 θ 从 0 连续变化到 π 时，这 4 个点集会描绘出一条连续的一维宽度曲线 $f_{a,\ b}$（θ），记为 W_S（θ）。因此，所有角度下的非定向最小宽度函数由这些候选曲线的 下包络 给出:

$$W^*(\theta) = \min_{S \subset P, |S|=4} W_S(\theta) \tag{4}$$

引理 5.1。 $N = O(n^4)$ 候选宽度曲线 $\{W_S(\theta)\}$ 的下包络 $W^*(\theta)$ 的组合复杂度为 $O(n^4 \beta(n))$，其中 $\beta(n)$是一个极慢增长函数

证明。 任意两条不同的四点宽度曲线 $W_{S_1}(\theta)$ 和 $W_{S_2}(\theta)$ 在角度 θ^* 处相交，此时两个四点子集定义相同的走廊参数。在这些交点处， $S_1 \cup S_2$ 构成五点接触构型。由于 $W_{S_1}(\theta)$ 和 $W_{S_2}(\theta)$ 是最高次数为常数的有界代数曲线，因此在 $[0, \pi)$ 上的实交点根数量有一个常数上界 $s = O(1)$。利用 (N, s)-序列的 Davenport–Schinzel 序列上界，下包络由至多 $\lambda_s(N) = O(N \cdot \beta(N))$ 条连通代数弧 [23]组成。由于在我们的问题中 $N = O(n^4)$，证明得证。

□

以下算法可精确计算抛物性:

最小宽度非定向抛物线走廊算法:

1. **可以 候选曲线生成:** 对于每个 $O(n^4)$ 个四点子集 $S \subset P$ 以及每个 n

将 S 划分为上边界集和下边界集，建立关于变量（$a,\ b,\ c,\ w$）的 4 个线性方程，并求得 $W_S(\theta)$。

2. **分治包络构造：** 使用分治法，在 $\theta \in [0, \pi)$ 上构造下包络 $W^*(\theta) = \min_S W_S(\theta)$:

(a) 将 $O(n^4)$ 曲线集划分为两个相等的子集。(b) 递归计算每个子集的下包络。(c) 沿 θ 执行一维扫描线算法，合并两个下包络，以识别所有 $O(n^4\beta(n))$ 交点。

3. **临界点最小化：** 通过评估以下内容，确定构造的下包络 $W^*(\theta)$ 上的整体最小宽度 w^*：

(a) 局部极小值（四点驻定接触）： 沿每个有效弧段求解 $\frac{dW_S(\theta)}{d\theta} = 0$。(b) 断点（五点临界接触）： 在相邻弧段之间的每个交点顶点处评估 $W^*(\theta)$。

4. **输出：** 返回全局最小宽度 $W^* = \min_\theta W^*(\theta)$ 及其对应的精确定向 θ^*。

定理5.2。 *算法1可在$O(n^4 \log n)$ 时间内计算出精确的最小宽度非定向抛物线走廊。*

证明。 根据引理 4.2 和线性规划顶点性质，全局最小值必定出现在某个四点走廊的驻点，或某个五点转变顶点处。下包络 $W^*(\theta)$ 按照构造包含了所有此类候选值。分治法的合并步骤所需时间与包络复杂度成正比，递归运行时间公式为:

$$T(N) = 2T(N/2) + O(N\beta(N)) \implies T(n) \in O(n^4 \log n) \tag{5}$$

检查候选极小值对所有 n 点的有效性，每条弧需要 $O(n)$ 的验证成本，因此朴素方法的总验证成本为 $O(n^5\beta(n))$。为了达到 $O(n^4 \log n)$，最先进的计算几何算法会避免在最后逐点检查。相反，为了避免在每个候选步骤中测试所有 n 点（耗时 $O(n)$），我们可以将四点曲线 $W_S(\theta)$限制在其有效角域内。这需要使用动态计算几何更新工具。该方法在保持全局包含的同时，使总体运行时间维持在 $O(n^4 \log n)$。

□

在启发我们提出最小抛物环问题的实际应用中，数据集规模非常庞大，因此上述精确算法并不实用。接下来，我们提出两种高效的近似方法，它们在实践中或许很有用。

5.2 近似1：网格离散化算法

一种简单的方法可以基于定向情形构建：旋转定义点云所处的参考坐标系。

1. 遍历 m 个等间距角度 $\varphi \in [0, \pi)$。

2. 对每个 φ，旋转各点，并使用新的数据点求解先前在 (1) 中定义的线性规划问题：

$$\begin{cases} x(\varphi) = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y(\varphi) = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

3. 保留使宽度达到最小值的角度。相应的抛物性值即为该问题的近似值。

尽管第 2 步计算出的抛物性是精确的，但最终测量值与实际抛物性之间仍存在误差范围，因为我们对称轴进行了近似，因此这是一种启发式方法，而非具有保证的近似方法。

值得指出的是，该算法并不依赖于构建旋转所围绕的枢轴点——在本例中，我们选择了点云参考坐标系的原点——因为对于给定方向，式 (1) 中定义的定向情形下的线性问题对任意平移均保持不变。根据定理 4.1，该方法需要 $O(m \cdot n)$ 时间。

5.3 近似 2：一种线性近似算法

下面的近似基于这样一个假设：这些点应当符合一条参考抛物线，并且我们大致知道对称轴所在的位置。基于此，我们可以假设对系统进行的任何旋转幅度都很小。关于圆柱度的研究中也采用了类似的线性化近似 [24]。

我们再次考虑与之前相同的问题，并假设理想抛物槽由以下模型表示：

$$ax^2 + bx + c = y \quad \text{where } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ are known} \tag{6}$$

事实上，当 $b = 0$ 时，a 就成为抛物线的孔径。我们假设这些参数已知，并且数据是在一个与真实对称对齐坐标系存在微小旋转偏差的坐标系中观测得到的。因此，存在一个扰动角 $\delta \in \mathbb{R}$，通过该角度旋转我们的点 $(x,\ y)$ 后，可将其表示在理想坐标系 $(x',\ y')$ 中，由此可得：

$$\begin{cases} x(\delta) = x\cos\delta - y\sin\delta = x - \delta y + O(\delta^2) \\ y(\delta) = x\sin\delta + y\cos\delta = \delta x + y + O(\delta^2) \end{cases}$$

当 $|\delta| \le \varepsilon$ 时，假设 δ 足够小，以至于可以忽略 $O(\delta^2)$ 阶项，那么我们的问题便可通过满足以下约束的线性规划求解：

$$\begin{aligned} & ax_k^2 - 2\delta a x_k y_k - y_k - \delta x_k \le c \quad \forall k = 1, \dots, N \\ & y_k + \delta x_k - a x_k^2 + 2\delta a x_k y_k \le d \quad \forall k = 1, \dots, N \\ & -\varepsilon \le \delta \le \varepsilon \end{aligned} \tag{7}$$

其中，我们希望将 $\rho = c + d$ 最小化，作为环带宽度或抛物性近似 .

我们还可以将其推广，以纳入模型中水平偏移 b 和孔径 a 的扰动，使得

$$\begin{cases} a \to a + \Delta a + O(\varepsilon^2) \\ b \to b + \Delta b + O(\varepsilon^2) \end{cases} \tag{8}$$

所有扰动均满足 $|\delta| \le \varepsilon$、 $|\Delta a| \le C_a \varepsilon$ 和 $|\Delta b| \le C_b \varepsilon$。同样，我们忽略阶数为 $O(\varepsilon^2)$ 的项，得到一组新的线性约束，其中 c， d， Δa， Δb 和 δ 为变量，从而得到以下最小化问题。

问题 5.3。（有界扰动下的线性化抛物性）。设 $P = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$，令 a、b 为标称系数， $\varepsilon > 0$ 为信赖域半径， C_a、$C_b \ge 0$ 为常数。记

$$r_k \;=\; \big(y_k - a x_k^2 - b x_k\big) \;+\; \delta\, u_k \;-\; \Delta a\, x_k^2 \;-\; \Delta b\, x_k, \qquad where\ u_k \;=\; x_k + 2a\, x_k y_k + b\, y_k, \tag{9}$$

通过求解以下问题计算 $(\delta, \Delta a, \Delta b, c, t)$

$$\begin{aligned} \min_{\delta, \Delta a, \Delta b, c, t} \quad & t \\ s.t. \quad & c \;\le\; r_k \;\le\; c + t, && k = 1, \dots, N, \\ & |\delta| \le \varepsilon, \quad |\Delta a| \le C_a \varepsilon, \quad |\Delta b| \le C_b \varepsilon, \quad t \ge 0. \end{aligned} \tag{10}$$

如果不假设扰动的阶相近且平方项可以忽略，那么由 $c \le r_k$ 和 $r_k \le c + t$ 给出的前 $2n$ 个约束就会变成难以轻易求解的非线性方程。

