arXiv:2611.30413v1 [math.CV] 23 Nov 2026

二阶线性微分方程的复振荡与非振荡结果

Zhi-Tao Wen*和 Shi-Jian Wu †

摘要

本文研究二阶微分方程的振荡与非振荡结果

$$f'' + (H_1 e^z + H_2 e^{\alpha z} + q)f = 0, \tag{+}$$

其中 H_1, $H_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$、$0 < \alpha < 1$和 q是阶小于 1 的整函数。首先，我们证明，如果方程（+）存在无零点非平凡整函数解，那么 $\alpha = 1/2$ 或 $\alpha = 3/4$，由此解决了 [12] 中提出的问题 9。其次，我们证明，如果 q是超越的，或者对于某个整数 $m \geq 2$ 和 $q \equiv 0$，有 $\alpha =$（$2m-1$）/（$2m$），那么方程（+）的每个非平凡整函数解 f都满足 λ（f）$= \infty$。

关键词。复振荡；指数多项式；非振荡；无零点解；收敛指数。

2020年数学主题分类。34M10, 30D35, 34M05.

1 引言

设 A 为整函数，并考虑

$$f'' + A(z)f = 0. \tag{1.1}$$

众所周知，方程 (1.1) 的每个解 f 都是整函数。此外，当且仅当 A 是多项式时，每个整函数解 f 都是有限阶的；当 A 是超越函数时，每个非平凡解 f 都是无限阶的。对于整函数 g，记 $\rho(g)$ 为其增长级，记 $\lambda(g)$ 为其零点的收敛指数。

Heittokangas 等人在 [13] 中强调，关于二阶微分方程 (1.1) 的经典振荡定理表述如下：

*Wen 受国家自然科学基金（编号：12471076）资助

†Wu 为通讯作者

超越的 A 满足什么条件时，(1.1) 才存在非平凡解 f，使得

$$\text{[Q1]. } f \text{ has no zeros}, \qquad \text{[Q2]. } \lambda(f) \geq \rho(A), \qquad \text{[Q3]. } \lambda(f) = \infty?$$

Bank 和 Laine [2] 证明，对于 (1.1) 的任意两个线性无关解 f_1 和 f_2，不等式

$$\max\{\lambda(f_1), \lambda(f_2)\} \geq \rho(A)$$

在 $\rho(A) < \infty$ 为非整数时成立；而当$\rho(A) < 1/2$时，$\max\{\lambda(f_1)\ \lambda(f_2)\} = \infty$ 成立。此外，他们猜想

$$\max\{\lambda(f_1), \lambda(f_2)\} = \infty$$

当 $\rho(A)$ 为非整数时成立，这被称为**Bank–Laine 猜想**。后来，Bergweiler 和 Eremenko 在 [6] 中否定了这一猜想。

当 A 为特定整函数时，研究经典振荡结果更有意义。一个经常被研究的特殊情形由以下类型的方程给出:

$$f'' + \big(Re^P + Q\big)f = 0,$$

其中 R, P 和 Q 均为整函数；关于 [Q1]-[Q3] 的结果参见 [4], [1], [5], [7], [20]。当 $A = e^{P_1} + e^{P_2} + Q$ 时，(1.1) 的另一种特殊情形也曾被研究，即

$$f'' + \big(e^{P_1(z)} + e^{P_2(z)} + Q(z)\big)f = 0, \tag{1.2}$$

其中 P_1 和 P_2 是非常数多项式，满足 e^{P_1} 和 e^{P_2} 在 $\mathbb{C}$上线性无关，并且

$$P_1(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \quad \text{and} \quad P_2(z) = b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0,$$

并且 Q 是一个阶为 $\rho(Q) < n$的整函数。记 $\alpha := a_n/b_n$。[16, 定理 3.2], [15, 定理 1], [13, 定理 2.1]和 [14, 推论 3]中的结果可概括如下。

定理 A. 设 $f \not\equiv 0$ 是(1.2)的一个解，并且 e^{P_1} 和 e^{P_2} 在 $\mathbb{C}$上线性无关。以下结论成立。

A. 若 $\alpha = 1$，则 $\lambda(f) \geq n$。B. 若 $\alpha < 0$ 或 α 不是实数，则 $\lambda(f) = \infty$。C. 若 $0 < \alpha < 1/2$，则 $\lambda(f) \geq n$。D. 若 $3/4 < \alpha < 1$ 且 $Q \equiv 0$，则 $\lambda(f) \geq n$。

E. 若 $P_1 = \alpha P_2$， Q 是一个多项式，其次数 $Q + 2 < 2n$ 对于 $n \geq 2$，且 $Q \equiv 0$ 对于 $n = 1$，并且

$$0 < \alpha < \frac{1}{2} \quad or \quad \frac{2m-1}{2m} < \alpha < \frac{2m+1}{2(m+1)}$$

对于某个 $m \in \mathbb{N}$，则 $\lambda(f) = \infty$。

定理 A 中的结果从几何角度表明，若点 $0, a_n, b_n$ 共线，且 a_n, b_n 位于原点同侧，则可能出现 [Q1] 和 [Q2]。[15] 中的例子表明，当 $\alpha = 1/2$ 或 $\alpha = 3/4$ 时，方程 (1.2) 有无零点解。此外，Ishizaki 在 [15] 提出一个问题：在定理 A 的结论 C 和 D 中，能否用 $\lambda(f) = \infty$ 替换 $\lambda(f) \geq n$？

这启发　我们研究在 α 满足以下条件时，方程 (1.2) 是否可能存在无零点解

$$\frac{2m-1}{2m} < \alpha < \frac{2m+1}{2(m+1)} \tag{1.3}$$

对于某个 $m \in \mathbb{N}$ 和 $Q \not\equiv 0$。Heittokangas 等人在 [13] 中重点研究了这一问题，并考虑了与 [Q1] 有关的情形 $n = 1$。

定理 B。设 f 是方程

$$f'' + (H_1 e^z + H_2 e^{\alpha z} + q) f = 0, \tag{1.4}$$

其中 H_1、$H_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和 q 是阶为 $\rho(q) < 1$ 的整函数。如果在 （1.3） 中 $m = 1$ 或 $m = 2$，那么 f 没有无零点解。

