arXiv:2611.30407v1 [cond-mat.quant-gas] 23 Nov 2026

从弱相互作用到强相互作用的平面玻色气体普适热力学与 BKT 转变

Yaniss Rabahi, [1] Ivan Balog, [2] 和 Adam Ran.con[1,3]1 *Univ. Lille, CNRS, UMR 8523 – PhLAM – Laboratoire de Physique des Lasers Atomes et Molécules, F-59000 Lille, France*
[2]*Institute of Physics, Bijenička cesta 46, HR-10001 Zagreb, Croatia*[3]*Institut Universitaire de France*

我们利用函数重整化群（FRG）计算了弱耦合和强耦合下稀薄二维玻色气体的普适热力学。我们采用一种保留有效势完整场依赖关系和空间导数项的近似，从而扩展了以往的 FRG 计算。我们发现，状态方程对近似方案的选择出奇地不敏感，即使在强耦合下，差异也只有百分之几。相比之下，改进后的近似显著提升了对贝雷津斯基–科斯特利茨–索利斯（BKT）转变的描述，将超流密度的普适跃变和临界反常维数复现到仅相差百分之几的精度。在弱耦合下，我们的结果与经典场蒙特卡罗模拟高度吻合；而在更强耦合下，我们观察到结果偏离了适用于弱耦合的经典场标度。因此，我们的方法能够定量描述 BKT 转变前后的热力学和超流密度，包括经典场方法不再可靠的强耦合区间。

I. 引言

稀薄二维（2D）玻色气体为研究相互作用系统中强热涨落和量子涨落的影响提供了一个平台 [1–3]。其热力学性质由零温度和零化学势处的量子临界点所支配 [4, 5], ，该临界点对应于真空到超流相转变。尽管这一转变发生在零温度下，它却决定了气体在相当高温度下的性质，并产生普适标度性质。特别是，状态方程通过以下比值依赖于化学势和温度μ/T ，以及一种重整化的、依赖能量的相互作用 [5]。在有限温度下，霍恩伯格–梅尔明–瓦格纳定理禁止真正的长程有序，但在 BKT 转变以下仍存在超流相 [6–10]。

描述相互作用二维玻色气体的热力学性质向来极具挑战。BKT 转变本身是无穷阶相变，热力学势呈现本性奇点，而超流密度则表现出普适跃变 [3, 11]。这里不存在常规的对称性破缺；在临界点附近，系统会呈现具有普适标度行为的宽广涨落区。平均场方法无法描述这一涨落区，因为它们无法处理涡旋对的束缚与解束缚，也无法应对相位涨落的红外发散。因此，要对二维系统中的压强、密度和压缩率等物理量作出精确的理论预测，就需要采用非微扰方法，恰当地纳入强相位涨落以及二维相互作用的边缘（对数）尺度依赖效应。

超冷原子气体为这一物理现象提供了实验实现，使人们能够直接观测 BKT 转变 [12, 13] 并测量状态方程 [14–19]。在理论方面，经典场蒙特卡罗模拟已为弱相互作用二维玻色气体 [20, 21]确立了精确结果。具体而言，这些模拟确定了临界密度和化学势，以及涨落区的普适状态方程。这些结果已被广泛用于解读实验，并为其他理论方法提供基准测试。然而，将系统映射到经典场论依赖于弱相互作用，在耦合更强时便会变得不准确。在相对较弱的相互作用下，对二体接触的测量中已观测到偏离经典场论预测的现象 [22]。

函数重整化群（FRG） [23, 24] 提供了一种替代方法，它不依赖弱耦合展开，并能在同一框架内描述量子涨落和热涨落。在文献 [5],中，FRG 被用于计算稀薄二维玻色气体的普适状态方程，所得结果与实验测量吻合良好。最近，该方法还被证明能够复现实验测得的二体接触 [25], ，包括在经典场模拟失效的区域。这些计算基于对有效作用量的一种相对简单的近似：将有效势在其极小值附近展开，并假设导数项与场无关。尽管这种处理足以描述状态方程，但这种

近似无法正确再现低温 BKT 相。特别是，超流密度始终为零，因此无法可靠地确定其普适跃变。

在这项工作中，我们通过保留有效势和空间导数项对场的完整依赖性，扩展了先前的 FRG 方法。这种近似使我们能够计算 BKT 转变过程中、从弱耦合到强耦合范围内的状态方程以及

超流密度。将结果与较简单的近似进行比较后，我们发现状态方程对截断极不敏感，即使在强耦合下，差异也只有几个百分点。相比之下，要更准确地描述 BKT 转变，就必须采用改进后的近似；它能以几个百分点的精度再现超流密度的普适跃变和临界反常维数。

在弱耦合下，我们将结果与经典场蒙特卡罗模拟进行比较 [20, 21]。在涨落区，我们在临界参数和普适状态方程方面获得了非常好的一致性。在更强耦合下，我们观察到相对于经典场标度的偏离，而更一般的量子标度形式仍然成立。因此，我们的结果为超越弱耦合区间的平面玻色气体的热力学性质和超流密度提供了预测；在该区间内，经典场方法已不再具有定量可靠性。这为二维玻色气体的普适热力学行为提供了全面且定量可靠的图景，弥合了弱相互作用区间与强相互作用区间之间的差距，并为未来的实验和模拟提供了有价值的比较基准。

本文的组织结构如下。在第 II 节中，我们回顾稀薄平面玻色气体的主要热力学性质及其普适标度形式。第 III 节介绍 FRG 形式体系和近似方案。我们在第 IV 节讨论该方法的收敛性，在第 V 节讨论普适状态方程，并在第 VI 节讨论 BKT 转变和超流密度。在第 VII 节中，我们将结果与弱耦合极限下的经典场模拟进行比较。我们的结论见第 VIII节。

II. 普适热力学

低温稀薄二维玻色气体的物理由以下哈密顿量描述（我们采用如下单位：$\hbar = k_B = 1$）

$$\hat{H} = \int d^2r \left\{ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{g_0}{2} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \right\}, \tag{1}$$

其中 $\hat{\psi}^{(\dagger)}(\mathbf{r})$ 表示在二维平面中位置 m 处 $\mathbf{r} = (x, y)$ 处湮灭（产生）一个质量为 μ 的玻色子； g_0 为化学势。耦合常数 $\omega_z = 1/ml_z^2$描述平面内玻色子之间的有效接触相互作用。对于沿第三个方向受谐势束缚、典型能量为 a_3 的冷原子，它与三维 s 波散射长度 l_z和 $mg_0 \propto a_3/l_z$[26, 27]之比相关，无量纲耦合常数为 。

上述哈密顿量能够正确描述温度 $T \ll \omega_z$ 足够低、密度 n 足够小（对应于 $\mu \ll \omega_z$）时的物理。 此外，由于二维中的接触相互作用定义不良，我们通过引入紫外截断 $\Lambda \propto l_z^{-1}$来规整该理论。因此，该模型仅适用于小动量 $|\mathbf{q}| \ll \Lambda$ 和大距离$|\mathbf{r}| \gg l_z$。在更高能量/动量下，则需要对受限三维气体进行适当描述。

这意味着 mg_0 是无量纲的，因此二维玻色气体的经典理论在空间 $\to s\mathbf{r}$ $\mathbf{r}$ 和能量 $E \to E/s^2$的重新缩放下具有尺度不变性，而玻色场的标度与长度的倒数相同。在量子层面，为使接触相互作用有意义而进行的正则化会破坏这种尺度不变性。可以从重整化群的角度理解这种（近似）尺度不变性，详见 [5] 。二维稀薄玻色气体的尺度不变性源于量子临界点 $\mu = T = 0$的存在，该点将两个相分隔开来：真空（$\mu < 0$）和超流相（$\mu > 0$） [28]。这一相变是二阶的，连续相变的全部现象学特征都适用于此。从重整化群的角度来看，该临界点是高斯型的，其临界指数为 $\nu_0 = 1/2$，反常维数为 $\eta_0 = 0$，动力学指数为$z_0 = 2$。维数二是超流相与真空之间量子相变的上临界维数，这意味着重整化相互作用 $\tilde{g}(s)$ 随重新缩放因子 s的变化呈对数衰减 [1]

$$\tilde{g}(s) = -\frac{2\pi}{\ln\left(\frac{\Lambda a_2}{2s}\right) + C}, \tag{2}$$

其中 C 为欧拉常数， a_2 为二维 s 波散射长度

$$a_2 = \frac{2}{\Lambda} \exp\left(-\frac{2\pi}{mg_0} - C \right). \tag{3}$$

[1] 与参考文献中定义的差异有两倍 之处。本文采用的定义是 [5]，其形式为 $\tilde{g}(s) \simeq mg_0$ 在弱耦合情况下 g.

这一量子临界点支配着有限温度和化学势下的物理性质，并意味着包括热力学量在内的标度行为。例如，压强遵循标度形式

$$P(\mu, T, mg_0) = s^{-4} P(\mu s^2, T s^2, \tilde{g}(s)). \tag{4}$$

取 $s^{-2} \propto T$，可得压强的标度律

$$P(\mu, T, mg_0) = T\lambda_{\mathrm{dB}}^{-2} \mathcal{F}(\mu/T, \tilde{g}(T)), \tag{5}$$

其中 $\lambda_{\mathrm{dB}} = \sqrt{2\pi/mT}$ 为热德布罗意波长，而另一个量是依赖于能量的耦合常数

$$\tilde{g}(\epsilon) = -\frac{2\pi}{\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2ma_2^2\epsilon}\right) + C} = \frac{mg_0}{1 - \frac{mg_0}{4\pi}\ln(\frac{2m\epsilon}{\Lambda^2})}. \tag{6}$$

同样，密度 $n = \partial_\mu P$ 和超流密度 n_s 具有如下普适形式

$$n(\mu, T, g_0) = \lambda_{\mathrm{dB}}^{-2} \mathcal{D}\left(\frac{\mu}{T}, \tilde{g}(T)\right), \tag{7}$$

$$n_s(\mu, T, g_0) = \lambda_{\mathrm{dB}}^{-2} \mathcal{D}_s\left(\frac{\mu}{T}, \tilde{g}(T)\right), \tag{8}$$

其对应的普适函数分别为 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}_s$。

这些标度关系适用于 $|\mu|, T \ll \Lambda^2/2m$。它们确立了量子临界点附近稀薄玻色气体热力学的普适性：在二维中，热力学由质量 m、散射长度 a_2以及普适函数 $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}_s$决定，而与微观细节无关。这些结果也适用于其他稀薄二维玻色系统，例如稀薄磁振子 [29, 30] 或光学晶格中的冷原子 [5, 31, 32]。

我们注意到，$\tilde{g}(\epsilon)$ 对能量的对数依赖很重要，是恢复二维玻色气体基态正确状态方程所必需的，该方程包含对数项 [33]。在弱相互作用极限下，$mg_0 \ll 1$，重整化相互作用 $\tilde{g}(\epsilon)$ 几乎不随能量变化，只有在能量指数级小的情况下（即 $\epsilon \ll \frac{\Lambda^2}{2m} e^{-\frac{4\pi}{mg_0}}$）才会如此。相空间压强 $\mathcal{P} = \lambda_{\mathrm{dB}}^2 P/T$近似变为尺度不变，并由一个数——无量纲相互作用 mg_0——来参数化

$$\mathcal{P}(\mu, T) \simeq \mathcal{F}(\mu/T, mg_0), \tag{9}$$

其依赖关系从现在起不再显式写出。

由于有限温度下二维玻色气体的相位涨落强烈，显式计算标度函数 $\mathcal{F}$ 是一个困难的非微扰问题。在下一节中，我们将展示 FRG 如何在整个相图范围内、跨越超流体相变，并针对弱耦合和强耦合情况进行精确计算。

III. FRG 实现

FRG 方法已广泛应用于玻色量子系统 [5, 25, 30, 32, 34–45]。这里我们将重点讨论与本研究相关的具体方面。

A. 稀薄玻色气体的 FRG

起点是与方程（1）相关联的作用量，

$$S[\psi^*, \psi] = \int_0^\beta d\tau \int d^2r \left\{\psi^* \partial_\tau \psi + \psi^* \left(-\frac{\nabla^2}{2m} - \mu\right)\psi + \frac{g_0}{2}|\psi|^4\right\}. \tag{10}$$

其中 $\beta = 1/T$。将复场 $\psi(\boldsymbol{r}, \tau)$ 分解为两个实分量，

$$\psi(\boldsymbol{r}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(\boldsymbol{r}, \tau) + i\psi_2(\boldsymbol{r}, \tau)], \tag{11}$$

采用周期性边界条件 $\psi(\boldsymbol{r},\tau) = \psi(\boldsymbol{r},\tau+\beta)$，得到

$$S[\boldsymbol{\psi}] = \int_0^\beta d\tau \int d^2r \left[\frac{i}{2}\epsilon_{ij}\psi_i\partial_\tau\psi_j + \frac{1}{4m}(\nabla\boldsymbol{\psi})^2 - \frac{\mu}{2}\boldsymbol{\psi}^2 + \frac{g_0}{8}(\boldsymbol{\psi}^2)^2\right], \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$，$\epsilon_{ij}$ 是反对称的列维-奇维塔张量。

函数重整化群构造了一族由动量尺度 k标记的模型，在微观尺度Λ 与零 [23, 24, 46]之间插值。这是通过向微观作用量中添加一个调节项来实现的，

$$\Delta S_k = \int_0^\beta d\tau \int d^2r \int d^2r'\, \psi^*(\boldsymbol{r},\tau)\, R_k(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \psi(\boldsymbol{r}',\tau). \tag{13}$$

在动量空间中，截断函数 $R_k(\boldsymbol{q})$ 在 $k=0$ 处为零，因此 $S+\Delta S_{k=0}$ 恢复原始微观模型。在有限的 k 下，$R_k(\boldsymbol{q})$ 抑制满足 $|\boldsymbol{q}| \lesssim k$ 的低动量涨落，并起到红外调节器的作用。在微观尺度 Λ，其选取方式使得作用量为 $S+\Delta S_\Lambda$ 的模型可以精确求解：对于 $R_\Lambda(\boldsymbol{q})$，$\to\infty$ 所有涨落都被冻结，平均场近似变得精确。如下文所述，调节器与虚时间无关，其形式为

$$R_k(\boldsymbol{p}) = Z_{x,k}\boldsymbol{p}^2\, r\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{k^2}\right), \tag{14}$$

其中 $Z_{x,\,k}$ 在下文中定义。核心量是尺度依赖的有效作用量 Γ_k，它由 $\ln \mathcal{Z}_k[J^*,J]$ 的修正勒让德变换定义，

$$\Gamma_k[\phi^*,\phi] = -\ln \mathcal{Z}_k[J^*,J] + \int_0^\beta d\tau \int d^2r\,(J^*\phi + \text{c.c.}) - \Delta S_k[\phi^*,\phi], \tag{15}$$

其中，$J(\boldsymbol{r},\ \tau)$ 是复源，而 $\mathcal{Z}_k$ 是存在调节器时的生成泛函，

$$\mathcal{Z}_k[J^*,J] = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^*\, e^{-S[\psi^*,\psi]-\Delta S_k[\psi^*,\psi]+\int_0^\beta d\tau\int d^2r\,(J^*\psi+\psi^*J)}, \tag{16}$$

而

$$\phi(\boldsymbol{r},\tau) = \frac{\delta \ln \mathcal{Z}_k[J^*,J]}{\delta J^*(\boldsymbol{r},\tau)} = \langle\psi(\boldsymbol{r},\tau)\rangle \tag{17}$$

是超流体序参量。引入序参量的实部和虚部$\phi(\boldsymbol{r},\ \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(\boldsymbol{r},\ \tau) + i\phi_2(\boldsymbol{r},\ \tau)]$很方便。

在微观尺度 $k=\Lambda$，模型由平均场理论描述，而有效作用量与微观作用量一致，即 $\Gamma_\Lambda[\phi^*,\phi] = S[\phi^*,\phi]$，它依赖于 m、μ、g_0。任意尺度 k 下的有效作用量可通过积分精确流方程 [47–49] 得到

$$\partial_k\Gamma_k[\phi^*,\phi] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\partial_k R_k\left(\Gamma_k^{(2)}[\phi^*,\phi] + R_k\right)^{-1}\right\}, \tag{18}$$

其中，$\Gamma_k^{(2)}$ 是 Γ_k的二阶泛函导数。在傅里叶空间中，方程（18）中的迹包含动量、松原频率以及复场的两个分量 ϕ。

流结束时，$\Gamma_{k=0}[\phi^*,\phi] = \Gamma[\phi^*,\phi]$ 是完整的有效作用量，由此可以得到巨势和所有热力学性质。温度通过流方程中的松原频率引入。有效作用量还通过初始条件继承了对微观参数的依赖。

B. 有效作用量的性质

从有效作用量中提取的主要物理量是有效势 $U_k(\phi^*,\ \phi)$ 和二点顶角 $\Gamma_k^{(2)}[\phi^*,\phi]$。微观作用量的对称性（10）对它们的形式有很强的约束，前提是调节器也保持这些对称性。这些约束还为求解流方程（18）提供了具有物理动机的试探形式 [24, 38, 39]。

作用量在全局 $U(1)$ 变换下保持不变

$$\psi^{(*)}(\boldsymbol{r},\tau)\to e^{(\mp)i\alpha}\psi^{(*)}(\boldsymbol{r},\tau), \tag{19}$$

因此，有效势也具有 $U(1)$ 不变性，并且仅依赖于 $\rho=(\phi_1^2+\phi_2^2)/2$。通过使有效势最小化，可以得到平衡态：若 $\rho_{0,\,k}>0$，则为 $U_k'(\rho_{0,\,k})=0$；否则为 $\rho_{0,\,k}=0$。其特征由流动凝聚态密度 $\rho_{0,\,k}$ 和热力学势 $U_k(\rho_{0,\,k})$ 描述。在 $k=0$ 极限下，它们分别给出凝聚态密度和吉布斯自由能。

此外，$U(1)$ i nvariance 意味着，恒定场中的二点顶角具有一般形式 [3 8]

$$\Gamma^{(2)}_{k,ij}(q;\phi)=\delta_{ij}\Gamma_{k,A}(q;\rho)+\phi_i\phi_j\,\Gamma_{k,B}(q;\rho)+\epsilon_{ij}\,\Gamma_{k,C}(q;\rho), \tag{20}$$

