arXiv:2611.30403v1 [math-ph] 23 Nov 2026

量子行走与共形映射

Fedor Kuyanov 牛津大学

Michael Drmota 维也纳工业大学

Mikhail Skopenkov 阿卜杜拉国王科技大学

Alexey Ustinov 国立高等经济大学

摘要

我们研究电子沿直线运动的最基本离散模型，即费曼跳棋、量子游走，或具有特殊复权重的六顶点模型，并给出整个 xt 平面上的波函数一致渐近公式。除了众所周知的艾里函数所描述的振荡状态与指数衰减状态之间的转变外，我们还观察到，当电子速度接近光速时，由伽马函数控制的第二种转变。我们利用与底层积分表示相关的共形映射，证明了两个可得出涉及艾里函数和伽马函数的一致渐近公式的一般定理。这些定理也适用于其他若干情形。

关键词和短语。 费曼棋盘、量子游走、六顶点模型、半经典近似、艾里现象、伽马现象

MSC2010： 81T25，41A60，30C20，81T40，81Q05，30E20。

1 引言

数学领域最主要的开放问题之一，是对量子场论进行严格构造。例如，具有质量间隙的四维杨–米尔斯理论就是千禧年大奖难题之一。一种标准方法是构造性场论，它通常将连续理论构造为离散理论的极限 [14]。这涉及两个极限：当离散化步长趋于零时的连续极限，以及当系统大小/演化时间趋于无穷时的无限体积/大时间极限。在本项工作中，我们为电子沿直线运动的最基本离散模型——称为费曼跳棋、量子行走或具有特殊复权重的六顶点模型 （图1和图2）——找到了统一的大时间渐近公式。参见基础引言 [32]和综述 [19, 20, 38, 41]。

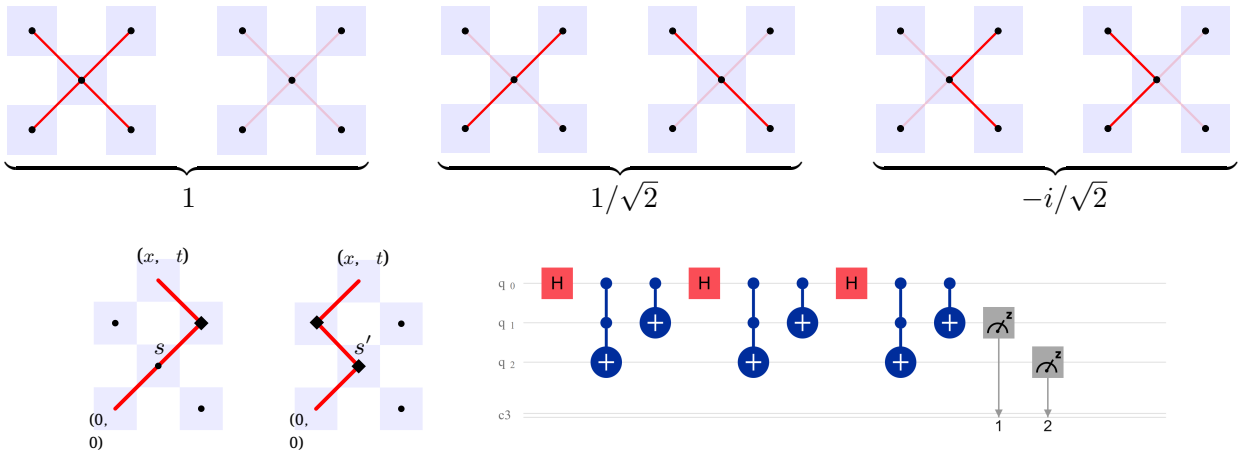
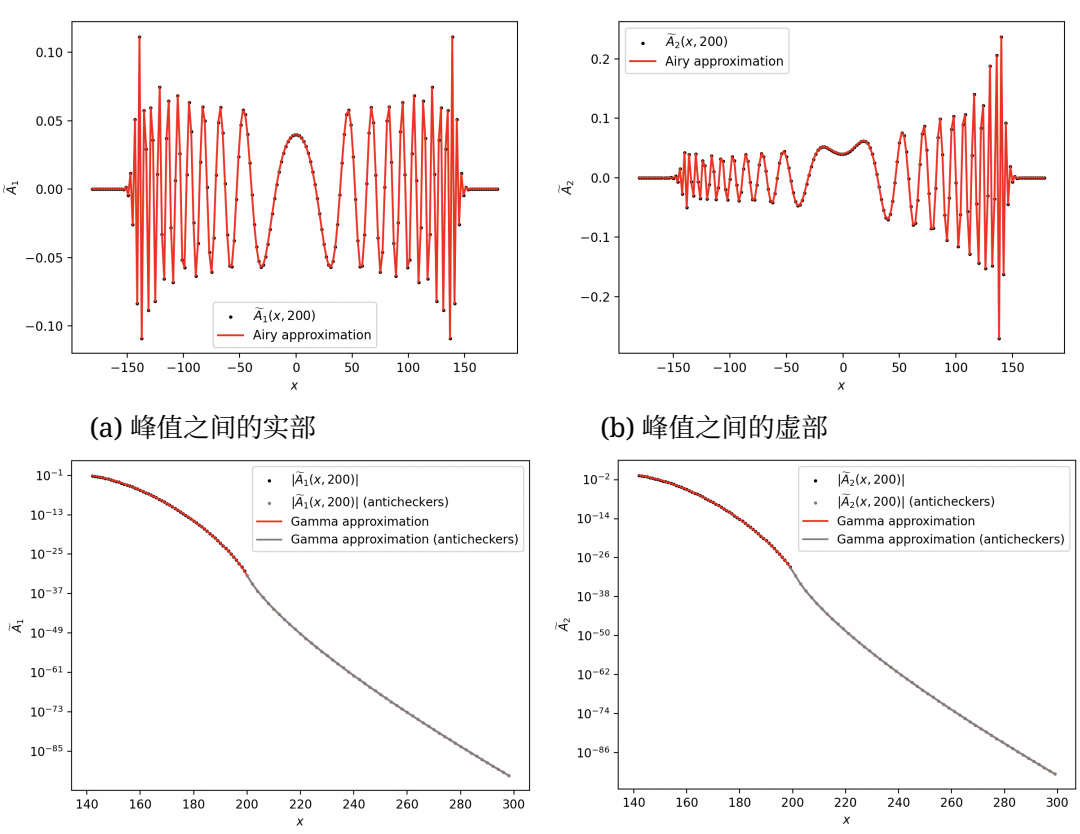


图 1：量子游走（即哈达玛行走）的几种表示方式：（上）六顶点模型，配置下方标出了复权重；（左下）对路径求和；（右下）用量子电路语言描述的量子算法。详情请参见第 2.1 节和 [38,图 6] 。



(a) 峰值之间的实部　　(b) 峰值之间的虚部

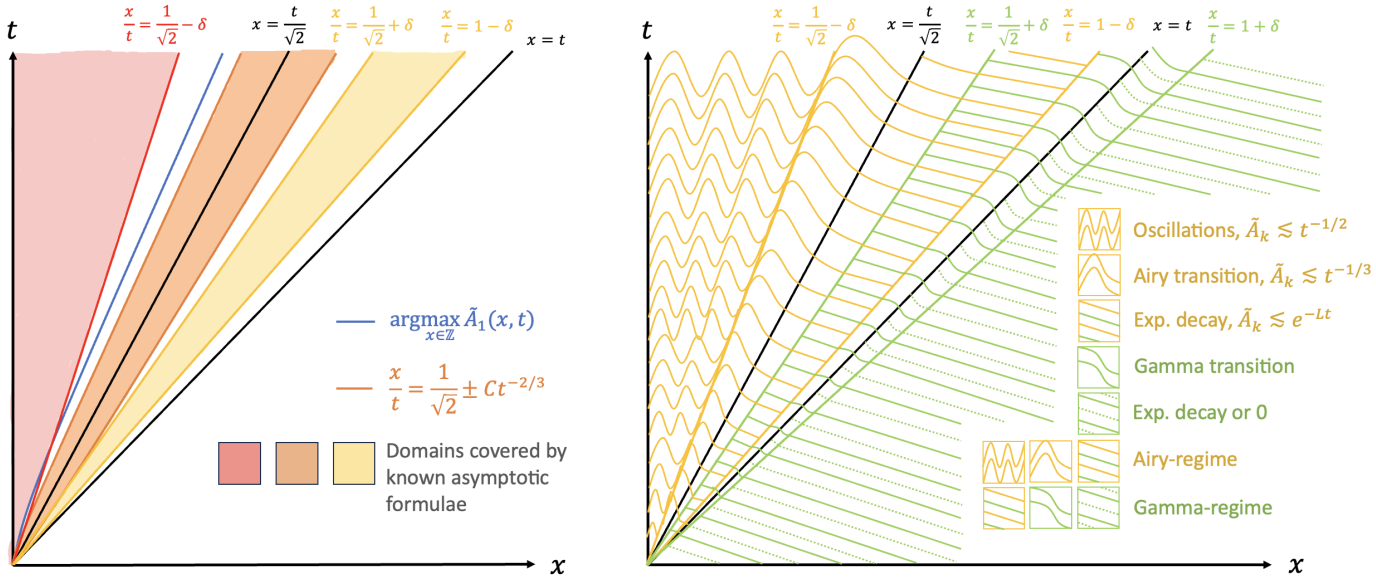
(c) 峰值之外的实部　　(d) 峰值之外的虚部

图2：固定时刻 $t = 200$ 哈达玛行走波函数的实部和虚部，以及定理1和定理2给出的一致近似。灰色表示费曼反跳棋的取值；这是一种涉及粒子-反粒子对产生与湮灭的推广。

这一模型是发展构造性场论的一个有前景的方向，因为它涉及实时间，而在大多数其他理论中，时间是虚的 [35, 45]。然而，在实时间模型中的计算会导致振荡积分，而不是指数衰减的积分。对于这类积分，积分过程中的巨大抵消所造成的符号问题 阻碍了估计。要得到关于所涉及参数一致的渐近公式（因而也最具实用价值），则更加困难。

对此类估计，成熟的工具包括驻相法、鞍点法和最速下降 法 [18]。这些方法的天然局限在于，随着参数变化，临界点和/或奇点会发生碰撞。后一类情形仍可用半经典近似分析，例如温策尔–克拉默斯–布里渊（刘维尔–格林）方法 [27]。这些方法给出渐近公式中的主项（甚至给出整个渐近级数，尽管它未必收敛）。临界点碰撞通常会导致艾里现象，即主项中出现艾里函数 [3, 4, 30]。临界点与奇点碰撞则可能导致其他特殊函数，尤其是伽马函数 [5, 7]。后一种情形可称为伽马现象。尽管已有许多启发性例子和理论 [26, 29, 30, 33],，据我们所知（在本研究之前），尚无一般定理能在这些碰撞情形下，于整个参数定义域内给出关于近似误差的非平凡一致界。这里，非平凡界是指误差项“在一致意义下渐近小于”一个“典型”的主项。

对于量子行走，波函数的大时间行为已得到广泛研究，详见图 3；另请参见第 2.3 节中的表 2。R. Feynman [13, 问题 2。6] 通过提出一个与平均速度较小这一特殊情形相关的类似问题，开启了这项研究 x/t。A. Ambainis等人 [1] 证明，当平均速度大致为 $\pm 1/\sqrt{2}$ –



(a) 已知结果

(b) 我们的结果

图 3： (a)：此前通过数学证明已知一维量子行走（哈达玛行走）波函数的大时间渐近公式的域。最大值点位于这些域的边界附近；因此，已有结果不足以估计最大值。(b)：新定理1和定理2的渐近公式成立的域。二者合起来覆盖整个平面。如表 2所示，可以观察到不同的状态及其间的过渡。对于 $x/t > 1$，量子游走的波函数为零，但在涉及粒子-反粒子对产生与湮灭的修正版中则不为零。

（图 3a 中的蓝色曲线）时，波函数在两个峰值之间振荡（红色区域），并在外部呈指数衰减（黄色区域）。另请参见图 2。Carteret等人 [9] 表明，状态之间的转换由艾里函数描述，并计算出了远离光锥处渐近公式的主项$x/t = \pm 1$。N. Konno [20] 以及 G. Grimmett、S. Janson 和 P.F. Scudo [16] 找到了弱大时间极限，该极限对振荡进行了“平均”；另请参见 A. Gottlieb等人 [15] 和两位作者 [38]给出的更简单证明。

T. Sunada 和 T. Tate [40, Propositions 2.2、3.1 和 4.1]首次在图 3a 中红色、橙色和黄色所示区域证明了严格误差估计。这些估计尚未具有一致性，因此峰值的精确渐近行为这一问题仍未解决，该行为被称为色散估计 [23, 24, 28]。两位作者中的两位 [38, Theorem 2] （分别由 P. Zakorko [44, Theorem 1]，通过私人通信）获得了峰值之间、排除（分别包括）其邻域的一致误差界，并由此首次严格解决了原始的 Feynman 问题 [38, Corollary 5]。A. Borodin （私人通信）提出了将这些结果推广到峰值之外区域的问题。这里的主要困难在于描述不同状态之间的过渡 （白色区域）：当我们既不太接近峰值、也不太远离峰值时，尤其是在接近光锥 $x/t = \pm 1$时。

1.1 主要贡献

我们首次给出了一维量子行走波函数的渐近公式，并在整个 xt 平面上提供一致误差界。具体而言，我们将该平面划分为两个区域，公式分别涉及艾里函数和伽马函数（见定理1和定理2以及图3b）。因此，量子行走同时展现了常见的艾里现象（出现在所谓的转折点附近）和较少为人所知的伽马现象（出现在光锥附近）。该渐近公式还适用于量子行走的变体，从而允许产生与湮灭粒子-反粒子对 [39]。

我们证明了首批一般定理，可由某些共形映射导出此类一致渐近公式（见定理3和定理4）。通过这种方式，我们表明伽马现象具有普适性，并且与广为人知的艾里现象和保形几何有着深刻联系（见表1）。

作为我们一致估计的一个示例应用，我们求得了一维量子游走中波函数峰值的高度和位置的渐近公式（参见命题 4）。

表1：艾里现象与伽马现象的比较。后者的特征是在渐近公式中含有因子 $1/\Gamma(x)$。当 x 为正整数时，该因子呈指数衰减；当 x 为负整数时，该因子因伽马函数的极点而消失。关于拉格朗日量、其标准形以及由此得到的渐近公式的直观解释，请参阅第1.2节。

艾里现象（定理 3）	**伽马现象（定理 4）**
渐近公式中的艾里函数	渐近公式中的伽马函数
从振荡到指数衰减的转变	从指数衰减到恒等为零的转变
拉格朗日量的导数的两个零点相撞	拉格朗日量的导数的一个零点与一个极点相撞
拉格朗日量的标准形为 $F(z) = z^3/3 - \theta z$	拉格朗日量的标准形为 $F(z) = v$ 对数函数 $z - z + \Delta$
其导数为 $F'(z) = (z - \sqrt{\theta})(z + \sqrt{\theta})$	其导数为 $F'(z) = (v - z)/z$
与保形几何的常见联系	
拉格朗日量的导数将基本域保形映射到半平面（图 7a/图 11a）拉格朗日量将基本域保形映射到标准域（图 8/图 12）	

1.2 主要思想

本文的主要新思想可概括为以下非正式原理。

共形—均匀 **原理**。 保形几何解释带来了一致的渐近 *s.*

让我们通过一个简单示例来说明这 一想法，之后我们将把它推广到更复杂的情形 s.

爱因斯坦公式的共形解释 爱因斯坦公式 $E = mc^2$ 是相对论性粒子的能量 E 与动量 p 之间关系$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ 的一个实例。在自然单位制下（我们在下文中采用该单位制），其中 $c = \hbar = 1$，它的形式为

$$E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}.$$

导数

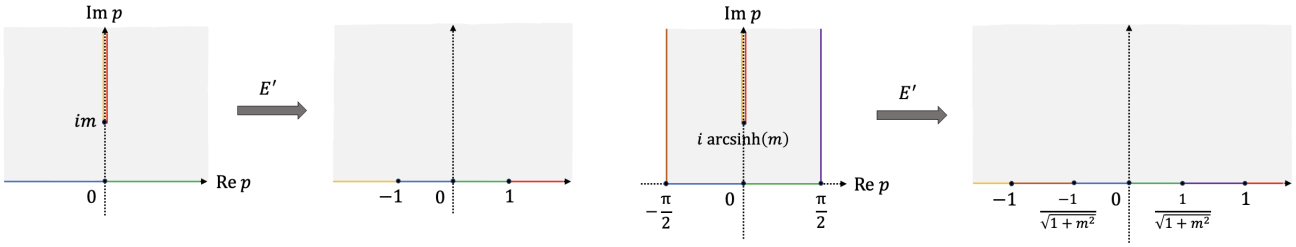
$$E'(p) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \tag{1}$$

可解释为 t 粒子速度作为动量的函数（根据哈密顿方程） .

现在我们允许 p 取复数值，并将函数 $E'(p)$ 延拓到上半平面 $\mathrm{Im}\, p > 0$。选择平方根的主值分支会迫使从 im 到 $+i\infty$ 出现一条裂口，从而得到该函数的自然定义域。关键观察是， $E'(p)$ 是一个共形映射（见图4a）：

▷ 导数 $E'(p)$ 是从其自然定义域到上半平面的一一共形映射。

对于非相对论粒子，这一结论依然成立；其能量可表示为动量的函数 $E(p) = p^2/2m$：自然定义域为上半平面，且 $E'(p) = p/m$。



(a) 爱因斯坦公式；见 (1)　　(b) 量子游走；见 (2)

图4：共形映射 $E'(p)$。边界区间及其像以相同颜色标示。

量子游走色散关系的共形解释 离散模型中也保留了相同的结构。考虑量子游走的能量 E 与动量 p 之间的关系 [38]:

$$E(p) = \arccos\left(\frac{\cos p}{\sqrt{1+m^2}}\right).$$

导数

$$E'(p) = \frac{\sin p}{\sqrt{\sin^2 p + m^2}} \tag{2}$$

是式 (1) 的离散类比，仍可解释为粒子速度关于动量的函数。

同样，我们将函数 $E'(p)$ 延拓到复平面。该函数具有许多对称性，因此可以根据所谓的基本域中的取值重构其他取值，该基本域由 $\operatorname{Im} p > 0, |\operatorname{Re} p| < \pi/2$ 给出。选择平方根的主值分支会导致从 i反双曲正弦 m 到 $+i\infty$的一条裂口，从而得到该函数的自然定义域。同样（见图4b）：

▷ 的导数 $E'(p)$ 是一个从其自然定义域到上半平面的 *1–1* 共形映射，

这表明该现象并不局限于某个特定模型。

令人惊讶的是， $E'(p)$ 的这一性质以及 $E(p)$ 的边界行为，是我们的定理 3 和 4 得以证明艾里函数和伽马函数现象的唯一基本假设（除了一些形式上的调整）。

虚动量的解释 在量子力学中，共形解释更加清晰。根据薛定谔方程，动量为 p、能量为 $E(p)$ 的粒子 $= \sqrt{p^2+m^2}$ 的波函数为

$$\psi(x,t) = e^{ipx - iE(p)t} = e^{it(pv - E(p))}, \tag{3}$$

其中 $v = x/t$。对于满足 $\operatorname{Im} p > 0$ 的复数 p，该表达式完全合理，此时带有初始数据 $\psi(x, 0)$ 的解会随着 $x \to +\infty$ 指数衰减。 $E(p)$ 的值描述了解的时间依赖性，而式（3）中的指数则是控制渐近行为的量。

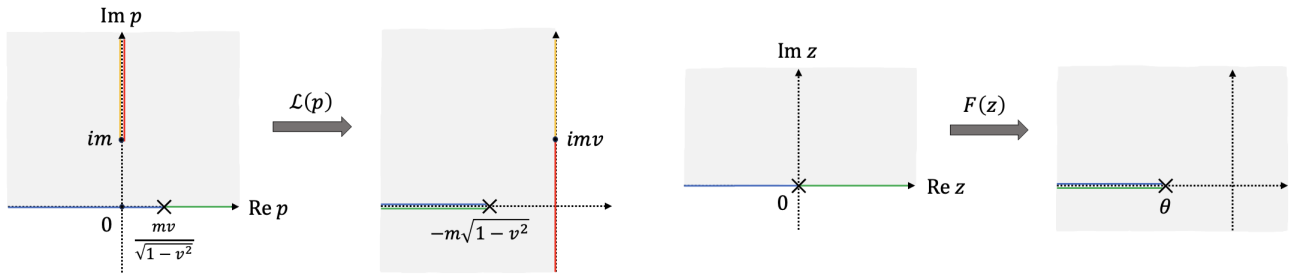
相对论拉格朗日量的共形解释 (3) 中的指数称为相空间拉格朗日量

$$\mathcal{L}(p) = pv - E(p) = pv - \sqrt{p^2+m^2},$$

其中，速度 $v \in (-1; 1)$ 是一个独立参数。我们将函数 $\mathcal{L}(p)$ 扩展到自然定义域（与 $E'(p)$ 的自然定义域相同），同时保持 $v \in (-1; 1)$。由于 $\mathcal{L}'(p) = v - E'p$，我们立即得出

▷ 导数 $\mathcal{L}'(p)$ 是其自然定义域到下半平面的一个一一共形映射。

相空间拉格朗日量本身也有一种共形解释，只是这次并非普适的（见图 5a）：



(a) $\mathcal{L}(p) = pv - \sqrt{p^2 + m^2}$ (b) $F(z) = -z^2/2 + \theta$

图 5：相对论相空间拉格朗日量 $\mathcal{L}(p)$ 及其标准形 $F(z)$ 作为共形映射。叉号表示它们的临界点及对应的值，这些值是熟知的动量和拉格朗日量关于速度的表达式。我们选择 $\theta = -m\sqrt{1} - v^2$，使图像中的叉号对齐。

▷ 相对论相空间拉格朗日量 $\mathcal{L}(p)$ 是从其自然定义域到左半平面 实部 $z < 0$ 的 *1–1* 共形映射，且该半平面有一条从 $-m\sqrt{1} - v^2$ 到 $-\infty$的裂口。

通过求出边界的像并应用辐角原理，很容易验证这一点。尽管这些共形解释十分简单，但此前可能还未有人发现。

拉格朗日量的标准形 我们希望用一个更简单、且实轴的像相同的共形映射 $F(z)$ 来模拟共形映射 $\mathcal{L}(p)$ 的行为。最简单的此类标准形 是

$$F(z) = -\frac{z^2}{2} + \theta, \qquad \text{where } \theta = -m\sqrt{1 - v^2}.$$

它将上半平面映射到复平面中去掉从 θ 到 $-\infty$ 的裂口后的区域（见图 5b）。

保角变量变换 薛定谔方程的一般解具有如下形式

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(p)\, e^{it\mathcal{L}(p)}\, dp \tag{4}$$

其中某个 $a(p)$ 在 无穷远处足够快地衰减。为估计积分，进行变量替换 e

$$z(p) = F^{-1}(\mathcal{L}(p)),$$

因此 $e^{it\mathcal{L}(p)}$ 被替换为 $e^{itF(z)}$。所得积分很容易估计，从而得到关于 $\psi(x,\ t)$ 的渐近公式；当 v 与光速之间的距离有正下界时，该公式关于速度 $v = x/t$是一致的。

边界行为与奇点的局部分析 我们主要结果的证明遵循相同的思路，但拉格朗日量及其标准形更加复杂（见表1和第 3.2 节），并且我们需要在复数域中平移积分路径。因此，我们需要定义域足够大，同时保持拉格朗日量为一一共形映射。众所周知 [43, 第 VII 章、第4节、定理 1] 之后的段落，要获得一致的 误差界，需要进行全局的 一一变量替换，而不是局部变量替换。

这里，我们的关键新见解是，共形映射的边界 行为保证了全局双射性。利用对称性和上述共形解释可进一步简化分析，从而得到易于表述和验证的条件。拉格朗日量的边界行为及其导数的内部行为，成为我们方法的主要限制，取代了通常对临界点碰撞和奇点的限制。

1.3 论文结构

在第 2 节中，我们陈述主要结果：在第 2.1 节定义量子游走，在第 2.3 节给出其波函数的一致渐近公式，并在第 2.4 节介绍符号。证明将在第 3–4 节的一个更一般的设定下给出，这两节的论述结构十分相似。这些证明的复杂程度与针对量子游走情形的证明相差无几，同时也阐明了其几何机制。全文中，我们更倾向于采用几何论证，而非临时性的计算（例如运用辐角原理）。

在第3节中，我们研究艾里现象：在第3.1节陈述一个一般性定理，在第3.2–3.3节给出证明，并在第3.4–3.5节将其应用于若干具体例子，包括量子行走。

在第4节中，我们研究伽马现象：在第4.1节陈述一个一般性定理，在第4.2–4.3节给出证明，并在第4.4–4.5节将其应用于若干具体例子，包括量子行走。

在第5节中，我们将主要结果应用于研究量子游走的波函数峰值；在第5.1节中，我们讨论未来工作的方向。

上述证明中使用的一些技术性引理推迟到附录 A–C 中给出。

2 陈述

我们来定义量子游走，陈述主要结果，并介绍符号与约定。

2.1 主要概念

定义 1。（见图 1 左下方）固定 $m > 0$，称其为粒子质量。棋盘路径 s 是 $\mathbb{Z}^2$ 中点的有限序列，使得从每个点（最后一个除外）指向下一个点的向量要么等于 $(1,\ 1)$，要么等于 $(-1,\ 1)$。记 $\mathrm{turns}(s)$ 为 s 中满足以下条件的点的数量（不包括第一个和最后一个点）：从该点指向下一个点和前一个点的向量彼此正交。对路径 s赋予复数

$$a(s) := (1+m^2)^{1-n/2}\, i(-im)^{\mathrm{turns}(s)},$$

其中 n 是 s中的点的总数。对于每个 $(x,\ t) \in \mathbb{Z}^2$，其中 $t > 0$，记为

$$a(x,t,m) := \sum_s a(s)$$

所有从 $(0,\ 0)$ 到 $(x,\ t)$ 且包含 $(1,\ 1)$ 的棋盘路径 s 之和。按照定义，空和为零。函数 $a(x,\ t,\ m)$ 称为（量子游走的）波函数。记为

$$\widetilde{A}_1(x,t,m) = \mathrm{Re}\, a(x,t+1,m), \qquad \text{当 } x+t \text{ 为奇数且 } t \geq 0,$$
$$\widetilde{A}_2(x,t,m) = \mathrm{Im}\, a(x+1,t+1,m), \qquad \text{当 } x+t \text{ 为偶数且 } t \geq 0;$$

这种坐标　　变换会得出下文特别简洁的表达式 (5)、(6) 和 (15)　　.

将 $|a(x,t,m)|^2$ 解释为：若一个质量为 m 的电子在时间 0 从原点发出，那么在时间 $t > 0$，该电子位于点 x 周围长度为 1 的区间内的概率。

这个初等定义（归功于费曼）等价于量子信息文献 [1] 中的定义：$\mathrm{Re}\ a(x,t,m)$ 和 $\mathrm{Im}\ a(x,t,m)$ 分别是波函数的左、右连通分支（符号相反），该波函数对应于从 $x = 0$ 沿右方向开始的量子游走，其硬币算子为 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{smallmatrix}\right)/\sqrt{1+m^2}$。

这一特例 $m = 1$ 称为哈达玛行走，因为此时后一个算子变为哈达玛算子。在这种情况下，我们省略参数 m，并写作 $a(x,\ t) := a(x,\ t,\ 1)$ 等。

该模型可以看作一种具有特定复权重的六顶点模型 。数值 $a(s)$ 也可以定义为 i 乘以图 6 顶行所示顶点权重的乘积，其中乘积遍历所有格点顶点。这里，细灰线段是不属于棋盘路径 s的线段，而最左侧的顶点类型在定义 1 的设定中实际上不可能出现，但在推广情形中会出现。

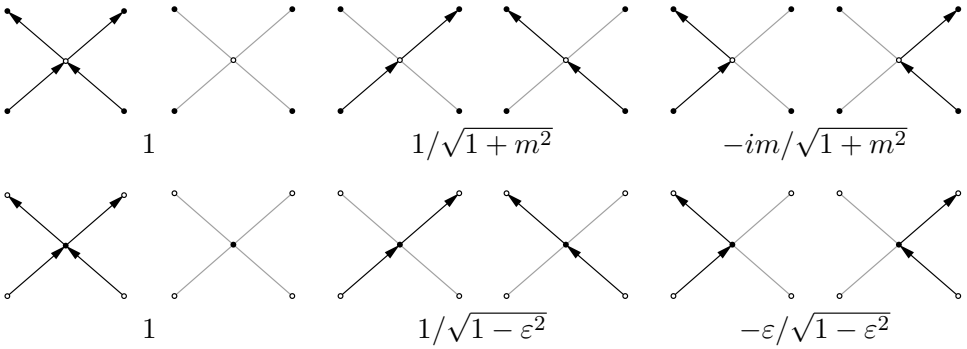


图 6：作为六顶点模型的费曼（反）检棋模型。整数（上）和半整数（下）顶点的权重取决于质量 m 和微小的虚质量 ε。每种构型还有一个整体符号，它通过某种"环分解"全局定义。参见 [39, 定义 9]。

得到渐近公式的关键是以下积分公式；它们可以看作是函数 $A_1(x,t,m)$ 和 $A_2(x,t,m)$ 的另一种定义 $\widetilde{}$，使我们能够将它们推广到 $t \le 0$以及 $x+t$ 的任意奇偶性。这种推广可解释为允许电子-正电子对在运动过程中产生与湮灭，因此称为*Feynman*反检验器。它也是六顶点模型的一种形式；参见图 6。当 $t=0$ 和 x 均为偶数时，这一特殊情形等价于有质量随机游走 [39,注记 3]。关于由此得到的推广的详细引言，请参阅 [39] 。

定义 2. (参见 [38, 定义 5], [39, 命题 1]) 对每个 $m>0$ 以及 $(x,t) \in \mathbb{Z}^2$，令

$$\widetilde{A}_1(x,t,m) := \pm \frac{im}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ipx-iE(p)t}\,dp}{\sqrt{m^2+\text{正弦}^2\,p}} = \pm \frac{i^{x-t+1}\,m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ipx-i\omega(p)t}\,dp}{\sqrt{m^2+\text{余弦}^2\,p}}; \tag{5}$$

$$\widetilde{A}_2(x,t,m) := \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1+\frac{\sin p}{\sqrt{m^2+\sin^2 p}}\right) e^{ipx-iE(p)t}\,dp = \pm \frac{i^{x-t}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1+\frac{\cos p}{\sqrt{m^2+\cos^2 p}}\right) e^{ipx-i\omega(p)t}\,dp, \tag{6}$$

$\widetilde{}$其中，在 A_k 的表达式中， $\pm$ 里的负号取用于 $t<0$ 且 $x+t+k$ 为偶数的情形，

$$E(p) := \arccos\left(\frac{\cos p}{\sqrt{1+m^2}}\right) \qquad \text{and} \qquad \omega(p) := E\left(p+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{\sin p}{\sqrt{1+m^2}}\right). \tag{7}$$

为推导艾里现象，奇函数 $\omega(p)$比偶函数 $E(p)$更方便。为推导伽马现象，我们需要以下在第4节第5小节证明的汉克尔型表示:

命题 1. 对于每个 $m>0$ 和整数 $x,t \ge 0$，我们有

$$\widetilde{A}_1(x,t,m) = \frac{i^{x-t}\,m}{2\pi(1+m^2)^{t/2}} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^{\omega(t+x+1)/2-p(\omega)(t-x+1)/2}\,d\omega}{1+m^2-e^{\omega}}, \tag{8}$$

$$\widetilde{A}_2(x,t,m) = \frac{i^{x-t-1}}{2\pi(1+m^2)^{t/2}} \cdot \frac{t+x}{t-x} \cdot \int_{-\infty}^{(0+)} e^{\omega(t+x)/2-p(\omega)(t-x)/2}\,d\omega, \tag{9}$$

其中 $x \ne t$ 在(9) 中，且

$$p(\omega) := \log(e^{\omega}-1) - \log(1+m^2-e^{\omega}). \tag{10}$$

此后，我们取主值分支 $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty;\,0] \to \{z\colon -\pi < \text{虚部 } z < \pi\}$, and $\int_{(0+)_{-\infty}} f(\omega)\,d\omega$表示沿围道 $\gamma(s)$ 的积分；该围道在足够小的邻域内逆时针环绕射线 $(-\infty;0]$ 一周，并满足实部 $\gamma(s) \to -\infty$ ，当 $s \to \pm\infty$ 时。

2.2 伽马现象的证据

尽管此前尚未有关于量子游走中伽马现象的报道，但很容易发现它的存在。哈达玛行走波函数的著名组合公式 [38, 命题 3]

$$a(x,t) = 2^{(1-t)/2} \sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-1)^r \binom{(x+t-2)/2}{r} \left(\binom{(t-x-2)/2}{r} + i \binom{(t-x-2)/2}{r-1} \right),$$

w这里 $|x| < t$ 且 $t-x$ 为偶数，这意味着对于每个固定的整数 $n \geq 1$，我们有 e

$$a(t-2n,t) = i\, 2^{(1-t)/2} \frac{(-1)^n\, t^n}{n!} \left(1 + O_n\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$

其中， O_n 中的下标强调了大 O 记号中所理解的常数取决于 n。

这一观察表明，在整个 xt-平面上量子游走波函数的任何一致渐近公式（其中误差项由主项一致控制）都必须涉及伽马函数（或其他能够在固定 $t-x$下重现阶乘的特殊函数）。特别地，在已知的严格一致渐近公式 [40] 以及下面的定理1中，假设$x/t \leq 1-\delta$是必不可少的。

2.3 主要结果

~ ~我们给出了关于 艾里函数和伽马函数的 $A_1(x,\ t,\ m)$ 和 $A_2(x,\ t,\ m)$ 的一致渐近公式，其中 $m > 0$和 $t \to +\infty$ 固定

$$\mathrm{Ai}(u) := \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(up + \frac{p^3}{3}\right) dp \qquad \text{and} \qquad \Gamma(z) := \int_0^{+\infty} p^{z-1} e^{-p}\, dp.$$

这里，后者可以解析延拓到所有实数 z，但不包括非正整数。在后一种情况下，我们令 $1/\Gamma(z) := 0$。类似地，下面公式（11）和（13）中的其他一些函数也通过连续性进行延拓，具体说明如下。

定理1（艾里现象）。 对于每个 $m > 0$, $\delta \in$ （0；1），以及 $(x,t) \in \mathbb{Z}^2$，满足 $t > 0$ 且

$$v := x/t \in [0; 1-\delta],$$

我们有

$$\widetilde{A}_1(x,t,m) = \frac{i^{x-t+1}\sqrt{m}}{t^{1/3}} \left(\frac{4\theta(v,m)}{1-(1+m^2)v^2}\right)^{1/4} \mathrm{Ai}\left(-\theta(v,m)\, t^{2/3}\right) \begin{cases} +O_m\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right), & \text{if } v \leq \hat{v}, \\ \times\left(1 + O_{m,\delta}\left(\frac{1}{t}\right)\right), & \text{if } v \geq \hat{v}, \end{cases} \tag{11}$$

$$\widetilde{A}_2(x,t,m) = \frac{i^{x-t}\sqrt{m}}{t^{1/3}} \left(\frac{4\theta(v,m)}{1-(1+m^2)v^2}\right)^{1/4} \mathrm{Ai}\left(-\theta(v,m)\, t^{2/3}\right) \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \begin{cases} +O_m\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right), & \text{if } v \leq \hat{v}, \\ \times\left(1 + O_{m,\delta}\left(\frac{1}{t}\right)\right), & \text{if } v \geq \hat{v}, \end{cases}$$