到目前为止，在我们介绍的算法中，我们只处理了定向参考系或其小扰动情形。事实上，我们的抛物性度量 ρ 对旋转相当敏感。确实，如果我们对一个规模适中的数据集建模，该数据集由间距完全均匀、符合两个相同抛物线的点界定（两条抛物线仅存在垂直位移），就会发现抛物性会随坐标轴旋转而大幅变化。

注 5.4。*5.3* 中给出的问题是线性的。这是由 *Megiddo* 的结果 *[25]* 以及该问题具有固定维数 $d = 5$ 这一事实所决定的。

注 **5.5.** 本节所述的公式通常并不严格对应于 *to*

在方向集合 $[-\varepsilon,\varepsilon]$ 上拟合抛物环带。更具体地说，项 $2\delta a x_k y_k$ 引入了一个混合二次项，却没有相应的 y_k^2 项，因此所得表达式无法保留预期抛物模型的精确结构，除非相关参数的最优值恰好为零。

对于 [24]，的方法，同样的观察也成立：该方法将一族近似于轴线近乎竖直的圆柱面的二次曲面与线性化优化表述相结合。原始几何问题被替换为一个更易处理的数学表述。

5.4 关于网格离散化算法的注记

网格离散化算法： 设存在一个用于定向问题的精确算法 $\mathcal{A}_{\text{oriented}}(P,\ \theta)$。为近似无向问题，我们构造步长为 $\Delta\theta = \frac{\pi}{m}$ 的均匀角度网格 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\} \subset [0, \pi)$，对每个 $\theta_i \in \Theta$ 执行 $\mathcal{A}_{\text{oriented}}(P,\ \theta_i)$，并返回：

$$\tilde{W} = \min_{\theta_i \in \Theta} W^*(\theta_i) \tag{11}$$

问题在于，这种网格离散化方法是否构成无向情形下的（$1+\epsilon$）近似算法。我们得出了否定结果。

定理 5.6。 离散角度采样算法一般不能保证无向最小抛物线廊道问题的相对（$1+\epsilon$）-近似。也就是说，对于任意固定的 $m \in \mathbb{N}$，存在点集 P，使得 $\frac{W}{W^*} > 1 + \epsilon$。

证明。 假设 P 中的点几乎完美地沿着轴向为 $\theta^* \in [0, \pi$的抛物线排列。最小走廊宽度为 $W^* = W^*(\theta^*) \approx 0$。由于 θ^*是一个连续实参数，除非 $\theta^* \in \Theta$明确指定，否则任何采样方向 $\theta_i \in \Theta\,(\theta_i \neq \theta^*,\ i = 1, \cdots m)$都会产生严格为正的宽度$W^*(\theta_i) > 0$。因此：

$$\frac{\tilde{W}}{W^*} = \frac{\min_{\theta_i \in \Theta} W^*(\theta_i)}{W^*} > 1 + \epsilon \tag{12}$$

由于有限网格 Θ 在 $[0, \pi$中测度为零，无法保证 θ^* 属于 Θ，从而导致无界的近似比。

□

6 实验

本节介绍实验设置，其步骤及执行顺序如图6所示。我们将说明如何生成点云、如何在集热器中注入缺陷，以及如何确定用于评判所得宽度的容差。我们也会介绍定向情形和无向情形下的实现算法。第7节将报告相关结果。

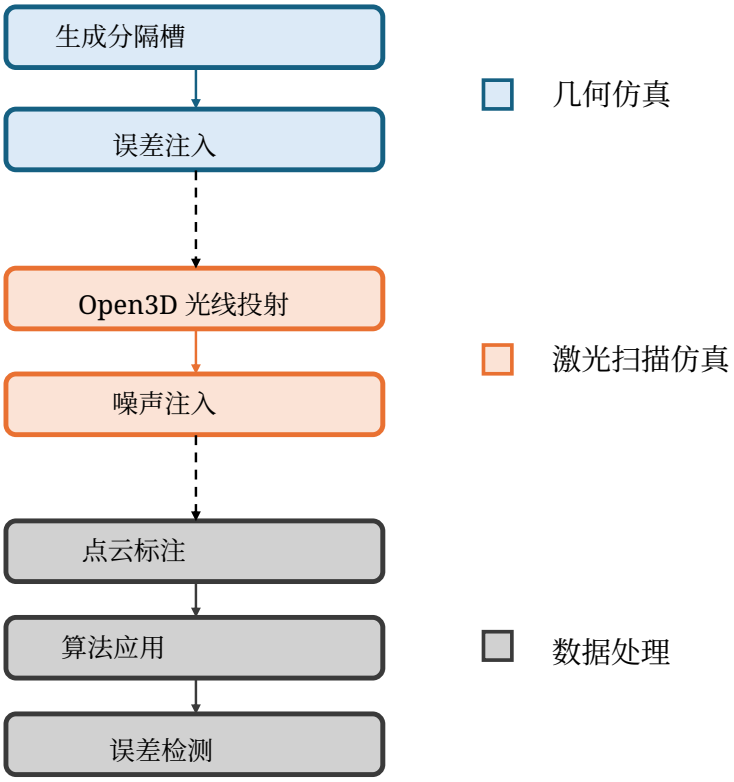


图6：仿真流程示意图 .

6.1 点云生成

用于评估抛物性的点云将采用合成数据。我们的场景是在集热器上方搭载一台激光扫描仪。激光扫描仪已用于恢复原型 [5, 7]和运行中的太阳能场 [6, 8]的集热器几何形状。由于我们无法获得真实集热器的测量数据，因此改为模拟扫描。我们采用的布置有意设计得较为通用，在集热器上方设置视点网格；这种布置既可描述多站地面测量，也可描述空中测线。由于抛物性是在截面上评估的，任何能够对轮廓进行密集采样的仪器都同样适用。

这类仿真在工程领域很常见，其流程从待测物体的三维模型开始，通常采用 CAD 格式。我们使用 Open3D [26], ——一个用于处理三维数据的 C++ 和 Python 开源库；它的光线投射功能可根据发射的脉冲数量和设备轨迹重现扫描过程。传感器占据 240 个位置——沿集热器设置 60 个站点，并在其横向的四个偏移位置分别布置，位置高度为顶点上方 3 米；传感器从每个位置发出扇形脉冲， 108° 横跨集热器， 20° 沿其纵向分布。这种路径称为栅格扫描，其示意图见图7。扫描可在轮廓上生成密集的点云。

随后，使用高斯函数向生成的点云中注入随机噪声，以反映现实中的误差。从现在起，我们将其视为激光扫描输出的数据点云。由于激光扫描会提供整个槽体及其周围环境的信息，因此对点进行标注

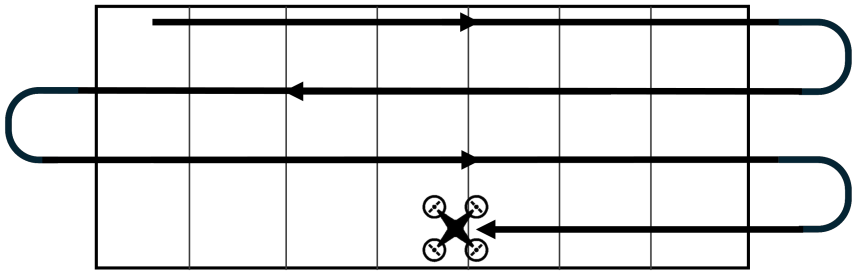


图7：栅格扫描示意图。无人机沿着平行航线飞越该区域。

对于隔离出属于抛物面镜的点至关重要。不过，由于我们知道原始网格结构，这些标签将由模拟数据提供。

下一步是进行体素下采样。将空间划分为大小相同的立方体，对于每个立方体（即体素），计算其中所含数据点的质心。所得质心将成为新的点云。此步骤使用边长为 15 毫米的体素，减少可能的重复点。