其中，$q=(\boldsymbol{q},\ i\omega_n)$、$\phi=(\phi_1,\ \phi_2)^T$是二分量实场，而 δ_{ij}和 ϵ_{ij}分别是克罗内克张量和反对称张量。这些函数 $\Gamma_{k,\,A}$、$\Gamma_{k,\,B}$和 $\Gamma_{k,\,C}$ 仅通过 ρ依赖于场。有效势与二点顶角之间的关系为

$$\Gamma^{(2)}_{k,ij}(q=0;\phi)=\frac{\partial^2U_k(\rho)}{\partial\phi_i\partial\phi_j}=\delta_{ij}U_k'(\rho)+\phi_i\phi_j\,U_k''(\rho). \tag{21}$$

除 $U(1)$ 不变性外，微观作用量 (10) 还具有时间反演这一离散对称性 $\psi(\boldsymbol{r},\tau)\to\psi^*(\boldsymbol{r},-\tau)$ 以及空间反演对称性 $\psi(\boldsymbol{r},\tau)\to\psi(-\boldsymbol{r},\tau)$，由此可得

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}_{k,ij}(\boldsymbol{q},i\omega_n;\phi)&=\Gamma^{(2)}_{k,ij}(-\boldsymbol{q},i\omega_n;\phi),\\ \Gamma^{(2)}_{k,ij}(\boldsymbol{q},i\omega_n;\phi)&=(2\delta_{ij}-1)\,\Gamma^{(2)}_{k,ij}(\boldsymbol{q},-i\omega_n;\phi^*),\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $\phi^*=(\phi_1,-\phi_2)^T$。方程 (20) 和 (22) 因而给出

$$\begin{aligned}\Gamma_{k,A}(q;\rho)&=\Gamma_{k,A}(-q;\rho)=\Gamma_{k,A}(\boldsymbol{q},-i\omega_n;\rho),\\ \Gamma_{k,B}(q;\rho)&=\Gamma_{k,B}(-q;\rho)=\Gamma_{k,B}(\boldsymbol{q},-i\omega_n;\rho),\\ \Gamma_{k,C}(q;\rho)&=-\Gamma_{k,C}(-q;\rho)=-\Gamma_{k,C}(\boldsymbol{q},-i\omega_n;\rho).\end{aligned} \tag{23}$$

对二点顶角求逆可得到尺度依赖传播子，

$$G_k[\phi^*,\phi]=-\left(\Gamma^{(2)}_k[\phi^*,\phi]+R_k\right)^{-1}, \tag{24}$$

其张量结构可分解为纵向分量和横向分量，$G_{LL,\,k}$，$G_{TT,\,k}$ 以及 $G_{LT,\,k}$。对称性要求 $G_{ij,\,k}$ 具有与方程 (20) 相同的形式，

$$G_{ij,k}(q;\phi)=\frac{\phi_i\phi_j}{2\rho}G_{LL,k}(q;\rho)+\left(\delta_{ij}-\frac{\phi_i\phi_j}{2\rho}\right)G_{TT,k}(q;\rho)+\epsilon_{ij}G_{LT,k}(q;\rho), \tag{25}$$

with

$$\begin{aligned}G_{LL,k}(q;\rho)&=-\frac{\Gamma_{A,k}(q;\rho)+R_k(\mathbf{q})}{D_k(q;\rho)},\\ G_{TT,k}(q;\rho)&=-\frac{\Gamma_{A,k}(q;\rho)+R_k(\mathbf{q})+2\rho\,\Gamma_{B,k}(q;\rho)}{D_k(q;\rho)},\\ G_{LT,k}(q;\rho)&=\frac{\Gamma_{C,k}(q;\rho)}{D_k(q;\rho)},\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $D_k=$行列式$\left(\Gamma^{(2)}_k+R_k\right)$。这些表达式恢复了用正常关联函数和反常关联函数表示的玻色传播子的通常结构 [38, 39]。此外，传播子在 $k=0$ 处无能隙，这是 Hugenholtz–Pines定理 [50], 的推论，并且会自动得到保证：$D_{k=0}(q=0;\rho_{0,\,k=0})\propto U'_{k=0}(\rho_{0,\,k=0})=0$ 在有序相中。

C. 局部势近似′××导数展开$_2$近似

我们通过扩展导数展开并避免场展开，超越了以往的研究。在有限温度下，热力学主要由长波经典涨落支配；而与非零松原频率相关的量子涨落（$\omega_n = 2\pi n T,\ n \neq 0$）会获得有限质量，并在较大的重整化群尺度上重整化有效势和动能系数。积分掉这些量子模会生成一个有效的经典 $O(2)$ 模型，它支配着 $k \ll \lambda^{-1}$ dB [1, 20, 37]处的长波物理。因此，在非零温度下，使用与虚时间无关的调节器就足够了，并且可以解析地进行松原求和。红外调节器确保顶角在 $|\boldsymbol{q}| \ll k$ 时是解析的，这为经典扇区采用二阶导数展开提供了依据。由于我们关注的是由经典空间涨落主导的热力学，量子扇区可以在所谓的 LPA′ 框架内处理。我们将这种混合方案记为 LPA′×导数展开$_2$，其试探形式为

$$\Gamma_k[\phi^*,\phi] = \int_0^\beta d\tau \int d^2r \left\{ Z_{\tau 1,k}\phi^*\partial_\tau\phi + Z_{x,k}(\rho)\,|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{4}Y_{x,k}(\rho)\,(\nabla\rho)^2 + U_k(\rho) \right\}. \tag{27}$$

尽管微观作用量关于 ρ是多项式形式，但流会在这三个函数中产生一般的场依赖关系。在经典区间，$d = 2$中的正则场维数为零。因此，原则上没有理由忽略 ρ [51]中的高阶项。于是，我们保留经典扇区函数 U_k、$Z_{x,k}$和$Y_{x,k}$的完整场依赖关系。

相比之下，量子扇区采用局部势近似′，并且 $Z_{\tau 1,k}$ 被视为与场无关，并在有效势的极小值 $\rho_{0处k}$ 取值，见下文方程（39）。先前的研究 [5, 35, 38, 39]在试探形式中纳入了二阶时间导数项（27），

$$\int_0^\beta d\tau \int d^2r\, Z_{\tau,k}\,|\partial_\tau\phi|^2, \tag{28}$$

同时将所有其他函数都在 $\rho_{0附近展开k}$。该项在 $k = \Lambda$处虽不存在，但对于描述金兹堡尺度 $\omega_G \sim (mg_0)^2 g_0 n$ [38, 39]以下的非微扰低能性质尤为重要。在弱耦合下，该尺度远小于典型的相互作用能 $g_0 n \sim \mu$，与此处考虑的温度处于同一量级。此外，由于只有量子模涉及 $Z_{\tau,k}$，且这些量子模与 $T \gg k^2/2m \gg \omega_G$的流方程相解耦，因此在计算热力学性质时可以放心地略去 $Z_{\tau,k}$。在第 IV节，我们将验证，这一省略不会显著影响热力学性质。

在有序相中，对于均匀场 $\phi_i = \delta_{i1}\sqrt{2\rho}$，二点顶角为

$$\Gamma_k^{(2)} = \begin{pmatrix} \Gamma_{k,A} + 2\rho\,\Gamma_{k,B} & \Gamma_{k,C} \\ -\Gamma_{k,C} & \Gamma_{k,A} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

with

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,A}(q;\rho) &= \boldsymbol{q}^2 Z_{x,k}(\rho) + U_k'(\rho), \\ \Gamma_{k,B}(q;\rho) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^2 Y_{x,k}(\rho) + U_k''(\rho), \\ \Gamma_{k,C}(q;\rho) &= Z_{\tau 1,k}\omega_n, \end{aligned} \tag{30}$$

这与上文所确立的对称性一致。

流动反常维数定义为

$$\eta_k = -k\partial_k \ln Z_{x,k}, \tag{31}$$

其中，稍微滥用一下记号，$Z_{x,k} \equiv Z_{x,k}(\rho = 0)$ 表示在任意重整化点 $\rho_r = 0$ 处取值的场重整化因子。物理反常维数为 $\eta = \lim_{k\to 0}\eta_k$。

D. Flow equations

就传播子（24）而言，Wetterich 方程（18）可写为（$t = \ln(k/\Lambda)$

$$\partial_t\Gamma_k[\boldsymbol{\phi}] = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{\partial_t R_k\, G_k[\boldsymbol{\phi}]\right\}. \tag{32}$$

对于均匀且静态的场，可得有效势的流，

$$\partial_t U_k(\rho) = -\frac{1}{2\beta V}\,\mathrm{Tr}\,\{\partial_t R_k\, G_k\}\Big|_{\phi\ \mathrm{cst}}, \tag{33}$$

其积分将在第IIIE节中讨论。有效势的最小值也会在流动过程中演化。只要 $\rho_{0,\ k} > 0$，条件 $U_k'(\rho_{0,\ k}) = 0$ 对所有 k 成立，即可得到

$$\partial_t \rho_{0,k} = -\frac{\partial_t U_k'(\rho_{0,k})}{U_k''(\rho_{0,k})}. \tag{34}$$

如果 $\rho_{0,\ k}$ 在有限尺度处变为零，则此后最小值保持在原点，且 $U_k'(0) > 0$，系统处于正常相。实际上，由于保留了 U_k 的完整泛函依赖关系，$\rho_{0,\ k}$ 在每个积分步骤中都被确定为 $U_k'(\rho)$ 的零点。

对 Wetterich 方程关于场取两次泛函导数，可得到均匀且静止场 [38], 中二点顶角的流

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma^{(2)}_{k,ij}(p;\phi) = &-\frac{1}{2}\sum_{q,i_1,i_2} \tilde{\partial}_t G_{k,i_1 i_2}(q;\phi)\,\Gamma^{(4)}_{k,iji_2i_1}(p,-p,q,-q;\phi)\\ &-\frac{1}{2}\sum_{q,i_1,\ldots,i_4}\Big\{\Gamma^{(3)}_{k,ii_2i_3}(p,q,-p-q;\phi)\,\Gamma^{(3)}_{k,ji_4i_1}(-p,p+q,-q;\phi)\\ &\times G_{k,i_3i_4}(p+q;\phi)\,\tilde{\partial}_t G_{k,i_1i_2}(q;\phi) + \big(p\leftrightarrow -p,\ i\leftrightarrow j\big)\Big\},\end{aligned} \tag{35}$$

其中，$p = (\boldsymbol{p},\ i\omega_n)$ 和 $q = (\boldsymbol{q},\ i\omega_m)$ 分别是外部和内部动量-频率变量，$\sum_q = \beta^{-1}\sum_{\omega_m}\int_{\boldsymbol{q}}$ 和 $\int_{\boldsymbol{q}} = \int \frac{d\boldsymbol{q}}{2\pi}()^d$，而算符

$$\tilde{\partial}_t = (\partial_t R_k)\,\frac{\partial}{\partial R_k} + (\partial_t R_k')\,\frac{\partial}{\partial R_k'}, \tag{36}$$

其中，$R_k'(\boldsymbol{q}) \equiv \partial_{\boldsymbol{q}^2} R_k(\boldsymbol{q})$仅作用于传播子对 R_k 的依赖性。$\Gamma_k^{(2)}$ 的流涉及 $\Gamma_k^{(3)}$ 和$\Gamma_k^{(4)}$，依此类推，因此 Wetterich 方程等价于由耦合方程构成的无限层级。试探形式 (27) 截断了这一层级，其中顶角 $\Gamma_k^{(3)}$ 和 $\Gamma_k^{(4)}$ 通过对试探形式关于场取泛函导数得到。随后，通过将式 (35) 投影到试探形式上，可得到 $Z_{x,\ k}(\rho)$、$Y_{x,\ k}(\rho)$ 以及$Z_{\tau 1,\ k}$ 的流，

$$\partial_t Z_{x,k}(\rho) = \lim_{\boldsymbol{p}\to 0}\partial_{\boldsymbol{p}^2}\,\partial_t \Gamma_{k,A}(\boldsymbol{p},\omega_n = 0;\rho), \tag{37}$$

$$\partial_t Y_{x,k}(\rho) = 2\lim_{\boldsymbol{p}\to 0}\partial_{\boldsymbol{p}^2}\,\partial_t \Gamma_{k,B}(\boldsymbol{p},\omega_n = 0;\rho), \tag{38}$$

$$\partial_t Z_{\tau 1,k} = \lim_{\omega_n\to 0}\partial_{\omega_n}\,\partial_t \Gamma_{k,C}(\boldsymbol{p}=0,\omega_n;\rho_{0,k}). \tag{39}$$

完整的流方程见附录 A。初始条件 $\Gamma_{k=\Lambda}[\phi] = S[\phi]$ 给出

$$\begin{aligned} U_\Lambda(\rho) &= -\mu\rho + \frac{g_0}{2}\rho^2,\\ Z_{x,\Lambda}(\rho) &= Z_{\tau 1,\Lambda} = 1,\\ Y_{x,\Lambda}(\rho) &= 0.\end{aligned} \tag{40}$$

从现在起我们设定 $2m = 1$，不失一般性。

E. 流方程的数值求解

求解流方程的主要难点来自有效势的流。由于在 $k = 0$时它是真正的勒让德变换，因此在该极限下必须是凸函数。众所周知，数值求解这一凸性恢复过程颇为棘手 [52]。借鉴流体动力学中的思路，这个问题对于

经典 $O(N)$ 模型在 LPA 下 [53–56]得到了极大简化。因此，我们将该处引入的迎风/逆风离散化方法推广至稀薄玻色气体。

$V_k(\rho) = \partial_\rho U_k(\rho)$的方程具有守恒律的形式，

$$\partial_t V_k(\rho) = \partial_\rho f_{k,LL}(\rho) + \partial_\rho f_{k,TT}(\rho), \tag{41}$$

其纵向通量和横向通量分别为 $f_{k,\ LL}$ 和 $f_{k,\ TT}$，

$$f_{k,LL/TT}(\rho) = -\frac{1}{2\beta}\sum_{\omega_n}\int_{\boldsymbol{p}} \partial_t R_k(\boldsymbol{p})\, G_{LL/TT,k}(p;\rho). \tag{42}$$

在 ρ 和 t的每一步中，计算 $f_{k,\ LL}$ 和 $f_{k,\ TT}$ 都需要对动量 $\boldsymbol{p}$ 积分，并对松原频率 ω_n求和。前者通过高斯-勒让德求积进行数值计算，后者则进行解析计算。

然而，传播子的结构与 $O(N)$模型的结构不同。与 $O(N)$模型一样，将横向顶角和纵向顶角记为

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}_{k,T}(\boldsymbol{p};\rho) &= Z_{x,k}(\rho)\boldsymbol{p}^2 + V_k(\rho),\\
\Gamma^{(2)}_{k,L}(\boldsymbol{p};\rho) &= \big(Z_{x,k}(\rho) + \rho Y_{x,k}(\rho)\big)\boldsymbol{p}^2 + V_k(\rho) + 2\rho\,\partial_\rho V_k(\rho),
\end{aligned} \tag{43}$$

传播子可写为

$$G_{LL,k}(\boldsymbol{p},\omega_n;\rho) = -\frac{\Gamma^{(2)}_{k,T}(\boldsymbol{p};\rho) + R_k(\boldsymbol{p})}{D_k(\boldsymbol{p},\omega_n;\rho)}, \tag{44}$$

$$G_{TT,k}(\boldsymbol{p},\omega_n;\rho) = -\frac{\Gamma^{(2)}_{k,L}(\boldsymbol{p};\rho) + R_k(\boldsymbol{p})}{D_k(\boldsymbol{p},\omega_n;\rho)}, \tag{45}$$

$$D_k(\boldsymbol{p},\omega_n;\rho) = \big(\Gamma^{(2)}_{k,T} + R_k\big)\big(\Gamma^{(2)}_{k,L} + R_k\big) + Z^2_{\tau 1,k}\,\omega_n^2. \tag{46}$$

在经典 $O(N)$模型中，纵向质量 $V_k + 2\rho\,\partial_\rho V_k$仅出现在纵向传播子中，在流中起扩散项的作用。对于玻色气体，非对角顶角 $\Gamma_{k,\ C} = Z_{\tau 1,\ k}\omega_n$ 耦合非零马茨巴拉模的纵向涨落和横向涨落，因此 $\Gamma^{(2)}_{k\ ,\ L}$ 同时出现在两个传播子中。在$G_{LL,\ k}$中，它仅出现在分母 D_k中；而对于 $\omega_n = 0$， $G_{LL,\ k} = -1/\ (\Gamma^{(2)}_{k\ ,\ L} + R_k)$ 恢复为 $O(N)$模型的纵向传播子。在 $G_{TT,\ k}$中，它同时出现在分母和分子中。对于 $\omega_n = 0$，这两种依赖恰好相互抵消，此时 $G_{TT,\ k} = -1/\ (\Gamma^{(2)}_{k\ ,\ T} + R_k)$ 恢复为经典横向传播子，因此 $G_{TT,\ k}$ 对 $\Gamma^{(2)}_{k\ ,\ L}$ 的依赖完全来自量子扇区。

首先回顾在 LPA 下如何处理经典 $O(N)$ 模型中的凸性恢复。在该模型中，$f_{k,\ TT}(V_k)$ 对应质量为 V_k 的横向戈德斯通模，其流是纯对流的，因为它只取决于 V_k 本身，而不取决于其导数。项 $f_{k,\ LL}(V_k + 2\rho\partial_\rho V_k)$ 对应质量为 $V_k + 2\rho\partial_\rho V_k$ 的单个纵向模，并引入扩散分量。流方程可以改写为包含平流贡献和扩散贡献的守恒律

$$\partial_t V_k + \partial_\rho F = 0, \tag{47}$$

通量为 $F = -((N-1)f_{k,TT} + f_{k,LL})$。对于形式为 $\partial_t u + \partial_\rho F(u) = 0$ 的平流方程，$\partial_u F(u)$ 的符号决定了信息传播的方向，其中该量起特征速度的作用。正的特征速度将信息传输至 ρ 的较大值方向，而负速度则将信息传输至较小值方向。由于 $f_{k,LL}$ 和 $f_{k,TT}$ 为正（注意 $\partial_t R_k > 0$），且二者都是其自变量的减函数，因此 F 是 V_k 的增函数，对应于 t 中的正特征速度。由于流向 $t \to -\infty$，因此在整个场域内，信息沿流动方向从 ρ 的较大值传播至较小值。标准分析表明，必须使用遵循信息流动方向的上风格式对通量的导数进行离散化。因此，式（47）中关于 ρ 的导数必须使用 ρ 的较大值，通过前向算子 d_{u} 进行离散化。纵向质量中的扩散项 $2\rho\partial_\rho V_k$ 要求采用对称离散化，这不同于偏好某一特定方向的平流。因此，对于总通量，需将所使用的前向导数与用于该项的下风（后向）导数 d_{d} 结合起来。