其中比值 $\frac{4\theta(v,\ m)}{1-(1+m^2)v^2}$ 在 $v = \hat{}v :\ = 1/\sqrt{1+m^2}$ 处由 $2^{4/3}m^{-2/3}$ 连续延拓，其中 d

$$\theta(v,m) := \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\arctan\frac{1}{m}\right)^{2/3}, & \text{if } v = 0, \\ \left(\frac{3}{2}\left(-v\arctan\frac{\sqrt{1-(1+m^2)v^2}}{mv} + \arctan\frac{\sqrt{1-(1+m^2)v^2}}{m}\right)\right)^{2/3}, & \text{if } 0 < v \leq \hat{v}, \\ -\left(\frac{3}{2}\left(v\,\mathrm{arctanh}\frac{\sqrt{(1+m^2)v^2-1}}{mv} - \mathrm{arctanh}\frac{\sqrt{(1+m^2)v^2-1}}{m}\right)\right)^{2/3}, & \text{if } v \geq \hat{v}. \end{cases} \tag{12}$$

定理 2 (伽马现象**)。** 对于每个 m、$\delta>0$ 以及每个 $(x,\ t)\in\mathbb{Z}^2$，满足 $t>0$ 并且

$$v:=x/t\in\left[1/\sqrt{1+m^2}+\delta;+\infty\right),$$

我们有

$$\widetilde{A}_1(x,t,m)=\frac{i^{x-t+1}\sqrt{m}}{t^{1/2}}\cdot\frac{\exp(-tL(v,m))}{((1+m^2)v^2-1)^{1/4}}\cdot\frac{(|t-x|/(2e))^{(t-x)/2}}{\Gamma((t-x+1)/2)}\left(1+O_{m,\delta}\left(\frac{1}{x+t}\right)\right),\tag{13}$$
$$\widetilde{A}_2(x,t,m)=\frac{i^{x-t}\sqrt{m}}{t^{1/2}}\cdot\frac{\exp(-tL(v,m))}{((1+m^2)v^2-1)^{1/4}}\cdot\frac{(|t-x|/(2e))^{(t-x)/2}}{\Gamma((t-x+2)/2)}\sqrt{\frac{t+x}{2}}\left(1+O_{m,\delta}\left(\frac{1}{x+t}\right)\right),$$

其中，因子$(|t-x|/(2e))^{(t-x)/2}$解释为：当 $x=t$ 时取1，并且

$$L(v,m)=\begin{cases}v\operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{(1+m^2)v^2-1}}{mv}-\operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{(1+m^2)v^2-1}}{m}, & \text{if } v<1,\\ \frac{1}{2}\log(1+m^2), & \text{if } v=1,\\ v\operatorname{arccoth}\frac{\sqrt{(1+m^2)v^2-1}}{mv}-\operatorname{arccoth}\frac{\sqrt{(1+m^2)v^2-1}}{m}, & \text{if } v>1.\end{cases}\tag{14}$$

下文中，记号 $f(x,t,m)=g(x,t,m)+O_{m,\delta}(h(x,t))$ 表示存在常数 $C(m,\delta)>0$（依赖于 m,δ，但不依赖于 x,t），使得对于每个满足定理假设的 x,t,m,δ，都有 $|f(x,t,m)-g(x,t,m)|\le C(m,\delta)\ h(x,t)$。类似地，若 $|f(x,t,m)-g(x,t,m)|\ge C(m,\delta)\ h(x,t)$，则记作 $f(x,t,m)=g(x,t,m)+\Omega_{m,\delta}(h(x,t))$。带有其他下标的 big-Oh 和 big-Omega 记号含义类似，包括某些下标是函数而非数值的情形。

定理1和定理2通过对称性 [39, 命题 6]扩展到 $x<0$ 和 $t<0$ ：

$$\begin{aligned}&\widetilde{A}_1(x,t,m)=\widetilde{A}_1(-x,t,m)=\widetilde{A}_1(x,-t,m)=\widetilde{A}_1(-x,-t,m),\\&(t-x)\,\widetilde{A}_2(x,t,m)=(t+x)\,\widetilde{A}_2(-x,t,m),\quad \widetilde{A}_2(x,t,m)=-\widetilde{A}_2(-x,-t,m)\quad\text{for }(x,t)\neq(0,0).\end{aligned}\tag{15}$$

此外，定理2还扩展到 $t=0$ 的情形，如表 2 的最后一行所示。在这种情况下，需要将式 (13) 中的变量 t 替换为 x/v，并取 $v\to+\infty$的极限。因此，定理1和定理2共同涵盖整个 xt-平面。

以及公式 $m)$在 $\tilde{v}$的某些区间上可由两个定理分别得到简化，如表 2 所示。特别是，这重现了 [1, 40], 的已知结果，这次还具有一致误差界。例如，在区间 $0\le v\le\hat{}v-\delta$上，我们观察到振幅为 $t^{-1/2}$量级的振荡，而在$v=\hat{}v$附近，波函数为 $t^{-1/3}$量级；见图 3b。在两个定理的公共区间$\hat{}v+\delta<v<1-\delta$上，涉及艾里函数和伽马函数的两个表达式都可简化为相同的指数衰减。值得注意的是，在对应于图 3a 中白色角度的大多数区间上，它们并不会简化。式 (13)还具有等价形式 (72)。在表 2 的第 3 行中，我们要求 $\delta<\hat{v}-\hat{}_2^{v^2}$ 以保证 $v\in[0;\ 1-\delta]$。

~对于 $0\le x<t$，可由 ~关于 $A_1(x,\ t,\ m)$ 的渐近公式及以下推论，轻易得到 $A_2(x,\ t,\ m)$ 的简化渐近公式。

推论 1. </style}对每个，存在 ($m)>0$，使得对满足 $0\le x<t$ 和 $t>C$ 的每个 $(x,\ t)\in\mathbb{Z}^2$，我们有

$$\widetilde{A}_2(x,t,m)=-i\widetilde{A}_1(x,t,m)\cdot\frac{\Gamma((t-x+1)/2)}{\Gamma((t-x+2)/2)}\sqrt{\frac{t+x}{2}}\begin{cases}+O_m\left(\frac{1}{t^{4/3}}\right), & \text{if } 0\le x/t\le\hat{v};\\ \times\left(1+O_m\left(\frac{1}{t}\right)\right), & \text{if } \hat{v}<x/t<1,\end{cases}\tag{16}$$

其中 $\hat{}v=1/\sqrt{1+m^2}$。特别是，如果 $x/t\le1-\delta$ 对于某个 $\delta>0$成立，那么这可以简化为 to

$$\widetilde{A}_2(x,t,m)=-i\widetilde{A}_1(x,t,m)\sqrt{\frac{t+x}{t-x}}\begin{cases}+O_m\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right), & \text{if } 0\le x/t\le\hat{v};\\ \times\left(1+O_{m,\delta}\left(\frac{1}{t}\right)\right), & \text{if } \hat{v}<x/t\le1-\delta.\end{cases}\tag{17}$$

表 2：不同速度区间下波函数 $\widetilde{A}_1(x,\ t,\ m)$ 的一致渐近公式。

速度区间	渐近公式适用于 $\widetilde{A}_1(x,t,m)$	参考文献
$v=0$	$\sqrt{\frac{2m}{\pi t}}\cdot\begin{cases}\text{余弦}\left(t\text{反正切}\ m-\frac{\pi}{4}\right), & t\ \text{奇数};\\ -i\,\text{正弦}\left(t\text{反正切}\ m-\frac{\pi}{4}\right), & t\ \text{偶数};\end{cases}+O_m\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$	推论 3；参见 [6, 定理 3]
$0<v\le \hat{v}-\delta<\hat{v}$	$\sqrt{\frac{2m}{\pi t}}\cdot\frac{i^{x-t+1}\cos\left(\frac{2}{3}t\theta(v,m)^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right)(1+O_{m,\delta}(1))}{(1+m^2)v^2)^{1/4}}+O_{m,\delta}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$	推论 3 或 [39, 定理 3]
$\frac{\delta}{t^{2/3}}<\lvert v-\hat{v}\rvert<\delta<\hat{v}-\frac{\hat{v}^2}{2}$	公式（11）	定理1
$\lvert v-\hat{v}\rvert\le\frac{\delta}{t^{2/3}}$	$\sqrt[3]{\frac{2m}{t}}\cdot i^{x-t+1}$ 艾里函数 $\left(\frac{v-\hat{v}}{\delta\left(\frac{1}{t}\right)}\sqrt[3]{\frac{2t^2}{m^2}}\right)+O_m\left(\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1+O_m\right)$	推论 3；参见 [40]
$\hat{v}+\delta<v<1-\delta<1$	$\sqrt{\frac{m}{2\pi t}}\cdot\frac{i^{x-t+1}\exp(-tL(v,\ m))}{v^2-1),\ \delta\left(\frac{1}{t}\right))\ ((1+m^2)^{1/4}}$	推论 3；参见 [40]
$\frac{\delta}{t}<\lvert 1-v\rvert<\delta<1-\hat{v}$	式 (13)	定理 2
$\lvert 1-v\rvert<\frac{\delta}{t}$	$\frac{m^{t-x}t^{(t-x-1)/2}}{(1+m^2)^{t/2}}\cdot\frac{i^{x-t+1}}{\Gamma((t-x+1)/2)}\cdot\left(1+O_{m,\delta}\left(\frac{1}{t}\right)\right)$	推论 6；参见第 2.2 节
$v>1+\delta>1$	$\sqrt{\frac{2m}{\pi t}}\cdot\frac{i\exp(-tL(v,\ m))\ ((1+m^2)v^2-1)}{1/4}\cdot\left(1+O_{m,\delta}\left(\frac{1}{x+t}\right)\right),$ —— $x-t$ 偶数	推论 6
$t=0$（“$v=+\infty$”）	$\sqrt{\frac{2m}{\pi m}}\cdot\frac{i\exp(-x\ \text{反双曲正弦}}{(1+O_m\left(\frac{1}{x}\right))\ (1+m^2),}$ – $x>0$ 偶数	推论 6

请注意，这个公式并非 量子游走波函数左右连通分支之间的关系；它实际上将两者都与费曼反跳棋中的连通分支联系起来。

定理1中关于 x/t 的界是尖锐的，具体而言，假设 $|x/t|\le 1-\delta$ 不能放宽为 $|x/t|<1$：在$O_{m,\delta}$ 中理解的常数 $C(m,\delta)$会随着 $\delta\to 0$而发散。事实上，若非如此，我们就会与定理 2（以及第 2.2 节）矛盾。

定理 2中关于$x/t>1/\sqrt{1+m^2+\delta}$ 的界是尖锐的，不能放宽为$x/t>1/\sqrt{1+m^2}$；否则，我们就会与定理1矛盾。

数值实验表明，定理1中的误差估计阶数是锐利的（至少在 $v\le\hat{v}$ 的情形下）；也就是说，对于 $\alpha>3/2$, $O_m\left(t^{-3/2}\right)$ 不能替换为 $O_m\left(t^{-\alpha}\right)$。

我们将看到， $L(v,\ m)$ 和 $\frac{2}{3}\theta(v,\ m)^{3/2}$ 具有拉格朗日量的含义（图5以及第3.1节和第4.1节）。

2.4 符号与约定

下文的主要结果用实解析函数来表述最为简洁。回顾一下，在关于实轴对称的定义域 $D\subset\mathbb{C}$ 中，解析函数 $f(z)$ 称为实解析，如果对每个$z\in D$，都有 $f(z)=f(z)$。函数 $f\colon[\alpha;\beta]\to\mathbb{R}$ 在 $[\alpha;\beta]\subset\mathbb{R}$ 上是实解析的，如果它可以延拓为定义在 $[\alpha;\beta]$ 的复邻域内的复值实解析函数。回顾一下，$\hat{z}\in D$ 是解析函数 $f(z)\colon D\to\mathbb{C}$ 的临界点，当且仅当 $f'(\hat{z})=0$。若 $f''(\hat{z})\neq 0$，则称其为非退化；若 $f''(\hat{z})=0$ 但 $f'''(\hat{z})\neq 0$，则称其为二阶。没有临界点的解析函数 $f(z)$ 称为共形映射（它未必是全局单射）。共形映射保持曲线之间的角度。

为了得到一致估计，我们处理定义在域族上的函数。所谓域族，是指一个开子集 $D\subset V\times\mathbb{C}$，其中 $V=[\alpha;\beta]\subset\mathbb{R}$，满足对于每个 $v\in V$， $D_v:=D\cap(\{v\}\times\mathbb{C})$ 连通且非空。函数族 $f_v\colon D_v\to\mathbb{C}$ 称为解析的，如果它可以延拓为一个解析函数 $f_v(z)=f(v,\ z)$，定义在 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 中 D 的某个邻域内。函数的解析族 $f_v(z)$ 称为（偶/奇）实解析的，如果对于每个固定的 $v\in V$，函数 $f_v(z)$ 都是（偶/奇）实解析的。当指标 v 固定时，我们通常省略它。对于依赖多个参数的函数族，情况也相同。

分数幂 $z^{p/q}$ 和对数函数 $\log z$ 均指其主分支，也就是说，在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty;0]$ 中取在 $z>1$ 时为正的分支。对于 $z\in(-\infty;0)$，通过从上半平面连续延拓来定义它们。特别地，我们假设当 $z<0$ 时，$\sqrt{z}=z^{1/2}$ 和 $\sqrt[3]{z}=z^{1/3}$ 的虚部为正。按照这一约定，恒等式 $z^{r+s}=z^r z^s$ 成立。我们还定义辐角 $\arg z:=\operatorname{Im}\log z\in(-\pi;\pi]$。

用 H^+ 和 H^- 表示复平面的上、下半平面，用 Q_1、.....、Q_4 表示四个开象限。用 $[\alpha;\beta]$ 表示复平面上端点为 α、$\beta\in\mathbb{C}$ 的线段（特别地，$[\alpha;\beta]=[\beta;\alpha]$）。类似地定义 $[\alpha;\beta)$、$(\alpha;\beta]$ 和 $(\alpha;\beta)$，并包括 c、$d\in\mathbb{C}$ 时的可能情形 α、$\beta=c\pm d\infty$。记号 $\int_\alpha^\beta f(z)\,dz$ 表示沿定向区间 $(\alpha;\beta)$ 的围道积分；当 α 或 β 为无穷时，将其理解为反常黎曼积分。

对于函数 $f\colon(\beta;\,\beta\pm\delta)\to\mathbb{R}$，其中 $\delta>0$，记 $f(\beta\pm):=\lim_{\varepsilon\to0,\ \varepsilon>0} f(\beta\pm\varepsilon)$。对于满足 c、$d\in\mathbb{C}$ 的 $\beta=c+d\infty$，令 $f(\beta):=\lim_{t\to+\infty,\ t\in\mathbb{R}} f(c+dt)$。对于实值和复值函数 f，这一定义均有意义，相应的极限分别属于 $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ 和 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$。记 $f(\pm d\infty):=f(0\pm d\infty)$，特别地，$(\pm\infty)^{-1}=0$。按自然顺序排列 $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$。对于子集 $S\subset\mathbb{C}$ 和函数 $f\colon D\to\mathbb{R}$，记

$$\liminf_{z\to S} f(z):=\lim_{\varepsilon\searrow0}\left(\inf_{z\in D:\ \operatorname{dist}(z,S)<\varepsilon} f(z)\right),\tag{18}$$

其中 $\inf_{z\in\varnothing} f(z):=+\infty$。类似地定义上极限 $\limsup_{z\to S} f(z)$，其中 $\sup_{z\in\varnothing} f(z):=-\infty$。当 $f(z)/g(z)\to1$ 时，我们将 $f(z)\sim g(z)$ 记作 $z\to z_0\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$。记号 $f\colon S_1,\dots,S_k\mapsto T_1,\dots,T_k$，其中 $S_i,T_i\subset\mathbb{C}$，表示对每个 $i=1,\dots,k$ 的 $f(S_i)=T_i$。此外，记 $f^{-1}(u):=\{z\in D\colon f(z)=u\}$ 为点 $u\in\mathbb{C}$ 的完全原像。

对于任意 $S\subset\mathbb{C}$，记号 ∂S 表示 S 的边界，而 $\operatorname{Cl}S$ 表示其闭包，即 $\operatorname{Cl}S:=S\cup\partial S$。对于子集 $T\subset\operatorname{Cl}S$，稍微滥用术语，我们将 $neighbourhood\ of\ T\ in S$ 称为 T 在 S 中的邻域，指对于某个包含 T 的开集合 $N\subset\mathbb{C}$，交集 $N\cap S$。邻域族的含义类似。

3 艾里现象

3.1 一般艾里现象

我们转而讨论积分（5）–（6）的一般形式：

$$\psi(x,t):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(p)\,e^{ipx-i\omega(p)t}\,dp,$$

其中 $x\geq0$、$t>0$ 为整数，a（p）和 ω（p）分别为偶、奇实解析 2π-周期函数，并满足某些条件。定义 基本域 如下（例如参见图 7a）：

$$U:=\{z\in\mathbb{C}\colon 0<\operatorname{Re}z<\pi,\operatorname{Im}z>0\}.\tag{19}$$

定理 3。 设 $D\subset\mathbb{C}$ 是一个关于坐标轴对称且包含 ∂U 的 2π-周期单连通域。设 $a(p)$ 和 $\omega(p)$ 是 D 中的偶、奇实解析 2π-周期函数，满足 ω' 是从 $D\cap U$ 到 H^- 的双射共形映射。则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(p)\,e^{ipx-i\omega(p)t}\,dp=\begin{cases}t^{-1/3}\operatorname{Ai}(-\theta(x/t)\,t^{2/3})\,h(x/t)\,a(\hat p(x/t))+O_{v^+,a,\omega}\left(t^{-3/2}\right), & \text{if } x/t\leq\hat v,\\ t^{-1/3}\operatorname{Ai}(-\theta(x/t)\,t^{2/3})\,h(x/t)\left(a(\hat p(x/t))+O_{v^+,a,\omega}\left(t^{-1}\right)\right), & \text{if } x/t\geq\hat v,\end{cases}$$

对每个 x、$t\in\mathbb{Z}$、$v^+\in\mathbb{R}$，满足 $t>0$ 和 $0\leq x/t\leq v^+<V^+$，其中

$$\begin{aligned}&\hat v:=\omega'(0),\quad \hat p(v):=\left(\omega'|_{\partial U}\right)^{-1}(v), && \theta(v):=\operatorname{sgn}(\hat v-v)\left|\tfrac{3}{2}(v\hat p(v)-\omega(\hat p(v)))\right|^{2/3},\\ &V^+:=\liminf_{p\to\partial D\cap U,\operatorname{Re}p\neq0}\frac{\operatorname{Re}\omega(p)}{\operatorname{Re}p}, && h(v):=\begin{cases}|4\theta(v)|^{1/4}/\,|\omega''(\hat p(v))|^{1/2}, & \text{if } v\neq\hat v,\\ |\omega'''(0)/2|^{-1/3}, & \text{if } v=\hat v.\end{cases}\end{aligned}\tag{20}$$

这里，$\hat{}p(v)$ 是相空间拉格朗日量 $\mathcal{L}(p) := vp - \omega(p)$ 的一个临界点；根据下文的引理 2，当 $v < \hat{}v$ 时它为实数，当 $v > \hat{}v$ 时它为纯虚数。我们将看到，函数 $a(\hat{}p(v))$、$\theta(v)$ 和 $h(v)$ 都是实解析的（根据下文的注 2），因此渐近公式中的主项关于 x/t 是实解析的。

假设 $x/t < V^+$ 意味着拉格朗日量在 $\partial D \cap U$ 附近的实部为负。这就是所述的边界条件，它意味着拉格朗日量具有所需的内部行为。我们在第 2.3 节中的主要结果以及第 3.5 节和第 4.5 节中的计算表明，定理中对 x/t 的界是尖锐的，具体而言，假设 $x/t \le v^+ < V^+$ 不能放宽为 $x/t < V^+$，且一般情况下，V^+ 的值不能增大：$O_{v^+,a,\omega}(t^{-1})$中的常数在 $v^+ \to V^+$时会发散。

定理 3 的要点是给出渐近公式中严格的一致误差界，而主项的表达式则是众所周知的 [43]。对于 $x/t < \hat{}v$，定理中的误差估计阶是尖锐的，具体而言，对于 $\alpha > 3/2$，$O(t^{-3/2})$不能替换为 $O(t^{-\alpha})$，否则将与贝塞尔函数 $J_{vt}(t)$ [29, 式 10.20.4] 和艾里函数 [29,式 9.7.10]的渐近展开相矛盾；参见第 3.4 节。T

渐近公式会简化，当 $\hat{v} := x/t$ 要么接近，要么远离 $\hat{}v$：

在定理 3 的假设下，若 $\delta > 0$，$t \ge 1$，$v = \frac{x}{t}$ 满足 $|v - \hat{}v| \notin \left(\frac{\delta}{t^{2/3}};\ \delta\right)$，则

推论 2。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(p)\, e^{ipx - i\omega(p)t}\, dp = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi t|\omega''(\hat{p}(v))|}}\cos\left(\frac{2}{3}t\theta(v)^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) a(\hat{p}(v)) + O_{\delta,v^+,a,\omega}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right), & \text{if } v \le \hat{v} - \delta, \\ \sqrt[3]{\frac{2}{t|\omega'''(0)|}}\,\mathrm{Ai}\left((x - \hat{v}t)\sqrt[3]{\frac{2}{t|\omega'''(0)|}}\right) a(0) + O_{\delta,v^+,a,\omega}\left(\frac{1}{t}\right), & \text{if } |v - \hat{v}| \le \frac{\delta}{t^{2/3}}, \\ \sqrt{\frac{1}{2\pi t|\omega''(\hat{p}(v))|}}\exp\left(-\frac{2}{3}t|\theta(v)|^{3/2}\right)\left(a(\hat{p}(v)) + O_{\delta,v^+,a,\omega}\left(\frac{1}{t}\right)\right), & \text{if } v \ge \hat{v} + \delta. \end{cases}$$

注 1。定理 3 是一个相当一般的结果。可以从定理中所述的任意定义域 D 出发，并取一个在 ∂U上没有极点的一一共形映射 $\omega'\colon D \cap U \to H^-$。根据黎曼映射定理，这样的映射存在；根据局部边界对应原理，$\omega'(\partial U) \subset \mathbb{R}$。然后，在加上一个一次函数后，原函数$\omega$ 自动满足定理的假设。事实上，由于$\omega'([0;\pi]) \subset \mathbb{R}$，根据反射原理可知，在 D中，$\overline{\omega'(p)} = \omega'(p)$。因此，$\omega(p) = \omega(p) +$ 常数。类似地，$\overline{\omega'(-p)} = \omega'(p) = \omega'(2\pi - p)$，因此 $\omega(-p) = =\omega(p) +$常数，且 $\omega(p + 2\pi) = \omega(p) +$常数。于是，$\omega(p) - \omega(0) - (\omega(2\pi) - \omega(0)) \cdot p/2\pi$ 是定义在 D中的奇实解析 2π-周期函数。

在第 3.4–3.5 节中，我们用简单示例 $\omega(p) = \sin p$和 $\omega(p) = \arcsin \sin \frac{p}{\sqrt{1+m^2}}$ 阐释该定理；它们分别出现在贝塞尔函数和波函数 (5) 的积分表示中。

3.2 保角变量变换

在本小节中，我们开始证明定理 3。我们采用该定理中的记号并施加其中的假设，并假设

$$v := x/t \in V, \qquad V := [0; v^+].$$

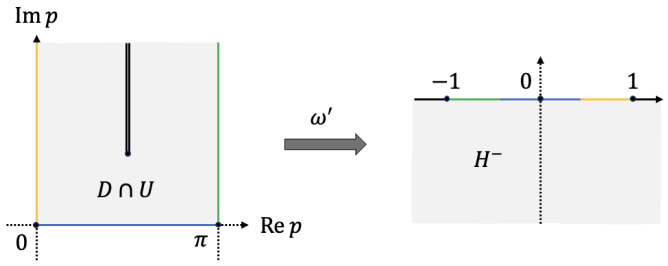
对于每个 $v \in V$、$\theta \in \mathbb{R}$、$p \in D$ 和 $z \in \mathbb{C}$，定义 拉格朗日量 $\mathcal{L}_v(p)$ 及其 标准形 $F_\theta(z)$ 如下：

$$\mathcal{L}(p) = \mathcal{L}_v(p) := vp - \omega(p), \qquad F(z) = F_\theta(z) := z^3/3 - \theta z.$$

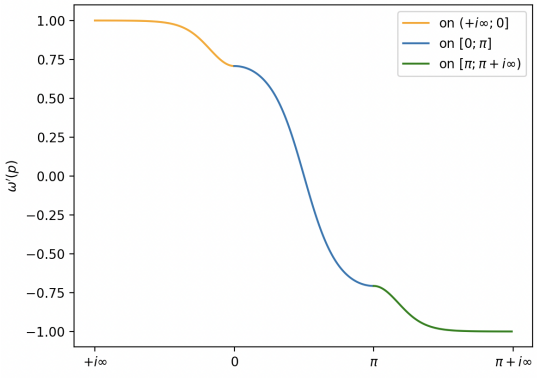
假设 $v^+ < V^+$ 意味着存在满足以下条件的 $\varepsilon = \varepsilon(v^+) > 0$

$$\operatorname{Re}\mathcal{L}_v(p) < 0 \quad \text{for each } 0 \le v \le v^+ \text{ and } p \in D \cap U \text{ with } \operatorname{dist}(p, \partial D) < \varepsilon. \tag{21}$$

我们的目标是在足够大的区域族中构造一个保角变量变换 $z_v(p)$，使得 $\mathcal{L}_v = F_{\theta(v)} \circ z_v$；这就是下文的命题 2。首先，下文的引理 1 推导出导数 $\omega'(p)$ 的一些有用性质（见图 7）。引理 2 和引理 3 描述了 $\mathcal{L}_v(p)$ 和 $F_\theta(z)$ 作为共形映射的行为（见图 8）。引理 4 证明了拉格朗日量在某个定义域内的单叶性，这对于在命题 2 中证明 $z_v(p)$ 的单射性至关重要。最后，引理 5 对第3.3节中定理 3 的证明至关重要：它使我们能够将积分路径移入复平面，并为 $v > \hat{}v$ 得到所需的误差界。



(a) $\omega'(p)$ 在 $D \cap U$ 上



(b) $\omega'(p)$ 在 ∂U 上

图 7：说明将定理 3 应用于量子游走时的 $\omega'(p)$，其中 $\omega(p)$ 由式 (7) 给出。注意，$\omega'(p) = \cos p + \cos 2p$ 是裂缝域 $D \cap U$ 到下半平面的双射共形映射，并且在 ∂U 上为实函数且递减。参见引理 1。

引理 1 (导数)。导数 $\omega'(p)$ 在 ∂U 上为实数，并且当 p 沿 ∂U 逆时针移动时递减（见图 7）。此外，对于每个 $p \in \partial U \setminus \{0, \pi\}$，我们有 $\omega'(0) > 0$, $\omega'(\pi) < 0$, $\omega'(+i\infty) \geq V^+$, $\omega''(0) = 0$, $\omega''(p) \neq 0$，且 $\omega'''(0) < 0$。

证明。回忆 $\omega(p)$，因此 $\omega'(p)$ 在包含 ∂U 的定义域 D 中是实解析且 2π-周期的。此外，$\omega'(p)$ 是偶函数，因为 $\omega(p)$ 是奇函数。因此，对于每个 $p \in \partial U$，有

$$\overline{\omega'(p)} = \omega'(\overline{p}) = \begin{cases} \omega'(p), & \text{if } p \in [0; \pi], \\ \omega'(-p), & \text{if } p \in [0; +i\infty), \\ \omega'(2\pi - p), & \text{if } p \in [\pi; \pi + i\infty), \end{cases} = \omega'(p),$$

因此 $\omega'(p) \in \mathbb{R}$。根据定向原理，$\omega'$ 在 ∂U 上递减，因为 $\omega'(D \cap U) \subset H^-$。

由于 $\omega'(D \cap U) \subset H^-$，因此 ω'' 在 $\partial U \setminus \{0, \pi\}$上从不为零。此外，$\omega''(0) = 0$ 且 $\omega'''(0) < 0$，因为 ω' 将 U 中 0 附近的四分之一圆盘局部映射到 H^- 中的半圆盘。

由于 ω 是奇函数且具有 2π-周期性，我们有 $\omega(0) = \omega(\pi) = 0$。根据中值定理，存在$r \in (0; \pi)$使得 $\omega'(r) = 0$。由于 ω' 在 $[0; \pi]$上递减，我们得到 $\omega'(0) > 0$ 且 $\omega'(\pi) < 0$。

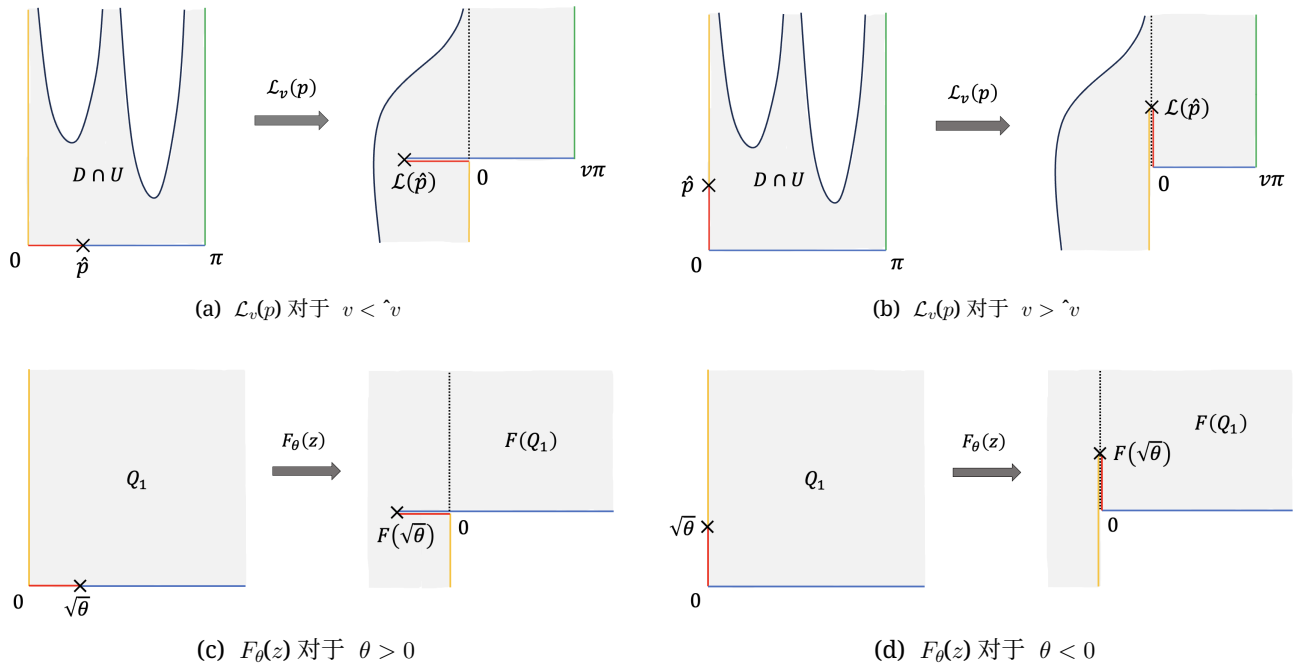
剩下需要证明 $\omega'(+i\infty) \geq V^+$。首先注意到，$D \cap U$是单连通的，因为 D是单连通的。因此，要么 $D = \mathbb{C}$（从而 $\partial D = \varnothing$），要么对于每个充分大的 $p \in [0; +i\infty)$，线段 $[p; p + \pi]$ 与∂D相交。若 $D = \mathbb{C}$，则 ω'是从 $U \to H^-$到 $\omega'(\partial U) \subset \mathbb{R}$的单射共形映射，因此根据边界对应原理 [25, 定理 2.24]，有 $\omega'(\partial U) = \mathbb{R}$ 且 $\omega'(+i\infty) = +\infty = V^+$。否则，令 p' 为 $[p; p + \pi]$ 与 ∂D 的最左交点（该交点存在，因为 ∂D 是闭集）。选取 $q \in [p; p')$使得 $|q - p'| < 1/|p|$。由于 ω 是奇实解析函数，我们有 $\operatorname{Re}\omega(p) = 0$，因此

$$\frac{\operatorname{Re}\omega(q)}{\operatorname{Re} q} = \frac{\operatorname{Re}\omega(q) - \operatorname{Re}\omega(p)}{\operatorname{Re} q - \operatorname{Re} p} = \operatorname{Re}\omega'(r) \quad \text{for some } r \in [p; q]. \tag{22}$$

当 $p \to +i\infty$ 时，点 q 趋于 $\partial D \cap U$，且 (22) 的右侧趋于 $\omega'(+i\infty)$，因为弧$[p; p']$ 确定了 $D \cap U$ 的一个素端，而双射共形映射 ω' 可连续延拓到每个素端（参见 [25, 定理 2.13 和 2.20]）。由 (20) 可得不等式 $\omega'(+i\infty) \geq V^+$。

□

引理 2（拉格朗日量）。在条带 |实部 $p| \leq \pi$ 中，函数 $\mathcal{L}_v(p)$ 恰有两个非退化临界点 $\pm\hat{p}(v) = \pm(\omega'|_{\partial U})^{-1}(v)$，当 $v \neq \hat{v}$ 时：当 $v < \hat{v}$ 时，它们属于 $(-\pi; \pi)$；当 $v > \hat{v}$ 时，它们属于 $(-i\infty; +i\infty)$；而当 $v = \hat{v}$ 时，原点处有唯一的二阶临界点。此外，$\mathcal{L}$ 将这些区间映射到由坐标轴平行的以下区间（见图 8a 和 8b）



(a) $\mathcal{L}_v(p)$ 对于 $v < \hat{v}$

(b) $\mathcal{L}_v(p)$ 对于 $v > \hat{v}$

(c) $F_\theta(z)$ 对于 $\theta > 0$

(d) $F_\theta(z)$ 对于 $\theta < 0$

图 8：作为共形映射的拉格朗日量 $\mathcal{L}_v(p)$ 及其标准形 $F_\theta(z)$。参见引理 2–3。

∂U 双射　　别映射到以下与坐标轴平行的区间（见图 *8a* 和 *8b*　　）：

$$\begin{cases} \mathcal{L}\colon (+i\infty;0],[0;\hat{p}],[\hat{p};\pi],[\pi;\pi+i\infty) \mapsto (-i\infty;0],[0;\mathcal{L}(\hat{p})],[\mathcal{L}(\hat{p});v\pi],[v\pi;v\pi+i\infty), & \text{if } v \le \hat{v}, \\ \mathcal{L}\colon (+i\infty;\hat{p}],[\hat{p};0],[0;\pi],[\pi;\pi+i\infty) \mapsto (-i\infty;\mathcal{L}(\hat{p})],[\mathcal{L}(\hat{p});0],[0;v\pi],[v\pi;v\pi+i\infty), & \text{if } v \ge \hat{v}, \end{cases}$$

其中 $\mathcal{L}(\hat{p}) < 0$ 当 $v < \hat{v}$时，$\mathcal{L}(\hat{p}) \in (0;+i\infty)$ $v > \hat{v}$，并且 $\mathcal{L}(\hat{p}) = 0$ 当 $v = \hat{v}$时。