在完成定理 B 的冗长证明后，[13], Heittokangas 等人指出，该结果或许可以推广到一般情形。

> 看来在一般情形下，（1.3） 中的 $m \in \mathbb{N}$ 也不存在 （1.4） 的无零点解，但本文所采用的方法每次只能处理一个特定区间，并且随着 m。 的增加，所需考虑的内容呈指数增长。

这促使我们研究：对于满足（1.3）的任意 $m \in \mathbb{N}$ 和 α，方程（1.4）是否存在无零点解。综述论文 [12]，将其表述为问题 9，该问题与 [Q1] 密切相关。

问题：对于 $m \in \mathbb{N}$，证明如果 α 满足 (1.3)，则 (1.4) 不存在无零点解。求出无零点解的一般形式，条件为

$$\alpha = \frac{2m-1}{2m}, \qquad m \geq 3.$$

本文的主要目标是研究方程 (1.4) 的非平凡整函数解的零点收敛指数，并解决 [12] 中提出的问题 9。我们的定理陈述如下。

定理 1.1。 如果方程 (1.4) 存在无零点非平凡整函数解，那么 $\alpha = 1/2$或 $\alpha = 3/4$。此外，

- 若 $\alpha = \frac{1}{2}$，且 f 是 (1.4) 的无零点非平凡整函数解，则

$$H_1 = -a^2, \qquad H_2 = -a\left(2c + \frac{1}{2}\right), \qquad q \equiv -c^2,$$

其中 a、$c \in \mathbb{C}$ 满足 $a \neq 0$ 和 $c \neq -1/4$。无零点解为

$$f = K \exp\left(cz + 2ae^{\frac{z}{2}}\right),$$

其中 $K \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。

- 若 $\alpha = \frac{3}{4}$，且 f 是 (1.4) 的无零点非平凡整函数解，则

$$H_1 = -16c^4, \qquad H_2 = 8c^3, \qquad q \equiv -\frac{1}{64},$$

其中 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。无零点解为

$$f = K \exp\left(-\frac{z}{8} - 8c^2 e^{\frac{z}{2}} + 4ce^{\frac{z}{4}}\right),$$

其中 $K \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。

与 [Q3] 相关的另一个问题是，在关于 A 的什么条件下，(1.4) 的每个非平凡整函数解都满足 $\lambda(f) = \infty$。下面的结果表明，在几乎所有情况下，(1.4) 的每个非平凡整函数解都满足 $\lambda(f) = \infty$。

定理 1.2。 假设 q 是一个阶为 $\rho(q) < 1$的超越整函数，并且 $\alpha \in \mathbb{R}$ 满足 $0 < \alpha < 1$。那么，(1.4) 的每个非平凡解 f 都满足$\lambda(f) = \infty$。

根据 [22, 第 1981], 页中的陈述，Zhang 通过使用 [19] 中的方法证明，当 q 是一个非恒定多项式且$\alpha \in \mathbb{Q}$ 满足 $0 < \alpha < 1$ 时，方程 (1.4) 的所有非平凡解都满足 $\lambda(f) = \infty$。结合定理 1.2，我们得到以下推论。

推论 1.3. 设 q 是一个阶为 $\rho(q) < 1$的非常值整函数，且 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 满足 $0 < \alpha < 1$。那么，(1.4) 的每个非平凡解 f 都满足$\lambda(f) = \infty$。

注意，当 q 是 (1.4) 中的常数时，可能会出现 [Q1], [Q2] 以及 [Q3]，参见例如[13, 例 1.1]。下面我们给出 (1.4) 在特殊情形下的一个复振荡结果，该结果与 [Q3]有关。

定理 1.4。 设 $m \in \mathbb{N}^+$ 且 $\alpha = \frac{2m-1}{2m}$。假设 $m \geq 2$ 且 $q = 0$。则方程 (1.4) 的每个非平凡解 f 都满足 $\lambda(f) = \infty$。

我们在此指出，定理 1.4 中的假设 $m \geq 2$ 是尖锐的。例如，整函数 $f(z) = \exp(e^{2iz})$ 满足

$$f'' + (4e^{4iz} + 4e^{2iz})f = 0.$$

显然， $\lambda(f) = 0 < \infty$。此外， $q \equiv 0$ 不可能去掉。例如，微分方程

$$f'' - \left(\frac{1}{16}e^z + \frac{1}{8}e^{3z/4} + \frac{25}{64}\right) f = 0$$

有一个整函数解 $f(z) = \left(1 - e^{z/4}\right) \exp\left(\frac{1}{2}e^{z/2} + e^{z/4} - \frac{5}{8}z\right)$，其中 $\lambda(f) = 1 < \infty$。我们还可以利用 [22, 定理 4.4] 构造更多例子。

2 定理 1.1 的证明

为了证明定理 1.1，我们先回顾一个关键引理，该引理出自 [23, 定理 2.1]。现陈述如下。

引理 2.1. 设 $B_1 B_2 \neq 0$、 $0 < \alpha < 1$，且 q 是一个阶为 $\rho(q) < 1$ 的整函数。若整函数 u 是下列方程的解

$$u^2 + u' + q = B_1 e^z + B_2 e^{\alpha z},$$

then

$$u(z) = \gamma(z) + \sum_{j=0}^{m} a_j e^{\mu_j z},$$

其中， γ 是一个阶为 $\rho(\gamma) < 1$的整函数， a_0、...、 a_m 是非零常数， $\mu_j = \frac{1}{2} - j(1-\alpha)$、 $j = 0$、...、 m，并且

$$m = \left\lceil \frac{1}{2(1-\alpha)} \right\rceil - 1,$$

其中， $\lceil a \rceil$ 是大于或等于 a的最小整数。

假设 f 是方程 (1.4) 的无零点非平凡整函数解。存在一个整函数 g ，使得 $f = e^g$。记

$$F := \frac{f'}{f} = g'.$$

因此可得

$$F' + F^2 = -H_1 e^z - H_2 e^{\alpha z} - q. \tag{2.1}$$

利用引理 2.1 和 (2.1)，我们有

$$F = \gamma(z) + \sum_{j=0}^{m} a_j e^{\mu_j z},$$

其中 $\mu_j = \frac{1}{2} - j(1-\alpha)$ 和 $a_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，且 γ 是阶为 $\rho(\gamma) < 1$ 的整函数。显然，我们看到 $0 < \mu_m < \cdots < \mu_1 < \mu_0 = \frac{1}{2}$。此外，

$$\mu_j - \alpha = \frac{1}{2} - j(1-\alpha) - \alpha = -\frac{1}{2} + (1-j)(1-\alpha) < 0 \tag{2.2}$$