最后，我们将镜面的点投影到垂直于挤出轴的平面上。由此得到平面点云 $\{(x_k,\ y_k)\}_k$，它将作为我们算法的输入，并完成图6所示的处理流程。

为了生成分面槽式反射器，我们使用 EuroTrough 模型的尺寸 [27], ，如表1所示。

焦距	1.71 m
孔径宽度	5.76 m
组件长度	12 m
沿圆柱长度方向的面板数量	7
沿圆柱宽度方向的面板数量	4

表1：仿真中使用的主要特征参数。

面板的基准三维模型如图8所示。虽然图中不可见，但各面板是单独建模的，以便更轻松地识别和注入缺陷。

运行激光扫描仿真后，我们将获得一个点云。将其绘制成三维图时，除了一些可能表现为空白区域的遮挡外，点云总体上保留了槽体的抛物线形状。

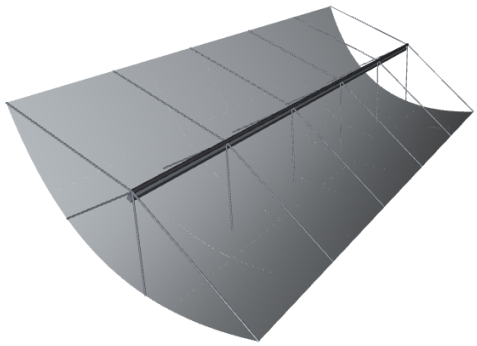


图8：采用 EuroTrough 尺寸的仿真模型。

6.2 误差模拟

抛物槽式集热器中的缺陷和误差已有充分记录。关于这一问题的主要研究之一见 [28], , 其中列举的主要运行误差包括轮廓缺陷，以及使反射器形状偏离理想抛物线形状的缺陷。这些缺陷被认为具有确定性，会导致焦点位移，从而对截获因子产生负面影响；截获因子即接收管截获的能量与镜面反射的能量之比 [29]。

我们将考虑本研究中的两种主要误差。这些误差在三维模型沿垂直于集热器长度的截面投影时可以观察到。该视图对应于图2所示的示意图。 [28], 我们将考虑的错误类型可能属于轮廓缺陷，而这正是我们最终要测量的内容。

为模拟这些误差，我们采用适用于所建模抛物槽框架的简单数学近似。要真实地建模这些误差（例如重力下垂），则需要构建详细的模型框架，将所有结构元件纳入其中，以计算重量、支撑梁等因素造成的影响。

1. 倾斜误差。我们假设面板的形状不受影响，但其方向相对于主框架发生了偏移。当倾斜幅度较大时，所有照射到受影响面板上的光线都可能无法到达接收器。在这种情况下，我们将以面板质心为中心，c，绕 z 轴旋转面板 α 角度。

$$v \longmapsto c + R_z(\alpha)\,\big(v - c\big),$$

2. 凹陷。这些缺陷可能由任何坠落物体的撞击造成，例如恶劣天气条件下发生的撞击。在我们的模型中，与下垂和倾斜误差相比，凹陷更加尖锐且更局部化。

我们将用半径参数 β 对其进行建模。

误差位移函数 ψ 用 r表示，即任意点到凸起中心的径向距离。因子 κ 决定凹痕截断的位置。

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{e^{-r^2/2\beta^2} - e^{-\kappa^2/2}}{1 - e^{-\kappa^2/2}} & r \le \kappa\beta \\ 0 & r > \kappa\beta \end{cases}$$

图9展示了三维面板上的缺陷及其相应的剖面截段。正如预期，这些缺陷会导致原本预期的抛物线形状发生变形，而这正是我们希望检测到的现象。

除了注入缺陷外，每个集热器的每块面板都带有微小的基准倾斜。这并非故障，而是为了加入实际组装的集热器所具有的安装散布。我们为孔径平面内的每个轴独立地从 $\mathcal{N}(0,\ 0.05°)$ 中为每块面板抽取一个值。这相当于相对于理想抛物线产生约一毫米的平移。此外，它还使原本完美纤薄的三维模型呈现出一定的宽度。

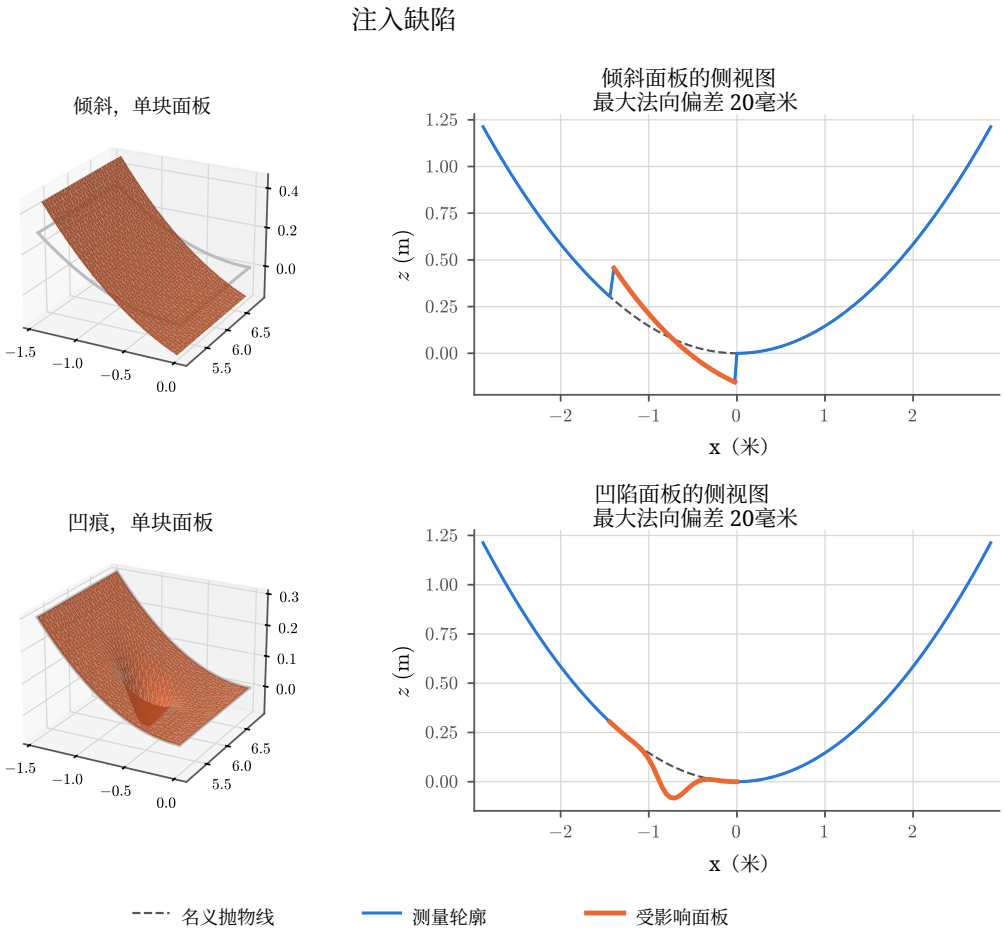


图9：模拟误差的曲面和轮廓视图，为便于观察而进行了放大。

6.3 确定阈值

在我们的仿真中，我们假设抛物槽的形状是理想的，并通过加入高斯噪声来考虑实验设置的条件，其方差与所用设备的精度处于同一数量级。

令 $p_i \in \mathbb{R}^3$ 表示第 i 个命中点的理想位置，令 $d_i \in \mathbb{R}^3$ 表示相应激光脉冲方向上的单位向量。扰动点定义为

$$\bar{p}_i = p_i + \varepsilon_i d_i,$$

其中， ε_i 为测量误差。

我们将误差建模为独立同分布随机变量，

$$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

其中， σ 表示测量误差的标准差。因此，噪声被建模为沿激光方向的位移。

我们将集热器完好作为零假设——即其轮廓为名义抛物线，因此我们测得的宽度仅由测量噪声造成——并以轮廓偏离该抛物线作为备择假设：

$$H_0 : \text{the reflector profile is the nominal parabola} \tag{13}$$

$$H_1 : \text{the reflector profile departs from it.} \tag{14}$$

抛物性 $\rho(\mathcal{P})$是用于在两者之间作出判断的统计量；当$\rho(\mathcal{P}) > \tau$ 时，我们便在预先设定容差 τ 的情况下拒绝 H_0 。下文将根据简化的噪声模型推导该容差，并在结果部分通过模拟测量对其进行评估。

对于由包含 N个点的点云测量得到的抛物槽，我们可以推导出一个参考容差。为了获得理论估计，我们简化噪声模型，忽略扰动对激光方向 d_i 和每个点的位置 p_i的依赖，因为这两者都会影响测得的垂直噪声。相反，我们假设影响每个点的噪声仅由一个独立的标量误差 ε_i表征，其中 $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0,\ \sigma^2)$。

在这些假设下，我们考虑 N 独立误差 R_N 的极差：

$$R_N = \max_{1 \le i \le N} \varepsilon_i - \min_{1 \le i \le N} \varepsilon_i$$

其期望值为：

$$\mathbb{E}[R_N] = d_2(N)\sigma \tag{15}$$

其中， $d_2(N)$ 是 N 个相互独立的标准正态随机变量的期望极差，也称为蒂佩特因子 [30]。该因子取决于点的数量，并且当 N 较大时，近似按 $\sqrt{\log N}$ 增长。

因此，我们将 $d_2(N)\sigma$ 用作具有理论依据的参考容差。由于模拟点云包含的点数相近，我们将在所有实验中使用恒定容差。正如本推导开头所述，该值是在简化噪声模型下推导出的近似值，并不构成置信区间，也不保证特定的假阳性率。