证明。由于 $\mathcal{L}'(p) = v - \omega'(p)$，因此当 $\omega'(p) = v$时，p 是 $\mathcal{L}$ 的临界点。显然，$\mathcal{L}$ 在 U内部没有临界点，因为 $\omega'(D \cap U) \subset H^-$。由于 ω'在 ∂U上递减，$\omega'(\pi) < 0$，并且根据引理 1，$\omega'(+i\infty) \ge V^+$，因此当 $v \le \hat{v}$时，$v \in \omega'([0;\pi))$，当 $v \ge \hat{v}$时，$v \in \omega'([0;+i\infty))$。所以，$\mathcal{L}|_{\mathrm{Cl}\,U}$ 有唯一的临界点 $\hat{p} = \hat{p}(v) = (\omega'|_{\partial U})^{-1}(v)$；当 $v < \hat{v}$ 时，该点属于 $(0;\pi)$，当 $v > \hat{v}$时，该点属于 $(0;+i\infty)$。当 $v \ne \hat{v}$时，该临界点是非退化的，因为 $\omega'' \ne 0$ 在 $(0;\pi) \cup (0;+i\infty)$；当 $v = \hat{v}$时，它是二阶的，因为 $\omega''(0) = 0$ 并且 $\omega'''(0) \ne 0$。由对称性，$\mathcal{L}$ 具有所需的临界点。

让我们求出 $\mathcal{L}(\partial U)$。由于 $\mathcal{L}'$ 在 $\partial U \setminus \{\hat{p}\}$ 上为实数且不为零，$\mathcal{L}$ 将 $+i\infty$、0、$\hat{p}$、π 和 $\pi + i\infty$ 之间的区间双射到 ∂U 上这些端点处极限值之间的区间。

显然，$\mathcal{L}(0) = 0$，因为 $\mathcal{L}$ 是奇函数；而 $\mathcal{L}(\pi) = v\pi - \omega(\pi) = v\pi$，因为 ω 是奇函数且具有 2π-周期。由于 $\mathcal{L}'(p) = v - \omega'(p)$ 在 $[0;+i\infty)$ 上递减，并在 $[0;\pi]$ 上递增，因此可得 $\mathcal{L}'(+i\infty) < \mathcal{L}'(\hat{p}) = 0$，进而 $\mathcal{L}(+i\infty) = \int_0^{+i\infty} \mathcal{L}'(p)\,dp = -i\infty$。类似地，由于 $\mathcal{L}'(p)$ 在 $[\pi;\pi+i\infty)$ 上递增，因此可得$\mathcal{L}'(\pi+i\infty) > 0$，进而 $\mathcal{L}(\pi+i\infty) = \mathcal{L}(\pi) + \int_\pi^{\pi+i\infty} \mathcal{L}'(p)\,dp = v\pi + i\infty$。至于 $\mathcal{L}(\hat{p})$，我们分三种情况讨论。若 $v < \hat{v}$，则有 $\mathcal{L}(\hat{p}) = \int_0^p \mathcal{L}'(p)\,dp < 0$，因为 $\mathcal{L}'(p)$ 在 $[0;\hat{p})$ 上为 < 0。若 $v > \hat{v}$，则有 $\hat{\mathcal{L}}(\hat{p}) = \int_0^p \mathcal{L}'(p)\,dp \in (0;+i\infty)$，因为 $\mathcal{L}'(p)$ 在 $[0;\hat{p})$ 上为 > 0。若 $v = \hat{v}$，则有 $\mathcal{L}(\hat{p}) = \mathcal{L}(0) = 0$。 □

回顾一下我们的约定：对于 $\overline{\theta} < 0$，$\sqrt{\theta}$ 的虚部为正。

引理 3 (标准形). 函数 $F_\theta(z)$ 对每个 $\theta \ne 0$ 都恰有两个非退化临界点 $\pm\sqrt{\theta}$，并且当 $\theta = 0$ 时，在原点处有一个唯一的二阶临界点。此外，$F|_{Q_1}$ 是到 $F(Q_1) = \mathbb{C} \setminus (\mathrm{Cl}\,Q_4 \cup [0;F(\sqrt{\theta})])$ 上的双射共形映射，而 F 将构成 ∂Q_1 的区间双射地映射到

以下与坐标轴平行的区间（见图 8c 和图 8d）：

$$\begin{cases} F\colon (+i\infty;0],[0;\sqrt{\theta}],[\sqrt{\theta};+\infty)\mapsto(-i\infty;0],[0;F(\sqrt{\theta})],[F(\sqrt{\theta});+\infty), & \text{if } \theta\geq 0,\\ F\colon (+i\infty;\sqrt{\theta}],[\sqrt{\theta};0],[0;+\infty)\mapsto(-i\infty;F(\sqrt{\theta})],[F(\sqrt{\theta});0],[0;+\infty), & \text{if } \theta\leq 0. \end{cases} \tag{23}$$

此外，$\theta\mapsto F_\theta(\sqrt{\theta})$ 在 $-\infty;\ 0]$, $[0;\ +\infty)$ 与 $[0;\ +i\infty)$ 之间分别构成双射，$(-\infty;\ 0]$,。

证明。我们有 $F'(z)=z^2-\theta=0$ 当且仅当 $z=\pm\sqrt{\theta}$。这些临界点对于$\theta\neq 0$而言是非退化的，因为 $F''(\sqrt{\theta})=2\sqrt{\theta}\neq 0$；而对于 $\theta=0$，我们有一个二阶临界点，因为 $F'''(0)=2\neq 0$。

我们来求 $F(\partial Q_1)$。由于 F'在$\partial Q_1\setminus\{\sqrt{\theta}$}上为实数且不取零，$F$将$+i\infty$、0、$\sqrt{\theta}$、$+\infty$ 之间的区间双射到 ∂Q_1 上这些端点处极限值之间的区间。显然，$F(0)=0$，$F(+i\infty)=-i\infty$，并且 $F(+\infty)=+\infty$，因为当 $z\to\infty$时，$F(z)\sim z^3/3$。这意味着（23）。显然，映射 $\theta\mapsto F_\theta(\sqrt{\theta})=-\frac{2}{3}\theta^{3/2}$在 $(-\infty;\ 0]$, $[0;\ +\infty)$ 与 $[0;\ +i\infty)$、$(-\infty;\ 0]$,之间构成双射。

根据 Noshiro–Warschawski 定理 [11, 定理 2.16],，映射 $F|_{Q_1}$ 是保角且单射的，因为在凸域 Q_1 中，$\operatorname{Im} F'(z)=\operatorname{Im}(z^2)$ 的符号恒定。由于当 $z\to\infty$ 时，$F(z)\sim z^3/3$，由 $F(\infty):=\infty$ 可知，$F|_{Q_1}$ 在广义意义下连续延拓到 $\partial Q_1\cup\{\infty\}$。因此，通过紧性论证，$\partial F(Q_1)=F(\partial Q_1)$。于是，像 $F(Q_1)$ 被确定为具有由 (23) 给出的边界 $F(\partial Q_1)$ 的唯一域（对 $\theta=0$ 存在无关紧要的歧义）。 □

对于每个 $v>\hat{v}$，我们将把积分路径在 $\mathbb{C}$ 的以下子集中移动（因此需要在变量替换中将它们包括在内；参见图 9 和图 10）：

$$\Pi=\Pi_v:=\{z\in\mathbb{C}\colon 0<\operatorname{Re} z<\pi v,\operatorname{Im} z>0\},$$
$$M=M_v:=\begin{cases}\text{component of } \mathcal{L}^{-1}(\Pi)\cap U \text{ whose boundary contains } \pi, & \text{if } v>0,\\ \varnothing, & \text{if } v=0.\end{cases}$$

引理 4（单叶性域）。对于每个 $v>0$，集合 $\mathcal{L}^{-1}(\Pi)$ 在 U 中包含 π 的一个邻域，因此 M 定义良好且非空，并且限制 $\mathcal{L}|_M$ 是一个同胚 $M\leftrightarrow\Pi$。此外，M 是 $\mathcal{L}^{-1}(\Pi)\cap U$ 的唯一连通分支，其边界与 ∂U 有无穷多个公共点。

这个引理的证明相当技术性，这是因为我们避免对共形映射 ω' 作任何额外假设。大多数替代方法在 $(\omega')^{-1}(\infty)=\infty$ 的情况下都会失效。

证明。对于 $v>0$，集合 $\mathcal{L}^{-1}(\Pi)$，因此 M，在 U 中包含下述连通集的一个邻域，该连通集包含 π（见图9）：

$$\Gamma:=\begin{cases}(\hat{p};0]\cup(0;\pi)\cup[\pi;\pi+i\infty), & \text{if } v\geq\hat{v},\\ \left((\mathcal{L}|_{(0;\pi]})^{-1}(0);\pi\right]\cup[\pi;\pi+i\infty), & \text{if } v<\hat{v}.\end{cases}$$

事实上，根据引理 2 和定向原理（图 8），对于每个 $p\in\Gamma$，映射 $\mathcal{L}$ 将 U 中 p 的一个邻域映入 Π。因此 M 定义良好且非空。

根据定向原理，$\partial U\setminus\operatorname{Cl}\Gamma$ 与 $\operatorname{Cl}(\mathcal{L}^{-1}(\Pi)\cap U)$ 不相交。因此，M是 $\mathcal{L}^{-1}(\Pi)\cap U$中唯一一个边界与 ∂U 有无穷多个公共点的连通分支。

接下来，我们证明 $\mathcal{L}|_M$ 是真映射。我们验证序列真性判据：对于每个收敛到点 $p_0\in\partial M\cup\{\infty\}$的序列$p_n\in M$，其像序列 $\mathcal{L}(p_n)$在 Π中没有极限。考虑以下四种情况。

情形 $p_0\in\partial U$。根据连续性，$\mathcal{L}(p_n)\to\mathcal{L}(p_0)$，由引理 2 可知，它不属于 Π。

情形 $p_0\in D\cap U$。根据连续性，$\mathcal{L}(p_n)\to\mathcal{L}(p_0)$。若 $p_0\in\mathcal{L}^{-1}(\Pi)$，则 $p_0\in M$，因为 $p_0\in D\cap U$,$\mathcal{L}^{-1}(\Pi)\cap U$ 是开集，且所有 $p_n\in M$。这与假设 $p_0\in\partial M$矛盾，因此 $\mathcal{L}(p_0)\notin\Pi$。

情形 $p_0\in\partial D\cap U$。根据 (21)，这实际上是不可能的，因为在 $D\cap U$ 中，∂D 的 ε-邻域内的 $\mathcal{L}<0$ 的实部为 $\operatorname{Re}\mathcal{L}<0$，但 $\operatorname{Re}\mathcal{L}(p_n)>0$，如 $p_n\in M$ 所示。

情形 $p_0 = \infty$。取一个子序列后，我们可以假设对某个 $X \in [0,\ \operatorname{Re} p_n \to X\ ;\ \pi]$ 且 $\operatorname{Im} p_n \to +\infty$。下面分别处理 $X = 0, \pi$ 和 $X \in (0; \pi)$，以此证明 $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(p_n) = \infty$。

为此，我们证明 D 包含 $[X$ 的一个邻域；$X + i\infty)$。由于对于每个 $p \in D \cap U$，$\operatorname{Im} \mathcal{L}'(p) = -\operatorname{Im} \omega'(p) > 0$，因此 $\operatorname{Re} \mathcal{L}(p)$ 在 $[p_n$ 的每个连通分支上都随 $\operatorname{Im} p$ 的减小而增大；$\operatorname{Re} p_n] \cap D$。根据 (21)，$\operatorname{Re} \mathcal{L} < 0$ 在 $D \cap U$ 中某个 $\varepsilon > 0$ 的 ε-邻域内属于 ∂D，且 $\operatorname{Re} \mathcal{L}(p_n) > 0$，因此 $[p_n;\ \operatorname{Re} p_n]$ 与该邻域不相交。于是 $\operatorname{dist}([p_n; \operatorname{Re} p_n], \partial D) \geq \varepsilon$。由于 $n \to +\infty$，我们有 $\operatorname{Re} p_n \to X$ 和 $\operatorname{Im} p_n \to +\infty$，从而 $\operatorname{dist}([X;\ X + i\infty)\ \partial D) \geq \varepsilon$。因此，半条带 $S := \{p \in H^+\colon\ |\operatorname{Re} p - X| < \varepsilon\}$ 属于 D，并且不失一般性地，它包含所有 p_n。

子情形 $X = 0$ 或 π。在此情形下，根据引理 2，$\mathcal{L}(X + i\infty) = \infty$。为证明它等于 $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(p_n)$，我们应用有界解析函数的 Lindel¨of 定理 [8, 定理 1.5.7]。考虑扇形域 $C := \{e^{ip}\colon\ p \in S\}$上的解析函数 $f(z) := \mathcal{L}(-i \log z)$，其中 $\log z$ 表示对数的一个连续分支。我们将其改为有界函数。映射 f 在 $C \cap H^+$ 内是单射，因为根据 $\operatorname{Im} \mathcal{L}'|_{S\cap U} = -\operatorname{Im} \omega'|_{S\cap U} > 0$ 和 Noshiro–Warschawski 定理，$\mathcal{L}$ 在 $S \cap U$ 内是单射。由对称性，$f(z)$ 在 $C \cap H^-$ 内是单射，因为 $\mathcal{L}(-p) = -\mathcal{L}(p)$。取一点 $q \in f(\underline{C}) \setminus (\partial f(\underline{C \cap H^+}) \cup \partial f(C \cap H^-)$。它至多有两个原像，因此存在一个更小的扇形域 $C' := \{e^{ip}\colon\ |\operatorname{Re} p - X| < \varepsilon', \operatorname{Im} p > 0\}$，使得对某个 $0 < \varepsilon' < \varepsilon$，该扇形域不与原像的邻域相交。于是，函数 $(f(z) - q)^{-1}$ 在 C' 内有界。值 $\mathcal{L}(X + i\infty)^{-1} = 0$ 是它在 0 处的径向极限。根据 Lindel¨of 定理，它在 0 处的角极限也为 0。由于 $\operatorname{Re} p_n \to X$ 和 $\operatorname{Im} p_n \to +\infty$，可知 $\lim_{n\to\infty}(\mathcal{L}(p_n) - q)^{-1}$ 也为 0。因此 $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(p_n) = \infty$。

子情形 $X \in (0;\ \pi)$。令 $\delta := \min(\varepsilon,\ X,\ \pi - X)$。下面证明有限的 $\operatorname{Re} \mathcal{L}(X + i\infty)$ 和 $\mathcal{L}'(X + i\infty)$ 存在。

极限 $\operatorname{Re} \mathcal{L}(X + i\infty) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 存在，因为当 $\operatorname{Im} p$ 增加时，$\operatorname{Re} \mathcal{L}$ 递减。设其为 $-\infty$。将 Lindel¨of 定理应用于 $f(z) \colon = \exp(\mathcal{L}(-i \widetilde{\log}\, z))$，它在 $\{e^{ip}\colon\ |\operatorname{Re} p - X| < \delta,\ \operatorname{Im} p > 0\}$ 中有界，因为 $\operatorname{Re} \mathcal{L}$ 在 $[X - \delta;\ X + \delta]$ 上的最大值对其构成上界。我们得出 $\lim_{n\to\infty} \exp(\mathcal{L}(p_n)) = \exp \operatorname{Re} \mathcal{L}(X + i\infty) = 0$，这与 $\operatorname{Re} \mathcal{L}(p_n) > 0$ 矛盾。因此，$\operatorname{Re} \mathcal{L}(X + i\infty) \in \mathbb{R}$。

为证明 $\mathcal{L}'(X + i\infty)$ 的存在性，引入函数 $\sigma(p) \colon = {}^{\mathcal{L}'}\!(p)\text{–}\operatorname{Re} \mathcal{L}'(X+iy)\ i\,\cancel{\operatorname{Im} \mathcal{L}'(X+iy),}$ 对每个 $y > \delta$ 都成立。它满足 $\operatorname{Re} \sigma(p) = \operatorname{Im} \mathcal{L}'(p) \operatorname{Im} \mathcal{L}'(X+iy) > 0$，在 δ 的 $X + iy$ 邻域内成立，并且 $\sigma(X + iy) = 1$。根据 [34,推论 2，3], 我们有 $|\sigma'(X + iy)| \leq 2/\delta$，因此

$$|\mathcal{L}''(X + iy)| \leq \frac{2}{\delta} \operatorname{Im} \mathcal{L}'(X + iy). \tag{24}$$

那么对于 $\delta < y_1 < y_2$，我们有

$$|\mathcal{L}'(X + iy_2) - \mathcal{L}'(X + iy_1)| \leq \int_{y_1}^{y_2} |\mathcal{L}''(X + iy)|\, dy \overset{\text{by (24)}}{\leq} \frac{2}{\delta} \int_{y_1}^{y_2} \operatorname{Im} \mathcal{L}'(X + iy)\, dy =$$
$$= \frac{2}{\delta}(\operatorname{Re} \mathcal{L}(X + iy_1) - \operatorname{Re} \mathcal{L}(X + iy_2)) \to 0 \qquad \text{as } y_1, y_2 \to +\infty, \tag{25}$$

因为 $\operatorname{Re} \mathcal{L}(X + i\infty) \in \mathbb{R}$。根据柯西准则，存在有限极限 $\mathcal{L}'(X + i\infty)$。

由 $\mathcal{L}' = v - \omega'$ 在 $D \cap U$ 中的单射性，我们有 $\mathcal{L}'(X + i\infty) \neq 0$：由于根据引理 1，$\omega'$ 在 ∂U 上为实数，$\hat{}p$ 在 $D \cap U$ 中的某个邻域经 $\mathcal{L}'$ 映射后的像已覆盖 H^+ 中 0 的一个邻域，因此当 $y \to +\infty$ 逐渐趋近于 $\hat{}p$ 时，值 $\mathcal{L}'(X + iy) \in H^+$ 最终会与某个靠近 $\hat{}p$ 的 $p \in D \cap U$ 所对应的值 $\mathcal{L}'(p)$ 重合。

因此，$\mathcal{L}'(X + i\infty) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。由于 1–1 共形映射 $\mathcal{L}'\colon\ D \cap U \to H^+$ 可连续延拓至每个素端 [25, 定理 2。20] 和 $p_n \in S \subset D$，可知 $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}'(p_n) = \mathcal{L}'(X + i\infty)$。于是

$$\mathcal{L}(p_n) = \mathcal{L}(p_1) + \int_{p_1}^{p_n} \mathcal{L}'(p)\, dp \to \infty \qquad \text{as } n \to \infty$$

因为 $\operatorname{Im} p_n \to +\infty$。这证明了 $\mathcal{L}|_M$ 是适当的。

由于平面子集之间的每个本原映射都是闭映射，$\mathcal{L}(M)$ 在 Π 中是闭集。由于 $\mathcal{L}$ 是非常值解析函数，$\mathcal{L}(M)$ 在 Π 中是开集。根据证明的第一段，$\mathcal{L}(M)$ 非空。因此，$\mathcal{L}(M) = \Pi$。由于每个本原共形映射都是覆盖映射，根据引理 [17, 2], M 是路径连通的，而 Π 是单连通且局部路径连通的，因此可知 $\mathcal{L}|_M$ 是 $M \leftrightarrow \Pi$ 的同胚。

□

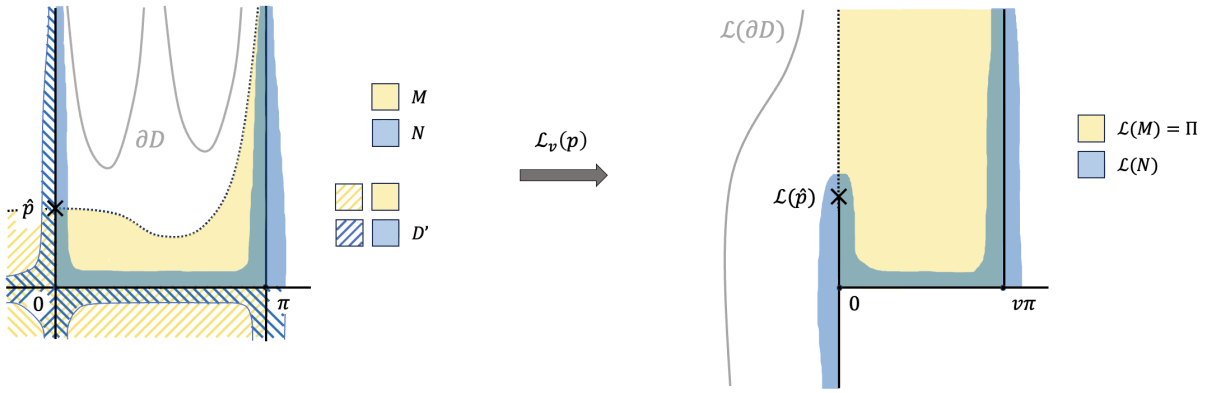


图 9：T 域 M, N, D'及其在 $v > \hat{v}$ 下的像。参见命题 2.

命题 2（保角变量变换）。存在一个关于坐标轴对称且包含 $\partial U \cup M$（图9）的域族 $D'_v \subset D$、一个奇单射函数的实解析族z_v：$D'_v \to \mathbb{C}$，以及一个实解析函数 θ：$V \to \mathbb{R}$，由（20）给出，使得对每个 $v \in V$，都有 $\mathcal{L}_v|_{D'_v} = F_{\theta(v)} \circ z_v$。此外，我们有 $z_v(\hat{p}(v)) = \sqrt{\theta}(v)$ 以及 $z'_v(\hat{p}(v)) = 1/h(v)$，记号如（20）所示。

证明。选取 $\theta(v) \in \mathbb{R}$，使临界值 $\mathcal{L}_v(\hat{p})$ 和 $F_\theta(\sqrt{\theta})$ 相匹配（也就是说，使图 8 中的“叉号对齐”）。由此得到式 (20) 中 $\theta(v)$ 的表达式，因为根据引理 2–3，$\mathcal{L}_v(\hat{p})$ 和 $F_\theta(\sqrt{\theta})$ 分别属于相应的坐标射线。

所需的定义域 D' 是 $\partial U, M$、一族足够小的 N（它们是 Q_1 中 ∂U 的邻域）及其关于坐标轴的对称副本的并集（见图9）。通过将 N 取得足够小，我们可以假设 $\mathcal{L}|_N$ 是单射，$N \cap \mathcal{L}^{-1}(\Pi) \subset M$, $\mathcal{L}(N) \cap [v\pi; +\infty) = \varnothing$，且 N 也是单连通的（附录 A 中的命题 5 证明了这样一族 N 的存在）。

函数 $z(p) = z_v(p)$ 分几个步骤构造。首先，我们定义（见图 8）

$$z(p) := (F|_{Q_1})^{-1}(\mathcal{L}(p)) \qquad \text{for each} \quad p \in M \cup N.$$

下面证明 $z(p)$ 定义良好且为单射。由引理 3，逆映射 $(F|_{Q_1})^{-1}$：$F(Q_1) \to Q_1$存在，且 $\mathcal{L}(M) \subset \Pi \subset F(Q_1)$。由引理 2–3，得到 $\partial F(Q_1) = \mathcal{L}([0; +i\infty) \cup [0; \pi)) \cup [v\pi; +\infty)$。于是$\mathcal{L}(N) \cap \partial F(Q_1) = \varnothing$，因为 $\mathcal{L}|_N$是单射，且 $\mathcal{L}(N) \cap [v\pi; +\infty) = \varnothing$。接着，$\mathcal{L}(N) \subset F(Q_1)$，因为 N是连通的，且 $\partial\mathcal{L}(N) \ni \mathcal{L}(\hat{p}) = F(\sqrt{\theta})$（除去关于 $v = \hat{v}$ 的无关紧要的歧义）。因此，$z(p)$ 定义良好。映射 $z|_M$ 和 $z|_N$ 是单射，因为根据引理 4 以及 N的选取，$\mathcal{L}|_M$ 和 $\mathcal{L}|_N$ 均为单射。由于$\mathcal{L}(M) \subset \Pi$且 $N \cap \mathcal{L}^{-1}(\Pi) \subset M$，可得 $\mathcal{L}(N \setminus M) \cap \mathcal{L}(M) = \varnothing$，从而 $z(N \setminus M) \cap z(M) = \varnothing$。因此，$z(p)$ 是单射。

接下来，让我们将 $z(p)$ 连续延拓至 $\partial N \cap \partial Q_1 \supset [0; \pi] \cup [0; +i\infty)$。不失一般性，假设 N 与 $\partial N \cap \partial Q_1$ 相邻。单射共形映射 $\mathcal{L}|_N$ 可延拓为 $\partial N \cap \partial Q_1$ 与 $\mathcal{L}(N)$ 的一组素端之间的同胚，这些素端对应于 $\mathcal{L}(\partial N \cap \partial Q_1)$ [25, 定理 2.20]。由引理 2–3，单射共形映射 $(F|_{Q_1})^{-1}|_{\mathcal{L}(N)}$ 可延拓为这组素端与 ∂Q_1 的一个连通子集之间的同胚。因此，映射 $z = (F|_{Q_1})^{-1} \circ \mathcal{L}$ 可连续延拓至 $\partial N \cap \partial Q_1$，且满足 $z(\partial N \cap \mathbb{R}) \subset [0; +\infty)$ 和 $z([0; +i\infty)) \subset [0; +i\infty)$。此外，由引理 2–3，该延拓将 $+i\infty$、0、$\hat{p}$ 和 π 之间的区间映射为 $+i\infty$、0、$\sqrt{\theta}$ 和 $(F|_{(0;+\infty)})^{-1}(v\pi)$ 之间的区间（当 $v > \hat{v}$ 时，0、$\hat{p}$ 与 0、$\sqrt{\theta}$ 的顺序互换）。特别地，对每个 v，有 $z(+i\infty) = +i\infty$、$z(0) = 0$，以及 $z(\hat{p}) = \sqrt{\theta}$。

现在，我们可以利用施瓦茨反射原理 [25, 定理 9.1],，将 $z(p)$ 解析延拓至 D'，因为 $z(\partial N \cap \partial Q_1) \subset \partial Q_1$，且 $M \cup N$与 $\partial N \cap \partial Q_1$ 相邻。由于 $z(M \cup N) \subset Q_1$，映射 z：$D' \to \mathbb{C}$ 是单射。

接下来，我们验证 θ 和 z 在 v中的解析性。注意，根据反函数定理（由引理 2 可知 $\omega''(\hat{p}) = -\mathcal{L}''(\hat{p}) \neq 0$），对每个 $v \neq \hat{v}$，$\hat{p}(v) = (\omega')^{-1}(v)$ 都是解析的。因此，$\theta(v)$ 的表达式 (20) 是

对每个 $v \neq \hat{v}$，实解析，因为由引理 2 可知 $\mathcal{L}(\hat{p}) = v\hat{p} - \omega(\hat{p}) \neq 0$。我们来检查其在 $v = \hat{v}$ 处的实解析性。由于 $\omega'(p)$ 是偶函数，存在一个实解析函数 f_1，使得

$$\omega'(p) = \omega'(0) - f_1(p^2), \qquad \text{where} \quad f_1'(0) = -\frac{\omega'''(0)}{2} > 0 \quad \text{by Lemma 1.}$$

对足够小的 $\nu := \hat{v} - v$ 使用反函数定理后，我们便可计算

$$\hat{p}(v)^2 = f_1^{-1}(\nu) = \nu\left(\frac{-2}{\omega'''(0)} + \nu f_2(\nu)\right), \qquad \hat{p}(v) = \sqrt{\nu}\left(\sqrt{\frac{-2}{\omega'''(0)}} + \nu f_3(\nu)\right),$$
$$\mathcal{L}(\hat{p}) = v\hat{p}(v) - \omega(\hat{p}(v)) = \nu^{3/2}\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{-2}{\omega'''(0)}} + \nu f_4(\nu)\right), \qquad \theta(v) = \nu\left(\sqrt[3]{\frac{-2}{\omega'''(0)}} + \nu f_5(\nu)\right) \tag{26}$$

对于某个实解析的 $f_2(\nu)\ldots, f_5(\nu)$，因为 $\hat{p}(v) \in \partial Q_1$, $F(\sqrt{\theta}) = \mathcal{L}(\hat{p})$，且 $\theta(v) \in \mathbb{R}$。这表明$\theta(v)$是实解析的。

我们来证明 $z_v(p)$ 是一个实解析族。对于 $p \in D' \cap Q_1$，函数 $v \mapsto z_v(p) = F^{-1}_{\theta\ v\ ()}(\mathcal{L}_v(p))$ 是实解析的，因为 $\theta(v)$ 是实解析的，$\mathcal{L}_v|_{D'\cap Q_1}$ 和 $F_\theta|_{Q_1}$ 是解析且单射的，并且根据反函数定理的一个版本（见附录B中的引理 21），$(F_\theta|_{Q_1})^{-1}$构成一个解析族。类似地，对于 $p \in D' \cap \partial Q_1 \setminus \{\hat{p}\}$，有 $F'(z(p)) \neq 0$，因此 F在某个区域族$B \ni z(p)$中是单射的（该区域族构成以 $(z(p)\ v) \in \mathbb{C} \times V$ 为中心的一个小邻域）。于是，$(F|_B)^{-1} \circ \mathcal{L}$在 v 中解析，并且在 p 处与 z_v 一致。对于 $p \in D' \setminus \{\pm\hat{p}\}$，函数 $v \mapsto z_v(p)$ 根据对称性是解析的。最后，根据可去奇点定理的一个版本（见附录B中的引理22），它在 $p = \pm\hat{p}$ 处解析。

还需验证 $z'(\hat{p}) = 1/h(v)$。对恒等式 $\mathcal{L}(p) = F(z(p))$ 求导，得到

$$\mathcal{L}'(p) = F'(z(p))\, z'(p), \tag{27}$$
$$\mathcal{L}''(p) = F''(z(p))\, z'(p)^2 + F'(z(p))\, z''(p), \tag{28}$$
$$\mathcal{L}'''(p) = F'''(z(p))\, z'(p)^3 + 3F''(z(p))\, z'(p)\, z''(p) + F'(z(p))\, z'''(p). \tag{29}$$

如果 $v \neq \hat{v}$，则式（28）意味着

$$\mathcal{L}''(\hat{p}) = F''(\sqrt{\theta})\, z'(\hat{p})^2 + F'(\sqrt{\theta})\, z''(\hat{p}) = 2\sqrt{\theta} z'(\hat{p})^2,$$
$$z'(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\mathcal{L}''(\hat{p})}{2\sqrt{\theta}}} = \frac{|\omega''(\hat{p})|^{1/2}}{|4\theta|^{1/4}} = 1/h(v),$$

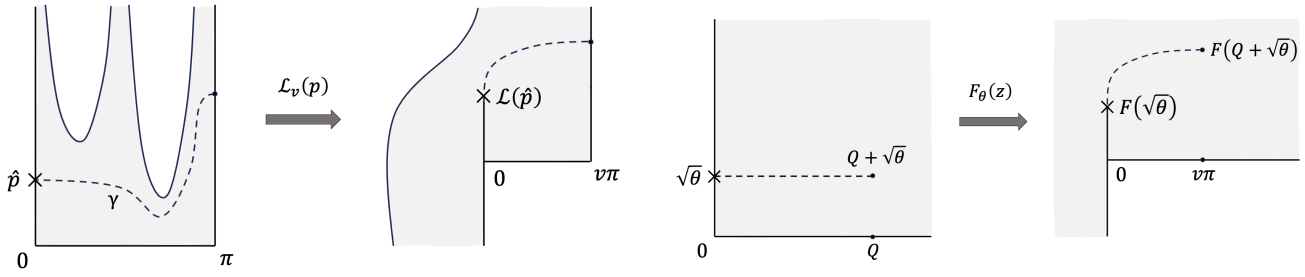
由于根据定向原理，$z' > 0$ 在坐标轴上，因此我们选择平方根的正分支。如果 $v = \hat{v}$，则由（29）可得

$$\mathcal{L}'''(0) = F'''(0)\, z'(0)^3 + 3F''(0)\, z'(0)\, z''(0) + F'(0)\, z'''(0) = 2z'(0)^3,$$
$$z'(0) = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{L}'''(0)}{2}} = (-\omega'''(0)/2)^{1/3} = 1/h(v);$$

该分支是正确的，因为 $z'(0) \in \mathbb{R}$。 □

注 2. 由命题 2 可知，函数 $\theta(v)$、$\hat{p}(v)^2$、 $a(\hat{p}(v))$ 和 $h(v)$ 均为实解析函数。事实上，根据该命题， $\theta(v)$ 是实解析的；$\hat{p}(v)^2 = z_v^{-1}\left(\sqrt{\theta(v)}\right)^2$ 是实解析的，因为 z_v^{-1}是奇函数；$a(\hat{p}(v))$ 是实解析的，因为 $a(p)$ 是偶函数；而 $h(v) = 1/z'(\hat{p}(v))$ 是实解析的，因为 $z'(p)$ 是偶函数。注 3. 对所有 $v \in V$，我们有 $\theta'(v) < 0$，且 $\theta'(\hat{v}) = -h(\hat{v})$。事实上，对于 $v < \hat{v}$，由引理 2 可得 $\mathcal{L}(\hat{p}) < 0$，因此 $\theta(v) = \left(-\frac{3}{2}\mathcal{L}(\hat{p})\right)^{2/3}$并且

$$\theta'(v) = -\left(-\frac{3}{2}\mathcal{L}(\hat{p})\right)^{-1/3}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\hat{p}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}(\hat{p}) \cdot \hat{p}'\right) = -\frac{\hat{p}}{\sqrt{\theta(v)}} < 0.$$



(a) 在 p 平面上　　(b) 在 z 平面上

图10：不同平面上的平移积分路径

当 $\theta(v) = -\left(-i\frac{3}{2}\mathcal{L}(\hat{p})\right)^{2/3}$ 时，对于 $v > \hat{v}$，上述结论仍成立，这是由引理 2 得出的。对于 $v = \hat{v}$，由式 (26) 和引理 1 可得 $\theta'(v) = -\sqrt[3]{-2/\omega'''(0)} = -h(\hat{v}) < 0$。

引理 5 (轮廓平移)。对于 $v > \hat{v}$，存在一条围道 $\gamma_v \subset D'$，经过 $\hat{p}$，并以 $\pm\pi + i\Delta_v$ 为起点和终点（其中某个 $\Delta_v > 0$），且满足 $z(\gamma) = [-\sqrt[3]{3v\pi} + \sqrt{\theta};\ \sqrt[3]{3v\pi} + \sqrt{\theta}]$（见图10）。

证明。令 $Q := \sqrt[3]{3v\pi}$ 并且

$$\mathcal{J}(q) := F(q+\sqrt{\theta}) = \frac{(q+\sqrt{\theta})^3}{3} - \theta\cdot(q+\sqrt{\theta}) = \frac{q^3}{3} + \sqrt{\theta}q^2 - \frac{2}{3}\theta^{3/2}.$$

由于 $\theta < 0$，可知对于每个 $q \in (0; Q)$，都有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\mathcal{J}(q) = q^3/3 \in (0; Q^3/3) = (0; v\pi), \quad \mathcal{J}(Q) = Q^3/3 + \sqrt{\theta}Q^2 - \tfrac{2}{3}\theta^{3/2} \in (v\pi; v\pi + i\infty) = \mathcal{L}((\pi; \pi + i\infty)),\\
&\operatorname{Im}\mathcal{J}(q) = |\theta|^{1/2}(q^2 - \tfrac{2}{3}\theta) > 0, \qquad\qquad \mathcal{J}((0; Q]) \subset \Pi \cup \mathcal{L}((\pi; \pi + i\infty)) \subset \mathcal{L}(D' \cap Q_1),
\end{aligned}$$

其中，最后一个包含关系由命题 2 得出。应用 $(F|_{Q_1})^{-1}$，可得 $(\sqrt{\theta};\ Q+\sqrt{\theta}] \subset z(D')$ 且 $Q+\sqrt{\theta} = z(\pi + i\Delta)$，其中某个 $\Delta > 0$。由对称性，$[-Q+\sqrt{\theta};\ Q+\sqrt{\theta}] \subset z(D')$ 且 $\pm Q+\sqrt{\theta} = z(\pm\pi + i\Delta)$。于是所需的围道为 $\gamma := z^{-1}([-Q+\sqrt{\theta};\ Q+\sqrt{\theta}])$。它经过 $\hat{p}$，因为根据命题 2，$z^{-1}(\sqrt{\theta}) = \hat{p}$。□