对于 $1 \le j \le m$。

$$F' + F^2 = \gamma' + \gamma^2 + \sum_{j=0}^{m} a_j(2\gamma + \mu_j)e^{\mu_j z} + \sum_{j=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{m} a_j a_\ell e^{(\mu_j+\mu_\ell)z} \tag{2.3}$$

下面分三种情形讨论 (2.3)。

情形 1： $m \ge 2$。显然，我们有 $\alpha > 3/4$。由于 $\mu_m < \mu_j$ 对于 $0 \le j \le m-1$，且 $\mu_m < \mu_j + \mu_\ell$ 对于 $0 \le j,\ \ell \le m$，利用 [21, 定理 5.1] 和 (2.1)-(2.3)，我们得到

$$2\gamma + \mu_m = 0 \quad \text{and} \quad \gamma^2 + \gamma' = -q.$$

这意味着 γ 和 q 是常数。因此，$e^{\mu_j z}$ 的系数不可能对于 $j = 0$，.....，$m-1$ 消失。再次利用 [21, 定理 5.1] 和 (2.3)，我们有

$$\mu_{m-1} = 2\mu_m.$$

显然，可得

$$\delta := 1 - \alpha = \frac{1}{2(m+1)}.$$

记 $N = m+1$ 和 $x = e^{\delta z}$。因此，我们可得

$$e^{\mu_j z} = e^{\left(\frac{1}{2} - j(1-\alpha)\right)z} = e^{(N-j)\delta z} = x^{N-j}$$

对于 $j = 0, \ldots, N-1$。我们将 F改写为

$$F(z) = \gamma + \sum_{j=0}^{m} a_j e^{\mu_j z} = \gamma + \sum_{j=0}^{m} a_j x^{N-j} = \sum_{j=0}^{N} r_j x^j =: R(x), \tag{2.4}$$

其中 $r_0 = \gamma$和 $r_j = a_{N-j} \neq 0$对于 $j = 1, \ldots, N$。将 (2.4) 代入 (2.1)，得 e

$$R(x)^2 + \delta x R'(x) = -H_1 x^{2N} - H_2 x^{2N-1} - q. \tag{2.5}$$

由 (2.4) 和 (2.5) 可得

$$r_N^2 = -H_1, \quad 2r_N r_{N-1} = -H_2, \quad r_0^2 = -q.$$

此外，记 $c_n = \sum_{j+k=n} r_j r_k$。因此可得

$$c_n = 0 \quad \text{for} \quad N+1 \leq n \leq 2N-2, \tag{2.6}$$

and

$$c_n + \delta r_n n = 0 \quad \text{for} \quad 1 \leq n \leq N. \tag{2.7}$$

由 (2.6) 通过数学归纳法可得

$$r_{N-k} = \frac{1}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k-1}} \binom{2k-2}{k-1} \frac{r_{N-1}^k}{r_N^{k-1}} \tag{2.8}$$

对于 $k = 2$，……，$N-1$。在 (2.7) 中取 $n = 1$，2，3，可得

$$r_1^2 = 2r_0 r_2, \quad r_2^2 = r_1 r_3. \tag{2.9}$$

子情形 $N \geq 5$。特别地，若在 (2.8) 中 $k = N-1$，$N-2$，$N-3$，则

$$\frac{r_2^2}{r_1 r_3} = \frac{(N-1)(2N-7)}{(N-2)(2N-5)}.$$

由（2.9）可知，$(N-1)(2N-7) = (N-2)(2N-5)$，这是不可能的。

Su情形 $N = 4$。由（2.6）可知，对于 $5 \leq n \leq 6$，有 $c_n = 0$。因此

$$r_1 r_4 + r_2 r_3 = 0, \quad r_3^2 + 2r_2 r_4 = 0.$$

由（2.9）可得 $r_2 = 0$，这是不可能的。

子情形 $N = 3$。由（2.6）可知 $c_4 = 0$。因此

$$2r_1 r_3 + r_2^2 = 0.$$

由（2.9）可得 $r_2 = 0$，这是不可能的。

因此，这与 $m \geq 2$ 矛盾。

Case 2: $m=1$。显然，$1/2<\alpha\leq 3/4$。由 (2.1) 和 (2.3)，我们得到 t

$$\gamma'+\gamma^2+a_0\left(2\gamma+\frac{1}{2}\right)e^{\frac{z}{2}}+a_1(2\gamma+\mu_1)e^{\mu_1 z}+a_0^2e^z+2a_0a_1e^{\alpha z}+a_1^2e^{2\mu_1 z}=-H_1e^z-H_2e^{\alpha z}-q.$$

利用 [21, 定理5.1], ，我们得到 $\alpha=3/4$，并且

$$2\gamma+\mu_1=0,\quad a_0^2=-H_1,\quad a_0\left(2\gamma+\frac{1}{2}\right)+a_1^2=0,\quad 2a_0a_1=-H_2,\quad \gamma'+\gamma^2=-q.$$

因此，得到

$$H_1=-16c^4,\qquad H_2=8c^3,\qquad q\equiv-\frac{1}{64},$$

其中 $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$。无零点解为

$$f=K\exp\left(-\frac{z}{8}-8c^2e^{\frac{z}{2}}+4ce^{\frac{z}{4}}\right),$$

其中 $K\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$。

情形3： $m=0$。显然，$0<\alpha\leq 1/2$。由(2.1)和(2.3)，我们得到

$$\gamma'+\gamma^2+a_0\left(2\gamma+\frac{1}{2}\right)e^{\frac{z}{2}}+a_0^2e^z=-H_1e^z-H_2e^{\alpha z}-q.$$

利用 [21, 定理5.1], ，我们得到 $\alpha=1/2$，并且

$$a_0^2=-H_1,\quad a_0\left(2\gamma+\frac{1}{2}\right)=-H_2,\quad \gamma'+\gamma^2=-q.$$