这些离散导数定义如下。我们在由 N_ρ 个点组成的有序网格上离散化场域，

$$\{\rho_i\} = \{\rho_1 = 0,\ \rho_2, \ldots, \rho_{N_\rho} = \rho_{\max}\}. \tag{48}$$

我们记$V_{k,\,i} \equiv V_k(\rho_i)$。对任意离散化函数$a_i$，前向与后向有限差分算子定义为

$$\begin{aligned} (d_{\mathrm{u}}a)_i &= \frac{a_{i+1} - a_i}{\rho_{i+1} - \rho_i}, \\ (d_{\mathrm{d}}a)_i &= \frac{a_i - a_{i-1}}{\rho_i - \rho_{i-1}}. \end{aligned} \tag{49}$$

我们现在可以讨论玻色气体流方程的具体细节。与经典 $O(N)$模型一样，通量为正，并随 ρ增大而减小。因此上述讨论适用。在分母 D_k中，扩散项采用下风算子 d_d进行离散化。相比之下，在$G_{TT,\,k}$的分子中，$\Gamma^{(2)}_{k\,,\,L}$的增大会使通量$f_{k,\,TT}$增大。对于这一没有经典对应物的项，没有类似的论证能先验地确定离散化方向，数值测试表明，需要采用上风格式才能保证积分直至 $k \to 0$区域的稳定性。定义两个离散化纵向质量

$$m^2_{-,i} = V_{k,i} + 2\rho_i (d_d V_k)_i, \tag{50}$$

$$m^2_{+,i} = V_{k,i} + 2\rho_i (d_u V_k)_i, \tag{51}$$

离散化通量写为

$$\begin{aligned} f_{k,LL}\big(m^2_{-,i}\big) &= \frac{1}{2\beta} \sum_{\omega_n} \int_{\boldsymbol{p}} \partial_t R_k(\boldsymbol{p})\, \frac{\Gamma^{(2)}_{k,T,i} + R_k}{D_{k,i}\big(m^2_{-,i}\big)}, \\ f_{k,TT}\big(m^2_{-,i}, m^2_{+,i}\big) &= \frac{1}{2\beta} \sum_{\omega_n} \int_{\boldsymbol{p}} \partial_t R_k(\boldsymbol{p})\, \frac{\Gamma^{(2)}_{k,L,i}\big(m^2_{+,i}\big) + R_k}{D_{k,i}\big(m^2_{-,i}\big)}, \end{aligned} \tag{52}$$

with

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}_{k,T,i} &= \boldsymbol{p}^2 Z_{x,k,i} + V_{k,i}, \\ \Gamma^{(2)}_{k,L,i}\big(m^2\big) &= \boldsymbol{p}^2 \big(Z_{x,k,i} + \rho_i Y_{x,k,i}\big) + m^2, \\ D_{k,i}\big(m^2\big) &= \big(\Gamma^{(2)}_{k,T,i} + R_k\big)\big(\Gamma^{(2)}_{k,L,i}(m^2) + R_k\big) + Z^2_{\tau 1,k}\, \omega_n^2. \end{aligned} \tag{53}$$

于是离散化流写为

$$\partial_t V_{k,i} = \Big(d_{\mathrm{u}}\big[f_{k,LL}\big(m^2_-\big) + f_{k,TT}\big(m^2_-, m^2_+\big)\big]\Big)_i, \tag{54}$$

边界条件为$(\rho\, d_d a)_1 = 0$ 与$(d_u a)^{N_\rho} = (d_d a)^{N_{\rho_0}}$。

对 $Z_{x,k}$ 和 $Y_{x,k}$ 的流进行积分时，不会遇到与势的凸性恢复相关的刚性问题。采用两点中心格式即可；我们在传播子的分母中使用 m^2_-，在分子中使用 m^2_+。注意，$V''_k = \partial^3_\rho U_k$ 也出现在 $Y_{x,k}$ 的流中，因此同样采用中心格式离散化。ρ 上的网格是均匀的，并在整个流过程中保持固定，其中 $\rho_{\max} = 2\rho_{0,\Lambda}$，$\rho_{0,\Lambda} = \mu/g_0$ 是正化学势时 U_Λ 的最小值，见式（40）（对于较小或负的 μ，则对 $\rho_{\max}$ 施加下限）。例如，对于 $mg_0 = 0.15$，我们通常使用 $N_\rho = 65$ 个网格点。

采用 Wetterich 调节器对流方程进行积分，

$$R_k(\boldsymbol{p}) = Z_{x,k}\, \boldsymbol{p}^2\, r\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{k^2}\right), \qquad r(y) = \frac{\alpha}{e^y - 1}, \tag{55}$$

其中 $Z_{x,\,k} \equiv Z_{x\text{和}k}$（$\rho = 0$）是场重整化，见式（31），并且 α 被设为 $\alpha = 2.1$，在该取值下，经过较长重整化群时间后的流在数值上最为稳定。我们通过在该值附近改变 α 进行了检验，发现这一选择不会影响热力学性质。采用这一选择得到的热力学结果的可靠性，也通过第IV节中的比较得到了事后支持。在局域势近似（导数展开一阶）中考虑的两个调节器给出了相似的状态方程，而将近似扩展到局部势近似′×导数展开$_2$ 只会产生很小的修正。

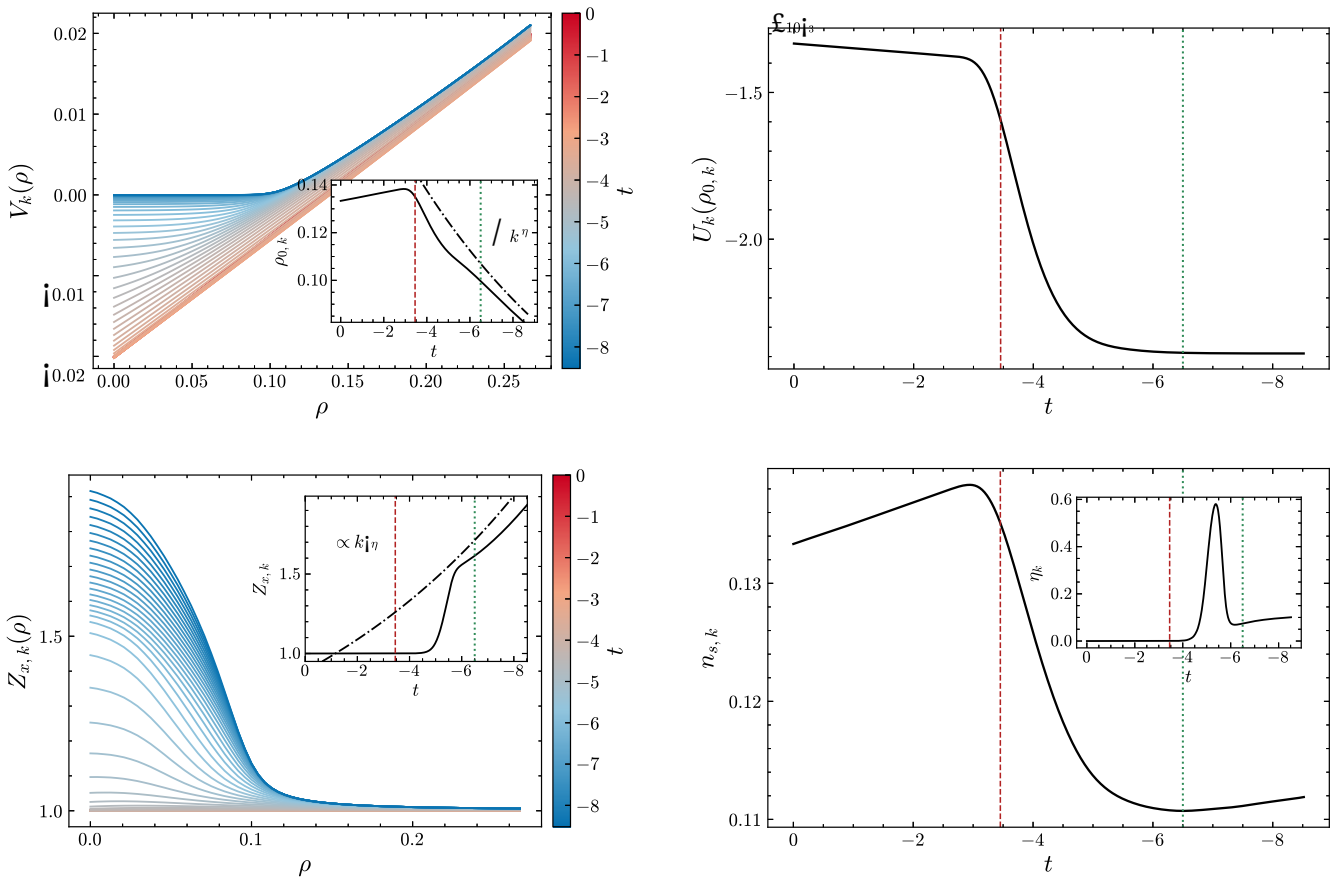


图1. 弱耦合条件下，低温区间内稀薄二维玻色气体的流的数值积分， $mg_0 = 0.15$，其中 $\mu/T = 0.2$。左上： $V_k(\rho)$在$\rho < \rho_{0,\,k}$ 随 $|t|$ 增加而形成平台，表明凸性恢复。颜色表示 t的取值。插图显示流动极小值$\rho_{0,\,k}$，其渐近地遵循幂律 $\propto k^{\eta}$。右上： $U_k(\rho_{0,\,k})$在尺度 k_{conv}处达到其物理值，该尺度由绿色点线标出。左下：$Z_{x,\,k}(\rho)$作为 ρ的函数，其中 t采用相同的颜色尺度。插图显示场重整化因子$Z_{x,\,k}$ 作为 t的函数。右下：流动超流密度$n_{s,\,k}$ 以及插图中的流动反常维数$\eta_{x,\,k}$，二者均为t的函数。在全部四个面板中，红色虚线标记尺度 $k_{\mathrm{dB}} \propto \sqrt{T}$，将量子区与有效经典区间分隔开来。_

图1展示了给定微观参数组（μ、 T、 mg_0、 Λ）下的数值积分。除非另有说明，我们固定 $T/\Lambda^2/2m = 10^{-3}$ ，并改变 μ。当 $k \to 0$时， V_k 的流恢复凸性。流动极小值由 V_k（ρ_0、$_k$） $= 0$确定，据此我们得到流动压强 $-U_k$（ρ_0、$_k$）。后者在有限尺度 k_{conv}处已经收敛；低于该尺度后， U_k（ρ_0、$_k$）不再演化，因此可以明确提取压强 $P = -U_{k\lesssim k_{\mathrm{conv}}}$（$\rho_0$、$k\lesssim k_{\mathrm{conv}}$），而无需将流继续推进至 $k = 0$。第二个特征尺度，即热德布罗意波长的倒数 $k_{\mathrm{dB}} \propto \sqrt{T}$，标志着从量子区向经典区的交叉；后者主导热力学性质，在该区域中，非零松原频率模已被积分掉 [57]。低于 k_{dB}时，$Z_{\tau 1}$、$_k$ 的流与其他系数的流发生解耦，系统表现为有效的经典 O（2）模型 [37]。

F. 从 FRG 中提取普适标度函数

普适标度函数可以通过求解 FRG 流动方程获得，初始条件为方程（40），并选取温度和化学势。紫外截断的选取满足 T， $\mu \ll \Lambda^2$（另见下文）。

压强直接由此得出　　y 由 U_k 的流经 $P = -\lim_{k\to 0} U_k(\rho_{0,\,k})$ 得出。相空间压强和

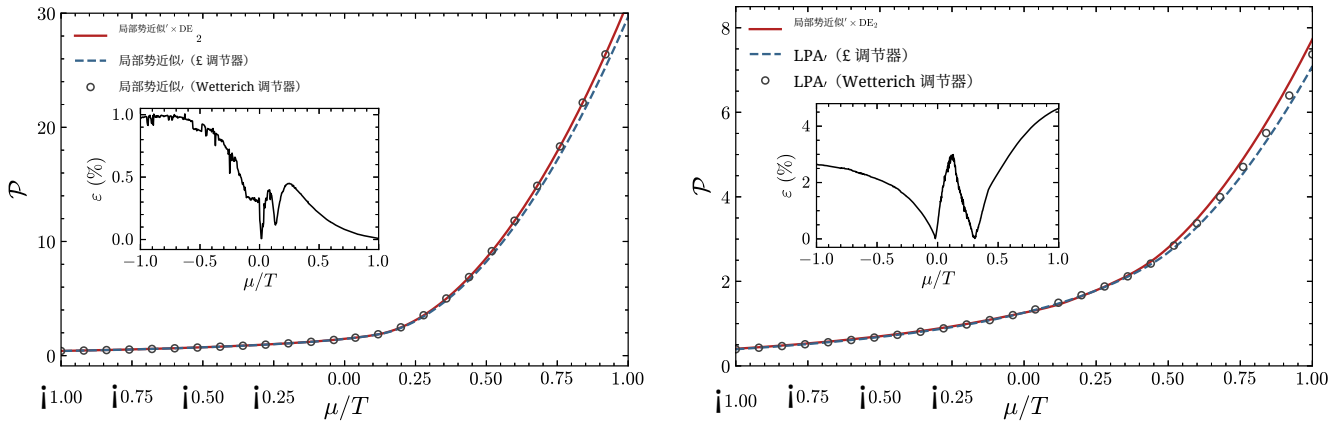


图 2. 相空间压强 $\mathcal{P}$ 随 μ/T 的变化，分别对应 $mg_0 = 0.11$ （左）和 $mg_0 = 0.64$ （右）；比较 LPA′×DE_2 （红色实线）、采用 Θ 调节器的 LPA′（蓝色虚线），以及采用 Wetterich 指数调节器的 LPA′ （空心圆）。插图显示了 LPA′×DE_2 与采用 Wetterich 调节器的 LPA′ 之间的相对差异 ε。

密度则由此得到

$$\mathcal{P}\Big(\frac{\mu}{T}, \tilde{g}(T)\Big) = -\frac{\lambda_{\mathrm{dB}}^2}{T} \lim_{k\to 0} U_k(\rho_{0,k}), \tag{56}$$

$$\mathcal{D}\Big(\frac{\mu}{T}, \tilde{g}(T)\Big) = -\lambda_{\mathrm{dB}}^2 \partial_\mu \lim_{k\to 0} U_k(\rho_{0,k}). \tag{57}$$

连续的 压强对 μ 和 T 的连续导数给出所有热力学量 .

超流密度衡量系统抵抗相位扭曲的刚度 [58]。它由超流体序参量相位 θ 的低动量有效作用量中梯度项 $n_{s的k}(\nabla\theta)^2$ 系数给出。它可以直接从二点顶角 [38, 51, 59],的横向分量读取。

$$\Gamma_{A,k}(\boldsymbol{q}, \omega_n = 0; \rho_{0,k}) = \frac{n_{s,k}}{\rho_{0,k}} \boldsymbol{q}^2 \qquad (\boldsymbol{q} \to 0). \tag{58}$$

因此，物理超流密度为 $n_s = \lim_{k\to 0} n_{s,\,k}$，由此可得超流相空间密度，

$$\mathcal{D}_s\Big(\frac{\mu}{T}, \tilde{g}(T)\Big) = \lambda_{\mathrm{dB}}^2 \lim_{k\to 0} Z_{x,k}(\rho_{0,k})\, \rho_{0,k}. \tag{59}$$

反常维数通过以下量的流得到：$Z_{x,\,k}(\rho)$，其通过场重整化因子$Z_{x,\,k} = Z_{x,\,k}(0)$。方程(31)表明$Z_{x,\,k} \propto k^{-\eta}$。在低温相中，该流也展现出BKT机制的特征 [5, 51, 60, 61], 详细讨论见第VI 节。由于不存在真正的长程有序和自发对称性破缺，因此$\lim_{k\to 0} \rho_{0,\,k} = 0$；而运行的超流密度$n_{s,\,k}$ 和反常维数η_k 在有限 k时仍保持有限。

IV. 近似方案对热力学的稳健性

导数展开和场展开的收敛性已针对 $O(N)$模型进行了详细研究，尤其见参考文献 [62–64]。本文通过比较在LPA′×DE_2 和LPA′下得到的结果，评估热力学对近似方案的敏感性。后者曾用于 [5] 计算二维玻色气体的普适热力学，并对有效势进行额外的场展开，

$$U_k(\rho) = U_{0,k} + \delta_k(\rho - \rho_{0,k}) + \frac{\lambda_k}{2}(\rho - \rho_{0,k})^2, \tag{60}$$

其中 $\delta_k = 0$ 当 $\rho_{0,\,k} > 0$，并且一个 Θ-调节器 $R_k(\mathbf{p}) = Z_{x,\,k}(k^2 - \mathbf{p}^2)\Theta(k^2 - \mathbf{p}^2)$， Θ 即 Heaviside函数。该 LPA′ 近似设定 $Y_{x,\,k} = 0$ 并将 $Z_{x,\,k}$ 视为与场无关，在 $\rho_{0,\,k}$处求值。

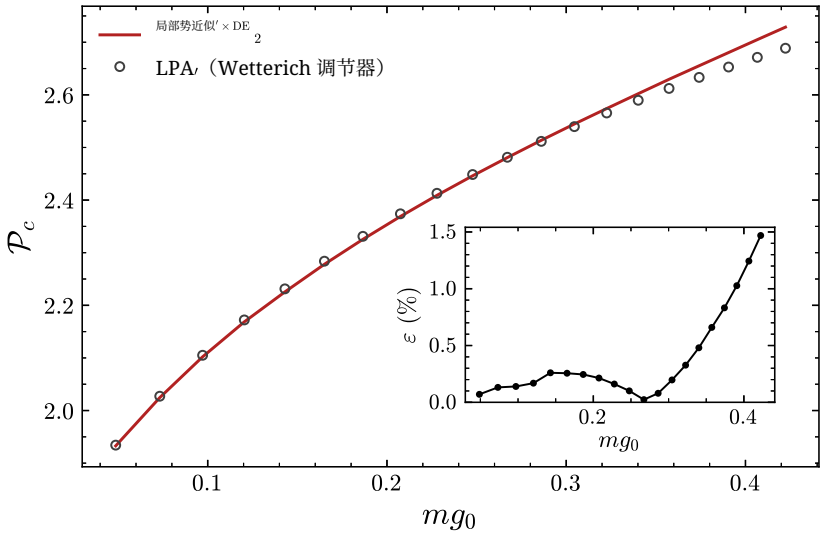


图 3. BKT 转变处的相空间临界压强 $\mathcal{P}_c = \mathcal{P}(\mu_c/T)$ 随 mg_0 的变化，对比 LPA′×DE_2 （红色实线）与采用 Wetterich 指数调节器的 LPA′ （空心圆）。插图显示了两种近似之间的相对差异 ε 。