3.3 一般艾里现象的证明（定理 3）

现在可以应用变量替换，并通过一个标准论证完成一般艾里现象的证明；参见 [43, 第七章第 4] 节。我们将用到附录B–C中的几个简单引理。

定理 *3* 的证明。令 $v := x/t$。从命题 2 中取 D'、$\theta(v)$ 和 $z_v(p)$。令 $p(z)$ 为 $z(p)$ 的逆函数，定义在 $z(D')$ 上。我们将证明一个略作修改的渐近公式：

$$\psi(x,t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(p)\, e^{it\mathcal{L}(p)}\, dp = \begin{cases} t^{-1/3}\,\mathrm{Ai}\left(-\theta t^{2/3}\right) h(v)\, a(\hat{p}) + O_{v^+,a,\omega}\left(t^{-3/2}\right), & \text{if } \theta \ge -t^{-2/3},\\ t^{-1/3}\,\mathrm{Ai}\left(-\theta t^{2/3}\right) h(v)\left(a(\hat{p}) + O_{v^+,a,\omega}\left(t^{-1}\right)\right), & \text{if } \theta < -t^{-2/3}. \end{cases} \tag{30}$$

由（30）可得该定理，因为根据（20），$\operatorname{sgn}(\theta) = \operatorname{sgn}(\hat{v} - v)$，并且对于 $\theta \in [-t^{-2/3};\ 0]$，定理的第二种情形由（30）的第一种情形推出，这是因为 $\min_{\lambda\in[0;1]}$艾里函数$(\lambda) > 0$，$\min_{v\in[0;v^+]} h(v) > 0$。

我们来证明 (30) 的第一种情况。实际上，我们将对任意 v 进行证明，不施加限制$\theta(v) \ge -t^{-2/3}$（但由此得到的误差界对于 $\theta < -t^{-2/3}$ 来说过于宽松）。代入 $z = z_v(p)$，得到

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(p)\, e^{it\mathcal{L}(p)}\, dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} G(z)\, e^{itF(z)}\, dz, \quad \text{where} \quad G(z) = G_v(z) := a(p(z))\, p'(z).$$

根据含参数的反函数定理（引理 21），$p_v(z)$ 是一个奇实解析族，因此$G_v(z)$ 是一个偶实解析族。于是，根据等变 Hadamard 引理（引理 24），存在一个偶实解析函数族 $\widetilde{G}_v(z)$，使得 $G_v(z) = G_v(\sqrt{\theta}) + (z^2-\theta)\,\widetilde{G}_v(z)$。将此代入上面的积分，得到

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} \Big(G(\sqrt{\theta}) + (z^2-\theta)\,\widetilde{G}(z)\Big)\, e^{itF(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\left(G(\sqrt{\theta})\,I_1 + I_2\right), \tag{31}$$

其中

$$I_1 := \int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} e^{itF(z)}\,dz, \qquad\qquad I_2 := \int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} \widetilde{G}(z)(z^2-\theta)\,e^{itF(z)}\,dz.$$

我们来计算 I_1。由于 $F(z(\pi)) = \mathcal{L}(\pi) = v\pi$ 是 π/t 的整数倍，因此可以利用引理 25 估计尾项，并代入 $k = t^{1/3}z$，将 I_1 表示为艾里函数的形式如下：

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} e^{itF(z)}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itF(z)}\,dz - 2\int_{z(\pi)}^{+\infty} \cos(tF(z))\,dz = \\ &= \frac{2}{t^{1/3}}\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{k^3}{3} - \theta t^{2/3}k\right)dk + O_{v^+,\omega}\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{2\pi}{t^{1/3}}\,\mathrm{Ai}\left(-\theta t^{2/3}\right) + O_{v^+,\omega}\left(\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

这里我们用到了以下下界：

$$|z(\pi) - \sqrt{\theta}| = |z(\pi) - z(\hat{p})| = \Omega_{v^+,\omega}(1), \tag{33}$$

这由引理 2、$z(p)$ 的单射性以及一个紧性论证得出。

接下来，我们来估计 I_2。分部积分可得

$$I_2 = \frac{1}{it}\int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} \widetilde{G}(z)\,de^{itF(z)} = \frac{\widetilde{G}(z)\,e^{itF(z)}}{it}\bigg|_{-z(\pi)}^{z(\pi)} - \frac{1}{it}\int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} \widetilde{G}'(z)\,e^{itF(z)}\,dz.$$

~由于 $G(z)$ 是偶函数，且值 $F(z(\pi)) = \mathcal{L}(\pi) = v\pi$ 是 π/t 的整数倍，因此第一项为零。~由于 $G'(z)$ 是奇实解析函数族，根据等变 Hadamard 引理（引理 24），~存在奇实解析函数族 $H_v(z)$ 和一个实解析函数 $c = c(v)$，使得 $\widetilde{G}'_v(z) = c(v)\,z + (z^2-\theta)\,\widetilde{H}_v(z)$。因此，

$$I_2 = -\frac{1}{it}\int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} \Big(c(v)\,z + (z^2-\theta)\,\widetilde{H}_v(z)\Big)\,e^{itF(z)}\,dz = -\frac{1}{it}(c\cdot I_3 + I_4), \tag{34}$$

其中

$$I_3 := \int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} e^{itF(z)}\,z\,dz, \qquad\qquad I_4 := \int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} \widetilde{H}(z)(z^2-\theta)\,e^{itF(z)}\,dz.$$

下面我们对 I_3 进行界定。利用引理 25 估计尾项，并代入 $k = t^{1/3}z$，可将 I_3 表示为艾里函数导数的形式如下：

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} e^{itF(z)}\,z\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itF(z)}\,z\,dz - 2i\int_{z(\pi)}^{+\infty} \sin(tF(z))\,z\,dz = \\ &= \frac{2i}{t^{2/3}}\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{k^3}{3} - \theta t^{2/3}k\right)k\,dk + O_{v^+,\omega}\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{2\pi i}{t^{2/3}}\,\mathrm{Ai}'\left(-\theta t^{2/3}\right) + O_{v^+,\omega}\left(\frac{1}{t}\right) = O_{v^+,\omega}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \end{aligned} \tag{35}$$

其中我们使用了下界 (33) 以及由 [29,Eq. 9.7.6, 9.7.10] 所蕴含的估计：

$$\mathrm{Ai}'(u) = O\left(1 + |u|^{1/4}\right) \quad \text{for each } u \in \mathbb{R}.$$

为估计 I_4，进行分部积分：

$$I_4 = \frac{1}{it}\int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} \widetilde{H}(z)\, de^{itF(z)} = \frac{1}{it}\left(\widetilde{H}(z)\, e^{itF(z)}\Big|_{-z(\pi)}^{z(\pi)} - \int_{-z(\pi)}^{z(\pi)} \widetilde{H}'(z)\, e^{itF(z)}\, dz\right) = O_{v^+,a,\omega}\left(\frac{1}{t}\right), \tag{36}$$

因为函数 $\widetilde{H}(z)$ 对于 $z \in [-z_v(\pi), z_v(\pi)]$ 一致有界；由紧致性可得 $\widetilde{H}'(z)$ 一致有界。结合估计式 (31)、(32)、(34)、(35)、(36)，并利用命题 2 化简表达式，即可得到渐近公式 (30) 的第一种情形。

下面证明 (30) 的第二种情形。我们打算移动积分路径，使其经过临界点，并且在进行变量替换后变为直线。利用引理 5，我们选择围道 $\gamma \subset D'$，使其从 $-\pi + i\Delta$ 开始，并在某个 $\Delta > 0$处结束于 $\pi + i\Delta$，且$z(\gamma) = [-Q + \sqrt{\theta};\ Q + \sqrt{\theta}]$，其中

$$Q := \sqrt[3]{3v\pi} \geq \sqrt[3]{3\hat{v}\pi} = \Omega_\omega(1). \tag{37}$$

后一个估计成立 由引理 1 可知 $\hat{v} > 0$。由于 D 是单连通的，且 $\partial U \subset D$，我们有

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi+i\Delta} a(p)\, e^{it\mathcal{L}(p)}\, dp + \int_{\gamma} a(p)\, e^{it\mathcal{L}(p)}\, dp + \int_{\pi+i\Delta}^{\pi} a(p)\, e^{it\mathcal{L}(p)}\, dp\right).$$

由于 $\omega(p)$ 是 2π-周期的，对于每个 $y \in [0,\ \mathcal{L}(\pi+iy) - \mathcal{L}(-\pi+iy)$ 都是 $2\pi/t$ 的整数倍；$\Delta]$。由于 $a(p)$ 是 2π-周期的，对于每个 $y \in [0,\ a(\pi+iy) = a(-\pi+iy);\ \Delta]$。因此，第一项和第三项相互抵消，代入 $z = z_v(p)$，得到

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} a(p)\, e^{it\mathcal{L}(p)}\, dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-Q+\sqrt{\theta}}^{Q+\sqrt{\theta}} G(z)\, e^{itF(z)}\, dz, \quad \text{where} \quad G(z) = G_v(z) := a(p(z))\, p'(z).$$

由于 $G_v(z)$ 是偶实解析函数族，根据等变 Hadamard 引理（引理 24），存在偶实解析函数族 $\widetilde{G}_v(z)$，使得 $G_v(z) = G_v(\sqrt{\theta}) + (z^2 - \theta)\ \widetilde{G}_v(z)$。将其代入上面的积分，得到

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-Q+\sqrt{\theta}}^{Q+\sqrt{\theta}} \left(G(\sqrt{\theta}) + (z^2-\theta)\,\widetilde{G}(z)\right) e^{itF(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi}\left(G(\sqrt{\theta})\, I_1 + I_2\right), \tag{38}$$

其中

$$I_1 := \int_{-Q+\sqrt{\theta}}^{Q+\sqrt{\theta}} e^{itF(z)}\, dz, \qquad I_2 := \int_{-Q+\sqrt{\theta}}^{Q+\sqrt{\theta}} \widetilde{G}(z)(z^2-\theta)\, e^{itF(z)}\, dz.$$

让我们计算 I_1。利用引理 26 估计尾部，并代入 $k = t^{1/3}z$，我们将 I_1 表示为艾里函数，如下所示：

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-Q+\sqrt{\theta}}^{Q+\sqrt{\theta}} e^{itF(z)}\, dz = \int_{-\infty+\sqrt{\theta}}^{+\infty+\sqrt{\theta}} e^{itF(z)}\, dz - 2\,\mathrm{Re}\int_{Q+\sqrt{\theta}}^{+\infty+\sqrt{\theta}} e^{itF(z)}\, dz = \\ &= \frac{2}{t^{1/3}}\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{k^3}{3} - \theta t^{2/3}k\right) dk + O\left(\frac{e^{-2/3\, t|\theta|^{3/2}}}{Q^3 t^{3/2}|\theta|^{1/4}}\right) = \frac{2\pi}{t^{1/3}}\,\mathrm{Ai}\left(-\theta t^{2/3}\right) + O_\omega\left(\frac{e^{-2/3\, t|\theta|^{3/2}}}{t^{3/2}|\theta|^{1/4}}\right), \end{aligned} \tag{39}$$

其中我们使用了下界（37）和恒等式

$$\int_{-\infty+\sqrt{\theta}}^{+\infty+\sqrt{\theta}} e^{itF(z)}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itF(z)}\,dz,$$

该结论通过代换 $\tilde{z} = t^{1/3}z$ 由引理 27 得出。

为了估计 I_2，进行分部积分并代换 $q = z - \sqrt{\theta}$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{it}\int_{-Q+\sqrt{\theta}}^{Q+\sqrt{\theta}} \widetilde{G}(z)\,de^{itF(z)} = \frac{1}{it}\left(\widetilde{G}(z)\,e^{itF(z)}\Big|_{-Q+\sqrt{\theta}}^{Q+\sqrt{\theta}} - \int_{-Q+\sqrt{\theta}}^{Q+\sqrt{\theta}} \widetilde{G}'(z)\,e^{itF(z)}\,dz\right) = \\ &= \frac{e^{-2/3\,t|\theta|^{3/2}}}{it}\left(\widetilde{G}(q+\sqrt{\theta})\,e^{itq^3/3 - t|\theta|^{1/2}q^2}\Big|_{-Q}^{Q} - \int_{-Q}^{Q} \widetilde{G}'(q+\sqrt{\theta})\,e^{itq^3/3-t|\theta|^{1/2}q^2}\,dq\right) = \\ &= \frac{e^{-2/3\,t|\theta|^{3/2}}}{it}\,O_{v^+,a,\omega}\left(e^{-t|\theta|^{1/2}Q^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t|\theta|^{1/2}q^2}\,dq\right) = O_{v^+,a,\omega}\left(\frac{e^{-2/3\,t|\theta|^{3/2}}}{t^{3/2}|\theta|^{1/4}}\right), \quad (40) \end{aligned}$$

其中，倒数第二个等式源于 $\theta(v)$、$\widetilde{G}_v(q+\sqrt{\theta})$ 和 $\widetilde{G}'_v(q+\sqrt{\theta})$ 的有界性（当 $v \in [\hat{}v;\ \bar{v}^+]$ 以及 $|q| \le Q \le \sqrt[3]{3}\bar{v}^+\pi$ 时）；最后一个等式则由高斯积分、当 $u > 0$ 时的界 $e^{-u} = O(1/\sqrt{u})$ 以及下界（37）得出。

结合估计式（38）、（39）和（40），利用命题 2 化简表达式，并应用界 $G(\sqrt{\theta}) = a(\hat{}p)\,p'(\sqrt{\theta}) = \Omega_{v^+,\,\omega}(a(\hat{}p))$、假设 $\theta < -t^{-2/3}$ 以及艾里函数的下界 [29,式 9.7.5 和第 §9.7(iii) 节]

$$\mathrm{Ai}(u) = \Omega\left(\frac{e^{-2/3\,u^{3/2}}}{u^{1/4}}\right) \quad \text{for each } u \ge 1,$$

渐近公式 (30) 的第二种情形成立。 □

推论 2 的证明。情形 $v \le \hat{}v - \delta$ 和 $v \ge \hat{}v + \delta$ 由定理 3 以及艾里函数的已知渐近公式 [29, 式 9.7.5、9.7.9 和 §9.7(iii)] 得出。情形 $|v - \hat{}v| \le \delta t^{-2/3}$ 由定理 3、注释 2 和 3 以及以下估计得出

$$\begin{aligned} a(\hat{p}(v))\,h(v) &= a(\hat{p}(\hat{v}))\,h(\hat{v}) + O_{v^+,a,\omega}\left(|v-\hat{v}|\right) = a(0)\cdot\sqrt[3]{\tfrac{-2}{\omega'''(0)}} + O_{v^+,a,\omega}\left(\delta t^{-2/3}\right), \\ \theta(v) &= \theta(\hat{v}) + \theta'(\hat{v})\,(v-\hat{v}) + O_{v^+,\omega}\left((v-\hat{v})^2\right) = -\sqrt[3]{\tfrac{-2}{\omega'''(0)}}\,(v-\hat{v}) + O_{v^+,\omega}\left(\delta^2 t^{-4/3}\right), \\ \mathrm{Ai}\left(-\theta(v)\,t^{2/3}\right) &= \mathrm{Ai}\left(\sqrt[3]{\tfrac{-2}{\omega'''(0)}}\,(v-\hat{v})\,t^{2/3} + O_{\delta,v^+,\omega}\left(t^{-2/3}\right)\right) = \mathrm{Ai}\left(\sqrt[3]{\tfrac{-2}{t\omega'''(0)}}\,(x-\hat{v}t)\right) + O_{\delta,v^+,\omega}\left(t^{-2/3}\right). \end{aligned}$$

□

3.4 贝塞尔函数的艾里现象

为了说明这一点，我们应用定理 3 来估计定义贝塞尔函数的积分（见 [30, 第 2.9 节]）:

$$J_x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx - it\sin p}\,dp.$$

在这种情况下，$\omega(p) = \sin p$, $a(p) = 1$, $D = \mathbb{C}$, $V^+ = +\infty$，且 $\omega'(p) = \cos p$ 是一个一一共形映射 $U \to H^-$。我们计算

$$\hat{p}(v) = \begin{cases} \arccos v, & \text{if } v \in [0;1]; \\ i\,\mathrm{arccosh}\,v, & \text{if } v \in [1;+\infty), \end{cases} \quad \omega(\hat{p}(v)) = \begin{cases} \sqrt{1-v^2}, & \text{if } v \in [0;1]; \\ i\sqrt{v^2-1}, & \text{if } v \in [1;+\infty), \end{cases} \quad \omega''(\hat{p}(v)) = -\omega(\hat{p}(v)),$$

$$\theta(v)=\begin{cases}\left|\frac{3}{2}(v\arccos v-\sqrt{1-v^2})\right|^{2/3}, & v\in[0;1);\\ 0, & v=1;\\ -\left|\frac{3}{2}(v\operatorname{arccosh} v-\sqrt{v^2-1})\right|^{2/3}, & v\in(1;+\infty),\end{cases}\qquad h(v)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}\left|\frac{3}{2}(v\arccos v-\sqrt{1-v^2})\right|^{1/6}}{(1-v^2)^{1/4}}, & v\in[0;1);\\ 2^{1/3}, & v=1;\\ \frac{\sqrt{2}\left|\frac{3}{2}(v\operatorname{arccosh} v-\sqrt{v^2-1})\right|^{1/6}}{(v^2-1)^{1/4}}, & v\in(1;+\infty).\end{cases}$$

因此，定理 3 给出了已知的渐近公式（见 [30,第 11.10] 节）

$$J_x(t)=\begin{cases}t^{-1/3}\operatorname{Ai}\left(-\theta(x/t)\,t^{2/3}\right)h(x/t)+O\left(t^{-3/2}\right), & \text{if } 0\le x/t\le 1,\\ t^{-1/3}\operatorname{Ai}\left(-\theta(x/t)\,t^{2/3}\right)h(x/t)\cdot\left(1+O_{v^+}\left(t^{-1}\right)\right), & \text{if } 1\le x/t\le v^+.\end{cases}$$

在前一种情况下， $O(\ldots)$ 中的常数与 v^+ 无关，因为我们可以对 $v^+=1$ 应用定理 3。

3.5 量子行走的艾里现象（定理1的证明）

定理*1*的证明。 为应用定理 3，我们将积分表示 (5)–(6) 写成以下形式

$$\widetilde{A}_1(x,t,m)=i^{x-t+1}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a_1(p)\,e^{ipx-i\omega(p)t}\,dp,\qquad \widetilde{A}_2(x,t,m)=i^{x-t}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a_2(p)\,e^{ipx-i\omega(p)t}\,dp,$$

其中

$$\omega(p):=\arcsin\frac{\sin p}{\sqrt{1+m^2}},\qquad a_1(p):=\frac{m}{\sqrt{m^2+\cos^2 p}},\qquad a_2(p):=1+\frac{\cos p}{\sqrt{m^2+\cos^2 p}}.$$

函数 $\omega(p)$、$a_1(p)$ 和 $a_2(p)$ 定义在对称的 2π-周期域上 n

$$D:=\mathbb{C}\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[\pi/2+\pi n\pm i\hat{y};\pi/2+\pi n\pm i\infty),$$

其中 $\hat{}y:=$反双曲正弦 m。因此， $\partial D\cap U$是一个垂直裂隙 $[\pi/2+i\hat{}y;\ \pi/2+i\infty)$ 。导数

$$\omega'(p)=\frac{\cos p}{\sqrt{m^2+\cos^2 p}}$$

是从 $D\cap U$ 到下半平面的 1–1 共形映射，由映射复合而成（参见图 7a）

$$D\cap U\xrightarrow{p\mapsto\cos p}H^-\setminus[-im;-i\infty)\xrightarrow{z\mapsto z/\sqrt{m^2+z^2}}H^-.$$

特别地，在 $D\cap U$中， $\omega'(p)$在 $\pi/2+i\hat{}y$ 的任意邻域之外都有界。

为计算 V^+，注意到对于每个 $y\ge\hat{}y$，当 $p\to\pi/2+iy$ 时，$\operatorname{Re}\omega(p)\ \to\pi/2$ 。根据紧致性，对于 $\hat{}y\le y\le 2\hat{}y$, 收敛关于 y 是一致的。对于 $y\ge 2\hat{}y$，收敛是一致的，因为

$$|\operatorname{Re}\omega(\pi/2+iy+\varepsilon)-\operatorname{Re}\omega(\pi/2+iy)|\le\max_{\operatorname{Im}p\ge 2\hat{y}}|\omega'(p)|\cdot\varepsilon\quad\text{for }\varepsilon>0.$$

我们得到

$$V^+=\liminf_{p\to\partial D\cap U}\frac{\operatorname{Re}\omega(p)}{\operatorname{Re}p}=\frac{\pi/2}{\pi/2}=1\qquad\text{and put}\quad v^+:=\begin{cases}\hat{v}, & \text{if } 0\le v<\hat{v},\\ 1-\delta, & \text{if } \hat{v}<v\le 1-\delta.\end{cases}$$

我们计算 $v\ne\hat{}v$,0 时式 (20) 中剩余的量:

$$\hat{p}(v)=\begin{cases}\arccos\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}=\arctan\frac{\sqrt{1-(1+m^2)v^2}}{mv}, & \text{if } v<\hat{v},\\ i\operatorname{arccosh}\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}=i\operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{(1+m^2)v^2-1}}{mv}, & \text{if } v>\hat{v};\end{cases}\qquad\begin{aligned}&a_1(\hat{p}(v))=\sqrt{1-v^2}\ge\sqrt{\delta},\\ &a_2(\hat{p}(v))=1+v\ge 1,\end{aligned}$$

$$|\omega''(\hat{p}(v))|=\tfrac{1}{m}\left|1-(1+m^2)v^2\right|^{1/2}(1-v^2),\qquad h(v)=\frac{\sqrt{m}\,|4\theta(v)|^{1/4}}{|1-(1+m^2)v^2|^{1/4}\,(1-v^2)^{1/2}},\qquad(41)$$

并重现 $\theta(v) = \theta(v,m)$ 的表达式 (12)（由于括号中的表达式的导数与 $v - \hat{v}$ 同号，因此它们非负）。根据 $a(p) = a_k(p)$ 的定理 3，其中 $k = 1,2$，我们得到

$$\widetilde{A}_k(x,t,m) = i^{x-t+2-k}\, t^{-1/3}\, a_k(\hat{p}(v))\, h(v)\ \mathrm{Ai}\left(-\theta(v)\, t^{2/3}\right) \begin{cases} + O_m\left(t^{-3/2}\right), & \text{if } v < \hat{v}, \\ \times \left(1 + O_{m,\delta}\left(t^{-1}\right)\right), & \text{if } v > \hat{v}. \end{cases}$$

在 $v < \hat{v}$ 的情形下，参数 v^+，因此 $O_m(\ldots)$ 中的常数不依赖于 δ。在 $v > \hat{v}$ 的情形下，我们利用了 $a_k(\hat{p}(v))$ 与零相距有界，因此 $a_k(\hat{p}(v)) + O_{m,\,\delta}\left(t^{-1}\right) = a_k(\hat{p}(v))\left(1 + O_{m,\,\delta}\left(t^{-1}\right)\right)$。对于 $v = \hat{v}$，0，由定理 3 中主项的连续性即可得出定理；参见备注 2–3。 □

我们以一个推论结束本节，该推论是 [40, 命题 2.1、3.1 和 4.1] 的一致版本，并改进了 $\hat{v}$ 附近的误差界（见表 2 第 4 行）。

推论 3。 表 *2* 的前五行给出了 $A_1(x,\ t,\ m)$ 的正确渐近公式，对每个满足第一列相应不等式的 δ、$m > 0$ 和整数 x、$t \geq 0$ 均成立。

证明。 第 3 行是定理 1。其余部分由推论 2、式（41）以及 $\omega'''(0) = -m^2/(1+m^2)^{3/2}$ 得出 . □

4 伽马现象

4.1 一般伽马现象

现在我们转而通过共形映射估计指数衰减积分（例如参见图 11a）。下文的一般定理及其证明与 Airy 区间中的定理及证明有着惊人的相似之处。

定理 4。 设 $D \subset \mathbb{C}$ 是关于实轴对称的单连通域，在虚轴上的投影有界，且包含 $(-\infty; 0]$。设 $a(\omega)$ 和 $q(\omega)$ 是D中的实解析函数，并设 $p(\omega) := $ 对数函数 $\omega + q(\omega)$。假设 p' 是从 $D \cap H^+$ 到 H^- 的双射共形映射，并且存在有限极限 $a(-\infty)$、 $a'(-\infty)$ 和 $p''(-\infty)$。则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} a(\omega)\, e^{\omega t - p(\omega)x}\, d\omega = \frac{(x/e)^x}{|x|\,\Gamma(x)} \cdot \frac{e^{\hat{\omega}(x/t)t - p(\hat{\omega}(x/t))x}}{\sqrt{-p''(\hat{\omega}(x/t))}} \cdot \left(a(\hat{\omega}(x/t)) + O_{v^-,v^+,a,p}\left(t^{-1}\right)\right) \tag{42}$$

对于每个 $x, t, v^-, v^+ \in \mathbb{R}$，满足 $t > 0$, $x \neq 0$，且 $V^- < v^- \leq x/t \leq v^+ < V^+$，其中

$$\begin{gathered} \hat{\omega}(v) := (p')^{-1}(1/v), \qquad \Lambda^+ := \limsup_{\omega \to \partial D,\, \operatorname{Im}\omega \neq 0} \frac{\operatorname{Im} p(\omega)}{\operatorname{Im}\omega}, \\ V^- := \begin{cases} 1/p'(-\infty), & \text{if } p'(-\infty) < 0, \\ -\infty, & \text{if } p'(-\infty) \geq 0, \end{cases} \quad V^+ := \begin{cases} 1/\Lambda^+, & \text{if } \Lambda^+ > 0, \\ +\infty, & \text{if } \Lambda^+ \leq 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{43}$$

这里，$\hat{\omega}(v)$ 是相空间拉格朗日量 $\mathcal{L}(\omega)$ 的一个临界点：$= vp(\omega) - \omega$ ，当 $v \neq 0$ 时为负，当 $v < 0$ 时为正，见下文引理 7。此后，稍微滥用一下术语，将 $(-\infty; 0)$ 中使 $\mathcal{L}'$ 的解析延拓为零的任意点称为临界点，尽管 $\mathcal{L}$ 本身在 $(-\infty; 0)$ 上不连续。根据引理 6，(43) 中的 $\hat{\omega}(v)$ 和 V^- 的表达式定义良好，而 (42) 中的积分根据引理 10 定义良好。根据引理 6，极限 $p'(-\infty)$ 有限，因此 $V^- < 0 \leq V^+$。根据备注 5，将主项在 $x = 0$ 处连续延拓为 0 后，渐近公式 (42) 对 $x = 0$ 也成立；此时主项成为 x 上的实解析函数。

假设 $x/t > V^-$ 是积分 (42) 收敛所必需的。假设 $x/t < V^+$ 意味着拉格朗日量在 ∂D 附近（上半平面内）的虚部为负。我们在第 2.3 节中的主要结果以及第 4.5 节中的计算表明，界 $x/t \leq v^+ < V^+$ 是尖锐的；也就是说，不能将其放宽为 $x/t < V^+$，且一般情况下不能增大 V^+ 的值。

(42) 右侧的第一个因子是伽马函数与其斯特林近似之比（相差一个因子 $\sqrt{2\pi|x|}$）。第二个因子是典型的鞍点近似（同样相差 $\sqrt{2\pi|x|}$）。当 x 很大时，第一个因子趋于 $1/\sqrt{2\pi|x|}$，只剩下标准的鞍点近似。因此，当 v 时，渐近公式可简化为：$= x/t$ 或接近于 0，或远离 0：

推论 4。 在定理 *4* 的假设下，若 $\delta > 0$、 $t \geq 1$ 和 $v = \frac{x}{t}$ 满足 $|v| \notin \left(\frac{\delta}{t};\ \delta\right)$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} a(\omega)\, e^{\omega t - p(\omega)x}\, d\omega = \begin{cases} \frac{e^{\hat\omega(v)t - p(\hat\omega(v))x}}{i\sqrt{2\pi x p''(\hat\omega(v))}}\left(e^{2\pi i x} - 1\right)\left(a(\hat\omega(v)) + O_{\delta,v^-,v^+,a,p}\left(t^{-1}\right)\right), & \text{if } v \leq -\delta, \\ \frac{t^{x-1}e^{-q(0)x}}{\Gamma(x)}(a(0) + O_{\delta,v^-,v^+,a,p}(t^{-1})), & \text{if } |v| \leq \delta/t, \\ \frac{e^{\hat\omega(v)t - p(\hat\omega(v))x}}{\sqrt{-2\pi x p''(\hat\omega(v))}}\left(a(\hat\omega(v)) + O_{\delta,v^-,v^+,a,p}\left(t^{-1}\right)\right), & \text{if } v \geq \delta. \end{cases}$$

在第4.4–4.5节中，我们通过例子 $p(\omega) = \log(e^\omega - 1)$ 和 $p(\omega) = \log(e^\omega - 1) - \log(1 + m^2 - e^\omega)$ 来说明该定理，它们分别来自简单随机游走和量子游走。其他应用还包括贝塔函数、超几何函数、L函数和留数。

4.2 共形变量变换

在本小节中，我们沿用与第 3.2 节类似的思路，开始证明定理 4。我们采用定理中的记号并作出其中的假设，同时假设

$$v := x/t \in V, \qquad V := [v^-; v^+].$$

对于每个 $v \in V$、 $\Delta \in \mathbb{R}$、 $\omega \in D \setminus \{0\}$ 和 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，定义 拉格朗日量 $\mathcal{L}_v(\omega)$ 及其 标准形$F_{v,\ \Delta}(z)$，如下：

$$\mathcal{L}(\omega) = \mathcal{L}_v(\omega) := vp(\omega) - \omega, \qquad F(z) = F_{v,\Delta}(z) := v\log z - z + \Delta.$$

假设 $v^+ < V^+$ 意味着存在满足下式的 $\varepsilon = \varepsilon(v^+) > 0$

$$\operatorname{Im}\mathcal{L}_v(\omega) < 0 \quad \text{for each } 0 < v \leq v^+ \text{ and } \omega \in D \cap H^+ \text{ with } \operatorname{dist}(\omega, \partial D) < \varepsilon. \tag{44}$$

我们的目标是在足够大的区域族中构造一个保角变量变换 $z_v(\omega)$，使得对于适当的 $\Delta(v)$，$\mathcal{L}_v = F_{v,\ \Delta(v)} \circ z_v$；这就是下面的命题 3。首先，下面的引理 6 推导出导数 $p'(\omega)$ 的一些有用性质（见图 11）。引理 7 和引理 8 描述了 $\mathcal{L}_v(\omega)$ 和 $F_{v,\ \Delta}(z)$ 作为共形映射的性质（见图 12）。引理 9 证明了拉格朗日量在某个定义域内的单叶性，这对于证明命题 3 中 $z_v(\omega)$ 的单射性至关重要。全文中，我们记

$$(-\infty; \beta) := D \cap \mathbb{R}.$$

引理 6（导数）。导数 $p'(\omega)$ 在区间 $(-\infty; 0)$ 和 $(0; \beta)$ 上为实数且递减；此外，它在 $(-\infty; 0) \cup (0; \beta)$ 上是单射的（见图 *11*）。我们还有 $p'(0\pm) = \pm\infty$, $p'(-\infty) \neq \pm\infty$, $p'(-\infty) \geq 1/V^-$, $p'(\beta-) \leq \Lambda^+$，并且对于每个 $\omega \in (-\infty; 0) \cup (0; \beta)$，都有 $p''(\omega) \neq 0$。

证明。回想一下，$p(\omega) =$ 对数函数 $\omega + q(\omega)$，其中 $q(\omega)$ 在包含 $(-\infty; 0]$ 的定义域 D 上是实解析的。因此，$p'(\omega)$ 在 $D \setminus \{0\}$ 上是实解析的，这意味着对于每个 $\omega \in (-\infty; 0) \cup (0; \beta)$，都有 $p'(\omega) \in \mathbb{R}$。根据定向原理，$p'$ 在 $(-\infty; 0)$ 和 $(0; \beta)$ 上递减，因为 $p'(D \cap H^+) \subset H^-$。此外，它在 $(-\infty; 0) \cup (0; \beta)$ 上是单射的：否则，p' 在 $D \cap H^+$ 中围绕某个 $\omega_1 \in (-\infty; 0)$ 和 $\omega_2 \in (0; \beta)$ 的两个互不相交半圆盘的像会相交，这与 p' 在 $D \cap H^+$ 中的单射性矛盾。

由于 $p'(D \cap H^+) \subset H^-$，可知 p'' 在 $(-\infty; 0) \cup (0; \beta)$ 上从不为零。

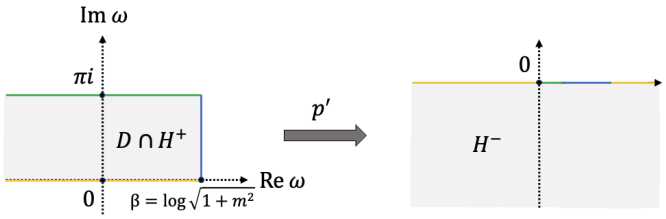
由于 $p'(\omega) = 1/\omega + q'(\omega)$，我们有 $p'(0\pm) = \pm\infty$。然后，根据在 $(-\infty; 0) \cup (0; \beta)$ 上的单射性和连续性，$p'(-\infty) \neq \pm\infty$。注意，根据 (43)，在两种情况下，$p'(-\infty) \geq 1/V^-$，且 $p'(-\infty) < 0$ 和 $p'(-\infty) \geq 0$。

还需证明 $p'(\beta-) \leq \Lambda^+$。我们考虑两种情况：

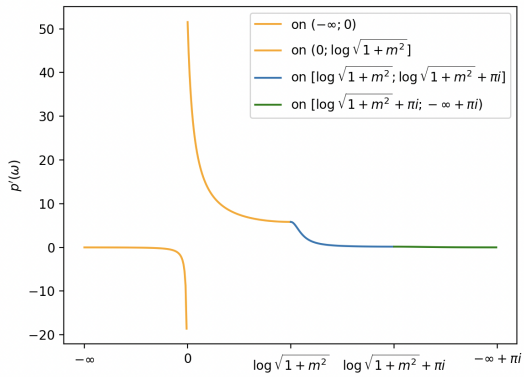
1. $\beta \in \partial D$。由于单调性，$p'(\beta-)$ 存在，因此存在一个函数 $\varepsilon(x) \searrow 0$，使得当复数 ω 满足 $\operatorname{Re}\omega < \beta$ 且 $0 < \operatorname{Im}\omega < \varepsilon(\operatorname{Re}\omega)$ 时，$\lim_{\omega\to\beta} p'(\omega) = p'(\beta-)$ $x \nearrow \beta$。对于这样的 ω，

$$\frac{\operatorname{Im} p(\omega)}{\operatorname{Im}\omega} = \frac{\operatorname{Im} p(\omega) - \operatorname{Im} p(\operatorname{Re}\omega)}{\operatorname{Im}\omega - \operatorname{Im}(\operatorname{Re}\omega)} = \operatorname{Re} p'(\nu) \to p'(\beta-) \quad \text{as } \omega \to \beta, \tag{45}$$

对于某个 $\nu = \nu(\omega) \in$ [实部$\omega; \omega$]。因此，根据（43），$p'(\beta-) \leq \Lambda^+$。



(a) $p'(\omega)$ 在 $D \cap H^+$ 上



(b) $p'(\omega)$ 在 $\partial(D \cap H^+)$ 上

图 11：将定理 4 应用于量子游走时 $p'(\omega)$ 的示意图，其中 $p(\omega)$ 由 (10) 给出。注意，$p'(\omega) = \frac{m^2 e^\omega}{(e^\omega-1)(1+m^2-e^\omega)}$ 是从 ~~$D \cap H^+$~~ 到下半平面的双射共形映射，并且 p' 在 $\partial(D \cap H^+)$ 上为实值且是单射。见引理 6。

2. $\beta = +\infty$。由于 D 在虚轴上有一个有界投影，对于每个 $x \in (0; +\infty)$，射线 $[x; x+i\infty)$ 都与 ∂D 相交。令 $h(x)$ 为最低的交点。对于实部 $\omega \to +\infty, 0 <$ 虚部 $\omega <$ 虚部 h(实部 ω)，且 $\omega - h$(实部 ω) $\to 0$，等式（45）仍然成立，因为线段 [实部 ω; h(实部 ω)] 确定了 $D \cap H^+$ 的一个素端，而单射共形映射 p' 连续延拓到每个素端（参见[25, 定理 2.13 和 2.20]）。不等式 $p'(\beta-) \le \Lambda^+$ 随即得出。 □

引理 7（拉格朗日量）。函数 $\mathcal{L}_v(\omega)$ 有唯一的非退化临界点 $\hat{}\omega(v) = (p')^{-1}(1/v)$，当 $v \neq 0$ 时，该点属于 $(-\infty; 0)$；当 $v < 0$ 时，属于 $(0; \beta)$；而当 $v = 0$ 时，我们有 $\mathcal{L}_v(\omega) = -\omega$。此外，$\mathcal{L}$ 将构成 $(-\infty; \beta) \setminus \{0\}$ 的各区间双射地映射到以下与实轴平行的区间（见图 12a 和 12b）：

$$\begin{cases} \mathcal{L}\colon (-\infty; \hat{\omega}], [\hat{\omega}; 0), (0; \beta) \mapsto (\pi i v + \infty; \mathcal{L}(\hat{\omega})], [\mathcal{L}(\hat{\omega}); \pi i v + \infty), (+\infty; \mathcal{L}(\beta-)), & \text{if } v < 0, \\ \mathcal{L}\colon (-\infty; 0), (0; \hat{\omega}], [\hat{\omega}; \beta) \mapsto (\pi i v + \infty; \pi i v - \infty), (-\infty; \mathcal{L}(\hat{\omega})], [\mathcal{L}(\hat{\omega}); \mathcal{L}(\beta-)), & \text{if } v > 0, \end{cases}$$

其中 $\mathcal{L}(\beta-)$ 或者是 $-\infty$ 或者是一个实数，并且对于 $v > 0$，$\mathcal{L}(\beta-) < \mathcal{L}(\hat{}\omega)$。此外，$\mathcal{L}'(-\infty) < 0$.