因此，得到

$$H_1=-a^2,\qquad H_2=-a\left(2c+\frac{1}{2}\right),\qquad q\equiv-c^2,$$

其中 $a,c\in\mathbb{C}$ 使得 $a\neq 0$ 且 $c\neq -1/4$。无零点解为

$$f=K\exp\left(cz+2ae^{\frac{z}{2}}\right),$$

其中 $K\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$。证明至此完成。

3 定理1.2的证明

反设 $\lambda(f) < \infty$。则

$$f = \Pi e^{g},$$

其中， Π 是有限阶整函数，且根据 [8,引理2.10] 和 [17, 定理 1]， g 是一个阶为1的整函数。令 $u = g'$。因此， $\rho(u) = 1$。将其代入（1.4），得到

$$u^2 + u' + 2\frac{\Pi'}{\Pi}u + \frac{\Pi''}{\Pi} + H_1 e^{z} + H_2 e^{\alpha z} + q = 0. \tag{3.1}$$

利用 [18, 推论5.13], ，存在 $K > 0$ 和一个 R-集 E ，使得对所有充分大的 $z \notin E$，有

$$\left|\frac{\Pi'}{\Pi}\right| + \left|\frac{\Pi''}{\Pi}\right| + \left|\frac{u'}{u}\right| \leq |z|^{K}. \tag{3.2}$$

注意，以下 $K > 0$ 表示一个常数，且每次出现时不一定相同。

首先，考虑 u 在区间 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 内的渐近增长。由（3.1）和（3.2）可知，存在 $K > 0$ ，使得对所有充分大的 $z \notin E$,

$$|H_1 e^{z} + H_2 e^{\alpha z} + q| \leq |u|^2 + |u'| + 2\left|\frac{\Pi'}{\Pi}u\right| + \left|\frac{\Pi''}{\Pi}\right| \leq |u|^2 + |z|^{K}|u| + |z|^{K}. \tag{3.3}$$

假设存在一个序列 z_n ，满足 $|z_n| \to \infty$ ，使得 $|u(z_n)| \leq |z_n|^{K}$。那么对所有充分大的 $z_n \notin E$，由（3.3）可得

$$|H_1 e^{z_n} + H_2 e^{\alpha z_n} + q(z_n)| = O(|z_n|^{K}),$$

这是不可能的。因此，对于任意常数 N 以及所有充分大的 $z \notin E$，有

$$|u(z)| > |z|^{N}.$$

再次由（3.3）可得，所有充分大的 $z \notin E$

$$|H_1 e^{z} + H_2 e^{\alpha z} + q| \leq |u|^2(1 + o(1)).$$

类似地，对于所有充分大的 $z \notin E$，可得

$$|H_1 e^{z} + H_2 e^{\alpha z} + q| \geq |u|^2(1 - o(1)).$$

因此，我们得到在区间 $-\frac{\pi}{2} < \arg z = \theta < \frac{\pi}{2}$ 内，

$$|u(z)| \asymp e^{\frac{1}{2}|z|\cos\theta} \quad \text{as } r \to \infty, \tag{3.4}$$

对所有充分大的 $z \notin E$ 均成立。

接下来，我们断言在区间 $\frac{\pi}{2} < \arg z = \theta < \frac{3\pi}{2}$ 内，对任意 $\varepsilon > 0$,

$$|u(z)| = O\left(e^{r^{\rho(q)+\varepsilon}}\right), \tag{3.5}$$

对所有充分大的 $z \notin E$ 均成立。否则，存在一个序列 $\{z_n\}$，其各项均在 E 之外，且满足 $|z_n| \to \infty$，使得

$$|u(z_n)| > e^{|z_n|^{\rho(q)+\varepsilon}} > \frac{1}{4}|z_n|^K.$$

由 (3.1) 和 (3.2) 可得

$$\frac{1}{4}|u(z_n)|^2 < |u(z_n)|^2 - |u'(z_n)| - 2|z_n|^K|u| - |z_n|^K \le |H_1 e^{z_n} + H_2 e^{\alpha z_n} + q(z_n)| \le e^{|z_n|^{\rho(q)+\varepsilon}},$$

这就产生了矛盾。因此，我们的断言 (3.5) 成立。

在下文中，我们令

$$\delta = 1 - \alpha, \qquad m = \min\left\{ j \ge 0 : \delta \ge \frac{1}{2(j+1)} \right\}.$$

记 $a^2 = -H_1$ 和 $\mu_j = 1/2 - j\delta$，并令

$$R(z) := a \sum_{j=0}^{m} \binom{1/2}{j} \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^j e^{\mu_j z} = \sum_{j=0}^{m} c_j e^{\mu_j z}. \tag{3.6}$$

此外，令

$$\begin{aligned} E(z) :&= R(z)^2 + H_1 e^z + H_2 e^{\alpha z} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} c_j c_k e^{(\mu_j+\mu_k)z} + H_1 e^z + H_2 e^{\alpha z} \\ &= \sum_{n=0}^{2m} \left(\sum_{\substack{j+k=n \\ 0\le j,k\le m}} c_j c_k \right) e^{(1-n\delta)z} + H_1 e^z + H_2 e^{\alpha z} \\ &= \sum_{n=0}^{2m} A_n e^{(1-n\delta)z} + H_1 e^z + H_2 e^{\alpha z}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

由于 $A_0 = a^2 = -H_1$ 和 $A_1 = -H_2$，并且

$$\sum_{j+k=n} \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{\frac{1}{2}}{k} = 0$$

对于 $2 \le n \le m$，请参见 [9, 第 84], 页，我们有

$$E(z) = \sum_{n=m+1}^{2m} A_n e^{(1-n\delta)z}.$$

我们注意到，对于 $n \ge m+1$

$$1 - n\delta \le 1 - (m+1)\delta \le \frac{1}{2}.$$

利用 (3.6) 和 (3.7)，我们将 (3.1) 改写为

$$(u-R)(u+R) + u' + 2\frac{\Pi'}{\Pi}u + \frac{\Pi''}{\Pi} + q + E = 0. \tag{3.8}$$

由于 E 是一个 R-集，对于一条射线与某个 R-集的无穷多个圆盘相交的角，其角集的线性测度为零，参见 [18, 引理 5.9]。根据 $\rho(q) < 1$，我们可以选择足够小的 ε，使得 $\pi/2 \pm \varepsilon$, $3\pi/2 \pm \varepsilon$ 在足够大的 z下不与 E 相交，从而

$$\rho(q) + \varepsilon < \frac{\pi}{\pi + 2\varepsilon} < 1. \tag{3.9}$$

对于 $|\arg\, z - \pi| \le \pi/2 - \varepsilon$，其中 ε 在 (3.9) 中定义，我们得到，对于所有充分大的 z,

$$\log^+ |R(z)| + \log^+ |E(z)| + \log^+ |q(z)| = O(|z|^{\rho(q)+\varepsilon}). \tag{3.10}$$