图 2 展示了弱耦合（ P（μ/T， mg_0）下的压强 $mg_0 = 0.11$，左图）和强耦合（$mg_0 = 0.64$，右图）下的这一比较。我们还展示了使用 Wetterich 调节器方程（55）并取 $\alpha = 2.1$时的 LPA′ 结果。在这两个区域内，对于所考虑的 μ/T 的整个范围，结果都吻合良好。插图显示，相对差异 ε 始终小于 5%，包括 BKT 转变附近（$\mu/T \gtrsim 0$）。两种调节器在 LPA’ 下高度一致，加上 LPA′×导数展开$_2$, 引入的修正很小，这支持了在此考察的调节器和近似选择下压强结果的稳健性。

由于两种近似在 μ/T的整个范围内都十分吻合，我们将比较扩展到相图中的一个特定点：BKT 临界点 μ_c/T。我们针对不同的相互作用强度计算 LPA′ 和 LPA′×DE_2 状态方程；关于 μ_c 的提取将在第VI节图 3展示了临界压强 $\mathcal{P}_c$随 mg_0的变化。整个相互作用范围内的吻合度都非常出色，即使在强耦合下，修正也仅为百分比量级。

我们还在 LPA′ 框架内检验了二阶时间导数项$Z_{\tau,\,k}|\partial_\tau\phi|^2$式（28），该项在我们的试探形式中被省略，对热力学的影响可以忽略不计。图4 比较了包含和不包含该项时得到的相空间压强。在 BKT 转变的两侧，相对差异均不超过 0.1%，并且在$\mu \leq 0$处恰好为零。

这些结果表明，状态方程对近似方案非常不敏感，即使在强耦合下也是如此。特别是，场展开的 LPA′ 已经能够定量准确地描述压强，而额外的场依赖性和空间导数项只会带来微小修正。这表明，采用相对简单的 FRG 近似就能很好地刻画热力学。

超流密度和 BKT 转变的情况则有所不同。在 LPA′中，超流密度的 β 函数 $k\partial_k n_{s,\,k}$在低温相中始终较小，却从未变为零。流沿着一条准固定点线演化，却无法到达真正的固定点；超流密度最终会在有限尺度处变为零。实际上，流必须在任意选定的尺度 $k_{\min}$处停止，因此超流密度会依赖于这一选择。在强耦合下 [5]，这一局限更加明显。

图5 比较了在 $mg_0 = 0.15$处得到的超流密度。LPA′×导数展开$_2$ 在μ_c/T处呈现预期的跃变，而 LPA′ 得到的超流密度是连续的，无法令人满意地描述 BKT 转变。因此，尽管在 LPA′ 层次上，状态方程已经得到了很好的描述，但超流密度对近似的敏感程度要高得多。LPA′×导数展开$_2$ 显著改善了对 BKT 转变的描述，详见第VI节。

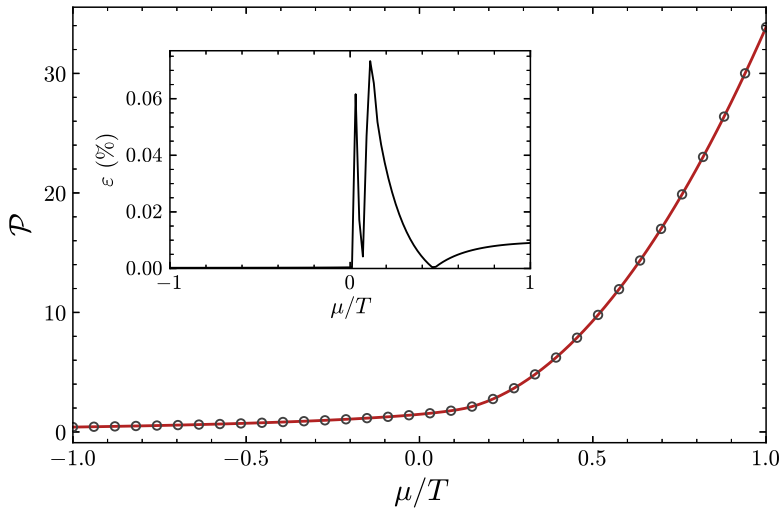
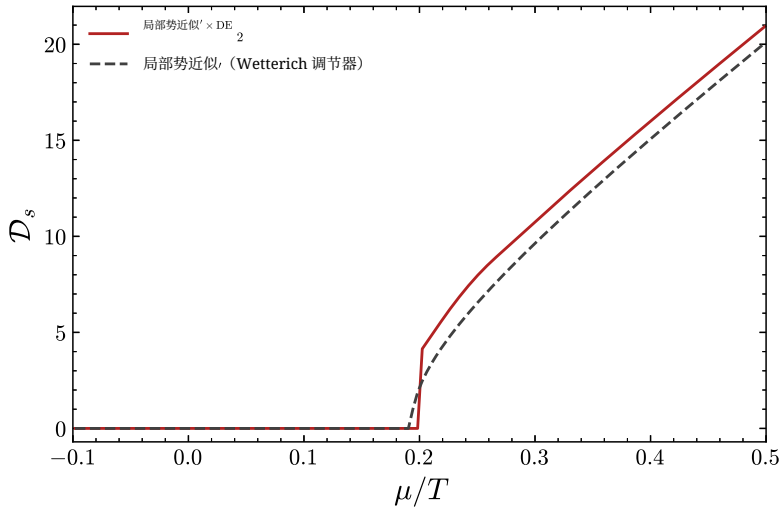


图 4. 相空间压强 $\mathcal{P}$ 随 μ/T 在 $mg_0 = 0.1$处的函数关系，采用局部势近似′（Wetterich 调节器），分别包含（圆圈）和不包含（红色实线）项 $Z_{\tau,\,k}|\partial_\tau\phi|^2$ 见方程（28）。插图显示相对差值 ε，其不超过 0。1 %。



超流相空间密度 $\mathcal{D}_s$ 随 μ/T 在 $mg_0 = 0.15$处的函数关系，采用局部势近似′×导数展开$_2$（实线）和场展开的局部势近似′（虚线）得到。流在 $t_{\min} = \ln(k_{\min}/\Lambda) = -12$处停止，对应于 $k_{\min} \simeq 6 \times 10^{-5}$（当 $\Lambda = 10$时）。局部势近似′×导数展开$_2$ 在 BKT 转变处给出普适跃变 $\mathcal{D}_s \simeq 4$，而局部势近似′ 则给出超流密度连续趋于零的结果。

V. 普适状态方程

现在我们计算稀薄二维玻色气体的普适状态方程。在无量纲耦合 $\tilde{g}(T$固定时，我们针对 μ/T的不同取值求解流方程，以重构 $\mathcal{D}(\mu/T,\ \tilde{g}(T)$。这里得到的一个典型结果对应于 $mg_0 = 0.1$，如图6所示。

对于 $\mu/T \ll -1$，系统处于经典正常流体区间：热涨落占主导，适用玻尔兹曼统计。相空间密度为

$$\mathcal{D}\left(\frac{\mu}{T}\right) = e^{\mu/T}, \tag{61}$$

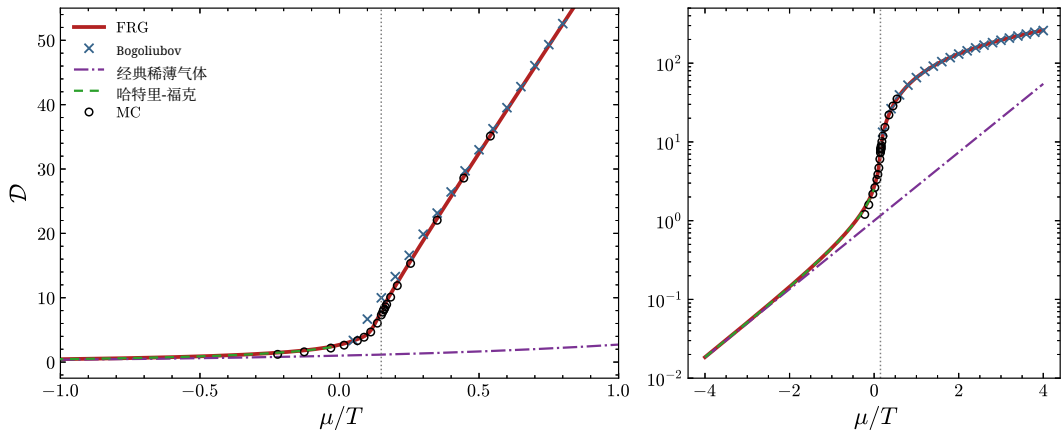


图6. 相空间密度 $\mathcal{D}$ 随 μ/T 在 $mg_0 = 0.1$处的变化，由 FRG（红线）计算得出，并与蒙特卡罗数据（空心圆）、Bogoliubov 理论（叉号）、自洽 Hartree–Fock理论（虚线）以及稀薄经典气体（点划线）进行比较。竖线标示 BKT 转变。

对应于

$$\mathcal{F}(x, y) = e^x, \qquad x \ll -1, \tag{62}$$

与相互作用无关 $y = \tilde{g}(T)$。更好的近似由 Hartree-Fock近似给出 [3]，其中气体被视为理想气体，其化学势因平均相互作用而发生偏移， $\mu_{\text{eff}} = \mu - 2g_0 n$。由此得到隐式方程

$$\mathcal{D}\left(\frac{\mu}{T}\right) = -\ln\left(1 - \exp\left(\frac{\mu}{T} - \frac{\tilde{g}}{\pi}\mathcal{D}\right)\right). \tag{63}$$

在相反的极限下， $\mu/T \gg 1$ ，气体处于量子简并状态，热激发变得可以忽略。在弱耦合下，Bogoliubov 理论能够很好地描述该气体，其密度为 [33, 65]

$$\mathcal{D}\left(\frac{\mu}{T}, \tilde{g}(\mu)\right) = \frac{\mu}{T}\left(\frac{2\pi}{\tilde{g}(\mu)} + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right), \qquad \frac{\mu}{T} \gg 1, \tag{64}$$

其中，耦合取自主导能标；此处该能标由化学势确定。

如图所示，函数重整化群（FRG）以极高的精度再现了两个渐近极限。6它还给出了完整的普适状态方程，包括 BKT 转变附近（$\mu/T \sim \mu_c/T$），此处涨落最强，标准微扰方法已不足以胜任。在此区域，可通过对有效经典场论进行蒙特卡罗模拟来描述热力学性质 [20, 21], ，我们的结果与蒙特卡罗数据非常吻合。关于二者的详细比较见第VII节。

因此，结合导数展开的函数重整化群（FRG）能够在单一近似下描述稀薄二维玻色气体的不同区域，从正常相经 BKT 转变直至超流相。它既不要求相互作用参数很小，也不需要在不同区域之间更换近似。相比之下，传统方法仅适用于弱耦合情形或相图中的特定区域。

我们还可以检验状态方程的近似尺度不变性 [14, 15, 19, 21, 66]。在弱耦合极限 $mg_0 \ll 1$下，尺度不变性成立，此时 $\tilde{g}(T) \simeq \tilde{g} = mg_0$，但指数小温度下除外，见式 (6)。在更强耦合下， $\tilde{g}(T)$ 对温度的依赖会通过普适组合 $ma_2^2 T$ 变得显著。对于固定的 mg_0，根据式 (6) 以及 a_2 对截断的依赖性，这将转化为对 T/Λ^2 的依赖。因此，尺度不变性遭到破坏。我们可以通过计算不同参数组 [5]对应的状态方程来检验这一点。将 (T, Λ) 替换为 $(T/10, \Lambda/\sqrt{10})$，会使 T/Λ^2保持不变，因此 $\tilde{g}(T)$ 也保持不变。这两组参数对于标度函数而言严格等价。相比之下，$(T/10, \Lambda)$ 会改变 T/Λ^2，且只有在弱耦合下才与 (T, Λ) 等价。

图7显示，对于 $mg_0 \lesssim 0.11$，尺度不变性在极佳近似下成立；在固定 g_0 时， $\tilde{g}$ 的温度依赖性可以忽略。三条曲线重合，在固定 $y = \tilde{g}$ 时给出相同的 $\mathcal{F}(x, y)$。同时对 $\mu \to \lambda\mu, T \to \lambda T$ 进行重新缩放不会改变 $x = \mu/T$，因此只要 $\tilde{g}(T) \simeq \tilde{g}(\lambda T)$，就不会改变 $\mathcal{F}(x, y)$。在更强耦合下，甚至在 $mg_0 = 0.64$ 时， $\tilde{g}$的温度依赖性就会破坏这种尺度

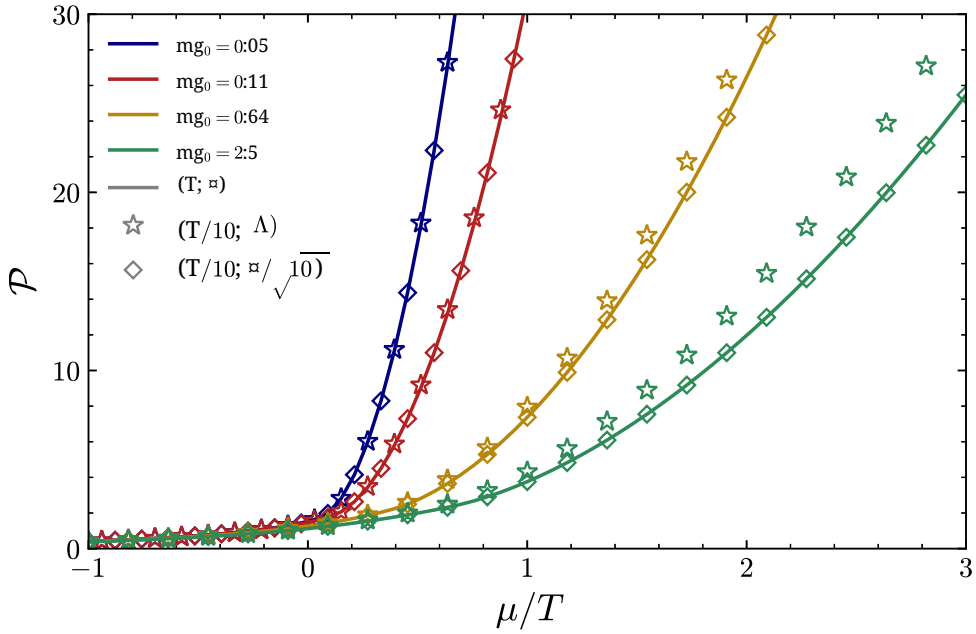


图7. 相空间压强 $\mathcal{P}$随 μ/T变化的曲线，展示了若干耦合常数 mg_0（颜色）以及三组决定 $\tilde{g}$ 的参数（T, Λ）：实线，（T, Λ）；星号，（$T/10$, Λ）；菱形，（$T/10$, $\Lambda/\sqrt{10}$）。

不变性。此时至少必须同时改变两个参数，才能使 $\tilde{g}$ 保持不变，这里指 T 和 Λ。因此，(T, Λ) 和 $(T/10, \Lambda/\sqrt{10})$ 给出相同的 $\mathcal{F}(x, y)$，而 $(T/10, \Lambda)$ 则不会。

接下来，我们通过提取临界温度和相变处的超流密度，来刻画 BKT 转变本身。

VI. BKT 转变与超流密度

将函数重整化群应用于经典线性 $O(2)$ 模型，已证明能够捕捉 BKT 转变的大部分特征 [51, 60, 61]。在这一框架中，涡旋并未被显式引入。在局部势近似′下，只能找到一条准固定点线，沿着这条线，重整化群流非常缓慢。系统始终流向无序相，尽管在低温下关联长度呈指数级增大。不过，仍可从这些流中相当可靠地提取临界温度，例如参见 [5, 67]。局部势近似′的失效被认为源于对序参量纵向涨落的处理不当 [68]。

在导数展开$_2$，中，确实存在相变，且大多数普适特征都得到了恰当再现 [51]。在高温无序相中，流动超流密度$n_{s、k}$ 和反常维数 η_k 在有限尺度 $k \sim \xi^{-1}$处消失。有效势的极小值也在该尺度处消失，其中$\rho_{0、k}$ $= 0$ 对于 $k \lesssim \xi^{-1}$。由流提取的关联长度 $\xi = \lim_{k\to 0}[Z_{x,k}(0)/U'_k(0)]^{1/2}$再现了 BKT 理论的典型本性奇点 [8, 51, 61]。在低温超流相中，无量纲极小值$\tilde{\rho}_{0、k}$ $= Z_{x、k}\rho_{0、k}$ 的流在$\tilde{\rho}_{0、k}$ $\geq \tilde{\rho}_{0、\star}$处呈现准固定点，其定义为 β 函数 $\beta(\tilde{\rho}_{0,k}) = \partial_t \tilde{\rho}_{0,k} \simeq 0$近乎为零。这里，$\tilde{\rho}_{0、\star}$ 是无量纲极小值的临界值：低于该值时，$\tilde{\rho}_{0、k}$ 在有限的 k 处消失（无序相）；高于该值时，流形成准平台，并在 $k \to 0$ 趋于无穷时逼近一个有限值（超流相）。通过优化非物理调节参数 α，可以使准固定点成为严格固定点。这会产生一条适用于 $T < T_{\mathrm{BKT}}$的固定点线，与 BKT 情景 [51]一致。因此，$n_{s、k}$ 和 η_k 在 $k \to 0$趋于无穷时逼近有限平台，而$\rho_{0、k}$ 则随 k^{η}趋于无穷而消失，见图 1。这种行为与 BKT 相的准长程有序和无限关联长度相符。

两个相由发生相变的位置分隔开来：T_{BKT}。根据$n_{s、k}$ 和 η_k的极限行为，可以直接确定相变位置，进而得到普适值 $\eta(T_{\mathrm{BKT}}) = 1/4$ 和 $\mathcal{D}_s(T_{\mathrm{BKT}}) = 4$ [8, 11]。这些关于经典 $O(2)$ 模型的结果，可作为稀薄二维玻色气体的参照。我们预期在有效经典区间 $k \lesssim k_{\mathrm{dB}}$中也会出现相同的行为，此时气体可化为经典 $O(2)$ 模型。

在有效经典区间中　　此时，BKT 转变完全由重整化群流的结构决定　　.