证明。对于 $v = 0$，根据定义有 $\mathcal{L}(\omega) = -\omega$，因此无需证明。假设 $v \neq 0$。

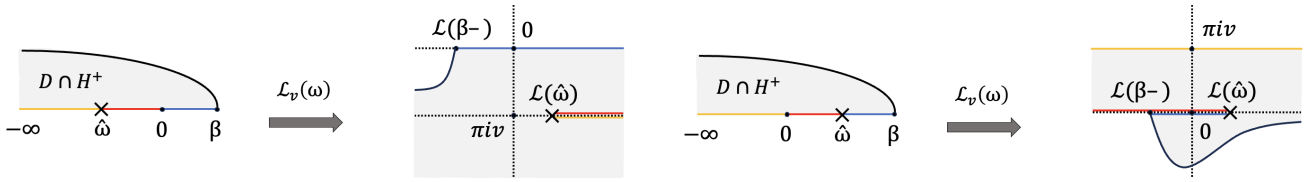
由于 $\mathcal{L}'(\omega) = vp'(\omega) - 1$，因此当 $p'(\omega) = 1/v$ 时，ω 是 $\mathcal{L}$ 的临界点。显然，$\mathcal{L}$ 在 H^+ 内没有临界点，因为 $p'(D \cap H^+) \subset H^-$。由于 p' 在 $(-\infty; 0)$ 和 $(0; \beta)$ 上连续且递减，根据引理 6，$p'(0\pm) = \pm\infty$、$p'(-\infty) \ge 1/V^-$ 且 $p'(\beta-) \le \Lambda^+$，由此可知，对于 $V^- < v < 0$，$1/v \in p'((-\infty; 0))$；对于 $0 < v < V^+$，$1/v \in p'((0; \beta))$。由于 p' 在 $(-\infty; 0) \cup (0; \beta)$ 上也为单射，拉格朗日量有唯一的临界点 $\hat{}\omega = \hat{}\omega(v) = (p')^{-1}(1/v)$，其中 $v \neq 0$，该点在 $v < 0$ 时属于 $(-\infty; 0)$，在 $v > 0$ 时属于 $(0; \beta)$。根据引理 6，它是非退化的，因为 $p'' \neq 0$ 在 $(-\infty; 0) \cup (0; \beta)$ 上。

我们来证明，对于 $\omega \in \{-\infty\} \cup$，$\mathcal{L}'(\omega) < 0$ for $\omega \in \{-\infty\} \cup (-\infty; \min(\hat{}\omega, 0)) \cup (\max(\hat{}\omega, 0); \beta)$。对于 $v < 0$ 和 $\omega \in \{-\infty\} \cup (-\infty; \hat{}\omega) \cup (0; \beta)$，我们有

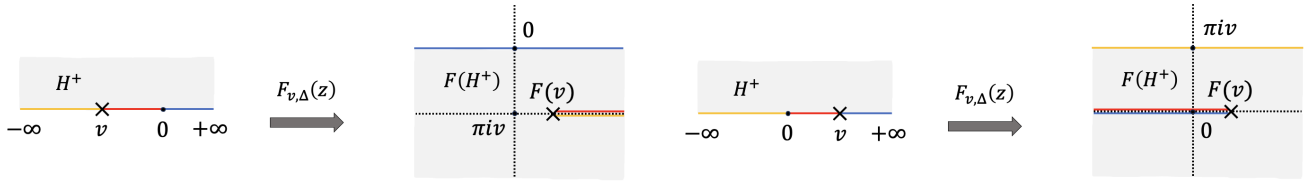
$$\mathcal{L}'(\omega) = vp'(\omega) - 1 < vp'(\hat{\omega}) - 1 = 0, \tag{46}$$

根据引理 6，$p'(\omega) > p'(\hat{}\omega)$。对于 $v > 0$ 和 $\omega \in \{-\infty\} \cup (-\infty; 0) \cup (\hat{}\omega; \beta)$，不等式 (46) 仍然成立，因为在这种情况下，引理 6 意味着 $p'(\omega) < p'(\hat{}\omega)$。

让我们求出 $\mathcal{L}((-\infty; \beta) \setminus \{0\})$。由于 $\mathcal{L}'$ 在 $(-\infty; \beta) \setminus \{0, \hat{}\omega\}$ 上为实数且不为零，因此 $\mathcal{L}$ 将 $-\infty$、0、$\hat{}\omega$ 和 β 之间的实区间双射到这些端点处极限值之间的水平区间。



(a) $\mathcal{L}_v(\omega)$ 对于 $v<0$ (b) $\mathcal{L}_v(\omega)$ 对于 $v>0$



(c) $F_{v,\ \Delta}(z)$ 对于 $v<0$ (d) $F_{v,\ \Delta}(z)$ 对于 $v>0$

图 12：拉格朗日 n $\mathcal{L}_v(\omega)$ 及其标准形 $F_{v,\ \Delta}(z)$ 作为共形映射。参见引理 7–8 .

显然， $\mathcal{L}(0+)$ = –符号函数$(v)\infty$，且 $\mathcal{L}(0-)$ = –符号函数$(v)\infty+\pi iv$，因为当 $\omega\to 0$ 时，实部 $\mathcal{L}(\omega)=v$(对数函数 $|\omega|+$ 实部 $q(\omega)$) – 实部 $\omega\sim v$ 对数函数 $|\omega|$，而对于较小的实数 ω，虚部$\mathcal{L}(\omega)=v\cdot$辐角 ω。我们有 $\mathcal{L}(-\infty)=\mathcal{L}(-1)+\int_{-1}^{-\infty}\mathcal{L}'(\omega)\,d\omega=\mathcal{L}(-1)+\infty=\pi iv+\infty$，因为 $\mathcal{L}'(-\infty)<0$。至于 $\mathcal{L}(\beta-)$，注意到对于任意 $\delta\in(0;\beta)$， $\mathcal{L}(\beta-)=\mathcal{L}(\delta)+\int_\delta^\beta\mathcal{L}'(\omega)\,d\omega\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$。对于 $v>0$，令 $\delta=\hat{}\omega$，并利用 $\mathcal{L}'(\omega)$ 在 $(\hat{}\omega;\beta)$ 上的性质，可得 $\mathcal{L}(\beta-)<\mathcal{L}(\hat{}\omega)$。 □

注 4. 将函数 $\hat{}\omega(v)$ 在 $v=0$ 处定义为 0 后，它是实解析的，并满足 $\hat{}\omega'(0)=1$且 $\mathcal{L}_v(\hat{}\omega(v))\to 0$，当 $v\to 0$ 时。事实上，对于每个 $v\neq 0$，由反函数定理可知，$\hat{}\omega(v)=(p')^{-1}(1/v)$ 是实解析的（因为根据引理 7， $p''(\hat{}\omega)=\mathcal{L}''(\hat{}\omega)/v\neq 0$）。由反函数定理应用于 $1/p'(\omega)$ 在 $\omega=0$ 处，也可知它在 $v=0$ 处实解析：函数 $1/p'(\omega)=\omega/(1+\omega q'(\omega))$ 可在 $\omega=0$ 处解析地延拓为 0，且 $(1/p')'(0)=1\neq 0$。特别地，我们有 $\hat{}\omega'(0)=1$，并且根据引理 7，$\operatorname{sgn}\hat{}\omega=\operatorname{sgn}v$。因此，当 $v\to 0$ 时，$\mathcal{L}_v(\hat{}\omega(v))=v\log\hat{\omega}(v)_{\overline{v}}+v\log v+vq(\hat{}\omega(v))-\hat{}\omega(v)\to 0$。下文中，我们令 $\hat{}\omega(0):=0$。

引理 8 (标准形). 函数 $F_{v,\Delta}(z)$ 对每个$v\neq 0$ 和 $\Delta\in\mathbb{R}$都有唯一的非退化临界点 $\hat{}z=v$，且当 $v=0$ 时，我们有 $F_{v,\Delta}(z)=-z+\Delta$。此外，$F|_{H^+}$ 是到.....上的双射共形映射

$$F(H^+)=\begin{cases}\{z\colon \operatorname{Im}z<\max(\pi v,0)\}\setminus[F(v);F(v)-\operatorname{sgn}(v)\infty), & \text{if } v\neq 0,\\ H^-, & \text{if } v=0,\end{cases}$$

并且 F 将组成 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 的各个区间双射地映射到以下与实轴平行的区间（见图 *12c* 和 *12d*）：

$$\begin{cases}F\colon(-\infty;v],[v;0),(0;+\infty)\mapsto(\pi iv+\infty;F(v)],[F(v);\pi iv+\infty),(+\infty;-\infty), & \text{if } v<0,\\ F\colon(-\infty;0),(0;v],[v;+\infty)\mapsto(\pi iv+\infty;\pi iv-\infty),(-\infty;F(v)],[F(v);-\infty), & \text{if } v>0.\end{cases}\tag{47}$$

证明。 当 $v=0$ 时，根据定义有 $F(z)=-z+\Delta$，因此无需证明。假设 $v\neq 0$。

当且仅当 $z=v$ 时，我们有 $F'(z)=\frac{v}{z}-1=0$，显然 $F''(v)=-\frac{1}{v}\neq 0$.

让我们求出 $F(\mathbb{R}\setminus\{0\})$。由于 F' 在 $\mathbb{R}\setminus\{0,v\}$上为实数且不为零， F将 $\mathbb{R}$上位于 $-\infty$、0、 v、 $+\infty$ 之间的区间双射到端点处相应极限值之间的水平区间。显然， $F(0+)=-\operatorname{sgn}(v)\infty$且 $F(0-)=-\operatorname{sgn}(v)\infty+\pi iv$，因为对所有实数 $z\neq 0$，当 $z\to 0$时，$\operatorname{Re}F(z)\sim v$对数函数 $|z|$，且 $\operatorname{Im}F(z)=v\cdot$辐角 z。此外，当 $z\to\pm\infty$时，$\operatorname{Re}F(z)\sim -z$，因此 $F(-\infty)=\pi iv+\infty$且 $F(+\infty)=-\infty$。这就推出了 (47)。

根据 Noshiro–Warschawski 定理 [11, 定理 2.16]，映射 $F|_{H^+}$ 是保角且单射的，因为 Im $F'(z) = v$ Im$(1/z)$ 在凸域 H^+中符号恒定。由于当 $z \to 0$时，Re $F(z) \sim v$对数函数 $|z|$，且当 $z \to \infty$时， $F(z) \sim -z$，因此根据 $F(0)$， $F(\infty) := \infty$， $F|_{H^+}$可在广义意义下连续延拓至 $\partial H^+ \cup \{\infty\}$。于是，由紧致性可得 $\partial F(H^+) = F(\partial H^+)$。因此，像 $F(H^+)$可确定为边界为 $F(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ 的唯一定义域，其中边界由 (47) 给出。□

与 Airy 区间类似，对于每个 $v \in V$，我们需要以下 $\mathbb{C}$ 的子集：

$$\Pi = \Pi_v := \{z \in \mathbb{C}: \ 0 < \text{虚部 } z < \pi v\}, \quad M = M_v := \begin{cases} \text{的连通分支，其中 } \mathcal{L}^{-1}(\Pi) \cap H^+ \text{ 的边界} \\ \text{包含 } 0, \ \text{若 } v > 0, \ \varnothing \qquad\qquad , \ \text{若 } v \le 0. \end{cases}$$

引理 9 (单叶性域)。对于每个 $v > 0$，集合 $\mathcal{L}^{-1}(\Pi)$ 在 H^+ 中包含 *0* 的一个邻域，因此M 是良定义且非空的，并且限制映射 $\mathcal{L}|_M$ 是一个同胚 $M \leftrightarrow \Pi$。此外， M是 $\mathcal{L}^{-1}(\Pi) \cap H^+$ 的唯一连通分支，其边界与 $(-\infty; \beta)$ 有无穷多个公共点。

证明。对于 $v > 0$，集合 $\mathcal{L}^{-1}(\Pi)$，因此 M，根据引理 7 和定向原理（图 12–13），包含 $(-\infty; \hat{}\omega) \ni 0$ 在 H^+ 中的一个邻域：对于每个 $\omega \in (-\infty; \hat{}\omega) \setminus \{0\}$，映射 $\mathcal{L}$ 将 H^+ 中 ω 的一个邻域映入 Π。根据定向原理，将该原理应用于映射 $\omega \mapsto e^{\mathcal{L}(\omega)/v}$，它在 $\omega = 0$ 处的导数为 $e^{q(0)} > 0$，此映射还将 H^+ 中 0 的一个邻域映入 Π。因此 M 是良定义且非空的。

根据定向原理，$(\hat{}\omega; \beta)$ 与 Cl $(\mathcal{L}^{-1}(\Pi) \cap H^+)$ 不相交。因此， M 是 $\mathcal{L}^{-1}(\Pi) \cap H^+$ 中唯一一个边界与 $(-\infty; \beta)$ 有无穷多个公共点的连通分支。

接下来，我们证明 $\mathcal{L}|_M$ 是真映射。我们验证序列真性判据：对于每个收敛到点 $\omega_0 \in \partial M \cup \{\infty\}$ 的序列 $\omega_n \in M$，其像序列 $\mathcal{L}(\omega_n)$ 在 Π 中没有极限。考虑以下五种情形。

情形 $\omega_0 = 0$。当 $\omega_n \to 0$ 时，我们有 Re $\mathcal{L}(\omega_n) = v(\log |\omega_n| + \text{Re } q(\omega_n)) - \text{Re } \omega_n \to -\infty$，因此 $\mathcal{L}(\omega_n) \to \infty$。情形 $\omega_0 \in (-\infty; \beta) \setminus \{0\}$。由连续性， $\mathcal{L}(\omega_n) \to \mathcal{L}(\omega_0)$，根据引理 7，该值不属于 Π。

情形 $\omega_0 \in D \cap H^+$。由连续性， $\mathcal{L}(\omega_n) \to \mathcal{L}(\omega_0)$。若 $\omega_0 \in \mathcal{L}^{-1}(\Pi)$，则 $\omega_0 \in M$，因为 $\omega_0 \in D \cap H^+$， $\mathcal{L}^{-1}(\Pi) \cap H^+$是开集，且所有 $\omega_n \in M$。这与假设 $\omega_0 \in \partial M$矛盾，因此 $\mathcal{L}(\omega_0) \notin \Pi$。

情形 $\omega_0 \in \partial D \cap \text{Cl } H^+$。这实际上不可能，因为根据 (44)，Im $\mathcal{L} < 0$ 处于H^+中 ∂D 的 ε-邻域内，但 Im $\mathcal{L}(\omega_n) > 0$，因为 $\omega_n \in M$。

情形 $\omega_0 = \infty$。由于 D 在虚轴上有有界投影，取一个子序列后，我们可以假设对某个 $Y \in [0$ 有 Im $\omega_n \to Y$； $+\infty)$，并且对某个 $X \in \{\pm\infty\}$ 有 Re $\omega_n \to X$。下面证明 $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(\omega_n) = \infty$。

为此，我们证明 D 包含一条趋近于 $X + iY$ 的水平射线的邻域。由于对于每个 $\omega \in D \cap H^+$，Im $\mathcal{L}'(\omega) = v \cdot \text{Im } p'(\omega) < 0$，因此当 Re ω 增大时，Im $\mathcal{L}$ 在 $(\omega_n - \infty; \omega_n] \cap D$ 的每个连通分支上递减。由(44)可知，对于某个$\varepsilon > 0$，Im $\mathcal{L} < 0$ 在 $D \cap H^+$ 中 ∂D 的 ε-邻域内，并且 Im $\mathcal{L}(\omega_n) > 0$，因此 $(\omega_n - \infty; \omega_n]$ 与该 ε-邻域不相交。于是 dist$((\omega_n - \infty; \omega_n], \partial D) \ge \varepsilon$，这意味着半条带 $S_n := \{\omega \in \mathbb{C}:$ Re $\omega <$ Re ω_n， $|\text{Im } \omega - \text{Im } \omega_n| < \varepsilon\}$ 属于 D。现在分为两种情况：

1. $X = -\infty$。由于 Im $\omega_n \to Y$，可知 $|\text{Im } \omega_m - Y| < \varepsilon/2$ 对某个 m成立。因此，半条带$S := \{\omega \in \mathbb{C}:$ Re $\omega <$ Re $\omega_m, |\text{Im } \omega - Y| < \varepsilon/2\}$ 属于 D，因为它包含于 S_m中。
2. $X = +\infty$。在这种情况下，令集合 $S := \{\omega \in \mathbb{C}:$ Re $\omega > 0, |\text{Im } \omega - Y| < \varepsilon\}$。它属于 D，因为它包含于并集 $\bigcup_n S_n$中。

不失一般性，我们可以假设半条带 S 包含所有 ω_n 和 Cl $S \subset D$。

我们来证明存在 $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$，使得 sgn $x_0 =$ sgn X, $x_0 + iY \in S$，且对于每个 $\omega \in D \cap H^+$, $|\omega| \ge |x_0|$，都有 $|\text{Re } \mathcal{L}'(\omega)| \ge \delta$。反设不然，则存在一个序列 $\omega_j \to \infty$，使得 Re $\mathcal{L}'(\omega_j) \to 0$。取一个子序列后，不妨设 $\mathcal{L}'(\omega_j) \to z$，其中某个 $z \in [0; -i\infty) \cup \{\infty\}$，因为 $\mathcal{L}'(D \cap H^+) = H^-$。由于 $\mathcal{L}' = vp' - 1$ 是一个双射共形映射 $D \cap H^+ \to H^-$，且 $\mathcal{L}'$

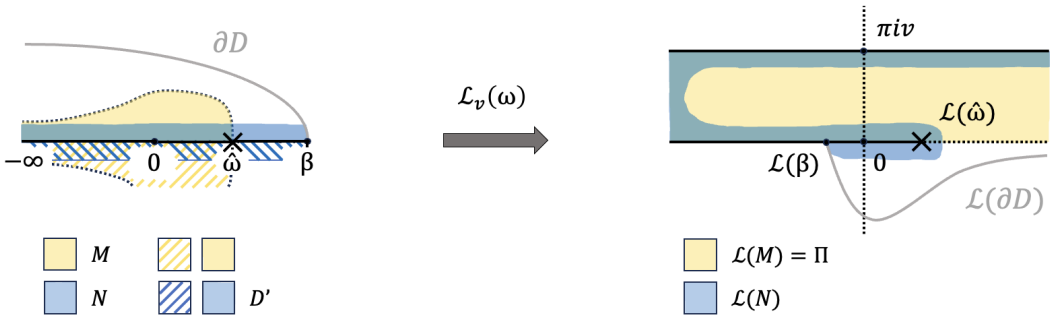


图 13: 域 M、 N、 D'及其在 $v > 0$下的像。参见命题 3 的证明。

在 0 和 $\hat{\omega}$ 处亚纯，且 $\mathcal{L}'(0) = \infty$、 $\mathcal{L}'(\hat{\omega}) = 0$，因此存在一个有界集 $B \subset D \cap H^+$，使得 $\mathcal{L}'(B)$ 覆盖 H^- 中 z 的一个邻域。由于 $\mathcal{L}'(\omega_j) \to z$, $\omega_j \to \infty$，且 B 有界，这与 $\mathcal{L}'$ 在 $D \cap H^+$ 中的单射性矛盾。

那么，当 n 足够大时, 值 $\operatorname{Re}\mathcal{L}'$ 在水平线段 $[x_0 + i \operatorname{Im}\omega_n; \omega_n]$ 上符号恒定，因此

$$|\operatorname{Re}\mathcal{L}(\omega_n)| \geq \left| \int_{x_0}^{\operatorname{Re}\omega_n} \operatorname{Re}\mathcal{L}'(x + i \operatorname{Im}\omega_n)\, dx \right| - |\operatorname{Re}\mathcal{L}(x_0 + i \operatorname{Im}\omega_n)| \geq \delta |\operatorname{Re}\omega_n - x_0| - O_{v,\varepsilon,x_0,p}(1) \to +\infty$$

当 $n \to \infty$ 时，由连续性可知 $\operatorname{Re}\mathcal{L}(x_0 + iy)$ 有界。因此 $\mathcal{L}(\omega_n) \to \infty$，所以 $\mathcal{L}|_M$ 是本原的。

由于平面子集之间的每个本原映射都是闭映射， $\mathcal{L}(M)$ 在 Π 中是闭集。由于 $\mathcal{L}$ 非恒定且解析， $\mathcal{L}(M)$ 在 Π 中是开集。由证明的第一段可知， $\mathcal{L}(M)$ 非空。因此 $\mathcal{L}(M) = \Pi$。由于每个本原共形映射都是覆盖映射（引理 2]）， M 是路径连通的，且 Π 是单连通且局部路径连通的，由此可知 $\mathcal{L}|_M$ 是一个同胚映射 $M \leftrightarrow \Pi$。□

命题 3（保角变量变换）。 存在一族关于实轴对称且包含 $(-\infty;\ \beta) \cup M$（图 *13*）的域 $D'_v \subset D$、一个实解析的单射函数族 $z_v\colon\ D'_v \to \mathbb{C}$ 以及一个实解析函数 $\Delta\colon\ V \to \mathbb{R}$，使得对于每个 $v \in V$，都有 $\mathcal{L}_v|_{D'_v} = F_{v,\ \Delta(v)} \circ z_v$，此外还有 $z\ (-\infty) = -\infty$, $z\ (0) = 0$, $z\ (\hat{\omega}) = v$,

$$z'(\hat{\omega}) = \begin{cases} |v|\sqrt{-p''(\hat{\omega})}, & \text{if } v \neq 0, \\ 1, & \text{if } v = 0, \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \Delta(v) = \begin{cases} \mathcal{L}(\hat{\omega}) - v \log v + v, & \text{if } v \neq 0, \\ 0, & \text{if } v = 0. \end{cases} \tag{48}$$

证明。 选取 $\Delta\ (v)$，使得对于每个 $v \neq 0$，临界值 $\mathcal{L}_v\ (\hat{\omega})$ 和 $F_{v,\ \Delta(v)}\ (v)$ 相匹配，并且 $\mathcal{L} = F$ for$v = 0$ （即图 12 中的“对齐十字”）。由此得到 (48) 中 $\Delta\ (v)$ 的表达式。

所需的定义域 D' 是 $(-\infty;\ \beta)$、 M、 H^+ 中 $(-\infty;\ \beta)$ 的一族足够小的邻域 N，以及它们关于实轴的对称副本的并集（见图 13）。通过将 N 取得足够小，我们可以假设 $\mathcal{L}|_N$ 是单射的， $N \cap \mathcal{L}^{-1}(\Pi) \subset M$， $\mathcal{L}(N) \cap (-\infty;\ \mathcal{L}(\beta-)) = \varnothing$，并且 N 还是单连通的（附录 A 中的命题 6 证明了这样一族 N 的存在性）。

函数 $z(\omega) = z_v(\omega)$ 分几个步骤构造。首先，我们定义（见图 12）

$$z(\omega) := (F|_{H^+})^{-1}(\mathcal{L}(\omega)) \qquad \text{for each} \quad \omega \in M \cup N.$$

我们来证明 $z(\omega)$ 定义良好且为单射。由引理 8，逆映射 $(F|_{H^+})^{-1}\colon\ F(H^+) \to H^+$存在，且 $\mathcal{L}(M) \subset \Pi \subset F(H^+)$。由引理 7–8，我们得到 $\partial F(H^+) = \mathcal{L}((-\infty;\ \beta) \setminus \{0\}) \cup (-\infty;\ \mathcal{L}(\beta-)]$ (对于$\mathcal{L}(\beta-) \neq -\infty$ 和 $v \neq 0$)。于是 $\mathcal{L}(N) \cap \partial F(H^+) = \varnothing$，因为 $\mathcal{L}|_N$是单射，且 $\mathcal{L}(N) \cap (-\infty;\ \mathcal{L}(\beta-)) = \varnothing$。接着 $\mathcal{L}(N) \subset F(H^+)$，因为 N是连通的，且 $\partial\mathcal{L}(N) \ni \mathcal{L}(\hat{\omega}) = F(v)$。所以 $z(\omega)$ 定义良好。映射 $z|_M$ 和 $z|_N$ 是单射，因为根据引理 9 及 N的选取， $\mathcal{L}|_M$ 和 $\mathcal{L}|_N$ 是单射。由于$\mathcal{L}(M) \subset \Pi$且 $N \cap \mathcal{L}^{-1}(\Pi) \subset M$，可得 $\mathcal{L}(N \setminus M) \cap \mathcal{L}(M) = \varnothing$，因此 $z(N \setminus M) \cap z(M) = \varnothing$。所以，$z(\omega)$ 是单射。

接下来，我们将 $z(\omega)$ 连续延拓到 $(-\infty;\beta)$。单射共形映射 $\mathcal{L}|_N$ 可延拓为 $(-\infty;\ \beta)$ 与 $\mathcal{L}(N)$ [25, 对应的素端集合之间的同胚（定理 2.20]）。由引理 7–8，单射共形映射 $(F|_{H^+})^{-1}|_{\mathcal{L}(N)}$ 可延拓为该素端集合与一个实区间之间的同胚。因此，映射 $z=(F|_{H^+})^{-1}\circ\mathcal{L}$ 可连续延拓到 $(-\infty;\ \beta)$，且 $z((-\infty;\beta))\subset\mathbb{R}$。此外，由引理 7–8，该延拓将 $-\infty$、$\hat\omega$、0 和 β 之间的区间映射到 $-\infty$、 v、0 和 $(F|_{(\max(v,0);+\infty)})^{-1}(\mathcal{L}(\beta-))$ 之间的区间（当 $v>0$ 时，$\hat\omega$、0 与 v、0 的顺序会颠倒）。特别地，对每个 v，都有 $z(-\infty)=-\infty$、 $z(0)=0$，以及 $z(\hat\omega)=v$。

现在，根据施瓦茨反射原理 [25, 定理 9.1]，，我们可以将 $z(\omega)$ 解析延拓至 D'，因为 $z((-\infty;\beta)\cap\mathbb{R})$ 是单射 接下来，我们验证相邻 z 在 $(-\infty;\beta)$ 中的解析性于函数 $\Delta(v)=$ 对数函数映射 $v\hat\omega+v$（在 $v=0$ 处延拓为 0）是实解析的，因为$\hat\omega(v)$是实解析的（见注 4），$\hat\omega'(0)=1$，并且根据引理 7，$\operatorname{sgn}\hat\omega=\operatorname{sgn} v$。

我们来证明 $z_v(\omega)$是一个实解析族。对于 $\omega\in D'\cap H^+$，函数 $v\mapsto z_v(\omega)=F_{v,\Delta}^{-1}(v)(\mathcal{L}_v(\omega))$是实解析的，因为 $\Delta(v)$是实解析的， $\mathcal{L}_v|_{D'\cap H^+}$ 和$F_{v,\Delta}|_{H^+}$ 是解析且单射的，并且根据反函数定理的一个版本（见附录B中的引理 21），$(F_{v,\Delta}|_{H^+})^{-1}$ 构成一个解析族。类似地，对于 $\omega\in(0;\ \beta)\setminus\{\hat\omega\}$，有 $F'(z(\omega))\neq 0$，因此 F在某个区域族 $B\ni z(\omega)$中是单射的（该区域族在 $\mathbb{C}\times V$中构成$(z(\omega),\ v)$的一个小邻域）。于是，$(F|_B)^{-1}\circ\mathcal{L}$关于 v 是实解析的，并且在 ω处与 z_v 重合。对于 $\omega\in(-\infty;\ 0)\setminus\{\hat\omega\}$，根据同样的论证，映射 $v\mapsto z_v(\omega)$是实解析的，只是将 $\mathcal{L}$ 和 F 分别替换为它们从 H^+ 到 ω 附近以及 $z(\omega)$附近的解析延拓。对于 $\omega\in D'\cap H^-$，解析性由对称性得出。最后，根据可去奇点定理的一个版本（见附录B中的引理22）， $v\mapsto z_v(\omega)$在 $\omega=\hat\omega,0$处是解析的。

还需推导 (48) 的第一个方程。对恒等式 $\mathcal{L}(\omega)=F(z(\omega))$ 求导，得

$$\mathcal{L}'(\omega)=F'(z(\omega))\,z'(\omega),\qquad\qquad \mathcal{L}''(\omega)=F''(z(\omega))\,z'(\omega)^2+F'(z(\omega))\,z''(\omega).$$

将 $\omega=\hat\omega$ 代入后一个公式，并利用 $z(\hat\omega)=v$，得

$$vp''(\hat\omega)=\mathcal{L}''(\hat\omega)=F''(v)\,z'(\hat\omega)^2=-\frac{z'(\hat\omega)^2}{v}\quad\text{for } v\neq 0.$$

因此， $z'(\hat\omega)=+|v|\sqrt{-p''(\hat\omega)}$，前面的符号为正，因为根据定向原理， $z'>0$ 在 $(-\infty;\beta)$ 上。如果 $v=0$，那么 $z(\omega)=\omega$ 且 $z'(\hat\omega)=1$。 □

推论 5. 对于每个 $v>0$，像集 $z(D')$ 包含圆盘 $C:=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\le v\}$。

证明. 对于每个 $z\in C\cap H^+$，我们有 $0<|z|\sin\arg z<v\cdot\arg z$，因此 $\operatorname{Im} F(z)=v\cdot\arg z-|z|\sin\arg z\in(0;\ v\pi)$，即根据引理 9， $F(C\cap H^+)\subset\Pi=\mathcal{L}(M)$。于是 $C\cap H^+\subset(F|_{H^+})^{-1}(\mathcal{L}(M))=z(M)$。然后，由对称性，$z(D')$ 包含 C，因为 $z(D')\supset(z(-\infty);z(\hat\omega)]\supset[-v;\ v]$。 □

注5。 渐近公式 (42) 的主项可以用命题 3 的记号表示为

$$\frac{t^x e^{-t\Delta(x/t)}}{\Gamma(x)|x|\sqrt{-p''(\hat\omega(x/t))}}\cdot a(\hat\omega(x/t))=\frac{t^{x-1}e^{-t\Delta(x/t)}}{\Gamma(x)\,z'(\hat\omega(x/t))}\cdot a(\hat\omega(x/t)).\tag{49}$$

当 $x\to 0$ 时，我们有 $1/\Gamma(x)\to 0$、$\hat\omega(x/t)\to 0$，以及 $z'(\hat\omega(x/t))\to 1$。因此，在 $x=0$ 处，函数 (49) 连续延拓为零。于是，渐近公式 (42) 对 $x=0$ 成立：在这种情况下，被积函数在 $(-\infty;0]$ 的邻域内解析，且积分为零。此外，由命题 3 和注 4 可知，函数 $\Delta(v)$、$\hat\omega(v)$ 和 $z'(\hat\omega(v))$ 均解析，因此函数 (49) 在 $x=0$ 处解析。

4.3 一般伽马现象的证明（定理 4）

在本小节中，我们完成定理 4 的证明。我们采用该定理和第 4.2 节中的记号与假设。首先说明定理中的积分是良定义的。

引理 *10.* 对每个在 $(-\infty;\,0]$, 上有界的实解析函数 $A\colon D'\to\mathbb{C}$，以及每个 x 和 t，积分 $\int_{(0+)}^{-\infty} A(\omega)\, e^{-t\mathcal{L}_{x/t}(\omega)}\,d\omega$ 都是良定义的。也就是说，存在 $(-\infty;0]$ 在 D' 中的一个邻域 N，使得对于每条围道 $\gamma\colon \mathbb{R}\to N\setminus(-\infty;0]$，只要它逆时针绕 $(-\infty;\,0]$ 一周且满足 $\operatorname{Re}\gamma(\pm\infty)=-\infty$，沿该围道的积分就存在，并且与围道的选取无关。

证明。由于根据引理 7，$\mathcal{L}'(-\infty)<0$，因此对于某些 $k,b>0$（取决于 x/t 和 p）以及所有 $\omega<-1$，有 $\operatorname{Re}\mathcal{L}(\omega)>k|\omega|-b$。于是存在 $\delta>0$ 和一个连续函数 $\varepsilon\colon(-\infty;\,\delta)\to(0;\,\delta)$，使得集合 $N:=\{\omega\colon \operatorname{Re}\omega<\delta,\,|\operatorname{Im}\omega|<\varepsilon(\operatorname{Re}\omega)\}$ 包含于 D'，且 $A(\omega)$ 在此处有界，并且对于此集合中满足 $\operatorname{Re}\omega<-1$ 的所有 ω，有 $\operatorname{Re}\mathcal{L}(\omega)>k|\operatorname{Re}\omega|-b$。该集合就是所需的 $(-\infty;\,0]$ 邻域。事实上，对于 $f(\omega):=A(\omega)\,e^{-t\mathcal{L}(\omega)}$ 以及所有充分大的 s_1,s_2，我们有

$$\int\limits_{\gamma([s_1;s_2])} f(\omega)\,d\omega=\int\limits_{\gamma(s_1)}^{\operatorname{Re}\gamma(s_1)} f(\omega)\,d\omega+\int\limits_{\operatorname{Re}\gamma(s_1)}^{\operatorname{Re}\gamma(s_2)} f(\omega)\,d\omega+\int\limits_{\operatorname{Re}\gamma(s_2)}^{\gamma(s_2)} f(\omega)\,d\omega=O_{k,t,\delta,\varepsilon,A}\left(e^{-kt\min(|\operatorname{Re}\gamma(s_1)|,|\operatorname{Re}\gamma(s_2)|)+bt}\right).$$