对于 $|\arg\, z| \le \pi/2 - \varepsilon$，其中 ε 在 (3.9) 中定义，我们看到，在此扇区内,

$$|R(z)| = |a|e^{\Re z/2}(1 + o(1)), \qquad |E(z)| + |q(z)| = O(|R(z)|). \tag{3.11}$$

记 $G := \{z \notin E\colon |\arg\, z| \le \pi/2 - \varepsilon\}$。由方程 (3.8)、(3.2) 和 (3.11) 可得，存在 $K > 0$ 使得

$$|(u(z) - R(z))(u(z) + R(z))| \le |z|^K \big(|u(z)| + |R(z)| + 1\big)$$

对所有满足 $z \in G$ 的充分大的 z。由于

$$|u| + |R| \le |u - R| + |u + R|, \qquad \max\{|u-R|, |u+R|\} \ge |R|,$$

并除以较大的因子，得到

$$\min\{|u-R|, |u+R|\} \le 3|z|^K,$$

对于所有满足 $z \in G$ 的充分大的 z，因此，存在 $K > 0$ 使得

$$|u(z) - R(z)| \le |z|^K \quad \text{or} \quad |u(z) + R(z)| \le |z|^K \tag{3.12}$$

对于所有满足 $z \in G$ 的充分大的 z。令

$$h(z) = |u - R| - |u + R|.$$

显然， $h(z)$ 是一个实连续函数。此外，由引理 A.2 可知，通过选取适当的 R-集 E, G 是一个连通集。根据 (3.11)，对于所有 $z \in G$，(3.12) 中的两个不等式不可能同时成立，否则便得到 $2|R| \le |u - R| + |u + R| \le 2|z|^K$，这与 (3.11) 矛盾。这表明对于所有 $z \in G$，$h(z)$ 均不为零。记

$$E_1 := \{z \in G : |u(z) - R(z)| \le |z|^K\}, \quad E_2 := \{z \in G : |u(z) + R(z)| \le |z|^K\}.$$

根据以上讨论，我们有 $G = E_1$ 或 $G = E_2$。

假设 $G = E_1$。由 (3.2)、(3.8) 和 (3.10)，可知

$$|u - R| = O\left(e^{|z|^{\rho(q)+\varepsilon}}\right)$$

对于扇形 $\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{3z}{2}$ 中所有充分大的 $z \notin E$。由于存在 $K > 0$ 使得

$$|u - R| = O(|z|^K)$$

对于扇形 $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{z}{2}$ 中所有充分大的 $-z \notin E$。利用 Phragmén-Lindelöf 定理，对于任意 $0 \le \arg z < 2\pi$，我们得出

$$|u - R| = O\left(e^{|z|^{\rho(q)+\varepsilon}}\right)$$

对所有充分大的 z，利用 (3.9) 以及该扇形内的 Phragmén–Lindelöf 定理，见 [11, 定理 4.11], ，我们发现 $u - R$ 是一个多项式，因为存在 $K > 0$ 使得

$$|u - R| = O(|z|^K)$$

沿着辐角为 $z = \pi/2 - \varepsilon$ 和 $z = 3\pi/2 + \varepsilon$的射线，对所有充分大的 z 均成立。因此， u和 u' 在扇形 $\frac{\pi}{2} < \arg\pi < \frac{3\pi}{2}$ 内的增长均至多为多项式级。由 (3.1) 和 (3.2), 可得存在 $K > 0$ 使得

$$|q| = O(|z|^K)$$

对所有满足 $\frac{\pi}{2} \le \arg\pi \le \frac{3\pi}{2}$ 的充分大 $z \notin E$ 均成立。根据 (3.9) 和 Phragmén–Lindelöf 定理，见 [11, 定理 4.11], ，我们得出 q 是一个多项式。这就产生了矛盾。

同样地，如果 $G = E_2$，我们也会得到矛盾。因此，我们证明了所作的断言。

4 定理 1.4 的证明

假设方程 (1.4) 满足 $q=0$ 和 $\alpha=(2m-1)/(2m)$，其中 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $m\geq 2$，且存在一个非平凡解 f 使得 $\lambda(f)<\infty$。令

$$z=2mw,\qquad y(w)=f(2mw).$$

记 $y'=dy/dw$。我们有 y 是一个解

$$y''(w)+4m^2\big(H_1e^{2mw}+H_2e^{(2m-1)w}\big)y(w)=0. \tag{4.1}$$

显然，方程 (4.1) 的系数是周期为 $2\pi i$ 的非恒定整函数，并且是关于 e^w 的多项式。因此，利用 [3, 定理 1]，我们可以得到 f 的表示式。

引理 4.1。设 $A(z)$ 是一个周期为 ω、关于 $e^{\alpha z}$ 为有理函数的非恒定周期整函数，其中 $\alpha=2\pi i\omega^{-1}$。设 $f(z)\not\equiv 0$ 是方程 $f''+A(z)f=0$ 的一个解，且 $f(z)$ 的零点序列的收敛指数有限。则有以下结论：

- 若 $f(z)$ 与 $f(z+\omega)$ 线性相关，则

$$f(z)=\Psi(e^{\alpha z})\exp\left(\sum_{j=q}^{m}d_je^{\alpha jz}+vz\right),$$

其中 $\Psi(\rho)$ 是一个所有根均为单的非零根的多项式，$m,q\in\mathbb{Z}$，$m\geq q$，$v,d_q,\ldots,d_m\in\mathbb{C}$，$d_j\neq 0$ 对某个 $j\neq 0$ 成立。

- 如果 $f(z)$ 和 $f(z+\omega)$ 线性无关，那么

$$f(z)=\Psi(e^{\frac{\alpha}{2}z})\exp\left(e^{\frac{\alpha}{2}z}\sum_{j=q}^{m}d_je^{\alpha jz}+vz\right),$$

其中 $\Psi(\rho)$ 是一个所有根均为单的非零根的多项式，$m,q\in\mathbb{Z}$，$m\geq q$，$v,d_q,\ldots,d_m\in\mathbb{C}$，$d_j\neq 0$，其中某个 j。