不过，可以使用纯噪声数据集估算该容差下的经验假阳性率；这些数据集中未注入任何误差特征。我们将此估算值定义为：

$$\widehat{\alpha} = \frac{\text{Number of noise-only datasets with } \rho > \tau}{\text{Total number of noise-only datasets}} \tag{16}$$

其中， $\tau = d_2(N)\sigma$ 表示选定的参考容差， ρ 为计算得到的抛物性。该数值表示在模拟数据中不存在任何特征时，测试检测到超过容差的偏差的频率。

6.4 算法实现

本节介绍已实现的四种算法，不深入讨论代码；代码可在代码库 https://github.com/mmednav/trough_sim 中找到。算法 1 和 2 对应定向情形；算法 3 和 4 对应非定向情形。

算法1 通过线性规划求定向抛物性

要求： 点 $P = (x_k, y_k)_{k=1}^{n}$, $n \geq 3$
确保： 宽度 ρ^* 和拟合系数 (a, b, c)

$L \leftarrow$ 凸包 P 的顶点 ▷ 仅用于下边界的候选点
$U \leftarrow P$ ▷ 每个点都约束上边界
$u_k \leftarrow (x_k - \bar{x}) \,/\, \max_j |x_j - \bar{x}|$ ▷对于矩阵条件数，抛物性保持不变
重复
  求解变量（a， b， c， t），
  最小化 t
  满足 $a u_k^2 + b u_k + c \;\leq\; y_k$ 对于 $k \in L$,
  $y_k \;\leq\; a u_k^2 + b u_k + c + t$ 对于 $k \in U$,
  a, b, c 自由， $t \geq 0$
  如果 该程序无界或不可行 **则返回** 失败
  结束 if
  如果 $a \leq 0$ **则** $L \leftarrow P$ ▷ 假定凸包缩减为 $a > 0$；因此将其恢复为 L
  结束如果
直到 $a > 0$ 或 $L = P$
将 (a, b, c) 映射回原始横坐标
返回 $\rho^* = t$ 并（a, b, c）

对于 非定向问题，我们给出了所提出的两种方法的算法表述 d.

算法2 通过雷梅兹交换实现定向抛物性

要求： 点 $(x_k,\ y_k)_{k=1}^{n}$，$n \ge 4$；容差 tol，最大迭代次数 M
确保： 宽度 ρ^*、抛物线的参数及其四个支撑点
按横坐标对点进行排序；**警告** 任意两点重合的情况　　假定▷个不同的横坐标
$u_k \leftarrow (x_k - \bar{x}) \,/\, \max_j |x_j - \bar{x}|$　　▷ 对于矩阵条件数，抛物性保持不变
$\mathcal{R} \leftarrow$ 在 $1,\dots,n$ 中等间距的四个索引；　　$\sigma_j \leftarrow (-1)^j$
对于 $i = 1, \dots, M$ **do**
　求解 $\begin{pmatrix} u_j^2 & u_j & 1 & \sigma_j \end{pmatrix}_{j\in\mathcal{R}} (a,\ b,\ c,\ h)^{\top} = (y_j)_{j\in\mathcal{R}}$　　▷ 4×4；$\mathcal{R}$ 上的残差为 $\pm h$
　$e_k \leftarrow y_k - (a u_k^2 + b u_k + c)$ 对所有 k；$k^* \leftarrow \arg\max_k |e_k|$
　如果 $|e_{k^*}| \le |h|(1 + \mathrm{tol}) + \mathrm{tol}$ **则退出**　　▷没有点超过参考水平
　结束条件判断
　将 k^* 换成 $\mathcal{R}$，保持符号交替
结束循环
返回 $\rho^* = 2|h|$、映射回 x 的系数以及 $\mathcal{R}$

算法 3 通过旋转搜索确定无向抛物性

要求： 点 $P = (x_k,\ y_k)_{k=1}^{n}$；上界 $\varphi_{\max}$；网格大小 N
确保： 宽度 ρ_{rot} 以及达到该宽度的方向 φ
对于 $i = 1, \dots, N$ **do**
　$P_i \leftarrow \{(\ x_k \text{余弦}\ \varphi_i - y_k \text{正弦}\ \varphi_i,\ x_k \text{正弦}\ \varphi_i + y_k \text{余弦}\ \varphi_i\ )\}_k$
　$\rho_i \leftarrow$ P_i的定向抛物性，由算法2计算
结束循环
$j \leftarrow \arg\min_i w_i$
如果 $j \in \{1, N\}$ **则警告**：极小值点位于网格末端　　▷ $\varphi_{\max}$ 过小
结束条件判断
返回 $\rho_{\mathrm{rot}} = w_j$ 和 $\varphi = \varphi_j$

算法4 通过线性化求无向抛物性

要求： 点 $P = (x_k, y_k)_{k=1}^{n}$；名义抛物系数 a, b；信赖域半径 ε；容差 C_a, C_b
确保： 宽度 ρ_{lin} 和失准 δ
$r_k^0 \leftarrow y_k - a x_k^2 - b x_k$　　▷名义抛物线处的残差
$u_k \leftarrow x_k + 2a\, x_k y_k + b\, y_k$　　▷对旋转的一阶敏感度
求解，变量为（δ、Δa、Δb、c、t），
　最小化 t
　约束条件为 $c \le r_k^0 + \delta u_k - \Delta a\, x_k^2 - \Delta b\, x_k \le c + t,\quad k = 1, \dots\dots, n,$
　$|\delta| \le \varepsilon,\quad |\Delta a| \le C_a\varepsilon,\quad |\Delta b| \le C_b\varepsilon,\quad t \ge 0$
如果程序不可行或无界**则返回**失败
结束如果
返回 $\rho_{\mathrm{lin}} = t$ 和 δ

7 结果

本节将介绍仿真的结果。我们创建了一个包含310个抛物槽的数据集，并在选定的一部分槽体中注入误差。首先，我们比较两种定向抛物性算法的性能，然后根据各自的轴向条件应用非定向启发式方法。最后，我们提出一个实验阈值，据此可将槽体分类为有缺陷和无缺陷。

所用数据集的特征见下表：

错误类型	振幅（毫米）	重复样本	集热器
None	—	—	150
Tilt	8, 12, 14, 16, 18, 21, 25, 32	10	80
Dent	8, 12, 14, 16, 18, 21, 25, 32	10	80
总计			**310**

表 2：模拟数据集的特征，显示每种振幅大小对应的重复样本数。

为了比较两种误差，我们将各自的振幅定义为面板表面偏离其名义位置的最大值。对于凹痕，这一数值是凹坑中心的深度；对于倾斜，则是面板最远点的位移。这些振幅可作为近似参考值，而仿真会对其稍作调整，以避免集热器完全相同。

请注意，由于我们的数据是仿真生成的，因此我们知道理想抛物线原始的对称轴。我们将其称为名义轴。为了比较各种算法的性能，我们将系统随机旋转一个角度 δ，并重新计算数据，使其位于随机失准的轴上。为了区分不同的算法，我们将采用表 3 中的记法：

	存在失准	计算方式
ρ_0	No	算法2
ρ_δ	是，由 δ 计算	对未对准数据运行算法2
ρ_{rot}	是，由 δ 计算	算法 3
ρ_{lin}	是的，通过 δ	算法4

表 3：我们在结果中比较的四种宽度。

我们将在下一小节说明为何 ρ_δ 和 ρ_0 由算法2而非算法1计算。

7.1 线性规划求解器与 Remez 的性能

对于我们的线性规划，我们选用了通过 SciPy 的线性规划求解器实现的 HiGHS 方法 [31], 。如上一节所述，我们比较了 310 个集热器，每个槽体生成的点云平均包含 83 386 个点。

在本小节中，我们始终假设方向已知。我们比较算法1和算法2解决定向问题的成本。

最大相对差异	2.5×10^{-14}
平均相对差异	3.8×10^{-15}
线性规划	0.448 秒，15 次单纯形迭代
雷梅兹算法	0.0149 秒，7 次交换

