ASDYM方程的达布变换：孤子与瞬子

Shangshuai Li[1,2*]

[1] 宁波大学数学与统计学院，中国宁波 315211[2] 名古屋大学数学研究生院，日本名古屋 464-8602

2026年11月24日

arXiv:2611.30433v1 [hep-th] 23 Nov 2026

摘要

利用反自对偶 Yang–Mills 方程的一次Darboux变换，我们用 τ-函数表示 Yang–Mills 拉格朗日密度。对于由指数函数构造的孤子，我们证明相应的 τ-函数可由Grassmann流形 $\mathrm{Gr}(N,M;\mathbb{C})$ 中的任意点参数化，并构造相应的 Yang–Mills场。对于由 Atiyah–Drinfeld–Hitchin–Manin（ADHM）构造得到的瞬子，我们从一次Darboux变换的角度重新诠释 ADHM 构造，推导出 Yang–Mills 拉格朗日密度的 Osborn公式，并得到相应的规范联络。

关键词： 反自对偶 Yang–Mills 方程；达布变换； τ-函数；瞬子；ADHM 构造。

数学主题分类（2020）： 主要分类 70S15；次要分类 37K10、37K35、14M15、53C07。

1 引言

Kadomtsev–Petviashvili II（KP-II）方程是一个二维空间中的非线性色散波方程 [21], ，其形式为

$$(-4u_t+6uu_x+u_{xxx})_x+3u_{yy}=0. \tag{1.1}$$

众所周知，KP-II 方程的一类孤子解可以由实Grassmann流形 $\mathrm{Gr}(N,M;\mathbb{R})$ [23]中的点构造得到。令 $A=(a_{ij})$ 为表示这样一个点的 $N\times M$ 满秩矩阵， $\kappa_1<\cdots<\kappa_M\in\mathbb{R}$ 为按序排列的谱参数。定义

$$f_i(x,y,t)=\sum_{j=1}^{M}a_{ij}e^{\theta_j},\qquad \theta_j:=\kappa_j x+\kappa_j^2 y+\kappa_j^3 t. \tag{1.2}$$

相应的 τ函数具有如下 Wronskian表示 [14]

$$\tau(x,y,t)=\mathrm{Wr}(f_1,\dots,f_N)=\det(AEV^T), \tag{1.3}$$

其中， $E=\mathrm{diag}(e^{\theta_1},\dots,e^{\theta_M})$ 是一个对角矩阵， $V=(\kappa_j^{i-1})_{1\le i\le N,\,1\le j\le M}$是一个范德蒙德矩阵。于是， $u=2\partial_x^2\ln\tau$ 满足 KP-II 方程。将柯西–比内公式应用于式 (1.3)，得到

$$\tau(x,y,t)=\sum_{I\in\binom{[M]}{N}}\Delta_I(A)E_IK_I,\qquad E_I:=e^{\sum_{j\in I}\theta_j},\qquad K_I:=\prod_{1\le p<q\le N}(\kappa_{i_q}-\kappa_{i_p}), \tag{1.4}$$

*电子邮件：lishangshuai@nbu.edu.cn

其中，$[M]=\{1,\dots,M\}$是一个索引集，$I=\{i_1<\cdots<i_N\}$从$[M]$中选取N个分量，而$\Delta_I(A)$表示由I索引的 Pl¨ucker 坐标。该展开给出了 KP-II 方程 [9]的孤子解的 Grassmann流形参数化。特别地，若 A 表示全非负 Grassmann 流形 $\mathrm{Gr}^{\geq 0}(N,\ M;\ \mathbb{R})$中的一个点，使得对于所有 I，$\Delta_I(A)\geq 0$，则 $\tau(x,\ y,\ t)$在 $\mathbb{R}^3$ [24]上全局 >0。因此，全非负性确保了这些解的全局正则性，而 Grassmann 流形的组合结构则刻画了渐近线孤子图样及其相互作用 [8, 25]。

与 τ-函数、Grassmann 流形几何和孤子相互作用相关的联系，也出现在二维Toda晶格和散焦 Davey–Stewartson II 方程[6, 7, 30, 33]中。一个自然的问题是，能否在更高维的可积系统中识别出类似的结构。

四维反自对偶 Yang–Mills（ASDYM）方程为这一问题提供了一个自然的研究框架 [41]。ASDYM方程在规范理论和可积系统中发挥着基础性作用，许多低维可积方程都可通过对称约化 [31, 40]由其导出。针对ASDYM方程，人们已经发展出众多生成解的方法，包括黎曼–希尔伯特问题、B¨acklund 变换、逆散射技术、Hirota 双线性方法和达布变换（DTs）[5, 11, 31, 34, 35, 37, 39]。特别是，达布变换能够产生用拟行列式表示的拟Wronskian和拟Grammian解 [15, 27]。对于 GL(2, $\mathbb{C}$) ASDYM方程，已经建立了这两种解结构之间的渐近等价性和精确等价性 [19, 26]。