接下来，我们分以下两种情况证明这一断言。

情形 1。$y(w)$ 和 $y(w+2\pi i)$ 线性无关。根据引理 4.1，我们有

$$y(w)=\Psi\left(e^{\frac{w}{2}}\right)\exp\left(e^{\frac{w}{2}}\sum_{j=\ell}^{s}d_je^{jw}+\nu w\right),$$

其中 $\Psi(z)$ 是一个所有根均为单根且非零的多项式， $\ell \le s$ 是整数，并且 d_ℓ、……、 d_s, $\nu \in \mathbb{C}$ 使得 $d_\ell d_s \neq 0$。因此，

$$\begin{aligned}\frac{y''}{y} = &\frac{e^{\frac{w}{2}}}{4}\frac{\Psi'(e^{\frac{w}{2}})}{\Psi(e^{\frac{w}{2}})} + \frac{e^w}{4}\frac{\Psi''(e^{\frac{w}{2}})}{\Psi(e^{\frac{w}{2}})} + \frac{1}{4}\sum_{j=\ell}^{s} d_j(2j+1)^2(e^{\frac{w}{2}})^{2j+1} \\ &+ \frac{e^{\frac{w}{2}}\Psi'(e^{\frac{w}{2}})}{\Psi(e^{\frac{w}{2}})}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=\ell}^{s} d_j(2j+1)(e^{\frac{w}{2}})^{2j+1} + \nu\right) + \left(\frac{1}{2}\sum_{j=\ell}^{s} d_j(2j+1)(e^{\frac{w}{2}})^{2j+1} + \nu\right)^2.\end{aligned}$$

若 $s + \frac{1}{2} \le 0$，则当 $w \to +\infty$ 时， $\sum_{j=\ell}^{s} d_j(j+\frac{1}{2})e^{(j+1/2)w}$ 有界。因此，当 $w \to +\infty$ 时， $\frac{y''}{y}$ 有界。这与当 $w \to +\infty$ 时的渐近行为 $\frac{y''}{y} \sim -4m^2H_1e^{2mw}$ 矛盾。因此，我们必有 $s + \frac{1}{2} > 0$。由于 $d_s \neq 0$，当 $w \to +\infty$ 时的主导项为 $\frac{y''}{y} \sim \left(s+\frac{1}{2}\right)^2 d_s^2 e^{(2s+1)w}$。与 $\frac{y''}{y} \sim -4m^2(H_1e^{2mw})$ 比较，可得 $2s+1 = 2m$。这是不可能的，因为左边是奇数，右边是偶数。

情形 2。 $y(w)$ 和 $y(w+2\pi i)$ 线性相关。根据引理 4.1，我们有

$$y(w) = \Psi(e^w)\exp\left(\sum_{j=\ell}^{s} d_j e^{jw} + \nu w\right),$$

其中 $\Psi(z)$ 是一个所有根均为简单非零根的多项式， $\ell \le s$ 是整数，并且 d_ℓ、……、 d_s, $\nu \in \mathbb{C}$ 使得 $d_\ell d_s \neq 0$。因此，

$$\begin{aligned}\frac{y''}{y} =&e^w\frac{\Psi'(e^w)}{\Psi(e^w)} + e^{2w}\frac{\Psi''(e^w)}{\Psi(e^w)} + \sum_{j=\ell}^{s} j^2 d_j e^{jw} \\ &+2e^w\frac{\Psi'(e^w)}{\Psi(e^w)}\left(\sum_{j=\ell}^{s} j d_j e^{jw} + \nu\right) + \left(\sum_{j=\ell}^{s} j d_j e^{jw} + \nu\right)^2. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

假设 $\ell < 0$。那么当 $w \to -\infty$ 时， $\frac{y''}{y}$ 无界，这与当 $w \to -\infty$ 时 $\frac{y''}{y} \sim -4m^2H_2e^{(2m-1)w} \to 0$ 的渐近行为矛盾。因此，我们必有 $\ell \ge 0$ 和 $v^2 = 0$。不失一般性，我们假设 $\ell > 0$。

假设 $s = \ell$。由（4.2）可得 $2s = 2m$ 和 $s = 2m-1$。唯一的可能性是 $m = 1$。这与我们的假设矛盾。因此，可得 $s - \ell \ge 1$。由于 $w \to +\infty$,

$$\frac{y''}{y} = s^2d_s^2e^{2sw} + 2s(s-1)d_sd_{s-1}e^{(2s-1)w} + O(e^{(2s-2)w}).$$

与方程（4.1）比较可得 $s=m$ 和 $d_{s-1}\neq 0$。因此，

$$\left(\sum_{j=\ell}^{s} jd_j e^{jw}\right)^2 + 4m^2(H_1e^{2mw} + H_2e^{(2m-1)w}) = O(e^{mw}),$$

如 $w\to+\infty$。利用 $(1+x)^{1/2}=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{j}x^j$ 对于 $|x|<1$ 并令 $a^2=-H_1$，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=\ell}^{s} jd_j e^{jw} &= 2mae^{mw}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{H_2}{H_1}e^{-w}+O(e^{-mw})\right)^n \\ &= 2mae^{mw}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{n}\binom{n}{k}\left(\frac{H_2}{H_1}e^{-w}\right)^{n-k}\left(O(e^{-mw})\right)^k, \qquad (4.3)\end{aligned}$$

如 $w\to+\infty$。由于 $0<\ell\leq m$，比较 (4.3) 中 e^w 的正幂，得到 s

$$jd_j = 2ma\binom{\frac{1}{2}}{m-j}\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{m-j} \qquad (4.4)$$

对于 $j=\ell,\ \ldots,\ m=s$。

设 $s=m=2p$。显然，$p\geq 1$。利用 (4.4)，我们得到 $\left(\sum_{j=\ell}^{m} jd_j e^{jw}\right)^2$ 中 e^{mw} 的系数为

$$2\sum_{t=1}^{p-1} t(m-t)d_t d_{m-t} + (pd_p)^2 = 8m^2a^2\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^m\left(\sum_{t=1}^{p-1}\binom{\frac{1}{2}}{m-t}\binom{\frac{1}{2}}{t}+\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{p}^2\right).$$