表4：两种方法在实验中每个集热器点云上的表现。

如表4所示，交换算法的速度最终约为使用 HiGHS 求解线性规划的30倍；两者对抛物性的判断一致，相对差异至多为2.5×10^{-14}。

	ρ (毫米)	最大 $\lvert\Delta\rvert/\rho$	迭代次数 (Rz)	t_{LP} (秒)	t_{Rz} （秒）
噪声变化， $n = 83\,400$ 点					
$\sigma = 0.5$ 毫米	4.32	3.6×10^{-14}	7.2	0.395	0.011
$\sigma = 1$ 毫米	8.91	1.8×10^{-10}	8.0	0.376	0.013
$\sigma = 2$ 毫米	17.05	2.5×10^{-13}	8.2	0.375	0.012
$\sigma = 3$ 毫米	26.00	1.6×10^{-10}	8.0	0.374	0.015
$\sigma = 5$ 毫米	42.42	1.2×10^{-14}	6.8	0.400	0.012
$\sigma = 10$ 毫米	86.43	1.7×10^{-15}	8.0	0.397	0.011
点云大小发生变化，$\sigma = 3$ 毫米					
$n = 5\,000$	21.24	6.6×10^{-14}	6.8	0.021	0.003
$n = 25\,000$	22.53	3.0×10^{-10}	8.2	0.086	0.005
$n = 75\,000$	25.01	2.7×10^{-14}	6.5	0.358	0.010
$n = 150\,000$	26.50	7.6×10^{-15}	9.0	0.753	0.029

表5：两种方法在噪声和点云大小变化下的比较，展示两者的平均耗时。

表5对不同噪声幅度和点云大小下的两种方法进行了比较。整体情况没有变化。在整个过程中，两者的结果一致，误差介于 10^{-10} 和 10^{-15} 之间。可以观察到，只有线性规划的计算成本会随着点的数量增加而显著上升，而交换算法的迭代次数增长缓慢。这些结果正是我们选择交换算法作为旋转搜索基准算法的原因，具体定义见第3节。

7.2 无方向算法

首先，我们展示旋转搜索（算法 3）的结果。在图10中，我们展示了三个随机收集器上的结果。可以观察到一个明显的最小值，以及其两侧的线性行为。

图11显示，尽管名义参考系的角度注入存在变化，旋转搜索对于非缺陷槽仍能保持一致的性能。正如预期， ρ_δ 的值是在固定对称轴上计算抛物性的结果，会随 δ 增大；而 ρ_{rot} 则表现出稳定的性能。

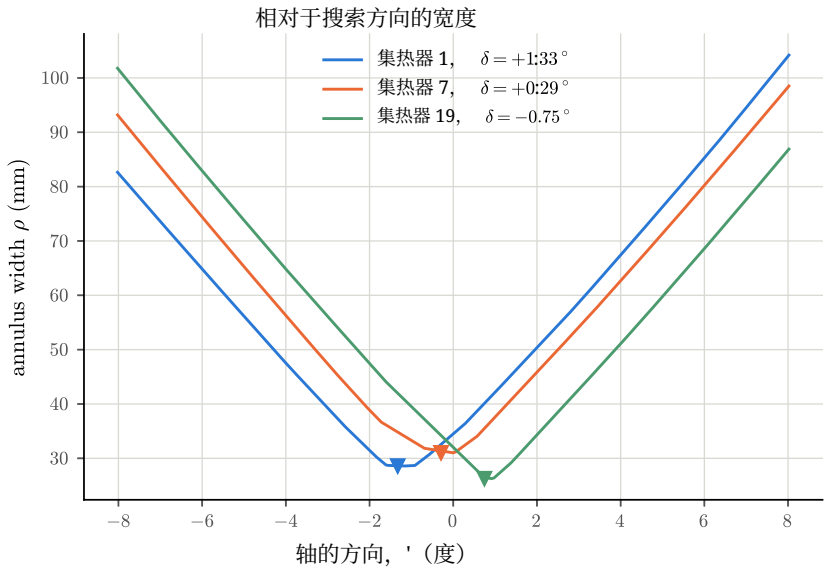


图10：三个选定集热器的角度抛物性结果及达到的最小值。零点位于名义对称轴处。

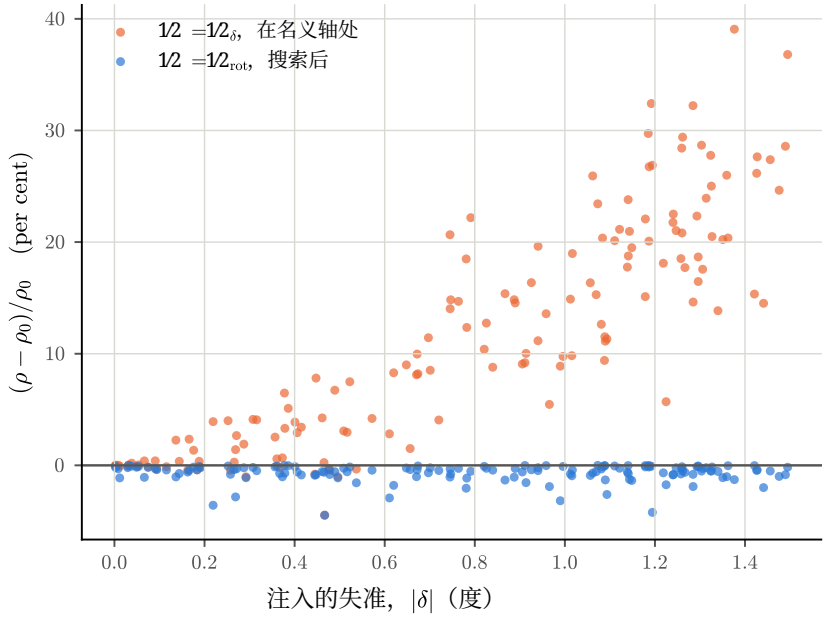


图11：对150个无缺陷集热器进行旋转搜索得到的结果，与注入的失准量相对照。

图12比较了两种无方向算法的性能。在右侧的图中，我们可以看到，线性化算法对倾斜误差很敏感，测得的抛物性数值也高于我们的旋转搜索算法。宽度越大，这种差异就越明显。

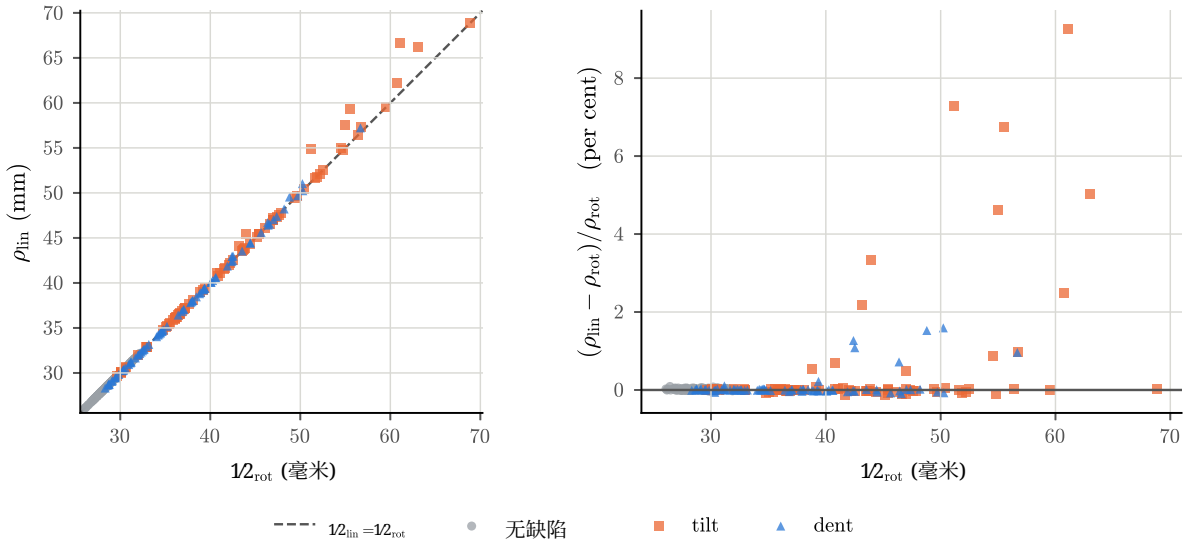


图12：左：两种算法对每个集热器计算出的抛物性度量图。数据点根据表 2 标记。右：线性化得到的抛物性相对于旋转搜索结果的偏差。

最后，表6显示了两种无方向算法的平均宽度，以及名义轴处的定向抛物性。值得注意的是，我们的无方向近似值在310个集热器中，没有任何一个返回的宽度超过 ρ_0，只有其中8个例外；在线性化结果中，宽度超过该值的幅度不超过0.01 毫米。

这种不等式的方向符合预期。无向抛物性是在各个方向上取最小值，而名义轴就是其中一个方向，因此连续最优值不应超过 ρ_0。

	ρ_0	ρ_δ	ρ_{rot}	ρ_{lin}	$\rho_0 - \rho_{\mathrm{rot}}$
无缺陷（150）	29.10	32.48	28.91	28.91	0.191
凹痕（80）	37.82	39.51	37.09	37.13	0.731
倾斜（80）	45.44	46.58	43.05	43.35	2.384
全部（310）	35.57	37.93	34.67	34.76	0.896