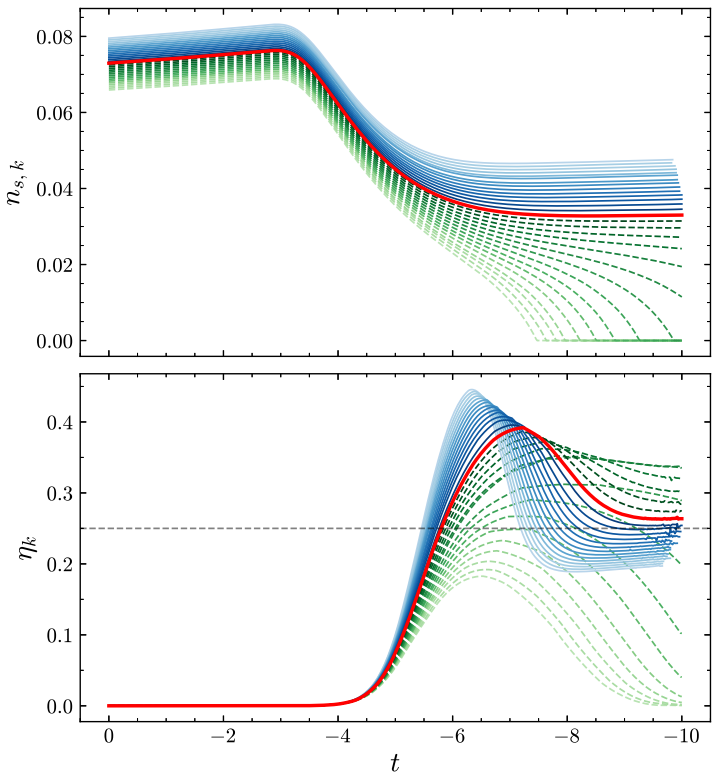


图 8. 对于若干个接近 μ_c 的初始化学势 μ，流动超流密度 $n_{s,\,k}$（上图）和反常维数 η_k（下图）随重整化群时间 t 的变化，参数为 $mg_0 = 0.11$。绿色虚线对应 $\mu < \mu_c$（正常相），蓝色实线对应 $\mu > \mu_c$（准长程序相）。颜色越深，表示轨迹越接近 BKT 点。临界轨迹 $\mu = \mu_c$ 以红色显示，并形成一个准平台。下图中，水平虚线标出了 BKT 普适值 $\eta = 1/4$。

由 μ/T 在固定的 $\tilde{g}$处设定的初始条件，决定了轨迹是趋近于有效经典 $O(2)$ 模型的不动点线，还是远离它并流向有质量区。图8 展示了转变附近若干个 μ/T 取值下 η_k 和n_s的k 流。

对于 $\mu/T < \mu_c/T$，流动离开不动点线并进入有质量区，在此区域中$n_{s,\,k}$ 和 η_k 会在有限尺度 $k \sim \xi^{-1}$处消失。有效势极小值也在同一尺度处消失，$\rho_{0,\,k} = 0$ 对于 $k \lesssim \xi^{-1}$，这表征了正常相。相反，对于 $\mu/T > \mu_c/T$，流动趋近不动点线，且 $n_{s,\,k}$ 和 η_k 在 $k \to 0$时保持有限，并形成准平台。极小值$\rho_{0,\,k}$ 随后仅在渐近极限下才消失，并遵循幂律$\rho_{0,\,k} \propto k^{\eta}$ 这是超流相的特征，如图1所示。

临界轨迹 $\mu/T = \mu_c/T$ 是这两种行为之间的分界轨迹。沿着这条轨迹，η_k 和$n_{s,\,k}$ 趋于平台，其极限值决定了临界比值 μ_c/T、普适跃变 $\mathcal{D}_s(T_{\mathrm{BKT}})$ 以及反常维数 $\eta(T_{\mathrm{BKT}})$。对于 $mg_0 = 0.11$，我们得到

$$\begin{aligned} \mu_c/T &= 0.161 \pm 0.006, \\ \mathcal{D}_s(\mu_c^+/T) &= 4.15 \pm 0.17, \\ \eta(\mu_c^+/T) &= 0.26 \pm 0.02, \end{aligned} \tag{65}$$

与预期的普适值 $\mathcal{D}_s(\mu_c^+/T) = 4$ 和 $\eta(\mu_c^+/T) = 1/4$吻合良好。误差条根据对积分方案的敏感性以及渐近平台提取结果的敏感性，通过数值方法估算为 $k \to 0$。

如图9所示，总密度 $\mathcal{D}$ 在整个 BKT 转变过程中保持平滑，而 $\mathcal{D}_s$ 则呈现出预期的不连续跃变。在零温极限下，$\mathcal{D}_s \to \mathcal{D}$：气体完全处于超流态。与伽利略不变性相关的 Ward 恒等式要求$Z_{x,\,k=0}(\rho_{0,\,k=0}) = n/\rho_{0,\,k=0}$ 在 $T = 0$处成立，因此 $n_s = n = -\lim_{k\to 0} \partial_\mu U_k(\rho_{0,\,k})$ [38, 69, 70]。

改变相互作用 g_0后，我们也验证了普适跃变 $\mathcal{D}_s(T_{\mathrm{BKT}})$ 与 mg_0无关，尽管超流性本身需要相互作用。图 10 显示，函数重整化群能够在 $\mathcal{D}_s(T_{\mathrm{BKT}}) = 4$ 范围内以不超过 5 % 的误差再现

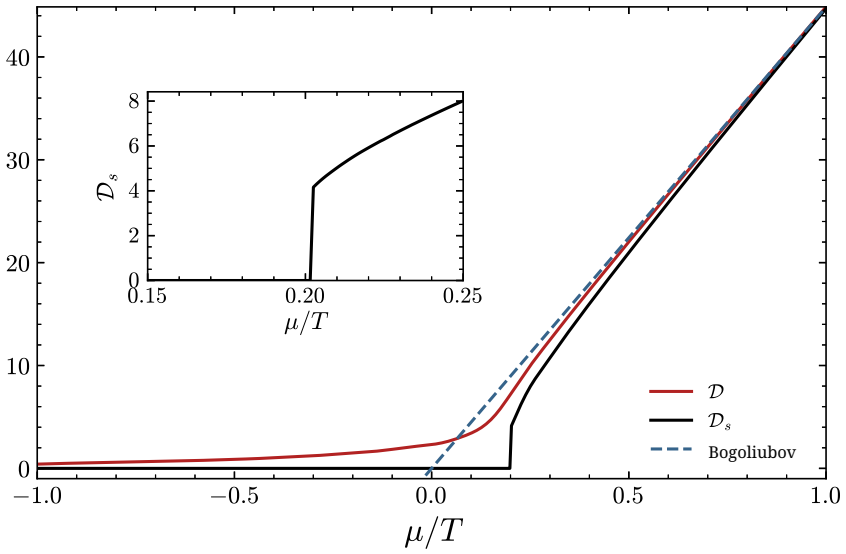


图9. 总相空间密度 $\mathcal{D}$ 和超流相空间密度 $\mathcal{D}_s$ 随 μ/T 的变化，取值为 $mg_0 = 0.15$。在正常相中，低于 $\mu_c/T \approx 0.202$时超流密度为零。在 BKT 转变处， $\mathcal{D}_s$ 出现高度为 4.1 的普适不连续跃变，接近 4 的 BKT 普适值，而 $\mathcal{D}$ 始终保持平滑。插图展示了相变处的超流密度跃变。同时还展示了简并区中的 Bogoliubov 相空间密度。

所研究的整个耦合范围内，甚至超出弱相互作用区间。

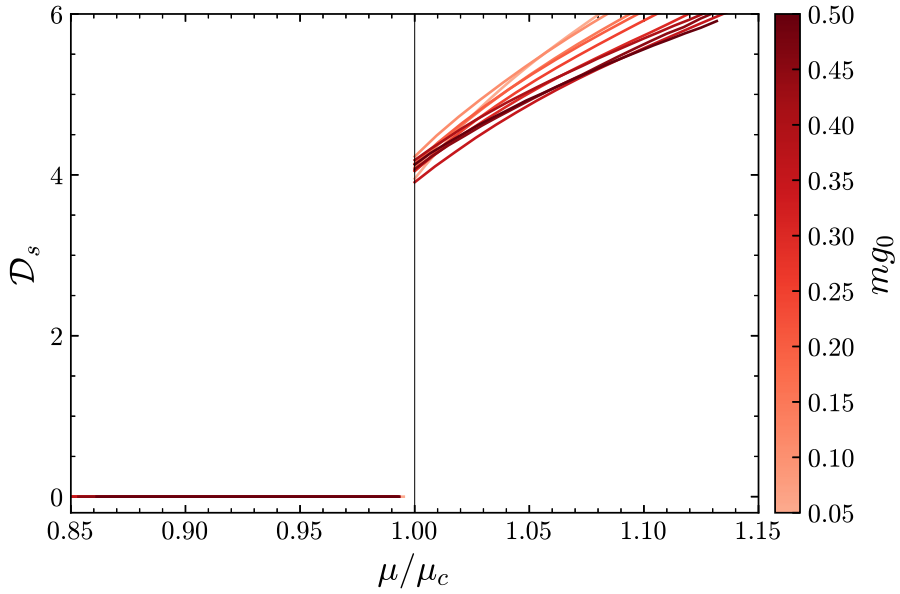


图10. 超流相空间密度 $\mathcal{D}_s$ 随 μ/μ_c 的变化，针对多个耦合常数 mg_0，以颜色尺度表示。在正常相 $\mu/\mu_c < 1$中该密度为零；在 BKT 转变 $\mu/\mu_c = 1$处，无论 mg_0如何，都会出现接近 4 的普适不连续跃变。

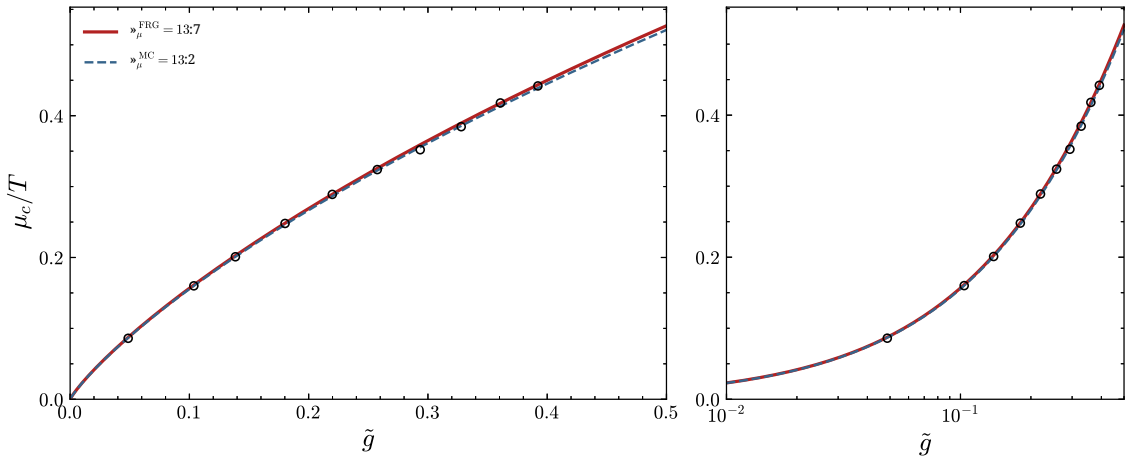


图11. 临界化学势 μ_c/T 随无量纲耦合 $\tilde{g}$的变化，分别以线性尺度（左）和对数尺度（右）表示。空心圆表示从结合局部势近似的 FRG 流中提取的数值′×导数展开₂。红色实线是对这些点拟合普适形式（66）所得的曲线，结果为 $\xi_\mu^{\mathrm{FRG}} = 13.7$，并与对应于蒙特卡罗数值的蓝色虚线 $\xi_\mu^{\mathrm{MC}} = 13.2$ [20]进行比较。

VII. 与经典场模拟的比较

现在，我们将结果与文献 [20, 21] 中的经典场蒙特卡罗计算进行比较。对于 $\tilde{g} \equiv \tilde{g}\ (T) \ll 1$ 和$|\mu| \ll T$，相互作用尺度 $k_c \sim \sqrt{mT\tilde{g}}$远小于热尺度 $k_T \sim \sqrt{mT}$。因此，强涨落模是经典的，可由有效经典场 $|\psi|^4$ 理论描述：可以将量子模（具有有限松原频率）以及尺度小于德布罗意热波长 [1, 2, 20, 71]的经典模积分掉。尽管耦合较弱，这种经典场论在大尺度上仍有强烈涨落，无法用微扰方法研究。文献 [20, 21] 通过对有效经典场论进行经典蒙特卡罗模拟，解决了这一问题。

然而，仍需在某个中间尺度上匹配两种理论，将经典可观测量与量子可观测量联系起来。需要注意的是，整个过程仅在弱耦合下有效；当相互作用已达到 $mg_0 \simeq 0.2$ 量级时，若远离涨落区，该过程就会给出非物理结果（例如，超流密度大于密度）。在 FRG 框架中，这一过程会沿着重整化群流自动完成，因为有限 Matsubara 模的影响已被纳入长距离物理中。此外，对于$k \lesssim \sqrt{mT}$，这些模会从流中解耦，使我们得到一个有效经典场论。此处的优势在于，该过程不依赖弱耦合。

文献 [20, 21] 已表明，临界化学势 μ_c 和临界密度 $n_c = n(\mu_c,\ T)$ 具有如下普适形式

$$\frac{\mu_c}{T} = \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln\left(\frac{\xi_\mu}{\tilde{g}}\right) \tag{66}$$

$$\lambda_{\mathrm{dB}}^2 n_c = \ln\left(\frac{\xi_n}{\tilde{g}}\right) \tag{67}$$

其中 $\xi_\mu = 13.2 \pm 0.4$ 和 $\xi_n = 380 \pm 3$ 刻画了临界区的非微扰物理。这些关系呈对数形式，源于高动量模的高斯行为。只有普适常数ξ_μ 和 ξ_n 需要通过非微扰方法确定。因此，方程（66）和（67）是 $\tilde{g}$的普适函数。随后，独立的量子蒙特卡罗计算也证实了这些形式 [72, 73]。

在函数重整化群中，我们根据超流密度的跃变提取 μ_c/T，并根据密度提取 n_c，然后拟合普适常数 ξ_μ 和 ξ_n。结果如图 11 和12所示。

关于 μ_c/T，函数重整化群与经典场模拟之间的吻合非常出色。对函数重整化群数据的拟合得到

$$\xi_\mu^{\mathrm{FRG}} = 13.7 \pm 1.4, \tag{68}$$

该值在误差条范围内与 $\xi_\mu^{\mathrm{MC}} = 13.2 \pm 0.4$一致。这与采用场展开的局部势近似′ 计算得到的估值形成对比，该计算给出 $\xi_\mu^{\mathrm{LPA}'} \simeq 9.5$。对 $\tilde{g}$ 的对数依赖一直持续到

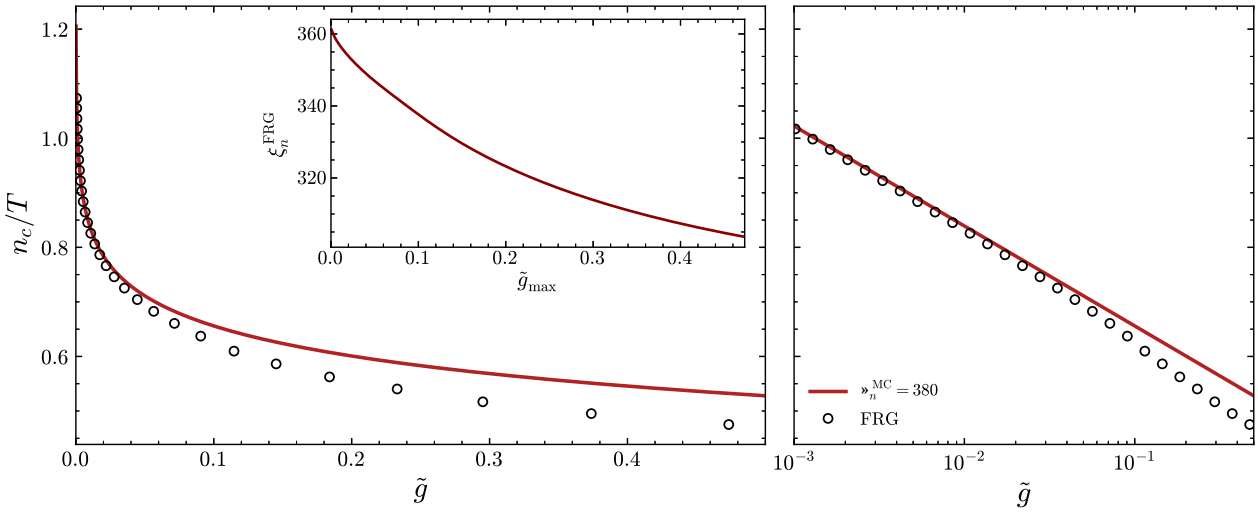


图12. 临界密度 n_c/T 随无量纲耦合 $\tilde{g}$ 变化的关系，分别以线性坐标（左）和半对数坐标（右）表示，适用于弱相互作用区间。数据点由局部势近似′×导数展开$_2$ 阶的函数重整化群计算得到，红线对应普适定律，见式（67），其中 $\xi_n^{\rm MC} = 380$。插图展示了在区间 $\xi_n^{\rm FRG}$内拟合普适定律得到的常数 $\tilde{g} \le \tilde{g}_{\rm max}$随 $\tilde{g}_{\rm max}$的变化。

	ξ_n	ξ_μ
MC	380 ± 3	13.2 ± 0.4
CL	260 ± 12	12.3 ± 0.1
局部势近似′×导数展开$_2$	361.9 ± 0.9	13.7 ± 1.4

表I. 普适常数 ξ_n 和 ξ_μ 通过经典场蒙特卡罗模拟（MC）得到 [20]，复朗之万模拟（临界线） [75]，和函数重整化群在局部势近似′×导数展开$_2$ 阶下的函数重整化群。

$\tilde{g} \sim 1$，远超弱相互作用区间 $\tilde{g} \ll 1$，这证实了式（66）的普适标度律在强耦合区间内仍具有定量准确性。

FRG 得到的临界密度也与弱耦合下式（67）的普适预测吻合良好，其中采用经典场值 $\xi_n^{\rm MC} = 380$ （图12）。然而，与临界化学势不同，随着 $\tilde{g}$增大，两者的一致性逐渐变差；在 $\tilde{g} \simeq 0.1$处，偏差约为 3%。因此，从对式（67）的拟合中提取的 ξ_n 取决于所考虑的耦合范围（见图12中的插图）。只有当 $\tilde{g} \lesssim 10^{-2}$时，该估算才稳定为

$$\xi_n^{\rm FRG} = 361.9 \pm 0.9. \tag{69}$$

该值比经典场估算小约 5% $\xi_n^{\rm MC} = 380 \pm 3$ [20]。

这些结果汇总于表I中，我们还报告了通过复朗之万模拟获得的结果 [74, 75]。我们的结果与经典场模拟的结果更加一致，而不是与后者一致。在 [21], 中，密度的状态方程用普适函数表示

$$\theta(X) \equiv \frac{2n}{mT} - \frac{\mu}{T\tilde{g}(T)}, \tag{70}$$

其控制参数

$$X = \frac{\mu - \mu_c}{\tilde{g}(T)T}. \tag{71}$$

这种形式先验上适用于涨落区（此时 X 为数量级为 1 的量）以及弱耦合情形。因此，相空间密度可表示为 $\theta(X)$,

$$\mathcal{D}(\mu, T) = \mathcal{D}_c + \pi\big[\theta(X) - \theta_0 + X\big], \tag{72}$$