此外，[9, 第 84]页给出

$$0=\sum_{t=0}^{2p}\binom{\frac{1}{2}}{m-t}\binom{\frac{1}{2}}{t} = 2\binom{\frac{1}{2}}{2p}+\binom{\frac{1}{2}}{p}^2+\sum_{t=1}^{p-1}\binom{\frac{1}{2}}{m-t}\binom{\frac{1}{2}}{t}+\sum_{t=p+1}^{2p-1}\binom{\frac{1}{2}}{m-t}\binom{\frac{1}{2}}{t}.$$

由此可得

$$\sum_{t=1}^{p-1}\binom{\frac{1}{2}}{m-t}\binom{\frac{1}{2}}{t}+\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{p}^2 = -\binom{\frac{1}{2}}{2p} = -\binom{\frac{1}{2}}{m}.$$

假设 $s=m=2p+1$。显然，$p\geq 1$。利用 (4.4)，我们得到 $\left(\sum_{j=\ell}^{m} jd_j e^{jw}\right)^2$ 中 e^{mw} 的系数为

$$2\sum_{t=1}^{p} t(m-t)d_t d_{m-t} = 8m^2a^2\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^m\sum_{t=1}^{p}\binom{\frac{1}{2}}{m-t}\binom{\frac{1}{2}}{t}.$$

此外， [9, 第 84] 页给出

$$0=\sum_{t=0}^{2p+1}\binom{\frac{1}{2}}{m-t}\binom{\frac{1}{2}}{t}=2\binom{\frac{1}{2}}{2p+1}+\sum_{t=1}^{p}\binom{\frac{1}{2}}{m-t}\binom{\frac{1}{2}}{t}+\sum_{t=p+1}^{2p}\binom{\frac{1}{2}}{m-t}\binom{\frac{1}{2}}{t}.$$

由此可得

$$\sum_{t=1}^{p}\binom{\frac{1}{2}}{m-t}\binom{\frac{1}{2}}{t}=-\binom{\frac{1}{2}}{2p+1}=-\binom{\frac{1}{2}}{m}.$$

比较 (4.2) 中 e^{sw} 的系数，我们得出

$$m^2d_m+2dmd_m=\binom{\frac{1}{2}}{m}8m^2a^2\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^m,$$

其中 $d=\deg\Psi$。因此，

$$d_m\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^m=\frac{m+2d}{2m\binom{\frac{1}{2}}{m}}\in\mathbb{Q}.$$

令 $x=H_1/H_2e^w=e^w/\tau$，且 $g(x)=y(w(x))$。假设 $g(0)=\Psi(0)=1$。显然， $g(x)$ 是一个阶为 $s=m$ 的指数多项式，且 g 是下列方程的解

$$x^2g''(x)+xg'(x)-m^2(d_m\tau^m)^2(x^{2m}+x^{2m-1})g(x)=0, \tag{4.5}$$

其中 $g'(x)=\frac{dg}{dx}$。将 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_nx^n$ 代入 (4.5)，得到 $\gamma_0=g(0)=1$,$\gamma_k=0$ 对于 $1\le k\le 2m-2$,

$$\gamma_{2m-1}=\frac{m^2d_m^2\tau^{2m}}{(2m-1)^2},$$

and

$$\gamma_k=\frac{m^2d_m^2\tau^{2m}}{k^2}\left(\gamma_{k-2m}+\gamma_{k-2m+1}\right)\quad\text{for } k\ge 2m.$$

因此可得，对于任意 $k\in\mathbb{N}^+$， γ_k 都是一个非负有理数，并且当 $x\to+\infty$ 时， $g(x)\to+\infty$ 。

假设 m 是偶数，则 $d_m\tau^m<0$。由此可得，当 $x\to+\infty$ 时， $g(x)\to 0$ 。这与假设矛盾。唯一的可能是 m 为奇数。因此， $d_m\tau^m>0$，并且当$x\to-\infty$时， $g(x)\to 0$ 。取 $x=re^{i\pi/m}$，并令 $h(r)=g(re^{i\pi/m})$。由 (4.5) 可得

$$r^2h''(r)+rh'(r)=m^2(d_m\tau^m)^2(r^{2m}+r^{2m-1}e^{-i\pi/m})h(r), \tag{4.6}$$

其中 $h'(r)=\frac{dh}{dr}$。由于 $g(x)$ 的泰勒系数全为实数，因此可得

$$\overline{h(r)}=\overline{g(re^{i\pi/m})}=g(re^{-i\pi/m}).$$

我们看到，当 $\overline{r} \to \infty$ 时， $h(r) \to 0$ 。将方程 (4.6) 两边乘以 $h(r)/r$，再对 $\overline{r}$ 在区间 $(0, \infty)$ 上积分。分部积分可得

$$-\int_0^\infty r|h'(r)|^2\,dr = m^2(d_m\tau^m)^2\int_0^\infty (r^{2m-1}+r^{2m-2}e^{-i\pi/m})|h(r)|^2\,dr.$$

对上述方程两边取虚部，可得

$$0 = -m^2(d_m\tau^m)^2\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\int_0^\infty r^{2m-2}|h(r)|^2\,dr,$$

这是不可能的。

因此，我们证明了 $\lambda(f) = \infty$。

A 附录。

我们回顾 R-集的定义及其基本性质。本文中，这些集合在角域估计中用作例外集。

定义 A.1. 若集合 $E \subset \mathbb{C}$ 满足 E 可表示为一列闭圆盘 $\{D(z_n, r_n)\}_{n=1}^\infty$ 的并集，则称其为 R-集

$$|z_n| \to \infty, \qquad \sum_{n=1}^\infty r_n < \infty.$$

由此立即可知，每个 R-集也是一个 $\mathcal{E}$-集。回顾一下， $\mathcal{E}$-集是由圆盘 $\{D(z_n, r_n)\}$ 组成的并集，其中 $|z_n| \to \infty$ 且 $\sum_{n=1}^\infty r_n/|z_n| < \infty$。由于

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{r_n}{|z_n|} \le \sum_{n=1}^\infty r_n$$

对所有充分大的 n，包含关系 R-集是 $\mathcal{E}$-集成立，而反过来一般并不成立。

我们所用的基本角性质如下：使射线 $\arg z = \theta$ 与某个 R-集的无穷多个圆盘相交的辐角集合$\theta \in [0, 2\pi)$ 的线性勒贝格测度为零。也就是说，从原点出发的几乎每条射线只与 R-集的有限多个圆盘相交。