表6：按照注入的缺陷并采用表 3 的表示法得出的平均宽度（单位：毫米）。最后一列是旋转搜索相较于名义轴所提升的幅度。

此表还显示，倾斜集热器的余量最大。倾斜在一定程度上无法与整个集热器的失准区分，因此，允许自由选择方向的搜索可以吸收部分缺陷，而当轴固定在标称位置时则无法做到这一点。

7.3 阈值评估

本节将抛物性转化为一项检验：固定容差 τ，并在 $\rho > \tau$ 时判定集热器有缺陷。我们首先比较公式 (15) 给出的理论容差与我们自己的数据所示的容差。接着，我们测量该检验对不同误差振幅的灵敏度，最后给出 ROC 曲线和混淆矩阵。

在全文中，我们将集热器没有注入误差作为零假设，因此偏离理想抛物柱面的因素只有测量噪声和面板轻微的基线倾斜。表 2 中没有误差的 150 个集热器构成了我们从该假设中抽取的样本。

7.3.1 无缺陷集热器的抛物性

无缺陷集热器的抛物性并非为零。环带必须包含每个测量点，因此其宽度本质上就是测量噪声的极差。首先要问的是，我们推导出的理论容差能否对其作出预测。对于 150 个完好集热器，我们测得 ρ_0，均值为 29.10 毫米，标准差为 1.42 毫米；没有集热器低于 26.10 毫米或高于 32.80 毫米。在点云大小中位数为 83 378 个点、$\sigma = 3$ 毫米时，根据式 (15) 计算得到的容差为 $d_2(N) = 8.72$，因此为 $\tau = 26.17$ 毫米。比较结果见图 13。

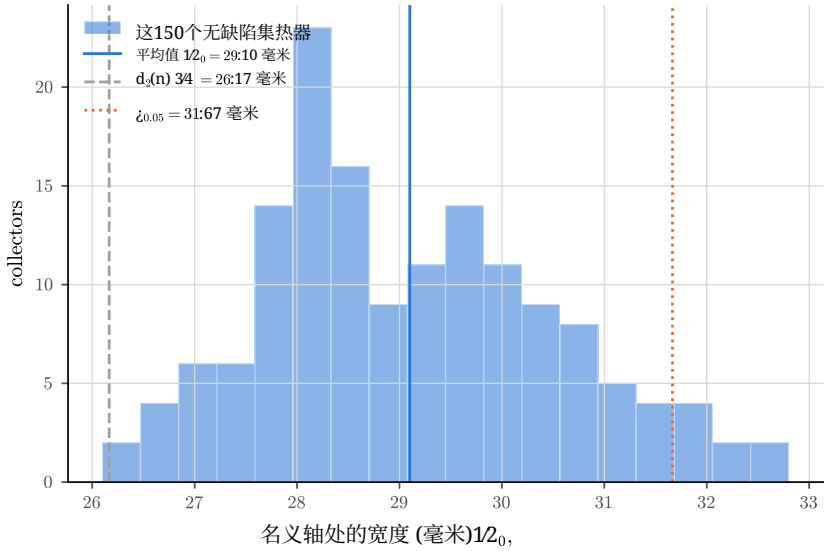


图 13：150 个无缺陷集热器的抛物性，以及分布均值、理论容差 $d_2(N)\sigma$ 和经验容差 $\tau_{0.05}$。

因此，零分布的均值超过了理论容差，而且其中除一个集热器外，其余每个集热器都超过了该容差。在此容差下计算经验假阳性率 (16)，得到 $\hat{\alpha} = 149/150 = 0.993$，这意味着该检验会拒绝几乎所有无缺陷集热器。作为一条决策规则，它毫无用处，这就是我们改为根据数据校准 τ 的原因。

分布　差异表明，用于推导（15）的假设不适用于我们的残差。Th　e

恒等式 $\mathbb{E}[R_N] = d_2(N)\sigma$ 假设误差独立同分布且服从正态分布，而我们的残差有两处偏离了这一模型。

我们在模型中首先发现，测距噪声会沿每条射线投影到垂直残差上，因此其有效标准差取决于射线方向和局部镜面斜率。此外，基线倾斜会在每块面板上引入一致的偏差，而不是彼此独立的逐点误差。总的来说，这表明差异主要源于残差的空间结构，而非其整体方差。因此，我们选择采用经验容差。

7.3.2 经验容差

我们改为将 τ 设为完好集热器的第 95 百分位数，使零假设样本的假阳性率为 5%。由此得到的阈值为：

$$\tau_{0.05} = 31.67 \text{ mm}. \tag{17}$$

表 7 将该数值与整个数据集上的理论容差进行了比较。

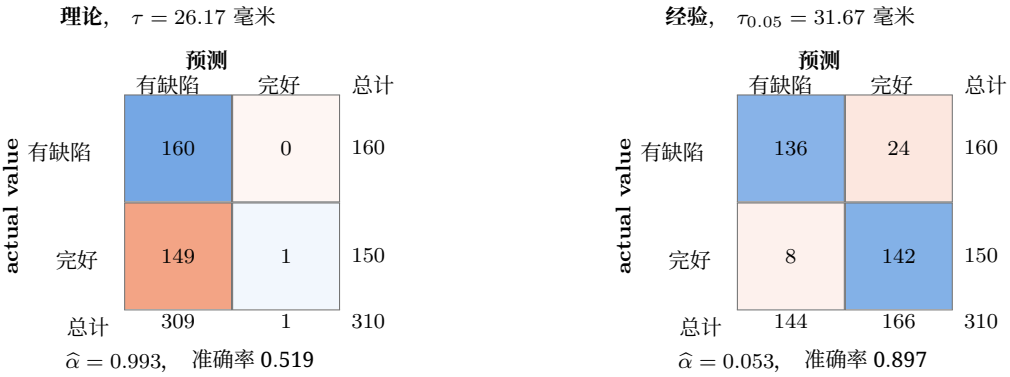


表 7：在 310 个集热器上针对两个阈值计算的混淆矩阵，计算基于 ρ_0。

理论容差可以检出所有缺陷，但这几乎是通过将每个集热器都判定为有缺陷来实现的，正如我们此前在图 13 中所观察到的。这意味着，其看似完美的检出率是以不可接受的高假阳性率为代价的。另一方面，我们计算出的经验容差实现了更好的平衡：保留了大多数缺陷，同时正确判定大多数完好集热器。请注意，假阳性表现已由我们的阈值预先决定，因为我们是在同一组集热器上计算混淆矩阵的。

7.3.3 对误差振幅的灵敏度

漏检的缺陷在设计中的分布并不均匀。表 8 和图 14 显示了 $\tau_{0.05}$ 处每种振幅和机制对应的检出比例。振幅同时以毫米和相对于测距噪声极差 σ的形式表示，从而能够比较针对两类受测缺陷的不同仪器。

振幅（毫米）	A/σ	Tilt	Dent
8	2.67	40%	10%
12	4.00	100%	50%
14	4.67	100%	80%
16	5.33	100%	90%
18	6.00	100%	90%
21	7.00	100%	100%
25	8.33	100%	100%
32	10.67	100%	100%

表 8：按振幅和机制统计，在 $\tau_{0.05}$处检测到的十个重复样本所占比例。

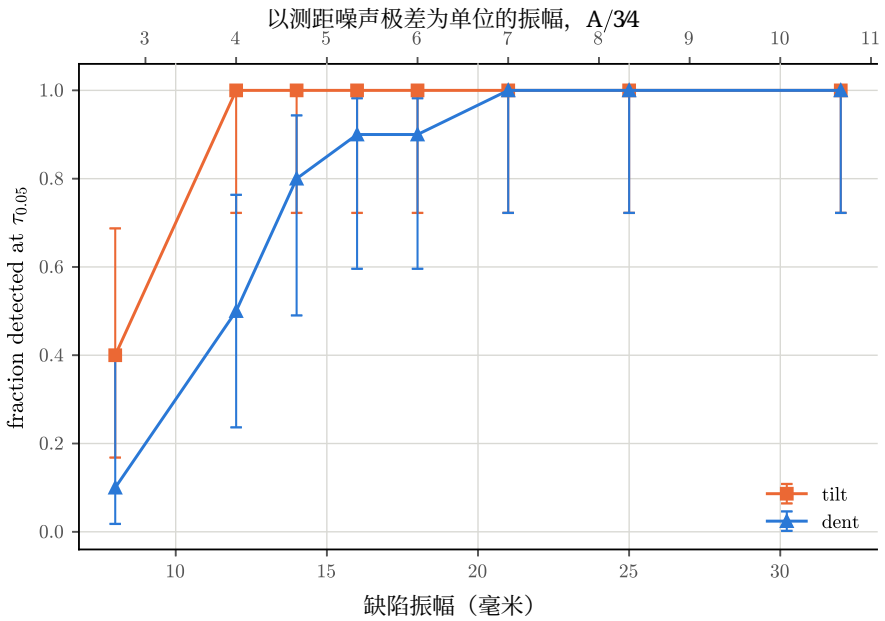


图 14：在 $\tau_{0.05}$ 处检测到的集热器比例与注入误差振幅的关系，误差线为 95% 威尔逊区间。上轴给出以测距噪声极差为单位的振幅。

随着振幅增加，两种机制都变得能够可靠检测，但与凹陷相比，倾斜始终能在更低的振幅下被检测到。这种差异在中等振幅下尤其明显，而在设计的较高端，两种机制均无一例外地被检测到。