对于所有充分小的 $s_1,s_2<0$，同样的界也成立，只需将围道 $[\operatorname{Re}\gamma(s_1);\operatorname{Re}\gamma(s_2)]$ 上的被积函数值从 H^- 连续延拓。因此，沿围道 γ 的积分收敛。令 $s_2\to\pm\infty$ 趋于极限，得到 $\int_{\gamma([s_1;\pm\infty))} f(\omega)\,d\omega=\int_{\gamma(s_1)}^{\operatorname{Re}\gamma(s_1)} f(\omega)\,d\omega+\int_{\operatorname{Re}\gamma(s_1)}^{-\infty} f(\omega)\,d\omega$，当 $\pm s_1$ 充分大时成立，由此证明了围道无关性。

□

备注 6. 引理 10 及其证明在将 $\mathcal{L}(\omega)$ 替换为 $F(\omega)$ 后仍然成立，因为显然 $F'(-\infty)<0$。

我们将进行命题 3 给出的变量替换 $z_v(\omega)$。接下来界定过程中出现的辅助函数。记 $\omega(z)=\omega_v(z)\colon\ z(D')\to\mathbb{C}$ 为 $z_v(\omega)$ 的逆映射，并令

$$G(z)=G_v(z):=a(\omega_v(z))\,\omega_v'(z). \tag{50}$$

由于根据命题 3，$z_v(\omega)$ 是一个实解析族，因此由引理 21 可知，$\omega_v(z)$ 和 $G_v(z)$ 均为实解析族。

引理 11. 函数族

$$H(z)=H_v(z):=\frac{G(z)-G(v)}{F'(z)}=\frac{z}{v-z}(G(z)-G(v)),\qquad v\in V,\quad z\in z_v(D_v')\setminus\{v\}, \tag{51}$$

可扩展为 $z_v(D_v')$ 上的实解析函数族。此外，对于 $z\in(-\infty;0]$ 和 $v\in V$，有 $H(z)\,H'(z)=O_{v^-,\,v^+,\,a,\,p}(1)$

证明。第一个断言由 Hadamard 引理 23 应用于 $G(z)$ 和 $\hat{}z(v)=v$ 得出。剩下要证明“此外”部分。不妨设 $v^-<0$。

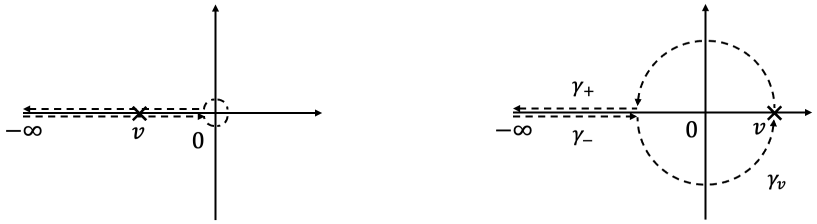
取一个足够小的 $\delta=\delta_{v^-,\,v^+,\,p}>0$（仅取决于 v^-，v^+，p），使得 $[v^-\delta;\ v^++\delta]\subset(V^-;\ V^+)$。令

$$Q=Q_{v^-,v^+,p}:=(p')^{-1}\left(\frac{1}{v^--\delta}\right).$$

根据引理 6，Q 定义良好，且 $Q<\min(\hat{}\omega,\ 0)$。应用 $z(\omega)$（其满足 $z(-\infty)=-\infty$ 且为单射，因而是递增的），可得 $z(Q)<\min(v,\ 0)$。由紧致性，$z(Q)\ z(Q)-v=\Omega_{v^-,\,v^+,\,p}(1)$。注意，对于 $\omega\le Q$，$1/\mathcal{L}'(\omega)=O_{v^-,\,v^+,\,p}(1)$，因为根据引理 6，我们有

$$\mathcal{L}'(\omega)=vp'(\omega)-1\le\begin{cases}vp'(Q)-1=\frac{v}{v^--\delta}-1\le\frac{\delta}{v^--\delta}<0, & \text{if } v^-\le v\le 0,\\ vp'(-\infty)-1<\frac{v}{v^++\delta}-1\le\frac{-\delta}{v^++\delta}<0, & \text{if } 0<v\le v^+.\end{cases}$$

对于 $z(Q)\le z\le 0$，$H(z)\ H'(z)$ 的所需界成立，因为集合 $\{(z,\ v)\colon z_v(Q)\le z\le 0,\ v^-\le v\le v^+\}$ 是紧的，而 $H(z)$ 是实解析族。



(a) 对于 $v<0$　　(b) 对于 $v>0$

图 14：引理 12 证明中的积分路径。

对于 $z\le z(Q)$，利用公式 $\omega'(z)=F'(z)/\mathcal{L}'(\omega(z))$，我们计算

$$H(z)=\frac{1}{F'(z)}\left(a(\omega(z))\,\omega'(z)-G(v)\right)=\frac{a(\omega(z))}{\mathcal{L}'(\omega(z))}-\frac{zG(v)}{v-z},$$
$$H'(z)=\left(\frac{a(\omega)}{\mathcal{L}'(\omega)}\right)'\Big|_{\omega=\omega(z)}\cdot\omega'(z)-\frac{vG(v)}{(v-z)^2}=\left(\frac{a'(\omega)}{\mathcal{L}'(\omega)^2}-\frac{va(\omega)\,p''(\omega)}{\mathcal{L}'(\omega)^3}\right)\frac{v-z}{z}\Big|_{\omega=\omega(z)}-\frac{vG(v)}{(v-z)^2}.$$

由于 $a(-\infty)$、$a'(-\infty)$、$p''(-\infty)$ 均有限，且 $\omega(z)\le Q$ 对于 $z\le z(Q)$，因此 $a(\omega(z))$、$a'(\omega(z))$、$p''(\omega(z))=O_{v^-,\,v^+,\,a,\,p}(1)$。由于 $1/\mathcal{L}'(\omega(z))=O_{v^-,\,v^+,\,p}(1)$，$z(Q)-v=\Omega_{v^-,\,v^+,\,p}(1)$，$z(Q)=\Omega_{v^-,\,v^+,\,p}(1)$，且 $G(v)=a(\omega(v))\,\omega'(v)=O_{v^-,\,v^+,\,a,\,p}(1)$，因此对于 $z\le z(Q)$，$H(z)\,H'(z)=O_{v^-,\,v^+,\,a,\,p}(1)$。 □

该引理和注 6 表明，以下积分是良定义的。

引理 12. 有

$$\int_{-\infty}^{(0+)}e^{-tF(z)}\,dz=\frac{2\pi i\,e^{-t\Delta}t^{x-1}}{\Gamma(x)}\qquad\text{and}\qquad\int_{-\infty}^{(0+)}e^{-tF(z)}H'(z)\,dz=O_{v^-,v^+,a,p}\left(\frac{e^{-t\Delta}t^{x-1}}{|\Gamma(x)|}\right).\tag{52}$$

证明。第一个公　式可通过在汉克尔积分 [29, §5.9 中作变量替换 $u=tz$ 得到。　　2]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}e^{u}u^{-x}\,du=\frac{1}{\Gamma(x)}.$$

为证明第二个公式，考虑由 x 的符号决定的两种情况。

情况 1：$x\le 0$。函数 $F(z)$ 在 0 处可能有一个分支点，并且在割线 $(-\infty;0]$ 上可能不连续。由引理 11 和注 6，左侧可写为在 $(-\infty;0]$ 上的积分之差，其中被积函数的值分别从下半平面和上半平面连续延拓而来（见图 14a）：

$$\int_{-\infty}^{(0+)}e^{-tF(z)}H'(z)\,dz=(e^{\pi ix}-e^{-\pi ix})\int_{-\infty}^{0}e^{-x\log|z|+tz-t\Delta}H'(z)\,dz.\tag{53}$$

与此同时，

$$\int_{-\infty}^{(0+)}e^{-tF(z)}\,dz=(e^{\pi ix}-e^{-\pi ix})\int_{-\infty}^{0}e^{-x\log|z|+tz-t\Delta}\,dz.\tag{54}$$

由于被积函数为正，且 $H'(z)=O_{v^-,\,v^+,\,a,\,p}(1)$ 对于 $z\in(-\infty;0]$ 根据引理 11，可得界（52）。情形 2：$x>0$。在此情形下，$F(z)$ 在原点处发散，并且具有唯一的临界点 $v=x/t>0$。我们应用引理 11 和注 6，并选择一条绕过原点且经过该临界点的特殊积分路径；见图 14b。它由三部分组成：

1. $\gamma_-=(-\infty;-v]$，被积函数的值由下半平面连续延拓而来，

2. γ_v，沿着以原点为圆心、半径为 v 的圆逆时针行进，

3. $\gamma_+ = [-v; -\infty)$，被积函数的取值由上半平面连续延拓而来。

推论 5 保证 γ_v 位于 z 的可容许值定义域 $z(D')$ 内。为估计沿 γ_v 的积分，我们引入新变量 φ，使得 $z = ve^{i\varphi}$, $-\pi \le \varphi \le \pi$:

$$\int_{\gamma_v} e^{-tF(z)} H'(z)\, dz = iv^{1-x} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cos\varphi + ix(\sin\varphi - \varphi) + i\varphi - t\Delta} H'(ve^{i\varphi})\, d\varphi = O_{v^-, v^+, a, p}\left(e^{-t\Delta} v^{1-x} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cos\varphi}\, d\varphi \right).$$

因为 $H'(z) = O_{v^-,\ v^+,\ a,\ p}(1)$，由紧致性可知，对 $|z| \le v$ 成立。

对于 $x \ge 1$，利用 $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2(\varphi/2) \le 1 - 2\varphi^2/\pi^2$ $(-\pi \le \varphi \le \pi)$，我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cos\varphi}\, d\varphi \le \int_{-\pi}^{\pi} e^{x\left(1 - 2\varphi^2/\pi^2\right)}\, d\varphi \le \int_{-\infty}^{\infty} e^{x\left(1 - 2\varphi^2/\pi^2\right)}\, d\varphi = O\left(\frac{e^x}{\sqrt{x}}\right).$$

由斯特林公式，我们得到

$$\int_{\gamma_v} e^{-tF(z)} H'(z)\, dz = O_{v^-, v^+, a, p}\left(e^{-t\Delta} v^{1-x} \frac{e^x}{\sqrt{x}} \right) = O_{v^-, v^+, a, p}\left(\frac{e^{-t\Delta} t^{x-1}}{\Gamma(x)} \right).$$

对于 $x \in (0; 1)$，我们使用平凡估计 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cos\varphi}\, d\varphi = O(1)$。由于 $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ 且 x^{-x} 在 $(0;1)$ 上有界，我们得到相同的估计

$$\int_{\gamma_v} e^{-tF(z)} H'(z)\, dz = O_{v^-, v^+, a, p}\left(e^{-t\Delta} v^{1-x} \right) = O_{v^-, v^+, a, p}\left(\frac{e^{-t\Delta} t^{x-1}}{\Gamma(x)} \right).$$

同理，我们得到如下界

$$\int_{\gamma_v} e^{-tF(z)}\, dz = O\left(\frac{e^{-t\Delta} t^{x-1}}{\Gamma(x)} \right).$$

沿射线 γ_- 和 γ_+ 的积分之和的估计与情形 1 中相同:

$$\int_{\gamma_-} e^{-tF(z)} H'(z)\, dz + \int_{\gamma_+} e^{-tF(z)} H'(z)\, dz = (e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}) \int_{-\infty}^{-v} e^{-x\log|z| + tz - t\Delta} H'(z)\, dz =$$

$$= O_{v^-, v^+, a, p}\left(\left| e^{\pi i x} - e^{-\pi i x} \right| \int_{-\infty}^{-v} e^{-x\log|z| + tz - t\Delta}\, dz \right) = O_{v^-, v^+, a, p}\left(\left| \int_{\gamma_-} e^{-tF(z)}\, dz + \int_{\gamma_+} e^{-tF(z)}\, dz \right| \right) =$$

$$= O_{v^-, v^+, a, p}\left(\left| \int_{-\infty}^{(0+)} e^{-tF(z)}\, dz - \int_{\gamma_v} e^{-tF(z)}\, dz \right| \right) = O_{v^-, v^+, a, p}\left(\frac{e^{-t\Delta} t^{x-1}}{\Gamma(x)} \right).$$

综合对这三部分上的积分所得的界，我们得到所需的界。 □

定理 *4* 的证明。 为计算给定的积分

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} a(\omega)\, e^{\omega t - p(\omega) x}\, d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} a(\omega)\, e^{-t\mathcal{L}(\omega)}\, d\omega,$$

我们进行由命题 3 给出的保角变量变换 $z(\omega)$:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} a(\omega(z))\, \omega'(z)\, e^{-t\mathcal{L}(\omega(z))}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} G(z)\, e^{-tF(z)}\, dz. \tag{55}$$

这里，$z(\omega) \to -\infty$ 在实轴上趋于 $\omega \to -\infty$，因此在 $(-\infty;0]$ 的邻域中，当 $\omega \to -\infty$ 时也如此。根据引理 10，我们可以假设积分路径位于该邻域内，于是得到式 (55)。回想一下，$F(z) = v$ 对数函数 $z - z + \Delta(v)$，而 $G(z) = a(\omega(z))\,\omega'(z)$，其中 $\Delta(v)$ 定义于式 (48)。

我们将函数 $G(z)$ 替换为其在 $F(z)$ 的临界点 v 处的取值，从而提取主项：

$$I = \frac{1}{2\pi i} G(v) \int_{-\infty}^{(0+)} e^{-tF(z)}\,dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} (G(z) - G(v))\, e^{-tF(z)}\,dz =: \frac{1}{2\pi i}\,(G(v)\,I_1 + I_2)\,.$$

这里，$\frac{G(v)}{2\pi i} I_1$ 是预期的主项，而 I_2 是误差项。利用 (51) 中 $H(z)$ 的定义、分部积分以及引理 12，我们将后者估计如下：

$$I_2 = \int_{-\infty}^{(0+)} e^{-tF(z)} H(z)\,dF(z) = -\frac{1}{t} \int_{-\infty}^{(0+)} H(z)\,de^{-tF(z)} = \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{-tF(z)} H'(z)\,dz = O_{v^-,v^+,a,p}\left(\frac{|I_1|}{t}\right).$$

这里，由引理 11 得 $H(z) = O_{v^-,v^+,a,p}(1)$，由 (47) 得 $\operatorname{Re} F(-\infty) = +\infty$，因此 $\lim_{z\to-\infty, z\in\mathbb{R}} H(z)\, e^{-tF(z)} = 0$。根据引理 10，我们可以假设沿积分路径也成立。因此，

$$I = \frac{G(v)}{2\pi i} I_1 + O_{v^-,v^+,a,p}\left(\frac{|I_1|}{t}\right) = \frac{I_1}{2\pi i}\,\omega'(v)\left(a(\hat\omega) + O_{v^-,v^+,a,p}\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

因为 $\omega'(v) = \Omega_{v^-,v^+,p}$ 由 $\omega(z)$ 的单射性和紧致性可得 (1)。由引理 12 和 (48)，我们得到

$$\frac{I_1}{2\pi i} = \frac{t^{x-1}e^{-t\Delta(v)}}{\Gamma(x)} = \frac{t^{x-1}e^{-t\mathcal{L}(\hat\omega)}}{\Gamma(x)} \left(\frac{x}{t}\right)^x e^{-x} = \frac{e^{\hat\omega t - p(\hat\omega)x}}{t\,\Gamma(x)} \left(\frac{x}{e}\right)^x \qquad \text{and} \qquad \omega'(v) = \frac{1}{z'(\hat\omega)} = \frac{1}{|v|\sqrt{-p''(\hat\omega)}},$$

所需的渐近公式 (42) 即得。 □

推论 *4* 的证明。 对于 $v \ge \delta$，根据斯特林公式可得

$$\frac{(x/e)^x}{|x|\,\Gamma(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + O_\delta\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$

且 推论的第三种情形得证。对于 $v \le -\delta$，利用欧拉反射公式

$$\Gamma(1-x)\,\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \tag{56}$$

恒等式 $\Gamma(1-x) = -x\,\Gamma(-x)$ 和 $x^x = (-x)^x e^{\pi i x}$（其中 $x < 0$），以及斯特林公式，可得

$$\frac{(x/e)^x}{|x|\,\Gamma(x)} = \left(\frac{x}{e}\right)^x \cdot \frac{\sin(\pi x)\,\Gamma(1-x)}{\pi|x|} = \frac{e^{2\pi i x} - 1}{i\sqrt{-2\pi x}} \left(1 + O_\delta\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$

这就证明了第一种情形下的推论。

考虑剩余的情形 $|v| \le \delta/t_\circ$ 回忆 $t \ge 1$。由命题 3、引理 7 和注 4 可得 $\operatorname{sgn} \hat\omega = \operatorname{sgn} v$、$\hat\omega'(0) = 1$、$z'(\hat\omega(0)) = 1$，以及 $z'(\omega) \ne 0$。因此，由紧致性，

$$\hat\omega(v) = v \exp\left(O_{\delta,v^-,v^+,p}(t^{-1})\right) \quad \text{and} \quad \sqrt{-v^2 p''(\hat\omega(v))} = z'(\hat\omega(v)) = \exp\left(O_{\delta,v^-,v^+,p}(t^{-1})\right),$$

其中 $\exp\left(O_{\delta,v^-,v^+,p}(t^{-1})\right)$ 的含义显而易见。这使我们能够估计式 (42) 中的其他量：

$$e^{t\hat\omega(v)} = e^x \exp\left(O_{\delta,v^-,v^+,p}(t^{-1})\right), \qquad p(\hat\omega(v)) = \log\hat\omega(v) + q(0) + O_{\delta,v^-,v^+,p}(t^{-1}),$$
$$\frac{(x/e)^x}{|x|\,\Gamma(x)} \cdot \frac{e^{\hat\omega(v)t - p(\hat\omega(v))x}}{\sqrt{-p''(\hat\omega(v))}} = \frac{x^x v^{-x} e^{-q(0)x} \exp\left(O_{\delta,v^-,v^+,p}(t^{-1})\right)}{t\,\Gamma(x)\sqrt{-v^2 p''(\hat\omega(v))}} = \frac{t^{x-1}e^{-q(0)x}}{\Gamma(x)}\left(1 + O_{\delta,v^-,v^+,p}(t^{-1})\right).$$

□

4.4 贝塔函数及其相关函数的伽马现象

作为一个简单示例，我们来将定理 4 应用于贝塔函数的积分表示 [12, 第 1 节。6]:

$$B(1-x,t) = -\frac{1}{2i\sin(\pi(1-x))}\int_1^{(0+)}(-u)^{-x}(1-u)^{t-1}du = \frac{1}{2i\sin(\pi x)}\int_{-\infty}^{(0+)} e^{\omega t-\overbrace{\log(e^\omega-1)}^{p(\omega)}\cdot x}\,d\omega, \tag{57}$$

其中 $x\notin\mathbb{Z}$、$t>0$ 和 $u=1-e^\omega$。设 $a(\omega):=1$、$p(\omega):=\log(e^\omega-1)$，且 $D:=\{\omega\in\mathbb{C}:\ -\pi<\text{虚部 }\omega<\pi\}$。对于每个 $\omega\in D\cap H^+$，都有辐角 ω，辐角$(e^\omega-1)\in(0;\pi)$。因此 $\left|\text{辐角 }\frac{e^\omega-1}{\omega}\right|<\pi$。对于 $\omega\in D\setminus\{0\}$ 也同样成立；所以函数 $q(\omega):=p(\omega)-\log\omega=\log\frac{e^\omega-1}{\omega}$，通过 $q(0):=0$ 延拓后，在 D 中解析。显然，

$$p'(\omega) = 1+(e^\omega-1)^{-1} \tag{58}$$

双射地将定义域 $D\cap H^+$ 映射到 H^-，并且 $p''(-\infty)=0$ 是有限的。

我们来计算值 (43)。由 (58)，我们有 $p'(-\infty)=0$，因此 $V^-=-\infty$。为计算 V^+，注意到

$$\pi>\operatorname{Im}p(\omega)=\arg(e^\omega-1)>\arg(e^\omega)=\operatorname{Im}\omega$$

对所有 $\omega\in D\cap H^+$ 均成立。因此，$\limsup_{\omega\to\partial D}\operatorname{Im}p(\omega)/\operatorname{Im}\omega=1$，从而 $V^+=1$。假设 $v:=x/t<V^+$。

$\hat\omega$ 的值由方程 $p'(\hat\omega)=1+(e^{\hat\omega}-1)^{-1}=1/v$ 确定，即 $\hat\omega=-\log(1-v)$。于是，

$$\frac{1}{\sqrt{-p''(\hat\omega)}}=\frac{|v|}{\sqrt{1-v}}\qquad\text{and}\qquad e^{\hat\omega t-p(\hat\omega)x}=v^{-x}(1-v)^{x-t}.$$

对于 $v\in[v^-;v^+]\subset(-\infty;1)$，由定理 4 和欧拉反射公式 (56)，最终得到

$$B(1-x,t)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\cdot\frac{(1-v)^{x-t-1/2}}{e^x\,t^{1-x}\,\Gamma(x)}\left(1+O_{v^-,v^+}\left(\frac{1}{t}\right)\right)=\frac{\Gamma(1-x)\,t^{t-1/2}}{e^x(t-x)^{t-x+1/2}}\left(1+O_{v^-,v^+}\left(\frac{1}{t}\right)\right) \tag{59}$$

对于满足 $x/t\in[v^-;v^+]$ 的每个 $x\notin\mathbb{Z}$、$t>0$ 和 $v^-<v^+<1$。

注意到，同一渐近公式可由恒等式 $B(t,1-x)=\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(1-x)\,\Gamma(t-x+1)}$ 以及对 $\Gamma(t)$ 和 $\Gamma(t-x+1)$ 应用斯特林公式得到。这个简单示例可以解释为：简单随机游走在 $\mathbb{Z}$ 上从 0 出发，经过 t 步后到达 $t-2n$ 的概率所呈现的伽马现象：

$$P(n,t):=\frac{1}{2^t}\binom{t}{n}=\frac{\sqrt{t}\,(t/2e)^t}{\Gamma(t-n+1)\,\sqrt{n}\,(n/e)^n}\left(1+O_{v^-}\left(\frac{1}{t}\right)\right),\qquad n/t\ge v^->0.$$

值得注意的是，对这一论证稍作变动，就能得到全新的结果。

注 7. 高斯超几何函数具有与 (57) 类似的积分表示（参见 [29, 第 15.6 节4]）：

$${}_2F_1(a,b;c;\xi)=\frac{i\,\Gamma(1-b)\,\Gamma(c)}{2\pi\cdot\Gamma(c-b)}\int_1^{(0+)}\frac{(-u)^{b-1}(1-u)^{c-b-1}}{(1-\xi u)^a}\,du=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(t-x+1)}{2\pi i\cdot\Gamma(t)}\int_{-\infty}^{(0+)}a(\omega)\,e^{\omega t-p(\omega)x}\,d\omega, \tag{60}$$

其中 $a\in\mathbb{R}$, $b<c$, $b\ne1,2,\ldots$, $c\ne0,-1,-2,\ldots$, $\xi\in(-\infty;1)$，$u=1-e^\omega$, $t=c-b$, $x=1-b$,$a(\omega)=(1-\xi(1-e^\omega))^{-a}$，以及 $p(\omega)=\log(e^\omega-1)$ 与 (57) 中的相同。新的 $a(\omega)$ 在相同的定义域 D for $\xi\in[0;1)$ 内解析。极限 $a(-\infty)$ 和 $a'(-\infty)$ 均为有限值。由于关于 $p(\omega)$ 的假设已经得到验证，我们可以再次应用定理 4。去掉因子 $\pi/\sin(\pi x)$，并将$a(\hat\omega)=\Omega_{a,\xi,v^-,v^+}(1)$ 代入 (59)，便得到一个渐近公式，它对 b 和 c一致成立（但对 a 和 ξ不一致）：

$${}_2F_1(a,b;c;\xi)=\frac{\Gamma(c)(c-b)^{c-b-1/2}(c-1)^{a-c+1/2}e^{b-1}}{\Gamma(c-b)(c-1+\xi(1-b))^a}\left(1+O_{a,\xi,v^-,v^+}\left(\frac{1}{c-b}\right)\right), \tag{61}$$

这适用于 $a\in\mathbb{R}$, $b<c$, $b\ne1$，$2,\ldots\ldots$、$(1-b)/(c-b)\in[v^-;\ v^+]\subset(-\infty;\ 1)$ 和 $\xi\in[0;\ 1)$。这补充了第 15.12.3 节和第 15.12.7] 节中的非一致公式 [29,，这些公式涉及更复杂的特殊函数。

4.5 量子游走的伽马现象（定理 2 的证明）

~命题 *1* 的证明。如果 $x > t$ 且 $x - t$ 为奇数，那么根据定义 1，$A_1(x,\ t,\ m) = 0$。式 (8) 的右侧也为零，因为被积函数可解析延拓至 $(-\infty;\ 0]$，且在 $-\infty$ 处为零。出于同样的~原因，如果 $x > t$ 且 $x - t$ 为偶数，那么 $A_2(x,\ t,\ m) = 0$，式 (9) 的右侧也为零。

在其他情况下，我们使用 [39,命题 3]中的关系式：

$$\widetilde{A}_1(x,t,m) = \frac{i(-im)^{t-x}}{(1+m^2)^{t/2}} \binom{(t+x-1)/2}{x} {}_2F_1\left(\frac{x-t+1}{2}, \frac{x-t+1}{2}; 1+x; -\frac{1}{m^2}\right),$$
$$\widetilde{A}_2(x,t,m) = \frac{(-im)^{t-x}}{(1+m^2)^{t/2}} \binom{(t+x)/2}{x} {}_2F_1\left(\frac{x-t}{2}, \frac{x-t+2}{2}; 1+x; -\frac{1}{m^2}\right),$$

这些关系式对 $x,\ t \in \mathbb{Z}^2$, $x,\ t \geq 0$和 $m > 0$均成立。利用高斯超几何函数的积分表示（60），我们得到

$$\widetilde{A}_1(x,t,m) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(-im)^{t-x}}{(1+m^2)^{t/2}} \cdot \int_1^{(0+)} \frac{(-u)^{(x-t-1)/2}(1-u)^{(x+t-1)/2}}{(1+u/m^2)^{(x-t+1)/2}}\, du,$$
$$\widetilde{A}_2(x,t,m) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{x+t}{x-t} \cdot \frac{(-im)^{t-x}}{(1+m^2)^{t/2}} \cdot \int_1^{(0+)} \frac{(-u)^{(x-t)/2}(1-u)^{(x+t-2)/2}}{(1+u/m^2)^{(x-t)/2}}\, du.$$

代换 $u = 1 - e^{\omega}$ 完成了证明。 □

定理 *2* 的证明。L ~首先证明 $A_1(x,\ t,\ m)$的渐近公式。将积分（8）改写为

$$\widetilde{A}_1(x,t,m) = \frac{i^{x-t+1}\, m}{(1+m^2)^{t/2}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} a(\omega)\, e^{\omega\tau - p(\omega)\chi}\, d\omega, \tag{62}$$

其中 $\tau := (t+x+1)/2$, $\chi := (t-x+1)/2$, $a(\omega) := \frac{1}{1+m^2-e^{\omega}}$, 且 $p(\omega) :=$ 对数函数$(e^{\omega}-1)$ $-$ 对数函数$(1+m^2-e^{\omega})$。

注意，对于整数 $\chi \leq 0$，由于伽马因子，(13) 的右侧为零；(62) 的右侧也为零，因为被积函数可解析延拓至 $(-\infty; 0]$，并在 $-\infty$ 处为零。因此，我们可以假设 χ 不是非正整数。我们还可以假设 $\delta < 1$ 和 $\tau > 4/\delta + \sqrt{1+m^2}$，否则 (13) 显然成立，因为对于每个固定的 δ 和 m，满足 $\tau \leq 4/\delta + \sqrt{1+m^2}$ 的 x 和 t 只有有限多个。

我们将 要应用定理 4 来估计 (62) 中的积分。考虑区域 n

$$D := \{\omega \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}\,\omega < \log\sqrt{1+m^2}, -\pi < \mathrm{Im}\,\omega < \pi\}.$$

每个 $\omega \in D \cap H^+$ 都具有 $\omega =$log $\sqrt{1 + \overline{m^2 + iu}}$ 的形式，其中 $u \in U$，而 U由（19）给出。其导数

$$p'(\omega) = \frac{e^{\omega}}{e^{\omega}-1} + \frac{e^{\omega}}{1+m^2-e^{\omega}}, \qquad p'\left(\log\sqrt{1+m^2} + iu\right) = \frac{m^2}{2+m^2-2\sqrt{1+m^2}\cos u} \tag{63}$$

是一个从 $D \cap H^+$ 到下半平面的双射共形映射，因为余弦函数将 U 双射映射到 H^-（参见图 11a）。如第4.4节所述，在条带 $|\mathrm{Im}\ \omega| < \pi$ 内，函数 log $\frac{e^{\omega}-1}{\omega}$ 在 0 处延拓为 0 后是解析的。此外，当 $\omega \in D$ 时，Re $\left(1+m^2-e^{\omega}\right) > 0$。因此，函数 $q(\omega) := p(\omega) -$log $\omega =$log $\frac{e^{\omega}-1}{\omega} -$log $\left(1+m^2-e^{\omega}\right)$ 在 D 内解析。最后，我们有 $a(-\overline{\infty}) = \frac{1}{1+m^2}$，且 $a'(-\infty) = p''(-\infty) = 0$，因此定理 4 的所有假设均得到满足。

由 (63)，我们有 $V^- = -\infty$，因为 $p'(-\infty) = 0$。要计算 V^+，我们来求两个极限： $\omega \to$($\pm\pi i - \infty; \pm\pi i +$ 对数函数 $\sqrt{1+m^2}$] 和 $\omega \to$ [对数函数 $\sqrt{1+m^2} - \pi i$; 对数函数 $\sqrt{1+\overline{m^2+\pi i}}$]。对于第一种情况，注意到

$$|\mathrm{Im}\, p(s+\pi i) - \mathrm{Im}\, p(s+\pi i - i\varepsilon)| \leq \max_{\substack{\pi-\varepsilon \leq \mathrm{Im}\,\omega \leq \pi \\ \mathrm{Re}\,\omega \leq \log\sqrt{1+m^2}}} |p'(\omega)| \cdot \varepsilon \quad \text{for } \varepsilon \in (0;\pi) \text{ and } s \leq \log\sqrt{1+m^2},$$

$\operatorname{Im} p(s+\pi i) = \pi$，且 $p'(\omega)$ 在复数域中任意一个不包含 0 的邻域的补集上有界。因此，

$$\limsup_{\omega\to(\pm\pi i-\infty;\pm\pi i+\log\sqrt{1+m^2}]} \frac{\operatorname{Im} p(\omega)}{\operatorname{Im}\omega} = \frac{\pm\pi}{\pm\pi} = 1. \tag{64}$$

在第二种情形下，由于 p' 在 $[\log\sqrt{1+m^2}$ 上为实数且单调递减；根据 (63)，$\log\sqrt{1+m^2}+\pi i]$（参见图 11b），对于每个 $u\in(0;\pi]$，我们有

$$\operatorname{Im} p\left(\log\sqrt{1+m^2}+iu\right) = \int_0^u p'\left(\log\sqrt{1+m^2}+iy\right)dy \le p'\left(\log\sqrt{1+m^2}\right)\cdot u = \frac{\sqrt{1+m^2}+1}{\sqrt{1+m^2}-1}\cdot u,$$

此外，当 $u\to 0$ 时，此估计在极限下变为精确估计。由于比值 $\operatorname{Im} p(\omega)/\operatorname{Im}\omega$（当 $\omega\to\log\sqrt{1+m^2}+iu$ 时）的收敛在 u 上一致，利用紧致性可得

$$\limsup_{\substack{\omega\to[\log\sqrt{1+m^2}-\pi i;\log\sqrt{1+m^2}+\pi i],\\ \operatorname{Im}\omega\neq 0}} \frac{\operatorname{Im} p(\omega)}{\operatorname{Im}\omega} = \frac{\sqrt{1+m^2}+1}{\sqrt{1+m^2}-1}. \tag{65}$$

结合方程 (64) 和 (65)，我们得到

$$V^+ = \max\left(1, \frac{\sqrt{1+m^2}+1}{\sqrt{1+m^2}-1}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{1+m^2}-1}{\sqrt{1+m^2}+1}.$$

Let

$$\nu := \frac{\chi}{\tau} = \frac{t-x+1}{t+x+1} = \frac{1-v}{1+v} + \frac{v}{(1+v)\tau}, \quad \text{where} \quad v := \frac{x}{t}. \tag{66}$$

假设 $v\ge 1/\sqrt{1+m^2}+\delta$ 蕴含 $\nu\in[\nu^-;\nu^+] := [-1;\ V^+(1-\delta)]$,，因为 $\tau > 1/\delta+\sqrt{1+m^2}$。将定理 4 应用于 (62) 中的积分，得到

$$\widetilde{A}_1(x,t,m) = \frac{i^{x-t+1}\,m}{(1+m^2)^{t/2}}\cdot\frac{(\chi/e)^\chi}{|\chi|\,\Gamma(\chi)}\cdot\frac{e^{\hat\omega\tau-p(\hat\omega)\chi}}{\sqrt{-p''(\hat\omega)}}\cdot\left(a(\hat\omega)+O_{m,\delta}\left(\tau^{-1}\right)\right). \tag{67}$$

我们来计算 (67) 中出现的所有值。定义 $\hat\omega$ 的方程 $p'(\hat\omega) = 1/\nu$ 是关于 $e^{\hat\omega}$ 的二次方程：

$$e^{2\hat\omega} - e^{\hat\omega}(2+m^2(1-\nu)) + 1 + m^2 = 0. \tag{68}$$

它的根为

$$e^{\hat\omega_\pm} = 1 + \frac{m^2(1-\nu)\pm m\sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{where} \quad \Delta = \Delta_\nu := m^2(1-\nu)^2 - 4\nu. \tag{69}$$

由于 $\Delta_{V^+} = \Delta_{1/V^+} = 0$，可得 $\Delta > 0$，其中 $\nu < V^+$。因此，$\hat\omega$ 有两个可能的实数值，其中较小的一个 $\hat\omega = \hat\omega_-$ 位于定义域 D 内。利用（68）–（69）的等价形式 $\frac{e^{\hat\omega}-1}{\nu} = \frac{m^2e^{\hat\omega}}{1+m^2-e^{\hat\omega}}$ 和 $me^{\hat\omega}\sqrt{\Delta} = \sqrt{1+m^2-e^{2\hat\omega}}$，我们计算得

$$p''(\hat\omega) = e^{\hat\omega}\left(\frac{1+m^2}{(1+m^2-e^{\hat\omega})^2} - \frac{1}{(e^{\hat\omega}-1)^2}\right) = -\frac{\sqrt{\Delta}}{m\nu^2}, \tag{70}$$

$$a(\hat\omega)\,e^{\tau\hat\omega-\chi p(\hat\omega)} = e^{\hat\omega\tau}\left(e^{\hat\omega}-1\right)^{-\chi}\left(1+m^2-e^{\hat\omega}\right)^{\chi-1} = m^{x-t-1}\nu^{(x-t-1)/2}e^{\hat\omega x}\left(1+m^2-e^{\hat\omega}\right)^{t-x}. \tag{71}$$

令 $d = d_v := (1+m^2)v^2 - 1 > 2\delta > 0$。利用展开式（66），我们可以将（69）–（71）改写如下：

$$\Delta = \tfrac{4d}{(1+v)^2} - \tfrac{4(d+v+1)}{(1+v)^2\tau} + O_m\left(\tfrac{1}{\tau^2}\right), \qquad e^{\hat\omega} = \tfrac{m+\sqrt{d}}{mv+\sqrt{d}}\left(1 + \tfrac{mv}{2\sqrt{d}\,\tau} + O_{m,\delta}\left(\tfrac{1}{\tau^2}\right)\right),$$
$$\sqrt{\Delta} = \tfrac{2\sqrt{d}}{1+v}\left(1 - \tfrac{d+v+1}{2d\tau}\right) + O_{m,\delta}\left(\tfrac{1}{\tau^2}\right), \qquad 1 + m^2 - e^{\hat\omega} = \tfrac{m^2+m\sqrt{d}}{1+v}\left(1 - \tfrac{(v+1)v}{2\sqrt{d}(\sqrt{d}+mv)\tau} + O_{m,\delta}\left(\tfrac{1}{\tau^2}\right)\right),$$
$$p''(\hat\omega) = -\tfrac{2\sqrt{d}}{(1+v)m\nu^2}\left(1 + O_{m,\delta}\left(\tfrac{1}{\tau}\right)\right), \qquad a(\hat\omega)\, e^{\hat\omega\tau - p(\hat\omega)\chi} = \tfrac{\nu^{(x-t-1)/2}(\sqrt{d}+m)^t e^{v/(1+v)}\cdot\left(1+O_{m,\delta}(1/\tau)\right)}{m(\sqrt{d}+mv)^x(1+v)^{t-x}},$$

因为 $\Delta, \frac{\sqrt{d}}{1+v}, e^{\hat\omega}, 1+m^2-e^{\hat\omega} = \Omega_{m,\delta}(1)$ 对于 $\nu \in [\nu^-;$ 由紧致性，$\nu^+]$，以及 $1 + \frac{m^2v - m\sqrt{d}}{1+v} = \frac{m+\sqrt{d}}{mv+\sqrt{d}}$

$$\frac{(v+1)v}{2\sqrt{d}(\sqrt{d}+mv)\tau} \le \frac{1+\sqrt{1+m^2}}{2\sqrt{\delta/2}(\sqrt{\delta/2}+m)(4/\delta+\sqrt{1+m^2})} \le \frac{1}{2} \qquad \text{because} \qquad d \ge \frac{1}{2}\delta v^2.$$

将这些值代入 (67)，并应用界 $a(\hat\omega)\ p''(\hat\omega) = \Omega_{m,\delta}(1)$ 及估计

$$\tau^{\chi-1} = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \sqrt{\frac{2}{1+v}} \cdot \left(\frac{t+x}{2}\right)^{(t-x)/2} \cdot \exp\left(\frac{1-v}{2(1+v)}\right) \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right),$$

我们得到 $A_1(x,t,m)$ 的渐近公式，与 (13) 等价：

$$\widetilde{A}_1(x,t,m) = \frac{i^{x-t+1}\sqrt{m}\,(2e(1+v))^{(x-t)/2}\left(\sqrt{(1+m^2)v^2-1}+m\right)^t \cdot \left(1 + O_{m,\delta}\left((x+t)^{-1}\right)\right)}{(1+m^2)^{t/2}\,t^{(x-t+1)/2}\,\sqrt[4]{(1+m^2)v^2-1}\left(\sqrt{(1+m^2)v^2-1}+mv\right)^x\,\Gamma((t-x+1)/2)}. \quad (72)$$

$A_2(x,t,m)$ 的渐近公式的证明遵循相同的步骤。应将定理 4 应用于积分 (9)，其中 $\tau := (t+x)/2$, $\chi := (t-x)/2 \neq 0$，且 $a(\omega) := 1$ (对于 $\chi = 0$，$A_2(t,t,m)$ 及其根据定理 2 得到的近似均计算为 $(1+m^2)^{-t/2}$)。定义域 D 和函数 $p(\omega)$，因此 V^- 和 V^+，保持不变。其余计算以类似方式进行。 □

推论 6. 表 *2* 的最后三行给出了正确的渐近公式，适用于满足第一列中相应不等式的每个 δ、$m > 0$ 和整数 x、$t \ge 0$，其中变量为 $A_1(x,t,m)$。

证明。第 7 行的公式由推论 4 应用于表示式 (62) 得出。在此情形下，$a(0) = 1/m^2$，$q(0) = -2$ 对数函数 m，且 $\tau^{\chi-1} = t^{(t-x-1)/2}(1 + O_\delta(t^{-1}))$。

第 8 行的公式由定理 2 和以下估计得出

$$\frac{1}{\Gamma((t-x+1)/2)}\left(\frac{|t-x|}{2e}\right)^{(t-x)/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot (-1)^{\frac{x-t}{2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{x-t}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot (-1)^{\frac{x-t}{2}}\left(1 + O_\delta\left(\frac{1}{x+t}\right)\right),$$

这是.....的推论　　由反射公式 (56)、斯特林公式以及 $(1+1/n)^n = e + O(1/n$　　$)$.