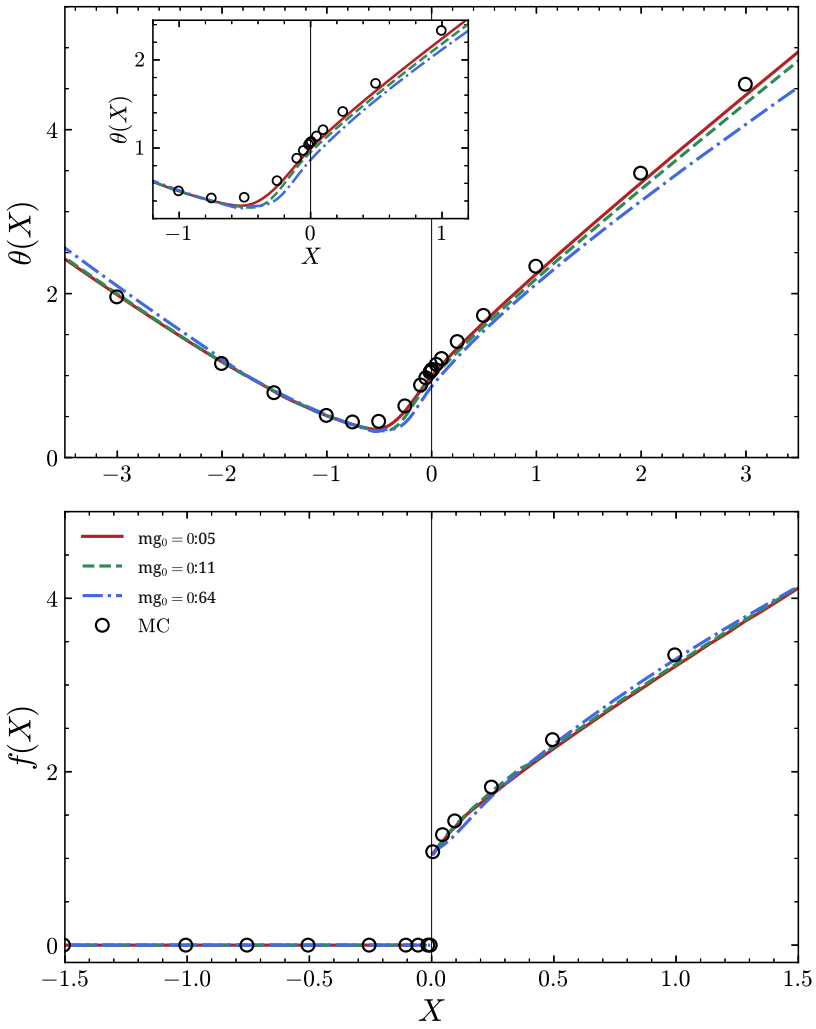


图13。函数 $\theta(X)$（上图）和 $f(X)=\mathcal{D}_s/4$ （下图）作为控制参数 X的函数，由函数重整化群在局部势近似′×导数展开$_2$ 下针对多个耦合常数 mg_0 得到，并与文献 [21] 中的蒙特卡罗模拟进行比较（空心圆）。插图：涨落区的放大图 $|X|\lesssim 1$。两个面板使用相同图例。

其中 $\theta_0=\theta(0)$，并假设方程（66）和（67）成立，则有 $\theta_0=\pi^{-1}\ln(\xi_n/\xi_\mu)$。函数 $\theta(X)$ 根据 [21]中的经典模拟结果制成了表格。此外，该文献还以函数 $f=\mathcal{D}_s/4$的形式列出了超流密度随 X 的变化，其中超流跃变为 1。图13将这两个标度函数与我们的函数重整化群结果进行了比较。关于超流密度（下图），两者吻合得很好，而且我们观察到函数重整化群结果不依赖于 mg_0。关于标度函数 θ （上图），我们观察到，尽管经典场模拟与函数重整化群结果的整体形状相似，但函数重整化群结果明显依赖于 mg_0，尤其在较大的 mg_0处更为显著。首先，随着 mg_0 增大，$X=0$ 附近出现向下偏移，这是由于超出方程（67）后 n_c 对 $\tilde{g}$ 的依赖。此外，离开涨落区后，重整化相互作用的能量依赖变得重要，简并区中的 Bogoliubov结果（64）便体现了这一点。耦合更强时，这种效应更加明显。在相近相互作用强度下的 Tan接触测量中也观察到了偏离经典场预测的现象，而函数重整化群结果与测量符合得更好 [25]。这些偏差主要源于经典场估算的密度，因此可追溯到上述标度函数 $\theta(X)$的偏差。

VIII. 结论

我们使用函数重整化群计算了稀薄二维玻色气体的普适热力学，并保留了有效势和空间导数项对场的完整依赖。这

使我们能够获得弱相互作用和强相互作用情况下跨越 BKT 转变的状态方程和超流密度。

我们发现，状态方程对近似方案异常不敏感。较简单的 LPA′ 和 LPA′×导数展开$_2$ 给出的压强仅相差几个百分点，即使在所考察的最大耦合下也是如此。超流密度则有所不同。LPA′ 无法正确描述 BKT 转变，而 LPA′×导数展开$_2$对超流密度普适跃变和临界反常维数的再现精度在几个百分点以内。

在弱耦合下，我们的结果与经典场蒙特卡罗模拟非常吻合，无论是临界参数，还是涨落区密度的普适标度函数，都是如此。在更强耦合下，我们观察到结果偏离经典场标度，但更一般的量子标度形式仍然适用。因此，我们的结果为弱耦合区间之外平面玻色气体的热力学提供了预测；在该区间内，经典场方法已无法提供定量可靠的结果。

同时确定状态方程和超流密度，也使得计算以往在 FRG 方法中难以获得的可观测量成为可能。尤其是，这些量为在双流体流体动力学框架内计算第一声和第二声的速度提供了必要输入[76, 77]。在强耦合下，这些集体模可通过超冷原子实验观测 [78]。

致谢

我们感谢 Nicolas Dupuis 多年来就这一主题展开的多次讨论。A.R. 和 I.B. 得到了项目 HRZZ-IP-10-2022-9423 的支持。I.B. 感谢项目“尖端研究的实施及其应用：量子与复杂系统以及李代数表示科学卓越中心”的支持，该项目的资助编号为 PK.1.1.10.0004，由欧盟通过欧洲区域发展基金—2021—2027年竞争力与凝聚力计划共同资助；同时感谢由欧盟通过国家复苏与韧性计划（NRRP）2021—2026年资助的 INFaR 和 FrustKor 项目，以及由克罗地亚政府和欧盟通过欧洲区域发展基金—竞争力与凝聚力业务计划共同资助的 KaCIF 项目（资助编号：KK.01.1.1.02.0012）。A.R. 获得了法国2030框架下资助编号为 ANR-24-CE30-6695 FUSIoN、ANR-24-CE47-4949 UniQ-RingS 和 ANR-23-PETQ-0001 Dyn1D 的资金支持，以及 Labex CEMPI 的资助（资助编号：ANR-11-LABX-0007-01）。

附录 A：FRG 流动方程

在本附录中，我们给出维度为 d 且温度为有限值 T的稀薄玻色气体在导数展开（DE$_2$）二阶下的 FRG 流动方程，这些方程由 Wetterich 方程（18）导出。随后，我们给出本文其余部分所用的流方程，即局部势近似′×导数展开$_2$下的流方程。我们考虑与作用量的对称性（10）相容的最一般试探形式，其中所有系数在导数二阶下均保留对 ρ 的完整函数依赖，

$$\begin{aligned}\Gamma_k[\phi^*,\phi] = \int_0^\beta d\tau \int d^dr \Big\{ & Z_{\tau 1,k}(\rho)\,\phi^*\partial_\tau\phi + Z_{\tau,k}(\rho)\,|\partial_\tau\phi|^2 + Z_{x,k}(\rho)\,|\nabla\phi|^2 \\ & + \frac{Y_{\tau,k}(\rho)}{4}\,(\partial_\tau\rho)^2 + \frac{Y_{x,k}(\rho)}{4}\,(\nabla\rho)^2 + U_k(\rho)\Big\}.\end{aligned} \tag{A1}$$

根据式（24），可由该试探形式得到传播子；通过投影 $\Gamma_k^{(2)}$ 的流（式（35））， 即可得到各个系数的流，具体方法见第 III 节。

下文中，算符 ∂_t 在式（36）中定义，且仅作用于调节器 R_k对 k 的依赖。松原频率为 $\omega_n = 2\pi nT$。为简化记号，我们在被积函数中省略指标 k 以及系数和传播子的自变量：$G_{ij} \equiv G_{ij,\,k}(\boldsymbol{p},\ \omega_n;\ \rho)$，其中 $ij \in \{LL, TT, LT\}$、$Z_x \equiv Z_{x,\,k}(\rho)$，等等。系数上的撇号表示对 ρ求导；并记 $V_k(\rho) = \partial_\rho U_k(\rho)$，于是 $V' = \partial_\rho^2 U_k$且 $V'' = \partial_\rho^3 U_k$。流方程为