其原因在于几何因素，而非统计因素。倾斜会使整个面板发生旋转，从而产生跨越整个面的位移。相比之下，我们的凹痕是局限在固定半径圆盘内的截断高斯分布。由于抛物性衡量的是包含整个曲面的环带宽度，因此检测取决于其偏离最佳可容许抛物线的最大程度。对于相同的名义振幅，影响曲面更大部分的机制将导致更大的偏离。

7.3.4 ROC 曲线

图 15 显示了三个估计量的 ROC 曲线，并标出了 $\tau_{0.05}$ 的工作点。由于这些估计量产生的宽度不同，因此将每个估计量作为评分进行评估。

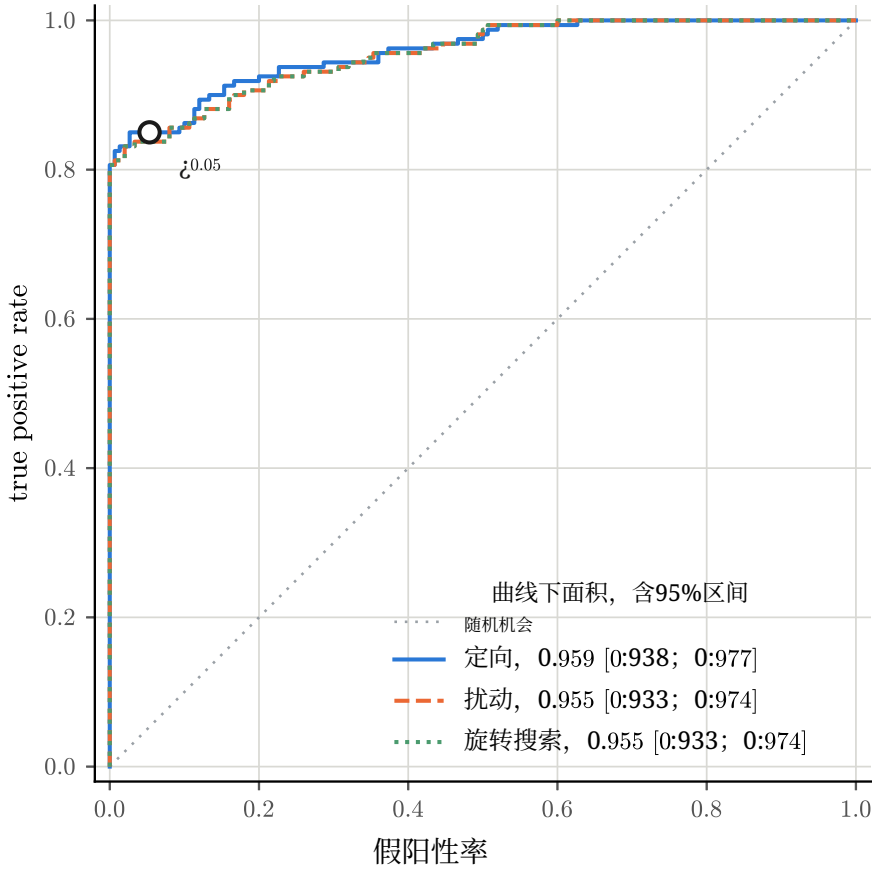


图 15：三个估计量的 ROC 曲线及其面积和 95% 自助法区间。标记的点是 $\tau_{0.05}$ 的工作点。

三种估计量均达到相近的高面积，约为 0.96，这表明对称轴的错位及其校正都不会显著影响判别能力。将不同机制分开来看，倾斜比凹陷更容易区分，这与检测曲线中观察到的排序一致，

检测曲线。

这些结果受到两个关键因素的影响。首先，面积取决于实验设计中的振幅分布。该设计在最小振幅和最大振幅处包含数量相等的集热器，因此这些面积可用于比较三种估计量，但不能直接用于比较误差振幅不同的实验。其次，面积衡量的是评分将有缺陷集热器排在完好集热器之前的能力，但它无法确定参考阈值 τ；参考阈值是通过公式 (17) 进行经验设定的。

7.4 局限性

我们的实验设置有若干局限性需要考虑：

1. 仿真引擎未考虑镜面的镜面反射特性。尽管商业软件可以考虑这一因素，但通过无人机应用获取完整扫描（例如 [8]，所示的正面三维扫描）仍可能受到限制，因此可能更倾向于采用地面激光扫描，因为前者获取的点云可能存在异常。无论如何，这里展示的抛物性测量仍然适用，因为这两种方法都能生成抛物槽几何形状的高精度三维模型。

2. 由于阈值直接取决于激光扫描的精度，因此并非所有缺陷都能被检测到。我们通过研究不同振幅的误差，尝试体现这一点。

3. 值得注意的是，我们采用的是严格的二维理想化，而太阳能槽式集热器实际上是抛物柱面。因此，某些类别的误差最初未纳入我们的案例研究，例如轴向变形或翘曲。

4. 按照这一思路，我们对点云进行二维投影时，依赖于关于轴方向精度的某些假设。否则，抛物性可能会显著增大，因为任何其他角度都会使物体的感知宽度增加。不过，通过更精细的分段评估可以减小这种近似带来的误差，也就是说，按固定宽度评估截面轮廓，而不是评估整个槽体。

8 结论与未来研究

本文提出了一种新颖的几何框架，专用于聚光太阳能（CSP）镜场中的形状缺陷检测。通过形式化定义抛物性这一概念，我们在计算几何与太阳能热利用基础设施的光学质量管理之间建立了正式的桥梁。我们将这一领域特有的对齐挑战表述为一类新的优化问题，并提出了精确算法和近似算法，以高效解决这些问题。

已知轴的方向时，该问题是一个线性规划。我们提出了一种交换算法，其求解速度比通用求解器快约三十倍，同时计算结果与其一致，精确到

十四位。当方向未知时，我们证明了均匀角度采样通常无法达到 $(1+\varepsilon)$-近似（定理 5.6），并提出了两种启发式方法：旋转搜索和线性化，可弥补坐标系失准造成的宽度损失。

随后，我们在 310 个模拟集热器上评估了抛物性作为缺陷分类器的表现。根据简单噪声模型预测的容差被证明毫无用处，它将 150 个无缺陷集热器中的 149 个判定为有缺陷，因此我们改为根据数据进行校准。该容差能够区分有缺陷和完好集热器，ROC 曲线下面积约为 0.96；由于几何原因而非统计原因，它对低振幅倾斜的检测能力优于对凹痕的检测能力。因此，我们证明，只要根据完好集热器校准容差，抛物性就可以作为缺陷检测的实用依据。

这项开创性研究引出了若干未来研究方向：

抛物线宽度的其他定义。本研究采用的抛物线宽度概念要求两个抛物柱面共用一条对称轴，且其中一个是另一个的平移，宽度则简化为沿该轴测得的距离。这只是若干种可能度量方式中的一种，而度量的选择会从根本上影响由此产生的优化问题。根据所依据的度量，宽度可以有许多种定义：例如，度量可以基于准线之间的距离，也可以基于抛物线之间的距离。对其他定义进行系统研究仍有待开展。对于每一种候选定义，关键问题在于：由此产生的问题是否存在高效的精确算法；其组合结构（例如接触点可能形成的构型）能否得到刻画；以及能否推导出具有质量保证的近似方案。确定哪些定义能导出易处理的问题，以及由此得到的解在实践中有何差异，是一个兼具理论和应用价值的开放问题。

算法扩展。本文提出的精确方法和近似方法都可以改进。尤其是，如何为最小抛物环带问题开发具有可证明质量保证的近似方案，仍有待研究。

高维及广义形式。本研究聚焦于平面上的抛物环。将抛物性的概念扩展到三维抛物柱面和一般圆锥曲线族，可拓宽该框架在其他集热器几何结构中的适用范围，包括定日镜和碟式系统。

与真实传感流程集成。本实验研究所用的合成数据集由仿真生成。利用运行中的聚光太阳能电站的测量数据（例如，无人机成像系统获取的数据）验证所提出的算法，将是迈向实际部署的重要一步。在此背景下，测量不确定性与基于抛物性的缺陷分类之鲁棒性之间的相互作用，值得进行系统研究。