全文中，我们使用复坐标$(z,\ w,\ \widetilde{z},\ \widetilde{w})$，度量为 $\mathrm{d}s^2=2(\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\widetilde{z}-\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\,\widetilde{w})$，并采用约定 $\mathcal{F}=\mathrm{d}\mathcal{A}+\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}$和 $\mathcal{L}=-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu})$ 来表示曲率和 Yang–Mills 拉格朗日密度。在 Yang 规范下，ASDYM方程化简为杨方程 [41],

$$\partial_{\widetilde{z}}\big((\partial_z\mathcal{J})\mathcal{J}^{-1}\big)-\partial_{\widetilde{w}}\big((\partial_w\mathcal{J})\mathcal{J}^{-1}\big)=0, \tag{1.5}$$

其中，$\mathcal{J}$ 是一个取值于 GL(r, $\mathbb{C}$) 的函数，称为杨矩阵。相应的规范联络和杨–米尔斯密度为

$$\mathcal{A}=-(\partial_z\mathcal{J})\mathcal{J}^{-1}\,\mathrm{d}z-(\partial_w\mathcal{J})\mathcal{J}^{-1}\,\mathrm{d}w, \tag{1.6}$$

$$\mathcal{L}[\mathcal{J}]=\mathrm{tr}\Big[\big(\partial_{\widetilde{z}}\big((\partial_z\mathcal{J})\mathcal{J}^{-1}\big)\big)^2-\partial_{\widetilde{w}}\big((\partial_z\mathcal{J})\mathcal{J}^{-1}\big)\,\partial_{\widetilde{z}}\big((\partial_w\mathcal{J})\mathcal{J}^{-1}\big)\Big]. \tag{1.7}$$

利用杨矩阵的拟Wronskian表示，近期研究揭示了 **(1.7)** [17, 18] 的渐近行为和多孤子散射。更近期的研究则将这一杨–米尔斯密度表示为一类 ASDYM 解的 τ-函数 [32],

$$\mathcal{L}=-\big(\partial_z\partial_{\widetilde{z}}-\partial_w\partial_{\widetilde{w}}\big)^2\ln\tau(z,\widetilde{z},w,\widetilde{w}). \tag{1.8}$$

因此，自然会想到：对于任意格拉斯曼点，这些 τ-函数是否都能写成行列式形式 **(1.3)**，以及能否根据相同的数据显式构造相应的杨矩阵。[1]

除了由指数函数构造的孤子解之外，ASDYM方程在欧几里得空间上的瞬子解也广为人知。最早的例子是 Belavin–Polyakov–Schwartz–Tyupkin（BPST）瞬子 [4], ，随后 't Hooft 以及 Jackiw、Nohl与Rebbi（JNR）将其推广为多瞬子解 [20]。特别是，JNR解在一个极限情形下包含 't Hooft多瞬子。Atiyah–Ward拟设提供了另一种基于扭量几何的构造 [3], ，而它们与 B¨acklund 变换的关系已在 [11]中得到研究。

[1]由于 **(1.8)** 仅在 $\tau\neq 0$ 时有定义，因此在本文余下部分，我们将只关注 τ 不为零的区域。

Atiyah、Drinfeld、Hitchin 和 Manin（ADHM）建立了一般的瞬子代数构造 [2]。已有证明表明，ADHM 构造描述了任意拓扑荷的所有正则有限作用量 SU(r) 瞬子，包括 BPST、't Hooft 和 JNR解。值得注意的是，相应的杨–米尔斯密度也可以表示为行列式形式，即 Osborn公式 [12, 13, 36],

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(\partial_{x^1}^2 + \partial_{x^2}^2 + \partial_{x^3}^2 + \partial_{x^4}^2\right)^2 \ln\det \mathsf{R}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^4, \tag{1.9}$$

其中，R(x) 是由 ADHM分解条件确定的矩阵。(1.8) 与 (1.9) 的相似性暗示了 DT 产生的 τ-函数与 ADHM 构造之间存在联系。理解这些不同构造如何通过统一框架建立关联，是一个值得研究的问题。

我们的主要结果如下。

1. 杨–米尔斯拉格朗日密度的行列式公式。 我们直接由一次Darboux变换推导出 (1.8)，并定义相应的 ASDYM τ-函数（定理 2.1）。[2] 这为研究孤子解和ADHM瞬子提供了统一的起点。

2. 由*Grassmann*流形点参数化的孤子解。 对于任意的 $[A] \in \mathrm{Gr}(N, M; \mathbb{C})$ 以及互不相同的非零谱参数 $\kappa_1, \ldots, \kappa_M \in \mathbb{C}$，我们构造一个 $M \times M$ 矩阵Θ，使得

$$\prod_{1\le i<j\le M} (\kappa_j - \kappa_i)\det \Theta = \det(AEV^T) = \tau,$$

其中， τ 具有形式 (1.3)（定理 3.1）。此外，对于不可约的 A，我们显式构造了一个取值于 SL(r, $\mathbb{C}$) 的杨矩阵，其中 $r \le 1 + \min\{N, M-N\}$，该矩阵再现了与定理 3.1 中相同的杨–米尔斯密度（定理 3.3）。