$$\begin{aligned}\partial_t V_k(\rho) = & -\frac{1}{2}\,\tilde\partial_t\,\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\int_{\boldsymbol{p}} \Big\{ G_{LL}\Big(V' + 2\,\rho V'' + \boldsymbol{p}^2 Z_x' + \omega_n^2 Z_\tau' + \rho\boldsymbol{p}^2 Y_x' + \rho\omega_n^2 Y_\tau'\Big) \\ & - 2\omega_n\, G_{LT}\big(2\,Z_{\tau 1}' + \rho Z_{\tau 1}''\big) + G_{TT}\Big(3\,V' + \boldsymbol{p}^2 Z_x' + \boldsymbol{p}^2 Y_x + \omega_n^2 Z_\tau' + \omega_n^2 Y_\tau\Big) \\ & + \rho\, G_{LL}G_{TT}\big(2\,V' + \boldsymbol{p}^2 Y_x + \omega_n^2 Y_\tau\big)^2 + \rho\, G_{LT}^2\big(2\,V' + \boldsymbol{p}^2 Y_x + \omega_n^2 Y_\tau\big)^2\Big\},\end{aligned} \tag{A2}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t Z_{x,k}(\rho) = & -\frac{1}{2d}\,\tilde{\partial}_t\,\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\int_{\boldsymbol{p}}\Big\{d\,G_{LL}\Big(Z'_x+Y_x+2\,\rho Z''_x+5\,\rho Y'_x+2\,\rho^2 Y''_x\Big)\\
&+d\,G_{TT}\big(Z'_x+\rho Y'_x\big)+2\rho\,G_{LL}^2\big(Z'_x+Y_x+\rho Y'_x\big)\Big(6\,dV'+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\boldsymbol{p}^2Y_x+4\,d\rho V''\\
&+2\,d\boldsymbol{p}^2Z'_x+2\,d\boldsymbol{p}^2Y_x+\rho\boldsymbol{p}^2Y'_x+2\,d\omega_n^2Z'_\tau+2\,d\omega_n^2Y_\tau+2\,d\rho\boldsymbol{p}^2Y'_x+2\,d\rho\omega_n^2Y'_\tau\Big)\\
&-8d\rho\omega_n\,G_{LL}G_{LT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\big(Z'_x+Y_x+\rho Y'_x\big)\\
&-2\rho\,G_{LT}^2\Big(2\,\boldsymbol{p}^2Z_x'^2+2\,dV'Z'_x+5\,dV'Y_x+2\,\boldsymbol{p}^2Z'_xY_x+2\,d\boldsymbol{p}^2Z_x'^2+d\boldsymbol{p}^2Y_x^2+2\,d\rho V'Y'_x\\
&+2\,d\rho V''Y_x+3\,d\boldsymbol{p}^2Z'_xY_x+2\,\rho\boldsymbol{p}^2Z'_xY'_x+2\,d\omega_n^2Z'_xZ'_\tau+3\,d\omega_n^2Y_xZ'_\tau+d\omega_n^2Y_xY_\tau\\
&+2\,d\rho\boldsymbol{p}^2Z'_xY'_x+d\rho\boldsymbol{p}^2Y_xY'_x+d\rho\omega_n^2Y_xY'_\tau+2\,d\rho\omega_n^2Y'_xZ'_\tau\Big)\\
&-4d\rho\omega_nY_x\,G_{LT}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)+2\rho\,G_{TT}^2\Big(\boldsymbol{p}^2Z_x'^2+dV'Y_x+d\boldsymbol{p}^2Z'_xY_x+d\omega_n^2Y_xZ'_\tau\Big)\\
&-4\rho\boldsymbol{p}^2\left(\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LL}\right)^2\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Z'_\tau+\omega_n^2Y_\tau+\rho\boldsymbol{p}^2Y'_x+\rho\omega_n^2Y'_\tau\Big)^2\\
&+8\rho\boldsymbol{p}^2\left(\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LT}\right)^2\Big(3\,V'^2+2\,\rho V'V''+4\,\boldsymbol{p}^2V'Z'_x+\boldsymbol{p}^2V'Y_x+\boldsymbol{p}^4Z_x'^2-4\,\omega_n^2Z_{\tau1}'^2+\boldsymbol{p}^4Z'_xY_x\\
&+4\,\omega_n^2V'Z'_\tau+\omega_n^2V'Y_\tau+\rho\boldsymbol{p}^2V'Y'_x+2\,\rho\boldsymbol{p}^2V''Z'_x+\rho\boldsymbol{p}^4Z'_xY'_x+\rho\omega_n^2V'Y'_\tau+2\,\rho\omega_n^2V''Z'_\tau\\
&-4\,\rho\omega_n^2Z'_{\tau1}Z''_{\tau1}+2\,\boldsymbol{p}^2\omega_n^2Z'_xZ'_\tau+\boldsymbol{p}^2\omega_n^2Z'_xY_\tau+\boldsymbol{p}^2\omega_n^2Y_xZ'_\tau+\omega_n^4Z_\tau'^2-\rho^2\omega_n^2Z_{\tau1}''^2+\omega_n^4Z'_\tau Y_\tau\\
&+\rho\boldsymbol{p}^2\omega_n^2Z'_xY'_\tau+\rho\boldsymbol{p}^2\omega_n^2Y'_xZ'_\tau+\rho\omega_n^4Z'_\tau Y'_\tau\Big)-4\rho\boldsymbol{p}^2\left(\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{TT}\right)^2\big(V'+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\omega_n^2Z'_\tau\big)^2\\
&+16\rho\boldsymbol{p}^2\omega_n\,\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LL}\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Z'_\tau+\omega_n^2Y_\tau\\
&+\rho\boldsymbol{p}^2Y'_x+\rho\omega_n^2Y'_\tau\Big)+8\rho\boldsymbol{p}^2\omega_n^2\,\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LL}\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)^2\\
&+16\rho\boldsymbol{p}^2\omega_n\,\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LT}\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\big(V'+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\omega_n^2Z'_\tau\big)\Big\},
\end{aligned}
\tag{A3}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t\big[Z_{x,k}(\rho)+\rho\,Y_{x,k}(\rho)\big] = & -\frac{1}{2d}\,\tilde{\partial}_t\,\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\int_{\boldsymbol{p}}\Big\{d\,G_{LL}\big(Z'_x+2\,\rho Z''_x\big)+d\,G_{TT}\big(Z'_x+Y_x\big)\\
&+\rho\,G_{LL}G_{TT}\Big(4\,\boldsymbol{p}^2Z_x'^2+2\,\boldsymbol{p}^2Y_x^2+4\,dV'Z'_x+2\,dV'Y_x-4\,\boldsymbol{p}^2Z'_xY_x+d\boldsymbol{p}^2Y_x^2+2\,d\boldsymbol{p}^2Z'_xY_x\\
&+2\,d\omega_n^2Z'_xY_\tau+d\omega_n^2Y_xY_\tau\Big)-\rho\,G_{LT}^2\Big(4\,\boldsymbol{p}^2Z_x'^2-4\,dV'Z'_x-2\,dV'Y_x-4\,\boldsymbol{p}^2Z'_xY_x-d\boldsymbol{p}^2Y_x^2\\
&-2\,d\boldsymbol{p}^2Z'_xY_x-2\,d\omega_n^2Z'_xY_\tau-d\omega_n^2Y_xY_\tau\Big)\\
&+2\rho\boldsymbol{p}^2\,G_{LL}\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{TT}\big(2\,Z'_x-Y_x\big)\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Y_\tau\big)\\
&-2\rho\boldsymbol{p}^2\,\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LL}G_{TT}\big(2\,Z'_x-Y_x\big)\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Y_\tau\big)\\
&-2\rho\boldsymbol{p}^2\left(\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LT}\right)^2\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Y_\tau\big)^2\\
&-2\rho\boldsymbol{p}^2\,\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LL}\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{TT}\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Y_\tau\big)^2\Big\},
\end{aligned}
\tag{A4}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t Z_{\tau,k}(\rho) = & -\frac{1}{2}\,\tilde{\partial}_t\,\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\int_{\boldsymbol{p}}\Big\{G_{LL}\Big(Z'_\tau+Y_\tau+2\,\rho Z''_\tau+5\,\rho Y'_\tau+2\,\rho^2Y''_\tau\Big)+G_{TT}\big(Z'_\tau+\rho Y'_\tau\big)\\
&+2\rho\,G_{LL}^2\big(Z'_\tau+Y_\tau+\rho Y'_\tau\big)\Big(6\,V'+4\,\rho V''+2\,\boldsymbol{p}^2Z'_x+2\,\boldsymbol{p}^2Y_x+3\,\omega_n^2Z'_\tau+3\,\omega_n^2Y_\tau+2\,\rho\boldsymbol{p}^2Y'_x\\
&+3\,\rho\omega_n^2Y'_\tau\Big)-12\rho\omega_n\,G_{LL}G_{LT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\big(Z'_\tau+Y_\tau+\rho Y'_\tau\big)\\
&-2\rho\,G_{LL}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)^2-2\rho\,G_{LT}^2\Big(2\,V'Z'_\tau+5\,V'Y_\tau+2\,\rho V'Y'_\tau+2\,\rho V''Y_\tau\\
&+2\,\boldsymbol{p}^2Z'_xZ'_\tau+3\,\boldsymbol{p}^2Z'_xY_\tau+\boldsymbol{p}^2Y_xY_\tau+4\,\omega_n^2Z_\tau'^2+\omega_n^2Y_\tau^2+5\,\omega_n^2Z'_\tau Y_\tau+2\,\rho\boldsymbol{p}^2Z'_xY'_\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\rho\boldsymbol{p}^2Y'_xY_\tau+4\,\rho\omega_n^2Z'_\tau Y'_\tau+\rho\omega_n^2Y_\tau Y'_\tau\Big)-4\rho\omega_n\,G_{LT}G_{TT}\big(Z'_\tau+Y_\tau\big)\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\\
&+2\rho\,G_{TT}^2\Big(V'Y_\tau+\boldsymbol{p}^2Z'_xY_\tau+\omega_n^2Z'^2_\tau+\omega_n^2Z'_\tau Y_\tau\Big)\\
&+4\rho\omega_n\,G_{LL}\partial_{\omega_n}G_{LL}\big(Z'_\tau+Y_\tau+\rho Y'_\tau\big)\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Z'_\tau+\omega_n^2Y_\tau\\
&\quad+\rho\boldsymbol{p}^2Y'_x+\rho\omega_n^2Y'_\tau\Big)+\rho\,G_{LL}\partial^2_{\omega_n}G_{LL}\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Z'_\tau+\omega_n^2Y_\tau\\
&\quad+\rho\boldsymbol{p}^2Y'_x+\rho\omega_n^2Y'_\tau\Big)^2-4\rho\,G_{LL}\partial_{\omega_n}G_{LT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\boldsymbol{p}^2Y_x\\
&\quad+2\,\omega_n^2Z'_\tau+2\,\omega_n^2Y_\tau+\rho\boldsymbol{p}^2Y'_x+2\,\rho\omega_n^2Y'_\tau\Big)\\
&-2\rho\omega_n\,G_{LL}\partial^2_{\omega_n}G_{LT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Z'_\tau+\omega_n^2Y_\tau\\
&\quad+\rho\boldsymbol{p}^2Y'_x+\rho\omega_n^2Y'_\tau\Big)-4\rho\omega_n\,G_{LL}\partial_{\omega_n}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)^2\\
&-\rho\omega_n^2\,G_{LL}\partial^2_{\omega_n}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)^2-4\rho\omega_n^2\,\partial_{\omega_n}G_{LL}G_{LT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\big(Z'_\tau+Y_\tau+\rho Y'_\tau\big)\\
&-2\rho\omega_n\,\partial^2_{\omega_n}G_{LL}G_{LT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Z'_\tau+\omega_n^2Y_\tau\\
&\quad+\rho\boldsymbol{p}^2Y'_x+\rho\omega_n^2Y'_\tau\Big)-\rho\omega_n^2\,\partial^2_{\omega_n}G_{LL}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)^2\\
&+4\rho\omega_n\,G_{LT}\partial_{\omega_n}G_{LT}\Big(4\,Z'^2_{\tau1}-4\,V'Z'_\tau-V'Y_\tau-\rho V'Y'_\tau-2\,\rho V''Z'_\tau+4\,\rho Z'_{\tau1}Z''_{\tau1}-2\,\boldsymbol{p}^2Z'_xZ'_\tau\\
&\quad-\boldsymbol{p}^2Z'_xY_\tau-\boldsymbol{p}^2Y_xZ'_\tau+\rho^2Z''^2_{\tau1}-2\,\omega_n^2Z'^2_\tau-2\,\omega_n^2Z'_\tau Y_\tau-\rho\boldsymbol{p}^2Z'_xY'_\tau-\rho\boldsymbol{p}^2Y'_xZ'_\tau\\
&\quad-2\,\rho\omega_n^2Z'_\tau Y'_\tau\Big)-2\rho\,G_{LT}\partial^2_{\omega_n}G_{LT}\Big(3\,V'^2+2\,\rho V'V''+4\,\boldsymbol{p}^2V'Z'_x+\boldsymbol{p}^2V'Y_x+\boldsymbol{p}^4Z'^2_x\\
&\quad-4\,\omega_n^2Z'^2_{\tau1}+\boldsymbol{p}^4Z'_xY_x+4\,\omega_n^2V'Z'_\tau+\omega_n^2V'Y_\tau+\rho\boldsymbol{p}^2V'Y'_x+2\,\rho\boldsymbol{p}^2V''Z'_x+\rho\boldsymbol{p}^4Z'_xY'_x\\
&\quad+\rho\omega_n^2V'Y'_\tau+2\,\rho\omega_n^2V''Z'_\tau-4\,\rho\omega_n^2Z'_{\tau1}Z''_{\tau1}+2\,\boldsymbol{p}^2\omega_n^2Z'_xZ'_\tau+\boldsymbol{p}^2\omega_n^2Z'_xY_\tau+\boldsymbol{p}^2\omega_n^2Y_xZ'_\tau\\
&\quad+\omega_n^4Z'^2_\tau-\rho^2\omega_n^2Z''^2_{\tau1}+\omega_n^4Z'_\tau Y_\tau+\rho\boldsymbol{p}^2\omega_n^2Z'_xY'_\tau+\rho\boldsymbol{p}^2\omega_n^2Y'_xZ'_\tau+\rho\omega_n^4Z'_\tau Y'_\tau\Big)\\
&-4\rho\,G_{LT}\partial_{\omega_n}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\big(V'+\boldsymbol{p}^2Z'_x+2\,\omega_n^2Z'_\tau\big)\\
&-2\rho\omega_n\,G_{LT}\partial^2_{\omega_n}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\big(V'+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\omega_n^2Z'_\tau\big)\\
&-4\rho\omega_n^2Z'_\tau\,\partial_{\omega_n}G_{LT}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\\
&-2\rho\omega_n\,\partial^2_{\omega_n}G_{LT}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\big(V'+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\omega_n^2Z'_\tau\big)\\
&+4\rho\omega_nZ'_\tau\,G_{TT}\partial_{\omega_n}G_{TT}\big(V'+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\omega_n^2Z'_\tau\big)+\rho\,G_{TT}\partial^2_{\omega_n}G_{TT}\big(V'+\boldsymbol{p}^2Z'_x+\omega_n^2Z'_\tau\big)^2\Big\},
\end{aligned}
\tag{A5}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t\big[Z_{\tau,k}(\rho)+\rho\,Y_{\tau,k}(\rho)\big]=&-\frac{1}{8}\,\tilde\partial_t\,\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\int_{\boldsymbol{p}}\Big\{4\,G_{LL}\big(Z'_\tau+2\,\rho Z''_\tau\big)+4\,G_{TT}\big(Z'_\tau+Y_\tau\big)\\
&-8\rho\,G_{LL}^2\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)^2-16\rho\omega_n\,G_{LL}G_{LT}\big(2\,Z'_\tau-Y_\tau\big)\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\\
&+4\rho\,G_{LL}G_{TT}\Big(4\,V'Z'_\tau+2\,V'Y_\tau+2\,\boldsymbol{p}^2Y_xZ'_\tau+\boldsymbol{p}^2Y_xY_\tau+4\,\omega_n^2Z'^2_\tau+3\,\omega_n^2Y_\tau^2-2\,\omega_n^2Z'_\tau Y_\tau\Big)\\
&+4\rho\,G_{LT}^2\Big(4\,V'Z'_\tau+2\,V'Y_\tau+2\,\boldsymbol{p}^2Y_xZ'_\tau+\boldsymbol{p}^2Y_xY_\tau-4\,\omega_n^2Z'^2_\tau+\omega_n^2Y_\tau^2+6\,\omega_n^2Z'_\tau Y_\tau\Big)\\
&-8\rho\,G_{LL}\partial_{\omega_n}G_{LT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Y_\tau\big)\\
&+8\rho\omega_nZ'_\tau\,G_{LL}\partial_{\omega_n}G_{TT}\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Y_\tau\big)+\rho\,G_{LL}\partial^2_{\omega_n}G_{TT}\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Y_\tau\big)^2\\
&+8\rho\,\partial_{\omega_n}G_{LL}G_{LT}\big(2\,Z'_{\tau1}+\rho Z''_{\tau1}\big)\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Y_\tau\big)\\
&-8\rho\omega_n\,\partial_{\omega_n}G_{LL}G_{TT}\big(Z'_\tau-Y_\tau\big)\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Y_\tau\big)\\
&+\rho\,\partial^2_{\omega_n}G_{LL}G_{TT}\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Y_\tau\big)^2+8\rho\omega_nY_\tau\,G_{LT}\partial_{\omega_n}G_{LT}\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Y_\tau\big)\\
&+2\rho\,G_{LT}\partial^2_{\omega_n}G_{LT}\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2Y_x+\omega_n^2Y_\tau\big)^2\Big\},
\end{aligned}
\tag{A6}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t\big[Z_{\tau 1,k}(\rho)+\rho\, Z'_{\tau 1,k}(\rho)\big] = \frac{1}{2}\,\tilde{\partial}_t\,\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\int_{\boldsymbol{p}}\Big\{ & -G_{LL}\big(2\,Z'_{\tau 1}+7\,\rho Z''_{\tau 1}+2\,\rho^2 Z'''_{\tau 1}\big) \\
& +2\omega_n\, G_{LT}\Big(2\,Z'_{\tau}-Y_{\tau}+2\,\rho Z''_{\tau}-\rho Y'_{\tau}\Big)-G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau 1}+\rho Z''_{\tau 1}\big) \\
& -2\rho\, G_{LL}^2\big(2\,Z'_{\tau 1}+\rho Z''_{\tau 1}\big)\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2 Z'_x+\boldsymbol{p}^2 Y_x+\omega_n^2 Z'_{\tau}+\omega_n^2 Y_{\tau}+\rho\boldsymbol{p}^2 Y'_x+\rho\omega_n^2 Y'_{\tau}\Big) \\
& +2\rho\omega_n\, G_{LL}G_{LT}\Big(8\,Z'^2_{\tau 1}-6\,V'Z'_{\tau}+3\,V'Y_{\tau}-4\,\rho V''Z'_{\tau}+2\,\rho V''Y_{\tau}+8\,\rho Z'_{\tau 1}Z''_{\tau 1}-2\,\boldsymbol{p}^2 Z'_x Z'_{\tau} \\
& \quad +\boldsymbol{p}^2 Z'_x Y_{\tau}-2\,\boldsymbol{p}^2 Y_x Z'_{\tau}+\boldsymbol{p}^2 Y_x Y_{\tau}+2\,\rho^2 Z''^2_{\tau 1}-2\,\omega_n^2 Z'^2_{\tau}+\omega_n^2 Y_{\tau}^2-\omega_n^2 Z'_{\tau}Y_{\tau}-2\,\rho\boldsymbol{p}^2 Y'_x Z'_{\tau} \\
& \quad +\rho\boldsymbol{p}^2 Y'_x Y_{\tau}-2\,\rho\omega_n^2 Z'_{\tau}Y'_{\tau}+\rho\omega_n^2 Y_{\tau}Y'_{\tau}\Big) \\
& -\rho\, G_{LL}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau 1}+\rho Z''_{\tau 1}\big)\Big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x+4\,\omega_n^2 Z'_{\tau}-\omega_n^2 Y_{\tau}\Big) \\
& +\rho\, G_{LT}^2\big(2\,Z'_{\tau 1}+\rho Z''_{\tau 1}\big)\Big(2\,\boldsymbol{p}^2 Z'_x-\boldsymbol{p}^2 Y_x+6\,\omega_n^2 Z'_{\tau}-3\,\omega_n^2 Y_{\tau}\Big) \\
& -2\rho\omega_n\, G_{LT}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau}-Y_{\tau}\big)\big(V'+\boldsymbol{p}^2 Z'_x+\omega_n^2 Z'_{\tau}\big) \\
& -\rho\, G_{LL}\partial_{\omega_n}G_{LT}\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x+\omega_n^2 Y_{\tau}\big)\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2 Z'_x+\boldsymbol{p}^2 Y_x+\omega_n^2 Z'_{\tau}+\omega_n^2 Y_{\tau} \\
& \quad +\rho\boldsymbol{p}^2 Y'_x+\rho\omega_n^2 Y'_{\tau}\Big)-\rho\omega_n\, G_{LL}\partial_{\omega_n}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau 1}+\rho Z''_{\tau 1}\big)\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x+\omega_n^2 Y_{\tau}\big) \\
& +\rho\,\partial_{\omega_n}G_{LL}G_{LT}\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x+\omega_n^2 Y_{\tau}\big)\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2 Z'_x+\boldsymbol{p}^2 Y_x+\omega_n^2 Z'_{\tau}+\omega_n^2 Y_{\tau} \\
& \quad +\rho\boldsymbol{p}^2 Y'_x+\rho\omega_n^2 Y'_{\tau}\Big)+\rho\omega_n\,\partial_{\omega_n}G_{LL}G_{TT}\big(2\,Z'_{\tau 1}+\rho Z''_{\tau 1}\big)\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x+\omega_n^2 Y_{\tau}\big) \\
& -\rho\, G_{LT}\partial_{\omega_n}G_{TT}\big(V'+\boldsymbol{p}^2 Z'_x+\omega_n^2 Z'_{\tau}\big)\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x+\omega_n^2 Y_{\tau}\big) \\
& +\rho\,\partial_{\omega_n}G_{LT}G_{TT}\big(V'+\boldsymbol{p}^2 Z'_x+\omega_n^2 Z'_{\tau}\big)\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x+\omega_n^2 Y_{\tau}\big)\Big\}, \qquad \text{(A7)}
\end{aligned}
$$

根据试探形式（A1）和式（24）得到的传播子为

$$
\begin{aligned}
G_{LL} &= -\frac{R_k+Z_x\,\boldsymbol{p}^2+Z_{\tau}\,\omega_n^2+V}{D}, \\
G_{TT} &= -\frac{R_k+\big(Z_x+\rho\,Y_x\big)\boldsymbol{p}^2+\big(Z_{\tau}+\rho\,Y_{\tau}\big)\omega_n^2+V+2\rho\,V'}{D}, \\
G_{LT} &= \frac{\big(Z_{\tau 1}+\rho\,Z'_{\tau 1}\big)\,\omega_n}{D}, \\
D &= \big(R_k+Z_x\,\boldsymbol{p}^2+Z_{\tau}\,\omega_n^2+V\big)\big(R_k+(Z_x+\rho\,Y_x)\boldsymbol{p}^2+(Z_{\tau}+\rho\,Y_{\tau})\omega_n^2+V+2\rho\,V'\big) \\
&\quad +\big(Z_{\tau 1}+\rho\,Z'_{\tau 1}\big)^2\omega_n^2,
\end{aligned}
\qquad \text{(A8)}
$$

其中 $R_k \equiv R_k(\boldsymbol{p})$。

为方便起见，我们给出了由投影到二点顶角的纵向分量 $\Gamma_{k,A}+2\rho\,\Gamma_{k,B}$ 得到的组合 $Z_{x,k}+\rho\,Y_{x,k}$ 和 $Z_{\tau,k}+\rho\,Y_{\tau,k}$ 的流。$Y_{x,k}$ 和 $Y_{\tau,k}$ 的流由下式得到

$$
\begin{aligned}
\partial_t Y_{x,k} &= \frac{\partial_t\big(Z_{x,k}+\rho\,Y_{x,k}\big)-\partial_t Z_{x,k}}{\rho}, \\
\partial_t Y_{\tau,k} &= \frac{\partial_t\big(Z_{\tau,k}+\rho\,Y_{\tau,k}\big)-\partial_t Z_{\tau,k}}{\rho}.
\end{aligned}
\qquad \text{(A9)}
$$

类似地，将 $\Gamma_{k,C}$ 的流投影到其关于 ω_n 的线性项上，式（39），可得到组合 $Z_{\tau 1,k}+\rho\,Z'_{\tau 1,k}$ 的流。$Z_{\tau 1,k}$ 本身的流可以通过从三点顶点 $\Gamma_k^{(3)}$、212 中提取 $Z'_{\tau 1,k}$ 的流来重构。

流方程（A2）–（A7）在导数展开 O（2）模型的$_2$ 中，当松原求和仅保留 $\omega_n=0$静态模时，可化简为经典模型的流方程。这相当于将 $\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}$ 替换为 T 并令 $Z_{\tau}=Y_{\tau}=Z_{\tau 1}=0$。在这种

情况下， $G_{LT}=0$ 和分母 D 因子化，因此

$$
\begin{aligned}
G_{LL} &= -\frac{1}{R_k+\left(Z_x+\rho\,Y_x\right)\boldsymbol{p}^2+V+2\rho\,V'},\\
G_{TT} &= -\frac{1}{R_k+Z_x\,\boldsymbol{p}^2+V},
\end{aligned}
\tag{A10}
$$

它们分别是 O模型在导数展开下的纵向和横向传播子。 V_k、 $Z_{x,\,k}$以及 $Y_{x,\,k}$（式（A2）–（A4））的流，进而重现了文献 O中给出的维数为 d的经典模型在导数展开下的流方程，但相差一个温度因子 [51], ；该因子可通过重新定义场和势吸收。 T