第 9 行的公式可通过直接重复定理 2 的证明中的所有步骤得到。由于对于 $t = 0$，我们有 $\nu = -1 + 2/(x+1) \in [\nu^-; \nu^+]$，因此公式 (67) 和计算 (68)–(71) 仍然成立。之后，我们按如下方式估计表达式 (70)–(71)：

$$p''(\hat\omega) = -\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m}\left(1 + O_m\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad a(\hat\omega)\, e^{\tau\hat\omega - \chi p(\hat\omega)} = \frac{i^{x-1}}{m}\left(\sqrt{1+m^2}-m\right)^x\left(1 + O_m\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

由反射公式 (56) 和斯特林公式可得

$$\frac{(\chi/e)^\chi}{|\chi|\,\Gamma(\chi)} = \frac{2i}{\sqrt{\pi x}}\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

将得到的表达式代入 (67)，即可得到所需的渐近公式。 □

~ ~推论 1 的证明。为证明 (17)，利用定理1将 $A_2(x,t,m)$ 表示为关于 $A_1(x,t,m)$ 的形式。对于 $v := x/t \le \hat{v}$，估计显然成立。对于 $v > \hat{v}$，选取 $C = C(m)$，使得对所有 $t > C$ 和 $v \in (\hat{v};1)$，都有 $A_1(x,t,m) \neq 0$；根据定理1和定理2，这是可能的，因为当 $v > \hat{v}$ 时，$\theta(v,m) < 0$。于是，所得的 $(1+O_{m,\delta}(t^{-1}))^{-1}$ 因子对所有 $t > C$ 都有定义；将函数 $z \mapsto 1/(1+z)$ 在零点处展开，可得其等于 $1+O_{m,\delta}(t^{-1})$，其中 (x,t) 只有有限多对例外情况，$|z| < 1/2$。

为证明 (16)，固定 $\delta = \delta(m) \in (0; 1-\hat{v})$。对于 $0 \le v \le 1-\delta$，使用斯特林公式并写成

$$\frac{\Gamma((t-x+1)/2)}{\Gamma((t-x+2)/2)}\sqrt{\frac{t+x}{2}} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}\left(1+O_\delta\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

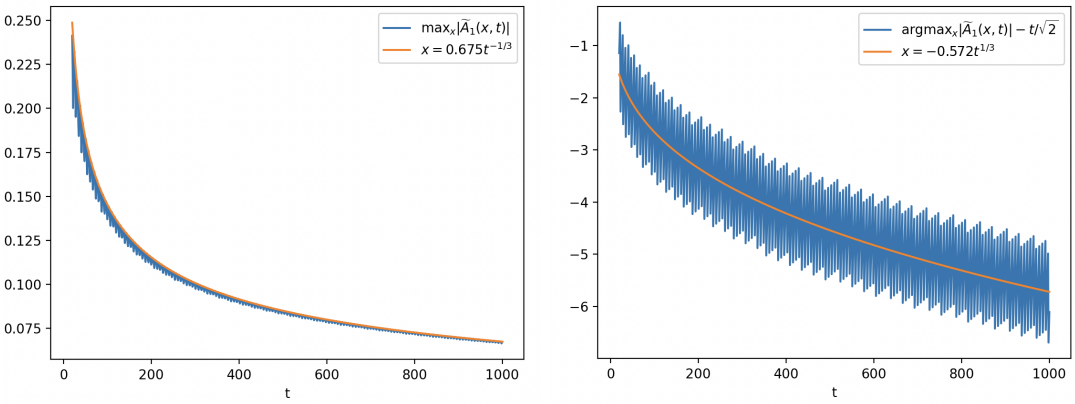
由 (17) 可得式 (16)，因为 $\widetilde{A}_1(x,\ t,\ m) = O_{m,\ \delta}(t^{-1/3})$，这是定理1的推论（参见下文命题 4）。对于 $1-\delta < v < 1$，所需估计可直接由定理 2 以及类似的界 $(1+O_{m,\ \delta}((x+t)^{-1}))^{-1} = 1+O_{m,\ \delta}(t^{-1})$ 得出，其中 $t > C$。

□

5 峰值

本节首次给出哈达玛行走波函数最大值的渐近公式，并准确估计取得最大值的位置。这改进了定理 2 中最大值的粗略上界 [23, ，以及其位置的粗略估计（见 [1], ），并解决了 [38, 问题 1] 中提出的一个未解问题。为简便起见，我们仅讨论哈达玛行走（情形 $m=1$）以及波函数的实部 $(A_1(x,\ t))$。同样的方法也适用于虚部 $\widetilde{A}_2(x,\ t)$ 以及概率 $|\widetilde{A}_1(x,\ t)|^2 + |\widetilde{A}_2(x-1,\ t)|^2$。

如图 2a 所示，对于固定的 t，函数 $x \mapsto |\widetilde{A}_1(x,\ t)|$ 有两个接近的对称极大值。图 15a–15b 展示了右侧极大值的大小及其位置与直线 $x = t/\sqrt{2}$ 的偏差如何随 t 增大，并给出了下文命题 4 中的近似结果。



(a) 最大值$_{x\in[0;t]}|\ \widetilde{A}_1(x,\ t)|$　　(b) 最大值点$_{x\in[0;t]}|\ \widetilde{A}_1(x,t)| - t/\sqrt{2}$

图 15：峰值以及其位置与转折点的偏差。橙色表示命题 4 中的近似结果，其中 $2^{1/3}\cdot\max_x \mathrm{Ai}(x) \approx 0.675$ and $2^{-5/6}\cdot\arg\max_x \mathrm{Ai}(x) \approx -0.572$。

命题 4。 对于每个整数 $t > 0$，我们有

$$\max_{\substack{x\in[0;t]\\ x+t\ \ odd}} |\widetilde{A}_1(x,t)| = \max_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{Ai}(x)\cdot 2^{1/3}\, t^{-1/3} + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\arg\max_{\substack{x\in[0;t]\\ x+t\ \ odd}} |\widetilde{A}_1(x,t)| = \frac{t}{\sqrt{2}} + \arg\max_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{Ai}(x)\cdot 2^{-5/6}\, t^{1/3} + O(1).$$

下文中，为避免歧义，$\arg\max\ f(x)$ 被理解为使得 $f(\hat{x}) = \max\ f(x)$ 的最小 $\hat{x}$。

这是定理1中的一致渐近公式的一个示例应用（也可以由一个更简单的结果 [44, 定理 1] 结合一个初等的单调性结果 [22, 定理 3]推导得到）。此前已知的渐近公式无法用于严格证明，因为波函数原则上可能在图 3a 中某个未覆盖的白色区域内出现尖锐峰值。我们需要以下引理。

引理 13。 存在 $\delta > 0$，使得对于所有整数 $t > 0$ 和 $x \in [0; t] \setminus (t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}; t/\sqrt{2} + \delta t^{1/3})$，只要 $x + t$ 为奇数，就有

$$|\widetilde{A}_1(x,t)| \le t^{-1/3}\,\mathrm{Ai}(0) + O_\delta\left(\frac{1}{t}\right). \tag{73}$$

证明。 设 $v := x/t \in [0; 0.9]$。那么，定理1推出以下简化的渐近公式：

$$|\widetilde{A}_1(x,t)| = \frac{1}{t^{1/3}} f(v)\,|\,\mathrm{Ai}(-\theta(v)\,t^{2/3})| + O\left(\frac{1}{t}\right), \qquad \text{where } \theta(v) := \theta(v,1), \quad f(v) := \left(\frac{4\theta(v)}{1-2v^2}\right)^{1/4}. \tag{74}$$

根据注 2， $f(v)$ 和 $\theta'(v)$ 在 $[0; 0.9]$ 上连续。根据注 3， $\theta'(v) < 0$。因此，存在 $M > 0$，使得 $|f(v)| < M$ 且 $|\theta'(v)| > 1/M$。由于艾里函数 $\mathrm{Ai}(\pm\infty) = 0$ 且 $\mathrm{Ai}(0) > 0$，存在 $u_0 > 0$，使得对于 $|u| \ge u_0$，有 $|\mathrm{Ai}(u)| < \mathrm{Ai}(0)/M$。任取 $\delta \ge u_0 M$。那么，对于 $|x - t/\sqrt{2}| \ge \delta t^{1/3}$，有

$$|\theta(v)\,t^{2/3}| = t^{2/3}\left|\int_{1/\sqrt{2}}^{v} \theta'(u)\,du\right| \ge \frac{t^{2/3}|v - 1/\sqrt{2}|}{M} = \frac{|x - t/\sqrt{2}|}{t^{1/3}M} \ge \frac{\delta}{M} \ge u_0.$$

将所得估计代入 (74)，即可得到 $x/t \in [0;\ 0.9]$ 时的界 (73)。对于 $x/t \in (0.9;\ 1]$，，由估计 $\widetilde{A}_1(x,\ t) = O(t^{-1})$ 可得，这一估计是对积分 (5) 应用一阶导数判别法 [18,引理 5.1.2] 的结果（见 [38, 注释 9]）。 □

引理 14. 存在 $\delta > 0$，使得对每个整数 $t > 0$，都有

$$\operatorname*{arg\,max}_{\substack{x\in[0;t]\\ x+t\ odd}} |\widetilde{A}_1(x,t)| \in [t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}; t/\sqrt{2} + \delta t^{1/3}]. \tag{75}$$

证明。 根据引理 13，存在 $\delta > 0$，使得对每个非负的 $x \notin (t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3};\ t/\sqrt{2} + \delta t^{1/3})$，等式 (73) 均成立。不失一般性，设 $\delta > 2$。考虑序列

$$x_t := \max\{x \in \mathbb{Z} \mid x/t < 1/\sqrt{2}, x + t \text{ odd}\} \in (t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}; t/\sqrt{2}).$$

根据推论 3（见表 2 第 4 行），

$$|\widetilde{A}_1(x_t,t)| = 2^{1/3}\,t^{-1/3}(\mathrm{Ai}(0) + O(t^{-1/3})) + O_\delta\left(\frac{1}{t}\right) = 2^{1/3}\,t^{-1/3}\,\mathrm{Ai}(0) + O_\delta\left(t^{-2/3}\right). \tag{76}$$

比较（73）和（76），我们得出结论：所需的最大值点属于 $[t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3};\ t/\sqrt{2} + \delta t^{1/3}]$ 当 t 充分大时。通过增大 δ，我们可以假设这对所有 t 都成立。 □

命题 4 的证明。根据引理 14，我们可以将讨论限制在 $x \in [t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}、\ t/\sqrt{2} \mp \delta t^{1/3}]$ 和 $t > 2^{3/4}\delta^{3/2}$，其中某个 $\delta > 1$。下面通过线性变换对这个区间和波函数进行归一化：

$$S_t := \left\{2^{5/6}\,t^{-1/3}(x - t/\sqrt{2})\colon x \in [t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}; t/\sqrt{2} + \delta t^{1/3}], x + t \text{ odd}\right\} \subset [-2^{5/6}\delta; 2^{5/6}\delta],$$

$$F_t(u) := \left|\widetilde{A}_1\left(t/\sqrt{2} + t^{1/3}\,2^{-5/6}\,u,\ t\right)\right| \cdot (t/2)^{1/3} = |\,\mathrm{Ai}(u)| + O_\delta(t^{-2/3}), \qquad u \in S_t,$$

其中，后一个估计由推论 3 得出（见表 2 第 4 行）。于是

$$\max_{\substack{x\in[0;t]\\ x+t\ \text{odd}}} |\widetilde{A}_1(x,t)| = \max_{u\in S_t} |F_t(u)|\cdot 2^{1/3}\,t^{-1/3} = \max_{u\in[-2^{5/6}\delta;2^{5/6}\delta]} |\operatorname{Ai}(u)|\cdot 2^{1/3}\,t^{-1/3} + O_\delta\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\arg\max_{\substack{x\in[0;t]\\ x+t\ \text{odd}}} |\widetilde{A}_1(x,t)| = \frac{t}{\sqrt{2}} + \arg\max_{u\in S_t} |F_t(u)|\cdot t^{1/3}\,2^{-5/6} = \frac{t}{\sqrt{2}} + \arg\max_{u\in[-2^{5/6}\delta;2^{5/6}\delta]} |\operatorname{Ai}(u)|\cdot t^{1/3}\,2^{-5/6} + O_\delta(1),$$

其中，每行中的最后一个估计由附录 C 中的引理 28 得出，因为根据假设 $\delta > 1$ 和 [29,，在 u 处有 Ai″(ˆ u) $=$ ˆuAi(ˆu) $\neq 0$： $=$arg max$_{u\in[-2^{5/6}\delta;2^{5/6}\delta]}$ |Ai(u)| $=$ arg max$_{u\in\mathbb{R}}$ Ai(u)，见第 9.2.1 节，表 9.9.1]。 □

5.1 结论与未来工作

我们证明了整个平面中量子游走波函数的一个一致大时间渐近公式（定理1和定理2），其中既包含常见的艾里现象，也包含一种由伽马函数支配的新转变现象，我们称之为伽马现象。我们证明了一般性的定理 3 和定理 4，它们彼此相似；借助与底层指数相位积分相关的共形映射，可得到这类一致渐近公式。

自然的下一步是将这些结果推广到超几何函数、量子行走以及具有更一般参数 [2, 10, 31],的六顶点模型，以及相关模型 [36, 37]。

艾里现象广泛存在于各种组合问题中。若能扩展出现伽马现象的实例集合，将会很有意思。例如，M. Wallner 等人最近得到的随机曲面映射数量的渐近公式（私人通信），与伽马现象的一般形式（42）完全吻合。该现象常出现在光锥（例如式（4）的渐近行为）、事件视界或区域边界附近，这一点颇为有趣。

定理3和定理4只是这些现象最简单的形式。两个临界点，或一个临界点与一个极点的碰撞，可能会产生更复杂的表达式，其中包含艾里函数和伽马函数；参见 [3, 定理 4], [21, 定理 2。12], [5, 式（3.9）], [7, 定理 2。3]。若能将我们的定理推广到这些情形，乃至更复杂的碰撞情形，以及不同的积分路径，将会很有意思。此外，我们猜想，定理3–4中的导数双射性假设可以去掉。

致谢

感谢 C. Banderier、I. Binder、A. Borodin、D. Frolenkov、A. Gottlieb 和 M. Wallner 富有启发性的讨论。

M. Drmota 的工作得到奥地利科学基金（FWF）项目 [10.55776/F1002] 的支持。M. Skopenkov 的工作得到阿卜杜拉国王科技大学基础经费的支持。A. Ustinov 的工作得到“BASIS”理论物理与数学促进基金会的支持。2021–2022年，最后三位作者得到 FWF [I5554] 和俄罗斯科学基金会的联合资助。

第 3、4 和 5 节的主要结果最初分别发表于 F. Kuyanov 于 2024年、2026年和2023年完成的课程论文中。

人工智能使用声明

生成式人工智能工具仅用于查找数学错误（但不用于纠正这些错误）、修复引言中的表述问题（每条建议均由人工实施、修改并审核），以及纠正语法错误。作者对整篇手稿的内容承担全部署名权和责任。

边界邻域的技术构造

在本附录中，我们证明命题2和命题3所需的以下结果。

命题 5 (近边界行为，Airy 情形)。 使用第 *3.2* 节的记号，存在一族单连通邻域 $N = N_v$，属于 ∂U，且位于 Q_1 中，使得 $\mathcal{L}|_N$ 是单射， $N \cap \mathcal{L}^{-1}(\Pi) \subset M$，并且$\mathcal{L}(N) \cap [v\pi;\ +\infty) = \varnothing$ 对每个 v 均成立。

命题 6 （近边界行为，Gamma 情形）。 采用第 *4.2* 节的记号，存在一个由单连通邻域组成的族 $N = N_v$，它们属于 H^+ 中的 （$-\infty$； β），使得 $\mathcal{L}|_N$ 是单射， $N\cap\mathcal{L}^{-1}$（ Π） $\subset M$，并且对每个 v， $\mathcal{L}$（ N） $\cap$ （$-\infty$； $\mathcal{L}$（$\beta-$）） $= \varnothing$。

在这两种情形下，取足够小的一族邻域即可满足要求。然而，严谨的证明相当复杂，因为对每个 v 都存在这样的邻域，并不能保证存在一族邻域，而我们的证明需要这样的邻域族（见下文注 8）。

我们先引入一些概念和引理。设 D 是一个定义域。若连通子集 $\gamma \subset \partial D$ 满足：对其中每个点，都存在 D 中的一个邻域 B，使得 ∂B 是 $D \cup \gamma$ 中的一条 Jordan 曲线，则称 $\gamma \subset \partial D$ 为一个*Jordan* 边界区间。特别地， $\partial D \setminus \gamma$ 是闭集。设 $\Gamma \subset \partial D$ 是有限个互不相交的 Jordan 边界区间之并。若解析族 $\mathcal{L}_v\colon D \to \mathbb{C}$，其中 $v \in V$，满足：对 Γ 中的每个点，都存在 $\dot{D}$ 中的一族邻域 B_v，使得 $\mathcal{L}_v|_{B_v}$ 是单射，并且对每个 $v \in V$， $\partial\mathcal{L}_v^{-1}(\mathcal{L}_v(B_v)) \cap \Gamma = \partial B_v \cap \Gamma$，则称其在 Γ 附近局部单射。比如，单位圆盘的映射 $z \mapsto z^2$ 在 $\{e^{i\phi}$ 附近局部单射，当且仅当 $\delta \le \pi$。

引理 15 （局部　　单射性，Airy 情形）。 在第 *3.2* 节中，族 $\mathcal{L}|_{D\cap U}$ 在 ∂ 附近是局部单射的　U.

证明。对于每个 $p_0 \in \partial U$ 和 $v_0 \in V$，我们将构造 p_0 在 $D \cap U$ 中的一个邻域族 $B = B_v$，其中 v 在 $(v_0 - \delta; v_0 + \delta) \cap V$ 中变化，且对于某个 $\delta > 0$；将这些族视为 $D \times V$ 的子集后，它们将构成 p_0 在 $D \cap U$ 中所需的邻域族。为构造 B，取 U 中以 p_0 为中心、围绕 p_0 的一个开半圆 C（当 $p_0 = 0$ 或 π 时取四分之一圆），满足 $\partial C \subset D$；见图 8。由于在 $D \cap U$ 中 $\operatorname{Im}\mathcal{L}' = -\operatorname{Im}\omega' > 0$，根据 Noshiro–Warschawski 定理，$\mathcal{L}|_C$ 是单射的。于是，由于 $\mathcal{L}$ 在 ∂C 上解析， $\mathcal{L}(C)$ 是由 $\mathcal{L}(\partial C)$ 围成的定义域。显然， $\mathcal{L}(p_0) \notin \operatorname{Cl}\mathcal{L}(\partial C \setminus \partial U)$。根据引理 2，存在 δ、$r > 0$，使得对于每个 $v \in (v_0 - \delta; v_0 + \delta) \cap V$，从 $\mathcal{L}_v(p_0)$ 到 $\mathcal{L}_v(\partial C \setminus \partial U)$ 以及 $\mathcal{L}_v(C) \cap \mathcal{L}_v(\partial U) \subset \mathcal{L}_v(\partial U) \setminus \mathcal{L}_v(\partial C \cap \partial U)$ 的距离都大于 r。令 Q_v 为以 $\mathcal{L}_v(p_0)$ 为中心、半径为 r 的开圆盘。于是， $\mathcal{L}_v^{-1}(Q_v) \cap C$ 中在边界上包含 p_0 的连通分支就是所需的 B_v。由于 $\operatorname{Cl} Q \cap \mathcal{L}(C) \cap \mathcal{L}(\partial U) = \varnothing$，根据定向原理可知， $\partial\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(B)) \cap \partial U = \partial B \cap \partial U$。 □

引理16 (局部单射性，Gamma 情形)。 在第 *4.2* 节中，族 $\mathcal{L}|_{D\cap H^+}$ 在 $\setminus\{0\}$附近的（$-\infty$； β）是局部单射的。

证明。 证明方法相同，只需利用 sgn 虚部 $\mathcal{L}_v' = -\operatorname{sgn} v$ 在 $D \cap H^+$ 和 $\mathcal{L}_0(\omega) = -\omega$ 中；参见图 12。对于 $v_0 = 0$ 和 $|v| < \delta$，由引理 7 和定向原理可知，从 $\mathcal{L}_v(\omega_0)$ 到 $\mathcal{L}_v(C) \cap \mathcal{L}_v((-\infty;\ \beta) \setminus \{0\})$ 的距离与 0 有正距离，因为当 $v \to 0$ 时， $\mathcal{L}_v(\hat{}\omega(v)) \to 0$，参见注 4。 □

引理 17 (带参数的局部到整体单射性)。 设解析族 $\mathcal{L}_v\colon\ D \to \mathbb{C}$ 在有限个不相交的约当边界区间 $\Gamma \subset \partial D$ 的并集附近是局部单射的，并连续延拓至 Γ（视为函数 $D \times V \to \mathbb{C}$）。那么， Γ 在 D 中存在一个邻域族，使得 $\mathcal{L}_v$ 是单射的。

证明。 对于每个 $p_0 \in \Gamma$ 和 $v_0 \in V$，我们构造 D 中 p_0 的邻域族 $B = B_v$，其中 v在某个 $\delta > 0$的 $(v_0 - \delta; v_0 + \delta)$ 中变化；将这些邻域族视为 $D \times V$的子集后，它们将构成所需的 D中 Γ 的邻域族 $N = N_v$。

首先，我们构造一个辅助族 $B = B_v$。由于 $\mathcal{L}$ 在 Γ附近局部单射，因此它在 $\dot{D}$中 p_0的一个邻域族 $C = C_v$上是单射的，使得 $\partial\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(C)) \cap \Gamma = \partial C \cap \Gamma$。于是 $\mathcal{L}(C) \cap \mathcal{L}(\Gamma) = \varnothing$。由于 $\Gamma \subset \partial D$ 是约当边界区间的并集，我们可以假设 ∂C 是 $\Gamma \cup D$中的一条 Jordan 曲线。由于 $\mathcal{L}$ 连续延拓到 Γ，它将 C 映到由 $\mathcal{L}(\partial C)$ 围成的定义域。我们可以假设 $\mathcal{L}(p_0) \notin \operatorname{Cl}\mathcal{L}(\partial C \setminus \Gamma)$。于是存在 $\delta = \delta(p_0, v_0) > 0$、 $r = r(p_0, v_0) > 0$，使得对于每个 $v \in (v_0 - \delta; v_0 + \delta) \cap V$， $\mathcal{L}_v(p_0)$ 到 $\mathcal{L}_v(\partial C_v \setminus \Gamma)$ 的距离都大于 r。还假设 r 小于 $\mathcal{L}_v(\Gamma)$ 各连通分支最小直径的 $1/4$ （根据局部边界对应原理，该最小直径为正，因为Γ 是有限个互不相交的约当边界区间的并集）。设 Q_v 为半径为 r 、中心位于

$\mathcal{L}_v(p_0)$。由于 $\mathcal{L}(C) \cap \mathcal{L}(\Gamma) = \varnothing$ 且 $\mathcal{L}(\partial C \setminus \Gamma) \cap \mathrm{Cl}\ Q = \varnothing$，可知 $\partial(\mathcal{L}_v^{-1}(Q_v) \cap C) \subset \Gamma \cup \mathcal{L}_v^{-1}(\partial Q_v)$。由于 $\mathcal{L}$ 连续，$\mathcal{L}_v^{-1}(Q_v) \cap C$ 包含 C中 p_0 的一个邻域。设 B_v 为 $\mathcal{L}_v^{-1}(Q_v) \cap C$ 中在边界上包含 p_0 的连通分支。于是 $\mathcal{L}|_B$ 是单射，且 $\mathcal{L}(B)$ 是 $Q \setminus \mathcal{L}(\Gamma)$ 的一个连通分支。

令 $B_v(p_0, r)$ 是半径为 r 、以 p_0 为圆心的开圆盘。

为证明 $\mathcal{L}|_{\dot{N}}$ 是单射，假设对于某个 $p \in B$，有 $\mathcal{L}_v(p) = \mathcal{L}_v(p') := B_v(p_0, v_0)$，且 $p' \in B' := B_v(p'_0, v'_0)$，其中 $|v - v_0| < \delta(p_0, v_0)$ 且 $|v - v'_0| < \delta(p'_0, v'_0)$。类似地定义 B、B'、Q、Q'、r、r'、$\dot{r}$ 和 $\dot{r}'$。

我们来证明 $\mathcal{L}(B) \cap \mathcal{L}(B')$是 $Q \cap Q' \setminus \mathcal{L}(\Gamma)$的一个连通分支。反设不然。由于 Q 和Q' 是凸的，$Q \cap Q'$ 是连通的。于是，$\mathcal{L}(B) \cap \mathcal{L}(B')$中的一对点被 $Q \cap Q'$中的$\mathcal{L}(\Gamma)$的一个连通分支分隔开。这对点可由两条路径 γ 和 γ' 连接，分别位于 $\mathcal{L}(B)$和 $\mathcal{L}(B')$中，因为 $\mathcal{L}(B)$和 $\mathcal{L}(B')$分别是 $Q \setminus \mathcal{L}(\Gamma)$和 $Q' \setminus \mathcal{L}(\Gamma)$的连通分支。于是，$\gamma \cup \gamma'$ 与 $\mathcal{L}(\Gamma)$不相交，却绕着 $\mathcal{L}(\Gamma)$的一个连通分支旋转一周。这是矛盾的，因为 Q 和 Q' 的半径小于 $\mathcal{L}(\Gamma)$的各连通分支最小直径的 $1/4$。因此，$\mathcal{L}(B) \cap \mathcal{L}(B')$是 $Q \cap Q' \setminus \mathcal{L}(\Gamma)$的一个连通分支。

接下来，我们证明 $B \cap B' \neq \varnothing$。由于 $\mathcal{L}(B) \cap \mathcal{L}(B')$是 $Q \cap Q' \setminus \mathcal{L}(\Gamma)$的一个连通分支，且 $Q \cap Q' \cap \mathcal{L}(\Gamma) \neq \varnothing$，因此 $\partial \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(B) \cap \mathcal{L}(B')) \cap \Gamma$ 包含某个 Jordan 边界区间 $\gamma \subset \partial \dot{D}$。根据 Γ附近的局部单射性，后者是 $\partial B \cap \Gamma$ 和 $\partial B' \cap \Gamma$ 的子集。因此，B 和 B' 都是 $\dot{D}$ 中γ的邻域，因为 $\mathrm{Cl}(\partial B \setminus \Gamma) \subset \mathcal{L}^{-1}(\partial Q)$ 和 $\mathrm{Cl}(\partial B' \setminus \Gamma) \subset \mathcal{L}^{-1}(\partial Q')$ 均与 γ不相交。于是 $B \cap B' \neq \varnothing$。

考虑由 $\mathcal{L}(B) \cap \mathcal{L}(B')$ 中至少有两个不同的 $\mathcal{L}$-原像位于 $B \cup B'$ 的点构成的集合 W。由于解析性，集合 W 是开集。它也是闭集，因为 $\mathcal{L}|_B$ 和 $\mathcal{L}|_{B'}$ 在各自的像上都是同胚。我们有 $W \neq \mathcal{L}(B) \cap \mathcal{L}(B')$，因为 W 与 $\mathcal{L}(B \cap B') \neq \varnothing$ 不相交。于是 $W = \varnothing$，因为 $\mathcal{L}(B) \cap \mathcal{L}(B')$ 是连通的。因此 $p = p'$，且 $\mathcal{L}|_{\dot{N}}$ 是单射。 □

开集族 $\Pi_v \subset \mathbb{C}$ 与 $\mathcal{L}_v(\Gamma)$ 处于 特殊位置，若 $\Pi_v \cap \mathcal{L}_v(\Gamma) = \varnothing$，并且以 $\mathcal{L}_v(\Gamma)$ 中的点为圆心且与 $\partial \Pi_v$ 相交的任意开圆盘，都包含 $\partial \Pi_v \cap \mathcal{L}_v(\Gamma)$ 中无穷多个点，对每个 $v \in V$ 均如此。

引理 18 (带参数的特殊位置)。 在第*3.2*节和第 *4.2* 节中，Π_v 与 $\mathcal{L}_v(\Gamma)$处于特殊位置。

证明。 在第3.2节和第 4.2 节中，像 $\mathcal{L}_v(\Gamma)$分别由引理2和引理7给出；见图 8 和图 12。因此，$\Pi_v \cap \mathcal{L}_v(\Gamma) = \varnothing$ 和 $\partial \Pi_v \cap \mathcal{L}_v(\Gamma)$没有孤立点。还需证明，以 $\mathcal{L}_v(\Gamma) \setminus \partial \Pi_v$ 为中心且与 $\partial \Pi_v \setminus \mathcal{L}_v(\Gamma)$相交的任意开圆盘都包含 $\partial \Pi_v \cap \mathcal{L}_v(\Gamma)$中的一个点。在第3.2节中，任何这样的圆盘都包含 $0 \in \partial \Pi_v \cap \mathcal{L}_v(\Gamma)$。在第 4.2 节中，这一点成立，因为其中一个差集为空。 □

引理 19 (带参数的特殊位置)。 在引理 *17* 的假设下，设 $\Pi_v \subset \mathbb{C}$ 是一个与 $\mathcal{L}_v(\Gamma)$处于特殊位置的凸开集族。假设对于每个满足 $\Pi_v \neq \varnothing$的 $v \in V$，只有一个连通分支 M_v 属于$\mathcal{L}_v^{-1}(\Pi_v)$，并且在边界上有的无穷多个点。那么在中有一个与$(\Pi) \setminus M$不相交的邻域族。

证明。采用引理 17 证明第二段中的记号 B 和 Q，使得 $\mathcal{L}(B)$ 是 $Q \setminus \mathcal{L}(\Gamma)$ 的一个连通分支。根据特殊位置，$\mathcal{L}(\Gamma) \cap \Pi = \varnothing$。由于 Q和 Π是凸的，$Q \cap \Pi$是连通的。因此，$\mathcal{L}(B) \cap \Pi$，且 $B \cap \mathcal{L}^{-1}(\Pi)$ 也是如此。假设 $\mathcal{L}(B) \cap \Pi \neq \varnothing$，使得 $Q \cap \Pi \subset \mathcal{L}(B)$。我们有 $\mathcal{L}(p_0) \in Q$，但 $\mathcal{L}(p_0) \notin \Pi$，因为 $\mathcal{L}(p_0) \in \mathcal{L}(\Gamma)$。因此，$Q$同时与 Π和 $\mathbb{C} \setminus \Pi$有公共点，故也与 $\partial \Pi$有公共点。根据特殊位置，它包含 $\partial \Pi \cap \mathcal{L}(\Gamma)$ 中无限多个点。这些点都属于 $\partial \Pi \cap \mathcal{L}(\partial B \cap \Gamma)$，因为 $Q \cap \Pi \subset \mathcal{L}(B)$，且 $\mathcal{L}(\partial B \setminus \Gamma) \subset \partial Q$。因此，连通集 $B \cap \mathcal{L}^{-1}(\Pi)$ 的边界包含 Γ 中无限多个点，故该集合包含于 M。于是，对所有 p_0， B 和 v_0 构成所需的邻域族。

□

引理 20 (带参数的正则邻域)。 若 D 是单连通且无界的，且 $\Gamma \subset \partial D$ 是一个 *Jordan* 边界区间，那么 D 中 Γ 的任意邻域族 N_v 都包含 D中 Γ 的一个单连通邻域族。