引理 A.2. 设 $G = \{z\colon \alpha < \arg z < \beta\}$ 为一个开角扇区，且满足 $0 < \beta - \alpha < 2\pi$，并设 E_1 为一个 R-集。那么存在一个 R-集 E_2，满足 $E_1 \subset E_2$，使得集合 $G \setminus E_2$ 连通。

证明。记

$$E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(a_n, r_n), \qquad |a_n| \to \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty.$$

Put

$$\eta = \sin \frac{\beta - \alpha}{2} > 0.$$

我们使用以下基本观察：如果两个半径分别为 r 和 s 的闭圆盘相交，那么它们的并集包含在一个半径至多为 $r + s$的圆盘内。因此，通过反复合并相交或相切的圆盘，我们得到圆盘 $D(b_j, s_j)$，使得

$$E_1 \subset \bigcup_j D(b_j, s_j), \qquad \sum_j s_j < \infty,$$

所得圆盘的闭包两两不交。

由于 $s_j \to 0$ 和 $|b_j| \to \infty$，我们有

$$\frac{s_j}{|b_j|} \longrightarrow 0.$$

将有限多个例外圆盘以及所有与以原点为中心的某个充分大的圆盘相交的圆盘吸收到一个圆盘 $D(0, R_0)$ 中之后，我们可以假设

$$E_2 = D(0, R_0) \cup \bigcup_j D(b_j, s_j)$$

是一个 R-集，$E_1 \subset E_2$，剩余圆盘彼此不交，且与$D(0, R_0)$不交，并且

$$s_j < \eta |b_j|.$$

一个同时与两条边界射线相交的圆盘 $D(b_j, s_j)$

$$\arg z = \alpha, \qquad \arg z = \beta$$

必须满足

$$s_j \geq |b_j| \sin \frac{\beta - \alpha}{2} = \eta |b_j|,$$

这是不可能的。因此，没有剩余的圆盘连接 G 的两条边界射线。

现在，$G \setminus D(0, R_0)$ 是连通的。给定 z，$w \in G \setminus E_2$，在$G \setminus D(0, R_0)$ 中选取一条连接它们的折线路径。这条路径只与有限个剩余圆盘相交。由于这些圆盘两两不相交，且没有一个圆盘连接两条边界射线，因此可以沿相应圆盘的边界绕过每个交点。由此，我们得到一条从 z 到 w 且包含于 $G \setminus E_2$ 的路径。 □

参考文献

[1] S. Bank 和 J. Langley，关于复数域中某些线性微分方程解的振荡，爱丁堡数学会会刊，II. Ser. 30 (1987), 455-469.[2] S. Bank 和 I. Laine，关于 $f'' + Af = 0$ 的振荡理论，其中 A 为整函数，Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), no. 1, 351–363.[3] S. Bank 和 I. Laine，周期二阶线性微分方程解的表示，J. Reine Angew. Math. 344 (1983), 1–21.[4] S. Bank、I. Laine 和 J. Langley，二阶线性微分方程解的零点频率，Result. Math. 10 (1986), 8–24 .[5] S. Bank、I. Laine 和 J. Langley，复数域中线性微分方程解的振荡结果，Results Math. 16 (1989), no. 1–2, 3–15.[6] W. Bergweiler 和 A. Eremenko，关于 Bank–Laine 猜想，J. Eur. Math. Soc. 19 (2017), no. 6, 1899–1909.[7] Y.-M. Chiang、I. Laine 和 S. Wang，若干线性微分方程的振荡结果，Math. Scand. 77 (1995), no. 2, 209–224.[8] Z. Chen，关于高阶微分方程解的超阶，Chinese Ann. Math. Ser. B 24 (2003), no. 4, 501–508.[9] H. W. Gould，Vandermonde 卷积的若干推广，Amer. Math. Monthly 63 (1956), 84–91.[10] G. G. Gundersen，亚纯函数对数导数的估计及类似估计，J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), 88–104.[11] G. Gundersen 和 J. Heittokangas，《整函数：经典与现代结果、特殊函数与复微分方程》，De Gruyter，柏林，2026年.[12] J. Heittokangas、K. Ishizaki、K. Tohge 和 Z.-T. Wen，指数多项式的值分布及其在复微分方程理论与振荡理论中的作用，Bull. Lond. Math. Soc. 55 (2023), no. 1, 1–77.[13] J. Heittokangas、K. Ishizaki、I. Laine 和 K. Tohge，复振荡与非振荡结果，Trans. Amer. Math. Soc. 372 (2019), no. 9, 6161–6182.[14] J. Heittokangas、K. Ishizaki、I. Laine 和 K. Tohge，振荡理论中的指数多项式，J. Differential Equations 272 (2021), 911–937.[15] K. Ishizaki，某个二阶线性微分方程的一个振荡结果，Hokkaido Math. J. 26 (1997), no. 2, 421–434.[16] K. Ishizaki 和 K. Tohge，关于某些线性微分方程的复振荡，J. Math. Anal. Appl. 206 (1997), no. 2, 503–517.[17] K.-H. Kwon，关于满足二阶线性微分方程的整函数的增长，Bull. Korean Math. Soc. 33 (1996), no. 3, 487–496.[18] I. Laine，《Nevanlinna 理论与复微分方程》，de Gruyter 数学研究丛书，第15卷，Walter de Gruyter，柏林，1993年.[19] J. K. Langley，关于复振荡与 Ozawa 问题，Kodai Math. J. 9 (1986), 430–439.

[20] S.-J. Wu，二阶线性微分方程解的复振荡，已提交。[21] C.-C. Yang 和 H.-X. Yi，亚纯函数唯一性理论，数学及其应用，第 557 卷，克吕沃学术出版社，多德雷赫特，2003年。[22] Y. Zhang，关于某些二阶线性微分方程的振荡，《爱丁堡皇家学会学报 A 辑》**153**（2023年），1965–1992。[23] Y. Zhang，关于整函数 $e^{p(z)}\int_0^z \beta（t）e^{-p(t)}dt$ 及其在 *Tumura-Clunie* 方程和复动力系统中的应用，《计算方法与函数论》**23**（2023年），第 2 期，213–235。

*Z.-T. Wen*汕头大学数学系，大学路243号，汕头515063，中国，电子邮箱：zhtwen@stu.edu.cn

*S.-J. Wu*汕头大学数学系，中国汕头市大学路243号，邮编515063，电子邮箱：20sjwu@stu.edu.cn