LPA′×DE_2 流方程是通过在 LPA′层次处理量子扇区，从 DE_2 方程得到的；也就是说，令 $Y_\tau=0$ ，并将 $Z_{\tau 1}(\rho)$ 替换为其在有效势极小值处的取值，$Z_{\tau 1,k}\equiv Z_{\tau 1,k}(\rho_{0,k})$，同时将其场导数设为零，并忽略二阶时间导数项 $Z_\tau=0$。于是流方程化简为

$$
\begin{aligned}
\partial_t V_k(\rho) = &-\frac{1}{2}\,\tilde{\partial}_t\,\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\int_{\boldsymbol{p}}\Big\{G_{LL}\Big(V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2 Z_x'+\rho\boldsymbol{p}^2 Y_x'\Big)\\
&+G_{TT}\big(3\,V'+\boldsymbol{p}^2 Z_x'+\boldsymbol{p}^2 Y_x\big)+\rho\,G_{LL}G_{TT}\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x\big)^2+\rho\,G_{LT}^2\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x\big)^2\Big\},
\end{aligned}
\tag{A11}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t Z_{x,k}(\rho) = &-\frac{1}{2d}\,\tilde{\partial}_t\,\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\int_{\boldsymbol{p}}\Big\{d\,G_{LL}\Big(Z_x'+Y_x+2\,\rho Z_x''+5\,\rho Y_x'+2\,\rho^2 Y_x''\Big)\\
&+d\,G_{TT}\big(Z_x'+\rho Y_x'\big)+2\rho\,G_{LL}^2\big(Z_x'+Y_x+\rho Y_x'\big)\Big(6\,dV'+\boldsymbol{p}^2 Z_x'+\boldsymbol{p}^2 Y_x+4\,d\rho V''\\
&+2\,d\boldsymbol{p}^2 Z_x'+2\,d\boldsymbol{p}^2 Y_x+\rho\boldsymbol{p}^2 Y_x'+2\,d\rho\boldsymbol{p}^2 Y_x'\Big)\\
&-2\rho\,G_{LT}^2\Big(2\,\boldsymbol{p}^2 Z_x'^2+2\,dV'Z_x'+5\,dV'Y_x+2\,\boldsymbol{p}^2 Z_x'Y_x+2\,d\boldsymbol{p}^2 Z_x'^2+d\boldsymbol{p}^2 Y_x^2+2\,d\rho V'Y_x'\\
&+2\,d\rho V''Y_x+3\,d\boldsymbol{p}^2 Z_x'Y_x+2\,\rho\boldsymbol{p}^2 Z_x'Y_x'+2\,d\rho\boldsymbol{p}^2 Z_x'Y_x'+d\rho\boldsymbol{p}^2 Y_xY_x'\Big)\\
&+2\rho\,G_{TT}^2\big(\boldsymbol{p}^2 Z_x'^2+dV'Y_x+d\boldsymbol{p}^2 Z_x'Y_x\big)-4\rho\boldsymbol{p}^2\left(\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LL}\right)^2\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2 Z_x'+\boldsymbol{p}^2 Y_x\\
&+\rho\boldsymbol{p}^2 Y_x'\Big)^2+8\rho\boldsymbol{p}^2\left(\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LT}\right)^2\big(V'+\boldsymbol{p}^2 Z_x'\big)\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2 Z_x'+\boldsymbol{p}^2 Y_x+\rho\boldsymbol{p}^2 Y_x'\Big)\\
&-4\rho\boldsymbol{p}^2\left(\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{TT}\right)^2\big(V'+\boldsymbol{p}^2 Z_x'\big)^2\Big\},
\end{aligned}
\tag{A12}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t\big[Z_{x,k}(\rho)+\rho\,Y_{x,k}(\rho)\big] = &-\frac{1}{2d}\,\tilde{\partial}_t\,\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\int_{\boldsymbol{p}}\Big\{d\,G_{LL}\big(Z_x'+2\,\rho Z_x''\big)+d\,G_{TT}\big(Z_x'+Y_x\big)\\
&+\rho\,G_{LL}G_{TT}\Big(4\,\boldsymbol{p}^2 Z_x'^2+2\,\boldsymbol{p}^2 Y_x^2+4\,dV'Z_x'+2\,dV'Y_x-4\,\boldsymbol{p}^2 Z_x'Y_x+d\boldsymbol{p}^2 Y_x^2+2\,d\boldsymbol{p}^2 Z_x'Y_x\Big)\\
&-\rho\,G_{LT}^2\Big(4\,\boldsymbol{p}^2 Z_x'^2-4\,dV'Z_x'-2\,dV'Y_x-4\,\boldsymbol{p}^2 Z_x'Y_x-d\boldsymbol{p}^2 Y_x^2-2\,d\boldsymbol{p}^2 Z_x'Y_x\Big)\\
&+2\rho\boldsymbol{p}^2\,G_{LL}\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{TT}\big(2\,Z_x'-Y_x\big)\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x\big)\\
&-2\rho\boldsymbol{p}^2\,\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LL}G_{TT}\big(2\,Z_x'-Y_x\big)\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x\big)-2\rho\boldsymbol{p}^2\left(\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LT}\right)^2\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x\big)^2\\
&-2\rho\boldsymbol{p}^2\,\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{LL}\partial_{\boldsymbol{p}^2}G_{TT}\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x\big)^2\Big\},
\end{aligned}
\tag{A13}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t Z_{\tau 1,k} = &-\frac{1}{2}\,\tilde{\partial}_t\,\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\int_{\boldsymbol{p}}\Big\{\rho\,G_{LL}\partial_{\omega_n}G_{LT}\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x\big)\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2 Z_x'+\boldsymbol{p}^2 Y_x\\
&+\rho\boldsymbol{p}^2 Y_x'\Big)-\rho\,\partial_{\omega_n}G_{LL}G_{LT}\big(2\,V'+\boldsymbol{p}^2 Y_x\big)\Big(3\,V'+2\,\rho V''+\boldsymbol{p}^2 Z_x'+\boldsymbol{p}^2 Y_x+\rho\boldsymbol{p}^2 Y_x'\Big)
\end{aligned}
$$

$$+\rho\, G_{LT}\partial_{\omega_n} G_{TT}\big(V' + \boldsymbol{p}^2 Z_x'\big)\big(2\,V' + \boldsymbol{p}^2 Y_x\big) - \rho\,\partial_{\omega_n} G_{LT} G_{TT}\big(V' + \boldsymbol{p}^2 Z_x'\big)\big(2\,V' + \boldsymbol{p}^2 Y_x\big)\Big\}, \tag{A14}$$

其中，$Z_{\tau 1}$、k 的流在有效势极小值处求得，$\rho = \rho_{0,k}$，与方程（39）一致。最后，通过进一步令 $Y_x = 0$，将 $Z_x(\rho)$替换为其在极小值处的取值$Z_{x,k}(\rho_{0,k})$，并将有效势截断到ρ − $\rho_{0的二阶项,\ k}$即可得到场截断的 LPA′ 。相应的流方程见参考文献 [38]。这里同样使用了方程（55）中的 Wetterich 调节器，其中 $\alpha = 2.1$。

---

[1] V. N. Popov， *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics*（Reidel，多德雷赫特，1983）。[2] D. S. Fisher 和 P. C. Hohenberg，二维稀薄玻色气体，《物理评论B》37，4936（1988）。[3] Z. Hadzibabic 和 J. Dalibard，二维玻色流体：原子物理学视角，《Riv. Nuovo Cimento》34，389（2011）。[4] S. Sachdev，*Quantum Phase Transitions*，第 2 版（剑桥大学出版社，英国剑桥，2011）。[5] A. Ran¸con 和 N. Dupuis，二维玻色气体的普适热力学，《Physical Review A》85，63607（2012）。[6] P. C. Hohenberg，一维和二维中长程有序的存在性，《物理评论》158，383（1967）。[7] J. M. Kosterlitz 和 D. J. Thouless，二维系统中的有序性、亚稳态与相变，《J. Phys. C》6，1181（1973）。[8] J. M. Kosterlitz，二维 xy 模型的临界性质，《J. Phys. C：固体物理》7，1046（1974）。[9] V. L. Berezinskii，具有连续对称群的一维和二维系统中长程有序的破坏 I：经典系统，《苏联物理学—JETP》32，493（1971）。[10] V. L. Berezinskii，具有连续对称群的一维和二维系统中长程有序的破坏 II：量子系统，《苏联物理学—JETP》34，610（1972）。[11] D. R. Nelson 和 J. M. Kosterlitz，二维超流体超流密度的普适跃变，《物理评论快报》39，1201（1977）。[12] Z. Hadzibabic、P. Kr¨uger、M. Cheneau、B. Battelier 和 J. Dalibard，受限原子气体中的 Berezinskii-Kosterlitz-Thouless 交叉，《自然》441，1118（2006）。[13] R. Desbuquois、L. Chomaz、T. Yefsah、J. L´eonard、J. Beugnon、C. Weitenberg 和 J. Dalibard，二维玻色气体的超流行为，《自然物理》8，645（2012）。[14] T. Yefsah、R. Desbuquois、L. Chomaz、K. J. G¨unter 和 J. Dalibard，探索二维玻色气体的热力学，《物理评论快报》107，130401（2011）。[15] C.-L. Hung、X. Zhang、N. Gemelke 和 C. Chin，二维玻色气体中尺度不变性与普适性的观测，《自然》470，236（2011）。[16] X. Zhang、C.-L. Hung、S.-K. Tung、N. Gemelke 和 C. Chin，基于光学晶格中的超冷原子探索量子临界性，《新物理学杂志》13，045011（2011）。[17] X. Zhang、C.-L. Hung、S.-K. Tung 和 C. Chin，二维光学晶格中超冷原子的量子临界行为，《科学》335，1070（2012）。[18] L.-C. Ha、C.-L. Hung、X. Zhang、U. Eismann、S.-K. Tung 和 C. Chin，强相互作用二维玻色气体，《物理评论快报》110，145302（2013）。[19] R. Desbuquois、T. Yefsah、L. Chomaz、C. Weitenberg、L. Corman、S. Nascimb`ene 和 J. Dalibard，无需拟合参数确定尺度不变状态方程：Berezinskii-Kosterlitz-Thouless 相变过程中的二维玻色气体，《物理评论快报》113，020404（2014）。[20] N. Prokof'ev、O. Ruebenacker 和 B. Svistunov，弱相互作用二维玻色气体的临界点，《物理评论快报》87，270402（2001）。[21] N. Prokof'ev 和 B. Svistunov，涨落区域中的二维弱相互作用玻色气体，《物理评论A》66，043608 2002（）。[22] Y.-Q. Zou、B. Bakkali-Hassani、C. Maury、 ´E. Le Cerf、S. Nascimbene、J. Dalibard 和 J. Beugnon，平面玻色气体超流体相变过程中的 Tan 二体接触，《自然通讯》12，760（2021）。[23] J. Berges、N. Tetradis 和 C. Wetterich，量子场论与统计物理中的非微扰重整化流，《物理报告》363，223（2002）。[24] N. Dupuis、L. Canet、A. Eichhorn、W. Metzner、J. M. Pawlowski、M. Tissier 和 N. Wschebor，非微扰函数重整化群及其应用，《物理报告》910，1（2021）。[25] A. Ran¸con 和 N. Dupuis，平面玻色气体中的 Tan 二体接触：实验与理论，《物理评论快报》130，263401（2023）。[26] D. S. Petrov、M. Holzmann 和 G. V. Shlyapnikov，准二维受限气体中的玻色-爱因斯坦凝聚，《物理评论快报》84，2551（2000）。[27] L.-K. Lim、C. M. Smith 和 H. T. C. Stoof，超冷二维玻色气体中的关联效应，《物理评论A》78，013634 2008（）。[28] S. Sachdev，量子相变与守恒荷，《Z. Physik B》94，469（1994）。[29] T. Giamarchi、C. R¨uegg 和 O. Tchernyshyov，磁性绝缘体中的玻色–爱因斯坦凝聚，《自然物理》4，198（2008）。

[30] A. Ran¸con，量子 XY 自旋模型的非微扰重整化群方法，《物理评论B》89，214418（2014）。[31] M. P. A. Fisher、P. B. Weichman、G. Grinstein 和 D. S. Fisher，玻色子局域化与超流体-绝缘体转变，《物理评论B》40，546（1989）。[32] A. Ran¸con 和 N. Dupuis，强关联晶格玻色子的非微扰重整化群方法，《物理评论B》84，174513（2011）。[33] C. Mora 和 Y. Castin，二维弱相互作用玻色气体的基态能量：Bogoliubov 理论之外的首个修正，《物理评论快报》102，180404（2009）。[34] N. Dupuis 和 K. Sengupta，零温玻色系统的非微扰重整化群方法，《欧洲物理快报》80，50007（2007）。[35] C. Wetterich，具有非相对论玻色子的量子相变的泛函重整化，《物理评论B》77，064504 2008（）。[36] S. Floerchinger 和 C. Wetterich，玻色–爱因斯坦凝聚的泛函重整化，《物理评论A》77，053603（2008）。[37] S. Floerchinger 和 C. Wetterich，二维超流玻色气体，《物理评论A》79，013601（2009）。[38] N. Dupuis，零温玻色超流体的红外行为与谱函数，《物理评论A》80，043627（2009）。[39] N. Dupuis，超流性的统一图景：从 Bogoliubov 近似到 Popov 流体动力学理论，《物理评论快报》102，190401（2009）。[40] A. Sinner、N. Hasselmann 和 P. Kopietz，二维相互作用玻色子的谱函数与准粒子阻尼，《物理评论快报》102，120601（2009）。[41] A. Sinner、N. Hasselmann 和 P. Kopietz，零温相互作用玻色子的函数重整化群方法，《物理评论A》82，063632（2010）。[42] A. Ran¸con 和 N. Dupuis，Bose-Hubbard 模型的非微扰重整化群方法，《物理评论B》83，172501（2011）。[43] J. Krieg、D. Strassel、S. Streib、S. Eggert 和 P. Kopietz，二维稀薄玻色气体量子临界点附近的热力学与重整化准粒子，《物理评论B》95，024414（2017）。[44] F. Isaule、M. C. Birse 和 N. R. Walet，函数重整化群在玻色气体中的应用：从线性涨落到流体动力学涨落，《物理评论B》98，144502（2018）。[45] F. Isaule、M. C. Birse 和 N. R. Walet，具有流体动力学低能有效作用量的函数重整化玻色气体热力学，《纽约科学院年刊》412，168006（2020）。[46] B. Delamotte，非微扰重整化群导论，载于 *Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems* 852 2012 ，《物理学讲义》第 No. 卷（Springer，柏林、海德堡，）第 49–132 页。[47] C. Wetterich，有效势的精确演化方程，《物理快报B》301，90（1993）。[48] U. Ellwanger， N 点函数与束缚态的流方程，《Z. Phys. C》62，503（1994）。[49] T. R. Morris，精确重整化群与近似解，《国际现代物理学杂志A》9，2411（1994）。[50] N. M. Hugenholtz 和 D. Pines，相互作用玻色子系统的基态能量与激发谱，《物理评论》116，489（1959）。[51] P. Jakubczyk、N. Dupuis 和 B. Delamotte，重新审视 Kosterlitz–Thouless 转变的非微扰重整化群方法，《物理评论E》90，062105（2014）。[52] M. Pel´aez 和 N. Wschebor，非微扰重整化群中的 O（N）模型有序相，《物理评论E》94，042136（2016）。[53] E. Grossi 和 N. Wink，利用间断 Galerkin 方法解析相变，《SciPost 物理核心》6，071（2023）。[54] F. Ihssen、F. R. Sattler 和 N. Wink，有效势的数值 RG 时间积分：分析与基准测试，《物理评论D》107，114009（2023）。[55] A. Koenigstein、M. J. Steil、N. Wink、E. Grossi、J. Braun、M. Buballa 和 D. H. Rischke，FRG 流动方程的数值流体动力学：零维量子场论作为数值测试案例。I。 O（N）模型，《物理评论D》106，065012（2022）。[56] A. Koenigstein、M. J. Steil、N. Wink、E. Grossi 和 J. Braun，FRG 流动方程的数值流体动力学：零维量子场论作为数值测试案例。II。熵产生与重整化群流的不可逆性，《物理评论D》106，065013 2022（）。[57] J.-P. Blaizot，非微扰重整化群与玻色–爱因斯坦凝聚，载于 *Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems* 852 ，《物理学讲义》第 No. 卷（Springer，柏林、海德堡，2012）第 1–48 页。[58] M. E. Fisher、M. N. Barber 和 D. Jasnow，各向同性系统中的螺旋模量、超流性与标度，《物理评论A》8，1111（1973）。[59] P. M. Chaikin 和 T. C. Lubensky，*Principles of Condensed Matter Physics*（剑桥大学出版社，剑桥，1995）。[60] M. Gr¨ater 和 C. Wetterich，二维线性西格玛模型中的 Kosterlitz–Thouless 相变，《物理评论快报》75，378（1995）。[61] G. von Gersdorff 和 C. Wetterich，Kosterlitz–Thouless 转变的非微扰重整化流与本质标度，《物理评论B》64，054513（2001）。

[62] L. Canet、B. Delamotte、D. Mouhanna 和 J. Vidal，《非微扰重整化群中导数展开的优化》，《物理评论D》67，065004（2003）。[63] I. Balog、H. Chat´e、B. Delamotte、M. Marohni´c 和 N. Wschebor，《非微扰近似对重整化群的收敛性》，《物理评论快报》123，240604（2019）。[64] G. De Polsi、I. Balog、M. Tissier 和 N. Wschebor，《利用非微扰重整化群精确计算 $O(N)$ 普适性类的临界指数》，《物理评论E》101，042113（2020）。[65] M. Schick，《硬核玻色子的二维系统》，《物理评论A》3，1067（1971）。[66] L. P. Pitaevskii 和 A. Rosch，《二维受限原子的呼吸模与隐藏对称性》，《物理评论A》55，R853（1997）。[67] T. Machado 和 N. Dupuis，《从晶格模型中的局部涨落到临界涨落：一种非微扰重整化群方法》，《物理评论E》82，041128（2010）。[68] P. Jakubczyk 和 W. Metzner，《Berezinskii-Kosterlitz-Thouless 相中的纵向涨落》，《物理评论B》95，085113 2017( )。[69] J. Gavoret 和 P. Nozi`eres，《零温度下玻色液体微扰展开的结构》，《纽约科学院年刊》28，349（1964）。[70] F. Pistolesi、C. Castellani、C. Di Castro 和 G. C. Strinati，《零温度玻色系统红外行为的重整化群方法》，《物理评论B》69，024513（2004）。[71] Y. Kagan、B. V. Svistunov 和 G. V. Shlyapnikov，《非弹性过程对弱碰撞二维玻色气体中相变的影响》，《苏联物理学—实验与理论物理》66，314（1987）。[72] S. Pilati、S. Giorgini 和 N. Prokof'ev，《二维和三维相互作用玻色气体的临界温度》，《物理评论快报》100，140405（2008）。[73] M. Holzmann 和 W. Krauth，《准二维受限玻色气体的 Kosterlitz–Thouless 转变》，《物理评论快报》100，190402（2008）。[74] P. Heinen 和 T. Gasenzer，《相互作用玻色气体的复 Langevin 方法》，《物理评论A》106，063308（2022）。[75] P. Heinen 和 T. Gasenzer，《利用复 Langevin 算法模拟 Berezinskii–Kosterlitz–Thouless 转变》，《物理评论A》108，053311（2023）。[76] T. Ozawa 和 S. Stringari，《Berezinskii–Kosterlitz–Thouless 转变处第一声和第二声速度的不连续性》，《物理评论快报》112，025302（2014）。[77] M. Ota 和 S. Stringari，《二维玻色气体中的第二声：从弱相互作用区到强相互作用区》，《物理评论A》97，033604（2018）。[78] P. Christodoulou、M. Galka、N. Dogra、R. Lopes、J. Schmitt 和 Z. Hadzibabic，《BKT 超流体中第一声和第二声的观测》，《自然》594，191（2021）。