证明。 根据引理的假设和局部边界对应原理，存在一个双射共形映射 $\phi\colon \dot{D} \to H^+$，它可以连续延拓到 Γ。所需的邻域族为 $\bigcup_{x\in\phi(\Gamma)} \phi^{-1}((x;\ x+iy_v(x)))$，其中 $y_v(x) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是最大的，使得 $(x;\ x+iy_v(x)) \subset \phi(N_v)$。 □

命题 5 的证明。 根据引理 15、17–19 和 4，存在一个 $N = N_v$ 的邻域族 $\Gamma := \partial U$，其中 $D\cap U$ 中的 $\mathcal{L}|_{\dot{N}}$ 是单射的，且 $\dot{N}\cap\mathcal{L}^{-1}(\Pi) \subset M$。根据单射性，$\mathcal{L}(\dot{N})$ 属于 $\mathbb{C}\setminus\mathcal{L}(\partial U)$ 的一个连通分支，根据引理 2，即左侧的连通分支。根据引理 20，不妨设 N 是单连通的。

接下来只需将 $\dot{N}$ 延拓到 $(\pi;\ \pi+i\infty)$ 上。其边界包含 π 的 $\dot{N}\cap\mathcal{L}^{-1}(H^+)$ 的连通分支 $\ddot{N}$ 构成了 $(\pi;\ \pi+i\infty)$ 在 $D\cap U$ 中的一个邻域族，因为根据引理 2，$\mathcal{L}((\pi;\pi+i\infty)) \subset H^+$。令 $\sigma(p) := 2\pi - p$ 表示关于直线 $\operatorname{Re} p = \pi$ 的反射，并设 $N := N\cup(\pi;\ \pi+i\infty)\cup\sigma(N)$。于是 $N = N_v$ 是 Q_1 中 ∂U 的一个邻域族。

根据 D 和 ω 的对称性与周期性，我们有 $\sigma(D) = D$ 以及 $\mathcal{L}_v(\sigma(p)) = 2\pi v - \mathcal{L}_v(p)$。因此，$\mathcal{L}$ 将 N、$(\pi;\ \pi+i\infty)$ 和 $\sigma(N)$ 映射到两两不相交的集合中

$$\{z\colon \operatorname{Re} z < v\pi\},\qquad \{z\colon \operatorname{Re} z = v\pi, \operatorname{Im} z > 0\},\qquad \{z\colon \operatorname{Re} z > v\pi, \operatorname{Im} z > 0\},$$

分别。由于 $\mathcal{L}|_{\dot{N}}$ 是单射的，$\mathcal{L}|_{\sigma(\dot{N})}$ 通过反射是单射的，而 $\mathcal{L}|_{(\pi;\pi+i\infty)}$ 根据引理 2 是单射的，因此可知 $\mathcal{L}|_N$ 是单射的。所添加集合的像与 Π 和 $[v\pi;\ +\infty)$ 均不相交，因此 $N\cap\mathcal{L}^{-1}(\Pi) \subset M$ 以及 $\mathcal{L}(N)\cap[v\pi;\ +\infty) = \varnothing$。

最后，由于 $\mathcal{L}|_{\dot{N}}$ 是单射的共形映射，因此可知 $\mathcal{L}(N)$ 是单连通的。由于 $\mathcal{L}(N)$ 是 $\mathcal{L}(\dot{N})\cap H^+$ 的一个连通分支，因此可知 $\dot{N}$ 也是单连通的。于是 N 是单连通的。 □

命题 6 的证明在技术上更复杂，因为 $\mathcal{L}_v(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 处不连续。

命题 6 的证明。 根据引理 16–19 和引理 9，存在 $\Gamma := (-\infty;\beta)\setminus\{0\}$ 在 $D\cap H^+$ 中的一族所需邻域（可能不连通）。接下来，只需为每个 $v_0 \in V$ 添加一族 $B = B_v$，它们是 $D\cap H^+$ 中 0 的邻域，其中 v 在某个 $\delta > 0$ 的 $(v_0-\delta; v_0+\delta)\cap V$ 中变化（并将结果缩小）。

邻域族 B 的构造与上文引理 15 的证明类似，只是当 $v_0 \neq 0$ 时，将 $Q = Q_v$ 设为半平面 $\operatorname{sgn} v_0 \operatorname{Re} z < -r$，其中 v_0 的 $r = r$ 较大；而当 $v_0 = 0$ 时，将其设为以 0 为中心、半径 r_0 较小的开圆盘 Q^0 与半条带 $Q^\infty = Q_v^\infty = \{z$ 的并集：$v \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z \in (0;\ \pi v)\}$。

在后一种情况下，当 $|v|$ 较小时，Q 具有类似的性质：由于 $\mathcal{L}_0(\omega) = -\omega$，由紧致性可知，当 r_0 较小时，像 $\mathcal{L}_v(\operatorname{Cl}(\partial C\setminus\mathbb{R}))$ 位于 Q^0 之外。接下来，回顾一下，$\mathcal{L}_v((-\infty;\beta)\setminus\{0\})$ 由引理 7 给出，而 $\hat{}\omega(v)$ $\mathcal{L}_v(\hat{}\omega(v)) \to 0$ 如注 4 所述；见图 12。由于 $\mathcal{L}$ 在 C 中是单射，且在 $\partial C\setminus\{0\}$ 上解析，因此 $\mathcal{L}_v(\partial C\setminus\mathbb{R})$ 与 $(-v\infty; \mathcal{L}_v(\hat{}\omega)]$, 不相交，进而也与 Q_v^∞ 和 Q_v 不相交。此外，由于对于 $v \neq 0$，$\mathcal{L}_v(\omega) \to \infty$ 如 $\omega \to 0$，因此 $\mathcal{L}_v(C)$ 是由曲线 $\mathcal{L}_v(\partial C\setminus\mathbb{R})$ 和两条分别通向 $-v\infty$ 与 $\pi iv - v\infty$ 的射线围成的定义域，其中 $v \neq 0$。于是 $\operatorname{Cl} Q_v\cap\mathcal{L}_v(C)\cap\mathcal{L}_v(\Gamma) = \varnothing$，因为 $\operatorname{Cl} Q_v\cap\mathcal{L}_v(\Gamma)$ 包含于这两条射线的并集中。对以 0 为圆心、半径为 $r_0/2$ 的半圆 $\dot{C}\subset H^+$ 运用同样的论证，可得 $Q_v \supset \mathcal{L}_v(C)$，因为 $\mathcal{L}_v(C)$ 是由 $\mathcal{L}_v(\partial C\setminus\mathbb{R})$ 和两条类似的射线围成的定义域。这意味着，对于 $v_0 = 0$，$\mathcal{L}_v^{-1}(Q_v)\cap C$ 是 H^+ 中 0 的一个邻域族（这不再是显然的，因为 $\mathcal{L}_v(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 处不连续）。$v_0 \neq 0$ 和 $|v-v_0| < \delta < |v_0|$ 也同样成立。因此，$\mathcal{L}_v^{-1}(Q_v)\cap C$ 中边界上包含 0 的连通分支，就是所需的 $B = B_v(0, v_0)$，即 H^+ 中 0 的一个邻域族。对于 $\omega_0 \neq 0$，取引理 17 的证明中的 $B = B_v(\omega_0, v_0)$ 和 $r(\omega_0, v_0)$。

接下来，我们在 H^+ 中为 $(-\infty;\beta)$ 构造邻域族 $\dot{N}$ $\mathcal{L}$，其中 $\mathcal{L}$ 是单射。对于每个 $\omega_0 \in (-\infty;\beta)$ 和 $v_0 \in V$，我们构造邻域族 B。

对于 $\omega_0 = v_0 = 0$，令 $\dot{Q}^0$ 为以 0 为中心、半径为 $r_0/2$ 的开圆盘，$\dot{Q}_v^\infty := Q_v^\infty$，以及 $\dot{Q}_v := \dot{Q}^0\cup\dot{Q}_v^\infty$。

对于 $\omega_0 = 0$，$v_0 \neq 0$，令 Q 为半平面 $\operatorname{sgn} v_0 \operatorname{Re} z < -r(v_0) - r_0$。对于 $\omega_0 \neq 0$，令 Q_v 为以 $\mathcal{L}_v(\omega_0)$ 为中心、半径为 $\min(r(\omega_0, v_0)\ r_0)/2$ 的开圆盘。令 $\dot{B}_v(\omega_0,\ v_0)$ 为 $\mathcal{L}_v^{-1}(\dot{Q}_v)$ 的连通分支，其中包含边界上的 ω_0；它仍然是 H^+ 中 ω_0 的一个邻域族。

$\mathcal{L}|_{\dot{N}}$ 的单射性证明与引理 17 的证明类似，只需考虑情形 $\omega\in\dot{B}_v(0,\ v_0)$，其中 $v_0 \neq 0$，以及 $\dot{\omega}\in\dot{B}_v(\omega_0,\ v_0)$，其中 $\omega_0 \neq 0$，分别是

分别考虑，对 ω' 也同样处理。在前一种情况下，$\mathrm{Cl}\ Q \cap \mathrm{Cl}\, Q'$ 仍包含一个区间$\tilde{\gamma} \subset \mathcal{L}((-\infty;\beta) \setminus \{0\})$，因为其像由引理 7 给出，且 $\mathcal{L}(B) \cap \mathcal{L}(B')$ 与 $\tilde{\gamma}$ 相邻；于是同样的论证表明 $B \cap B' \neq \varnothing$，因为根据局部边界对应原理，$B$ 和 B' 也与 $\gamma \subset \mathcal{L}^{-1}(\tilde{\gamma})$ 相邻。

最后，$B = B_v(0,\ v_0)$ 与 $\mathcal{L}^{-1}(\Pi) \cap H^+$ 的所有连通分支（M 除外）均不相交（参见引理 19）：$\mathrm{Cl}\ Q$ 包含一个区间 $\tilde{\gamma} \subset \partial\Pi \cap \mathcal{L}((-\infty;\beta) \setminus \{0\})$，且 $\mathcal{L}(B)$ 与 $\tilde{\gamma}$相邻；于是连通集$\mathcal{L}^{-1}(\Pi) \cap B$与 $(-\infty;\ \beta)$ 的一个子区间相邻，因此包含于 M 中。剩下的工作是对 $N_v = \dot{N}_v \cap \mathcal{L}_v^{-1}(\mathbb{C} \setminus (-\infty;\ \mathcal{L}(\beta-))]$ 重复引理 20 的证明，其中对于 $v > 0$，由引理 7 可知 $\mathcal{L}(\beta-) < \mathcal{L}(\hat{}\omega)$。 □

B 复分析引理的参数依赖版本

在本附录中，我们采用第 2.4 节的记号，证明一些标准引理的参数依赖版本。

引理 21 (含参数的反函数定理)。设 D_v、$E_v \subset \mathbb{C}$，其中 $v \in V \subset \mathbb{R}$，为域族。若 $f_v\colon\ D_v \to E_v$ 是一个解析的双射函数族，则 $f_v^{-1}\colon\ E_v \to D_v$ 是解析的。

证明。将 $f_v(z)$ 延拓到 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 中的一个域，并对映射 $(v,\ z) \mapsto (v,\ f_v(z))$ 应用反函数定理，我们得到 f_v^{-1}是一个解析族，特别地，它关于 v 解析依赖。 □

注 8。如果 D_v 不是域族，则该引理不再成立；例如，若 $D_v = H^+$ 对于 $v \geq 0$，$D_v = H^-$ 对于 $v < 0$，且 $f_v(z) = z^2$。这个例子表明，引入参数需要格外谨慎。

引理22 (含参数的可去奇点定理)。设 $D_v \subset \mathbb{C}$，其中 $v \in V \subset \mathbb{R}$，为一个域族，且$\hat{}z_1$、.....、$\hat{}z_n\colon\ V \to \mathbb{C}$ 连续。若函数族 $f_v\colon\ D_v \to \mathbb{C}$ 在曲线 $z = \hat{}z_k(v)$ 之外为实解析，并且对于每个固定的 $v \in V$，在 D_v 中连续，则它处处实解析。

证明。固定某个 $v \in V$。根据可去奇点定理，$f_v(z)$ 在 z 的 $\hat{}z_k(v)$ 处是实解析的。为证明它在 v 的 $z_k := \hat{}z_k(v) \in D_v$ 处（可能与另一个 $\hat{}z_l(v)$ 重合）的实解析性，使用柯西公式：$f_v(z_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_v(\ z\ dz\ )}{z - z_k}$，其中 γ 是围绕 z_k 的一个固定小围道。由~~于被积函数关~~于 v 是解析的（对固定的 z_k 而言），$f_v(z_k)$ 也如此。根据奥斯古德引理，f_v 是一个实解析族。 □

引理23 (带参数的阿达马引理)。设 $D_v \subset \mathbb{C}$ 是一族关于实轴对称的域，其中 $v \in V \subset \mathbb{R}$。设 $\hat{}z\colon\ V \to \mathbb{R}$ 为实解析的，且对每个 $v \in V$，都有 $\hat{}z(v) \in D_v$。对于每个实解析函数族 $f_v\colon\ D_v \to \mathbb{C}$，都存在一个实解析函数族 $g_v\colon\ D_v \to \mathbb{C}$，使得

$$f(z) = f(\hat{z}) + (z - \hat{z})\, g(z) \quad \textit{for each } v \in V \textit{ and } z \in D_v.$$

证明。令

$$g(z) := \begin{cases} (f(z) - f(\hat{z}))/(z - \hat{z}), & \text{if } z \neq \hat{z}, \\ f'(\hat{z}), & \text{if } z = \hat{z}. \end{cases}$$

函数族 $g(z) = g_v(z)$ 在曲线 $z = \hat{}z(v)$ 之外是实解析的，并且对每个固定的 $v \in V$，在 D_v 中连续。根据引理 22，它处处实解析。 □

引理 24 (带参数的等变阿达马引理)。设 $D_v \subset \mathbb{C}$，其中 $v \in V \subset \mathbb{R}$，是关于两个坐标轴均对称的域族，并设 $\theta\colon\ V \to \mathbb{R}$ 是一个实解析函数，使得 $\sqrt{\theta(v)} \in D_v$，且对每个 $v \in V$ 都有 $0 \in D_v$。对于每个偶实解析函数族 $G_v\colon\ D_v \to \mathbb{C}$，$\widetilde{\ }$，存在一个偶实解析函数族 $G_v\colon\ D_v \to \mathbb{C}$，使得

$$G(z) = G(\sqrt{\theta}) + (z^2 - \theta)\, \widetilde{G}(z) \quad \textit{for each } v \in V \textit{ and } z \in D_v.$$

对于每个奇实解析函数族 $H_v\colon\ D_v \to \mathbb{C}$，都存在一个奇实解析函数族$\sim H_v\colon\ D_v \to \mathbb{C}$，以及一个实解析函数 $c = c(v)$，使得

$$H(z) = cz + (z^2 - \theta)\, \widetilde{H}(z) \quad \textit{for each } v \in V \textit{ and } z \in D_v.$$

证明。首先，我们证明存在一个实解析函数族 $G_v(u)$，定义于 $D = D_v := \{u\colon \pm\sqrt{u} \in D_v\}$，使得 $G(z) = \widehat{G}(z^2)$（参见惠特尼定理 [42, 定理 1]）。事实上，令 $\widehat{G}(u) := G(\sqrt{u})$。所得函数关于 $\widehat{D} \setminus (-\infty; 0]$ 是实解析的。由于 $G(u)$ 是偶函数，因此 $\widehat{G}(u) = G(-i\sqrt{-u})$ 关于 $D \setminus [0; +\infty)$ 是实解析的。根据可去奇点定理，它在原点处也解析。显然，对于每个固定的 u，$G_v(u) = G_v(\sqrt{u})$ 关于 v 解析地依赖，因为 $G_v(z)$ 也是如此。

应用引理23于 在点 $u = \theta$ 处的 $G(u)$，得到

$$\widehat{G}(u) = \widehat{G}(\hat{u}) + (u - \hat{u})\,\widetilde{\widehat{G}}(u) \qquad \text{and} \qquad G(z) = G(\sqrt{\theta}) + (z^2 - \theta)\,\widetilde{G}(z),$$

其中 $\widetilde{G}(z) := \widehat{G}(z^2)$ 是一个偶实解析函数族。

由于 $0 \in D_v$ 且 $H(0) = 0$，由引理23可知，对于某个偶实解析函数族 $K(z)$，有 $H(z) = zK(z)$。将引理的第一部分应用于 $K(z)$，得到

$$H(z) = zK(z) = z(K(\sqrt{\theta}) + (z^2 - \theta)\,\widetilde{K}(z)) = K(\sqrt{\theta})\,z + (z^2 - \theta)\,z\widetilde{K}(z),$$

an取 $\widetilde{H}(z) := z\widetilde{K}(z)$ 且 $c := K(\sqrt{\theta})$，即可证明引理的第二部分 a. □

复数域 初等渐近估计

In t本附录中，我们证明第 3.3 节及 5.

引理 25. 对于每个 t、$Q > 0$ 和 $\theta < Q^2$，使得 $Q^3/3 - \theta Q$ 是 π/t的整数倍，我们有 *ve*

$$\int_Q^{+\infty} \sin\left(t\left(\frac{z^3}{3} - \theta z\right)\right) z\,dz = O\left(\frac{1}{|Q - \sqrt{\theta}|\,t}\right),$$
$$\int_Q^{+\infty} \cos\left(t\left(\frac{z^3}{3} - \theta z\right)\right) dz = O\left(\frac{1}{|Q - \sqrt{\theta}|^5\,t^2}\right).$$

证明。我们来证明第一个界。通过分部积分，得到

$$\begin{aligned}\int_Q^{+\infty} \sin\left(t\left(\frac{z^3}{3} - \theta z\right)\right) z\,dz &= -\int_Q^{+\infty} \frac{z}{t(z^2 - \theta)} \cdot d\cos\left(t\left(\frac{z^3}{3} - \theta z\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{t}\left(\frac{z\cos(t(z^3/3 - \theta z))}{z^2 - \theta}\bigg|_Q^{+\infty} + \int_Q^{+\infty} \frac{z^2 + \theta}{(z^2 - \theta)^2} \cdot \cos\left(t\left(\frac{z^3}{3} - \theta z\right)\right) dz\right) = \\ &= -\frac{1}{t}\,O\left(\frac{1}{|Q - \sqrt{\theta}|} \cdot \left|\frac{Q}{Q + \sqrt{\theta}}\right| + \int_Q^{+\infty} \frac{1}{|z - \sqrt{\theta}|^2} \cdot \left|\frac{z^2 + \theta}{(z + \sqrt{\theta})^2}\right| dz\right) = O\left(\frac{1}{|Q - \sqrt{\theta}|\,t}\right),\end{aligned}$$

其中最后一个等式由以下界得出

$$\left|\frac{Q}{Q + \sqrt{\theta}}\right| \le 1, \quad \left|\frac{z^2 + \theta}{(z + \sqrt{\theta})^2}\right| = \left|\frac{z^2 + \theta}{z^2 + \theta + 2z\sqrt{\theta}}\right| \le 1, \quad \text{and} \quad \frac{1}{|z - \sqrt{\theta}|^2} \le \frac{2}{(z - Q + |Q - \sqrt{\theta}|)^2} \quad \text{for } z \ge Q.$$

下面证明引理中的第二个界。通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}I := \int_Q^{+\infty} \cos\left(t\left(\frac{z^3}{3} - \theta z\right)\right) dz &= \int_Q^{+\infty} \frac{1}{t(z^2 - \theta)} \cdot d\sin\left(t\left(\frac{z^3}{3} - \theta z\right)\right) = \\ &= \frac{\sin(t(z^3/3 - \theta z))}{t(z^2 - \theta)}\bigg|_Q^{+\infty} + \frac{1}{t}\int_Q^{+\infty} \frac{2z}{(z^2 - \theta)^2} \cdot \sin\left(t\left(\frac{z^3}{3} - \theta z\right)\right) dz.\end{aligned}$$

由于 $Q^3/3-\theta Q$ 是 π/t 的整数倍，第一项为零。再次分部积分，得到

$$I=-\frac{1}{t}\int_Q^{+\infty}\frac{2z}{t(z^2-\theta)^3}\cdot d\cos\left(t\left(\frac{z^3}{3}-\theta z\right)\right)=$$
$$=-\frac{1}{t^2}\left(\frac{2z\cos(t(z^3/3-\theta z))}{(z^2-\theta)^3}\bigg|_Q^{+\infty}+\int_Q^{+\infty}\frac{2(5z^2+\theta)}{(z^2-\theta)^4}\cdot\cos\left(t\left(\frac{z^3}{3}-\theta z\right)\right)dz\right)=$$
$$=-\frac{1}{t^2}\,O\left(\frac{1}{|Q-\sqrt{\theta}|^3}\cdot\left|\frac{Q}{(Q+\sqrt{\theta})^3}\right|+\int_Q^{+\infty}\frac{1}{|z-\sqrt{\theta}|^4}\cdot\left|\frac{5z^2+\theta}{(z+\sqrt{\theta})^4}\right|dz\right)=O\left(\frac{1}{|Q-\sqrt{\theta}|^5\,t^2}\right),$$

其中最后一个等式由 $2\,|z-\sqrt{\theta}|\geq z-Q+|Q-\sqrt{\theta}|$ 对 $z\geq Q$的界得出，

$$\left|\frac{Q}{(Q+\sqrt{\theta})^3}\right|\leq\frac{1}{|Q+\sqrt{\theta}|^2}\leq\frac{1}{|Q-\sqrt{\theta}|^2}\qquad\text{and}\qquad\left|\frac{5z^2+\theta}{(z+\sqrt{\theta})^4}\right|\leq\frac{5}{|z+\sqrt{\theta}|^2}\leq\frac{5}{|Q-\sqrt{\theta}|^2}.$$

□

引理 26. 对于每个 $t>0$、 $\theta<0$和 $Q>0$，我们有

$$\int_{Q+\sqrt{\theta}}^{+\infty+\sqrt{\theta}}e^{it(z^3/3-\theta z)}\,dz=O\left(\frac{e^{-2/3\,t|\theta|^{3/2}}}{Q^3\,t^{3/2}|\theta|^{1/4}}\right).$$

证明. 记 $F(z):=z^3/3-\theta z$。分部积分并代入 $q=z-\sqrt{\theta}$后，得到

$$\int_{Q+\sqrt{\theta}}^{+\infty+\sqrt{\theta}}e^{itF(z)}\,dz=\int_{Q+\sqrt{\theta}}^{+\infty+\sqrt{\theta}}\frac{de^{itF(z)}}{it(z^2-\theta)}=\frac{e^{itF(z)}}{it(z^2-\theta)}\bigg|_{Q+\sqrt{\theta}}^{+\infty+\sqrt{\theta}}+\frac{1}{it}\int_{Q+\sqrt{\theta}}^{+\infty+\sqrt{\theta}}\frac{2z}{(z^2-\theta)^2}\,e^{itF(z)}\,dz=$$
$$=\frac{e^{-2/3\,t|\theta|^{3/2}}}{it}\left(\frac{e^{itq^3/3-t|\theta|^{1/2}q^2}}{q(q+2i|\theta|^{1/2})}\bigg|_Q^{\infty}+\int_Q^{\infty}\frac{2(q+i|\theta|^{1/2})}{q^2(q+2i|\theta|^{1/2})^2}\,e^{itq^3/3-t|\theta|^{1/2}q^2}\,dq\right)=$$
$$=\frac{e^{-2/3\,t|\theta|^{3/2}}}{it}\,O\left(\frac{e^{-t|\theta|^{1/2}Q^2}}{Q^2}+\frac{1}{Q^3}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t|\theta|^{1/2}q^2}\,dq\right)=O\left(\frac{e^{-2/3\,t|\theta|^{3/2}}}{Q^3\,t^{3/2}|\theta|^{1/4}}\right),$$

其中最后一个等式由 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-aq^2}\,dq=\sqrt{\pi/a}$和 $e^{-t|\theta|^{1/2}Q^2}=O\left(\frac{1}{Q\,t^{1/2}|\theta|^{1/4}}\right)$得出。

□

引理 27. 对于每个 $\theta\in\mathbb{R}$ 和 $\Delta>0$，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(z^3/3-\theta z)}\,dz=\int_{-\infty+i\Delta}^{+\infty+i\Delta}e^{i(z^3/3-\theta z)}\,dz.$$

证明。对于 $R,R'>0$，分别记 I_1、 I_2、 $I_\downarrow$和 $I_\uparrow$ 为 $e^{i(z^3/3-\theta z)}$在 $[-R';\ R]$, $[-R'+i\Delta;\ R+i\Delta]$, $[-R'+i\Delta;\ -R']$和 $[R;\ R+i\Delta]$上的积分。于是 $I_2=I_\downarrow+I_1+I_\uparrow$。代入 $z=R+iy$，得到

$$|I_\uparrow|=\left|\int_0^{\Delta}ie^{i((R+iy)^3/3-\theta(R+iy))}\,dy\right|\leq\int_0^{\Delta}e^{-R^2y+y^3/3+\theta y}\,dy=O_{\theta,\Delta}\left(\int_0^{\Delta}e^{-R^2y}\,dy\right)=O_{\theta,\Delta}\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

因此，当 $R\to+\infty$时， $I_\uparrow\to0$。类似地，当 $R'\to+\infty$时， $I_\downarrow\to0$。因此，$\lim_{R,R'\to+\infty}I_1=\lim_{R,R'\to+\infty}I_2$。

□

引理 *28.* 设 $F(u)$ 是线段 $[l$ 上的连续函数； $r]$ 在某点 $\hat{u}\neq l$ 处取得唯一的全局最大值， r，且满足 $F''(\hat{u})<0$。设 $S_t\subset[l\ ;\ r]$ 是有限非空子集序列，其中 $S_t\cup\{l,r\}$ 中任意两个相邻点之间的距离均有界于 $d(t)$。设 $F_t(u)$ 是定义在 S_t 上的函数序列，且 $|F_t(u)-F(u)|$ 有界于 $g(t)$。那么

$$\max_{u\in S_t}F_t(u)=F(\hat{u})+O_F\left(g(t)+d(t)^2\right),\qquad\arg\max_{u\in S_t}F_t(u)=\hat{u}+O_F\left(\sqrt{g(t)}+d(t)\right).\tag{77}$$

证明。 记 $u_t := \text{辐角最大值点}_{u\in S_t} F_t(u)$， $u'_t := \text{辐角最小值点}_{u\in S_t} |u - \hat{u}|$, $G(u) := \begin{cases} \frac{F}{(\hat{u})-F(u)\,(u-\hat{u})^2}, & \text{若 } u \neq \hat{u}, \end{cases}$

$-F''\ u \qquad u = u.(\hat{})/2, \text{若 } \hat{}$

由于 F 在局部极值点 $\hat{u}$处二阶可微，因此有

$$F(u) = F(\hat{u}) + \frac{F''(\hat{u})}{2}(u-\hat{u})^2 + o\left((u-\hat{u})^2\right).$$

接着，由 $F(u)$的连续性，函数 $G(u)$在 $[l$上连续； $r]$。此外， $G(u) > 0$，因为 $F''(\hat{u}) < 0$且对所有 $u \neq \hat{u}$， $F(\hat{u}) > F(u)$。因此，存在正数常量 L_F、 R_F，使得对每个 $u \in [l;\ r]$，都有 $L_F < G(u) < R_F$。代入 $u = u'_t$并利用 $G(u) < R_F$，得到

$$F(u'_t) = F(\hat{u}) - G(u'_t)(u'_t - \hat{u})^2 > F(\hat{u}) - R_F \cdot d(t)^2.$$

由于 $u_t = \text{是}_{u\in S_t} F_t(u)$的最大值点，且 $|F_t(u) - F(u)| < g(t)$，因此得到

$$F(u_t) \geq F_t(u_t) - g(t) \geq F_t(u'_t) - g(t) \geq F(u'_t) - 2g(t).$$

结合前 两个不等式，得到 $F(\hat{u}) \geq F(u_t) > F(\hat{u}) - R_F \cdot d(t)^2 - 2g(t)$.

这证明了（77）中的第一个等式。为证明第二个等式，将 $u = u_t$ 代入 $G(u) > L_F$:

$$(u_t - \hat{u})^2 = \frac{F(\hat{u}) - F(u_t)}{G(u_t)} \leq \frac{F(\hat{u}) - F(u_t)}{L_F} = O_F\left(d(t)^2 + g(t)\right) = O_F\left(\left(d(t) + \sqrt{g(t)}\right)^2\right). \qquad \square$$

参考文献

[1] A. Ambainis、E. Bach、A. Nayak、A. Vishwanath 和 J. Watrous。一维量子游走。载于 *Proceedings of the Thirty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing* 01, 37 49, 2001 ，STOC ’ 页 – 纽约，NY，美国，。计算机协会。[2] P. Arnault 和 C. Cedzich。离散时间幺正格点规范理论的单粒子框架。*New Journal of Physics* 24 12 123031, 2022 ，（）：dec 。[3] C. Banderier、P. Flajolet、G. Schaeffer 和 M. Soria。随机映射、合并鞍点、奇点分析与艾里现象。 *Random Structures & Algorithms*，19(3-4)：194–246，2001。[4] C. Banderier 和 G. Louchard。Philippe Flajolet 与艾里函数。Philippe Flajolet 论文集第二卷第二章《艾里函数》的章节引言草稿，2012。[5] N. Bleistein。驻点靠近代数奇点时积分的一致渐近展开。*on Pure and Applied Mathematics* 19 4 353 370, 1966 *Communications* ，（）：–。

[6] I. Bogdanov。费曼跳棋：方向反转的概率。预印本，arXiv:2010.04583（2020），2022。[7] A. Borodin 和 G. Olshanski。随机分拆与伽马核。 *Adv. Math.*，194(1)：141–202，2005。[8] F. Bracci、M. D. Contreras 和 S. D´ıaz-Madrigal。 *Continuous semigroups of holomorphic self-maps of the unit disc*。施普林格，2020。[9] H. A. Carteret、M. E. H. Ismail 和 B. Richmond。一维量子游走精确渐近的三种途径。 *Journal of Physics A: Mathematical and General*，36(33)：8775–8795，2003。[10] C. Destri 和 H. De Vega。费米子理论的光锥格点方法 2 *Nuclear* D：有质量 *Physics B* 290 363 391, 1987 蒂林模型。，：–。[11] P. L. Duren。 *Univalent Functions*， *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*第259卷。施普林格出版社，纽约，1983。[12] A. Erd´elyi、W. Magnus、F. Oberhettinger 和 F. G. Tricomi。 *Higher transcendental functions. Vol. I*。Robert E. Krieger 出版公司，墨尔本，佛罗里达州，1981。根据 Harry Bateman 留下的笔记编写，Mina Rees 作序，E. C. Watson 作前言，1953年原版重印。[13] R. P. Feynman 和 A. R. Hibbs。 *Quantum Mechanics and Path Integrals*。国际纯粹与应用物理丛书。麦格劳-希尔，纽约，1965。[14] J. Glimm 和 A. Jaffe。 *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*。施普林格，纽约，第2版，2012。[15] A. D. Gottlieb、S. Janson 和 P. F. Scudo。硬币量子游走在 R^d上的收敛。 *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* 08 01 129 140, 2005 ，（）：–。[16] G. Grimmett、S. Janson 和 P. F. Scudo。量子随机游走的弱极限。 *Phys. Rev. E*，69(2)：026119，2004。[17] C.-W. Ho。关于真映射的一则注记。 *Proceedings of the American Mathematical Society*，51(1)：237–241，1975。[18] M. N. Huxley。 *Area, lattice points, and exponential sums*， *Lond. Math. Soc. Monogr.*第13卷， *New Ser.* 牛津：Clarenton 出版社，1996。

[19] J. Kempe。量子随机游走：入门综述。 *Contemporary Physics*，50(1)：339–359，2009。[20] N. Konno。量子游走。 *Sugaku Expositions*，33(2)：135–158，2020。[21] A. B. J. Kuijlaars 和 A. Mart´ınez-Finkelshtein。具有变化的非标准参数的雅可比多项式的强渐近性。 *J. Anal. Math.*，94：195–234，2004。[22] F. Kuyanov 和 A. Slizkov。费曼跳棋：数论性质。 *Rev. Math. Phys.*，35(09)：2350022，2023。[23] M. Maeda、H. Sasaki、E. Segawa、A. Suzuki 和 K. Suzuki。非线性量子游走的散射与逆散射。 *Discrete and Continuous Dynamical Systems*，38(7)：3687–3703，2018。[24] M. Maeda、H. Sasaki、E. Segawa、A. Suzuki 和 K. Suzuki。

1 *Journal* 维格 *of the Mathematical Society of Japan* 74 1 217 246, 2022
点上量子游走的色散估计。，（）：–。[25] A. Markushevich 和 R. Silverman。 *Theory of Functions of a Complex Variable*，*Chelsea Publishing Series*第3卷。Chelsea Publishing Company，1977。[26] V. P. Maslov。算子方法。Djilali Embarek 译自俄文。莫斯科： ´Editions Mir。707页，1987。[27] V. P. Maslov 和 M. V. Fedoriuk。 *Semi-classical approximation in quantum mechanics*，第7卷。施普林格科学与商业媒体，2001。[28] H. Mizutani。一维薛定谔方程的色散估计与渐近展开。，（）：–。[29] F. Olver、D. Lozier、R. Boisvert 和 C. Clark。NIST数学函数手册。2010。[30] F. W. J. Olver。 *Asymptotics and special functions*。AKP Classics。A K Peters Ltd.，马萨诸塞州韦尔斯利，1997。1974年原版重印 [纽约：Academic Press；MR0435697（55 #8655）]。[31] F. Ozhegov。费曼跳棋：外部电磁场与渐近性质。 *Rev. Math. Phys.*，36 07 2450017，2024（）：。[32] F. Ozhegov、M. Skopenkov 和 A. Ustinov。费曼跳棋：穿过镜中世界。 *Math. Intell.*，47 221，2025 210：–。[33] R. Pemantle、M. C. Wilson 和 S. Melczer。 *Analytic combinatorics in several variables*，第212卷。剑桥大学出版社，2024。[34] C. Pommerenke 和 G. Jensen。 *Univalent functions: With a chapter on Quadratic differentials by Gerd Jensen ...* Studia mathematica / 数学教科书。Vandenhoeck & Ruprecht，1975。[35] H. J. Rothe。 *Lattice gauge theories. An introduction.*， *World Sci. Lect. Notes Phys.* 第82卷。新泽西州哈肯萨克：World Scientific，第4版，2012。[36] J. Shah、L. Shou、J. Shuler 和 V. Galitski。量子自旋与二聚体模型中热力学极限的失效。*Phys. Rev. X*，16：021020，2026年4月。[37] L. Shou、J. Shah、M. Lerner-Brecher、A. Aggarwal、A. Borodin 和 V. Galitski。量子二聚体模型中可精确求解的拓扑相变。 *Phys. Rev. Lett.*，137(5)：056503，2026。[38] M. Skopenkov 和 A. Ustinov。费曼跳棋：迈向算法量子理论。 *Russ. Math. Surv.*，3 160，2022 465 73( )：–。[39] M. Skopenkov 和 A. Ustinov。费曼跳棋：实时间晶格量子场论。 *Anal. Math. Phys.*，14(38)，2024。[40] T. Sunada 和 T. Tate。直线上量子游走的渐近行为。 *J. Funct. Anal.*，262(6)：2608–2645，2012。[41] S. E. Venegas-Andraca。量子游走：全面综述。 *Quantum Inf. Process.*，11(5)：1015–1106，2012。[42] H. Whitney。可微偶函数。 *Duke Math. J.*，10(1)：159–160，1943。[43] R. Wong。 *Asymptotic approximations of integrals*。马萨诸塞州波士顿等地：Academic Press, Inc.，1989。[44] P. Zakorko。费曼跳棋：用艾里函数对波函数作一致近似。 *preprint*。[45] A. Zee。 *Quantum field theory in a nutshell.* 新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，第2版，2010。