基于学习的混合方法。本文开发的几何框架与近期应用于聚光太阳能电站形状缺陷检测的深度学习方法相辅相成。将基于抛物性的方法的可解释性和可证明属性，与学习模型的适应性相结合，例如，将抛物性用作具有物理依据的特征，或用作学习

处理流程中的约束，是实现实时大规模检测的一条有前景的方向。

更广泛的应用。最后，作为一种几何概念，抛物性可能在聚光太阳能之外的领域发挥作用，只要曲面的焦点—准线结构具有物理意义。例如，在光学仪器、天线及其他反射系统的设计和质量控制中。

致谢。 本研究部分获得以下资助：由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 和欧盟下一代欧盟/复苏、转型与韧性计划资助的 PID2024-159968OB-I00 和 TED2021- 129182B-I00 项目。

参考文献

[1] Juan Carlos Roca Reina 等：《清洁能源技术观测站：欧盟太阳能热利用——*2025*年技术开发、趋势、价值链与市场现状报告》。技术报告。JRC143924。欧盟出版局，2025年。 DOI: 10.2760/8841716.[2] Antonio Lecuona-Neumann 和 Antonio Famiglietti。“线性聚光太阳能集热器的直接燃气加热：用于发电和工业过程热生产的应用与挑战”。载于：*WIREs*能源与环境12.4（2023年），e471。 DOI: 10.1002/wene.471.[3] 阿尔梅里亚太阳能平台 – 能源、环境与技术研究中心。照片档´案。 URL: https://www.psa.es/es/ multimedia/fotos.php（访问于2026年11月3日）。[4] Klaus Pottler 等。“摄影测量：太阳能聚光器及其组件几何分析的有力工具”。载于：太阳能工程杂志127（2005年2月），第94–101页。DOI: 10.1115/ISEC2004-65117.[5] Francisco de As´ís L´opez 等。“利用地面激光扫描对槽式集热器进行几何优化：一种新统计评估方法的可行性分析”。载于：测量47（2014年），第92–99页。 ISSN: 0263-2241。 DOI: https://doi.org/10.1016/j.measurement.2013.08. 055. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263224113004247.[6] Santiago Sala manca 等。“利用激光扫描仪和图像处理评估抛物槽式集热器的几何特性与能源效率”。载于：可再生能源134（2018年11月）。 DOI: 10.1016/j.renene.2018.11.014.[7] Gabriele Guidi 等。“基于激光扫描仪的三维数字化：抛物槽式集热器反射面形状测量”。载于：能源13（2020年10月），第1–21页。 DOI: 10.3390/en13215607.[8] Nelson Ponce Junior 等。“通过三维扫描和接收管图像分析对抛物槽式集热器的柔性薄膜镜面进行几何表征”。载于：*SolarPACES*会议论文集3（2025年11月）。 DOI: 10.52825/solarpaces.v3i.2323。 URL: https://www.tib-op.org/ojs/index.php/solarpaces/article/view/2323。

[9] 郑鹏、郭宏伟和张琳娜。“基于新几何产品规范的圆柱度误差计量方法”。载于：*SPIE*国际光学工程学会会议录7375（2008年11月）。 DOI: 10.1117/12.839314.[10] Sariel Har-Peled 和 Kasturi R Varadarajan。“通过线性化进行近似形状拟合”。载于：第*42*届*IEEE*计算机科学基础研讨会论文集。IEEE。2001年，第66–73页。[11] ISO中央秘书处。几何产品规范（*GPS*）—圆柱度—第*1*部分：圆柱形状的术语和参数。标准 ISO 12180-1:2011。瑞士日内瓦：国际标准化组织，2011年。[12] 孙传志等。“用于阶梯轴圆柱度和同轴度的圆柱轮廓测量方法”。载于：《国际先进制造技术杂志》111（2020年12月），第1–12页。 DOI: 10.1007/s00170-020-06296-5.[13] 张向超、姜向前和 Paul J. Scott。“一种基于坐标测量数据可靠评定圆柱度和圆锥度最小区域的方法”。载于：《精密工程》35.3（2011年），第484–489页。 ISSN: 0141-6359。 DOI: https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2011. 03.002. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141635911000420.[14] Pankaj K Agarwal、Boris Aronov 和 Micha Sharir。“最小宽度圆柱壳的精确算法与近似算法”。载于：《离散与计算几何》26.3（2001年），第307–320页。[15] G. T. Anthony 等。切比雪夫最佳拟合几何元素。技术报告。NPL报告DITC 221/93。英国泰丁顿：英国国家物理实验室，1993年。[16] Gyula Hermann 和 Gy¨orgy Hermann。“计算几何在坐标测量中的应用”。载于：*2015*年*IEEE*第*10*届应用计算智能与信息学国际研讨会（纪念大会）。2015年，第511–516页。 DOI: 10.1109/SACI.2015.7208258.[17] 张向超、姜向前和 Paul J. Scott。“二次曲面形状误差的最小区域评定”。载于：《精密工程》35.2（2011年），第383–389页。 ISSN: 0141-6359。 DOI: https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2010.12.005。 URL: https://www.sciencedirect. com/science/article/pii/S0141635910001856.[18] S. Har-Peled 和 K.R. Varadarajan。“通过线性化进行近似形状拟合”。载于：第*42*届*IEEE*计算机科学基础研讨会论文集。2001年，第66–73页。 DOI: 10.1109/SFCS. 2001.959881.[19] Ezequiel L´opez-Rubio 等。“一种快速稳健的抛物线几何拟合方法”。载于：《模式识别》84（2018年），第301–316页。 ISSN: 0031-3203。 DOI: https://doi.org/10.1016/ j . patcog . 2018 . 07 . 019。 URL: https: / / www . sciencedirect. com / science / article/ pii / S003132031830253X。

[20] R.T. Farouki 和 C.A. Neff。《平面偏置曲线的代数性质》。载于：计算机辅助几何设计 7.1（1990），第 101–127 页。 ISSN：0167-8396。 DOI：https://doi.org/10.1016/ 0167 - 8396(90) 90024 - L。 URL：https : / / www . sciencedirect . com / science / article / pii / 016783969090024L。[21] Elliott Ward Cheney。《逼近理论导论》。纽约：McGraw-Hill，1966。[22] E. Ya. Remez。《关于逼近多项式的确定》。载于：哈尔科夫数学学会通讯 10（1934），第 41–63 页。[23] Micha Sharir。《Davenport-Schinzel 序列及其几何应用》。载于：《计算机图形学与 CAD 的理论基础》。施普林格，1988，第 253–278 页。[24] Olivier Devillers 和 Franco P. Preparata。《名义圆柱点集圆柱度的评估》。载于：第十一届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集。工业与应用数学学会，2000，第 518–527 页。 DOI：10.1145/338219.338601。[25] Nimrod Megiddo。《维数固定时的线性时间线性规划》。载于：ACM 杂志 31.1（1984），第 114–127 页。[26] Qian-Yi Zhou、Jaesik Park 和 Vladlen Koltun。《Open3D：用于三维数据处理的现代库》。载于：CoRR abs/1801.09847（2018）。 DOI：10.48550/ARXIV.1801.09847。arXiv：1801.09847。URL：https://doi.org/10.48550/arXiv.1801.09847。[27] Eckhard L¨upfert 等。《Euro槽式集热器认证完成——PSA 性能测试结果》。载于：ISES太阳能世界大会 2001 和 2003 论文集。2003 年 6 月。 URL：https: //elib.dlr.de/99768/。[28] Halil M. G¨uven 和 Richard B. Bannerot。《发展中国家抛物槽式集热器光学设计误差容限的确定》。载于：太阳能 36.6（1986），第 535–550 页。 ISSN：0038-092X。 DOI：https : / / doi . org / 10 . 1016 / 0038 - 092X(86) 90018 - 6。 URL：https : / / www . sciencedirect.com/science/article/pii/0038092X86900186。[29] G.K. Manikandan、S. Iniyan 和 Ranko Goic。《提升抛物槽式集热器的光学效率和热效率——综述》。载于：应用能源 235（2019），第 1524–1540 页。 ISSN：0306-2619。 DOI：https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2018.11.048。 URL：https://www. sciencedirect.com/science/article/pii/S0306261918317537。[30] L. H. C. Tippett。《正态总体中极端个体与样本极差》。载于：Biometrika 17.3–4（1925），第 364–387 页。 DOI：10.1093/biomet/17.3-4.364。[31] Q. Huangfu 和 J. A. J. Hall。《对偶修正单纯形法的并行化》。载于：数学规划计算 10.1（2018），第 119–142 页。 DOI：10.1007/s12532-017-0130-5。