3. *ADHM* 瞬子与 *Osborn*公式。对于描述电荷为-k的 SU(r) 瞬子的 ADHM 构造，我们构造了一个 $(r+3k)\times(r+3k)$ 矩阵 Θ，它满足与一重 DT 相关的真空线性系统。由此得到 $\det\Theta = \det \mathsf{R}$，从而恢复 Osborn公式 (1.9)（定理 4.1）。我们进一步证明，在这一框架下，通过规范变换（定理 4.2）可以恢复 ADHM 联络，

$$\mathsf{G}^{-1}\mathcal{A}_{\mathrm{DT}}\mathsf{G} + \mathsf{G}^{-1}\mathrm{d}\mathsf{G} = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathcal{A}_{\mathrm{DT}}$ 是定理 4.1 中与一重 DT 相关的规范联络。 [3]

本文结构安排如下。第 2 节建立了一次达布变换所对应的杨–米尔斯密度的行列式公式。第 3 节从任意格拉斯曼点构造孤子解，并展示如何构造一个规模更小、但具有相同杨–米尔斯密度的杨矩阵。第 4 节将一次达布变换与 ADHM 构造联系起来，并推导出 Osborn公式及相应的规范联络。第 5 节总结主要结果并讨论可能的推广。最后，附录 A 在杨–米尔斯密度层面建立了 GL($r, \mathbb{C}$) ASDYM方程的 n 重 DT 与 GL($nr, \mathbb{C}$) ASDYM方程的一重 DT 之间的对应关系。附录 B 给出了定理 4.2 的详细证明。

[2]一重 DT 已足以满足我们的目的，因为 GL(r, $\mathbb{C}$) ASDYM方程的 n 重 DT 可以实现为大小为 nr 的一重 DT；详情见附录 A。[3]完整的达布联络 $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathrm{DT}}$ 的秩为 $r+3k$。将其限制在由前 $r+2k$ 个坐标向量张成的不变子丛上，定义了 $\mathcal{A}_{\mathrm{DT}}$。因此 $\mathsf{G} \in$ GL($r+2k$, $\mathbb{C}$)，并且所显示的分块大小为 k, r, k。

2 Darboux 变换与杨–米尔斯密度

我们首先从 ASDYM方程的一重达布变换（DT）所对应的杨–米尔斯密度的行列式公式入手。

定理 2.1。 设 $\Lambda \in \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ 为常数谱矩阵，且 Θ 为满足真空线性系统的可逆 $r\times r$矩阵值函数

$$\partial_z\Theta = (\partial_{\widetilde{w}}\Theta)\Lambda, \qquad \partial_w\Theta = (\partial_{\widetilde{z}}\Theta)\Lambda. \tag{2.1}$$

于是 $S=\Theta\Lambda\Theta^{-1}$ 满足

$$\partial_z S = (\partial_{\widetilde{w}}S)S, \qquad \partial_w S = (\partial_{\widetilde{z}}S)S, \tag{2.2}$$

因此是杨方程(1.5)的解。相应的杨–米尔斯密度为

$$\mathcal{L}[S] = -\big(\partial_z\partial_{\widetilde{z}} - \partial_w\partial_{\widetilde{w}}\big)^2 \ln\det\Theta. \tag{2.3}$$

证明。 对 S 求导并利用 (2.1)，得到

$$(\partial_z S)S^{-1} = (\partial_z\Theta)\Theta^{-1} - S(\partial_z\Theta)\Lambda^{-1}\Theta^{-1} = (\partial_{\widetilde{w}}\Theta)\Lambda\Theta^{-1} - S(\partial_{\widetilde{w}}\Theta)\Theta^{-1} = \partial_{\widetilde{w}}S.$$

类似地，$(\partial_w S)S^{-1} = \partial_{\widetilde{z}}S$. 因此，我们有

$$\partial_{\widetilde{z}}\big((\partial_z S)S^{-1}\big) - \partial_{\widetilde{w}}\big((\partial_w S)S^{-1}\big) = \partial_{\widetilde{z}}\partial_{\widetilde{w}}S - \partial_{\widetilde{w}}\partial_{\widetilde{z}}S = 0,$$

这证明了 S 满足杨方程 (1.5)。

至于杨–米尔斯密度公式，利用 (1.7) 以及关系式 $(\partial_z S)S^{-1} = \partial_{\widetilde{w}}S$ 和 $(\partial_w S)S^{-1} = \partial_{\widetilde{z}}S$，我们得到

$$\mathcal{L}[S] = \mathrm{tr}\Big[\big(\partial_{\widetilde{z}}\partial_{\widetilde{w}}S\big)^2 - (\partial_{\widetilde{w}}^2 S)(\partial_{\widetilde{z}}^2 S)\Big]. \tag{2.4}$$

令 $U := (\partial_{\widetilde{w}}\Theta)\Theta^{-1}$. 直接微分并利用 (2.1)，得到

$$\partial_z U = (\partial_{\widetilde{w}}U)S, \qquad \partial_w U = (\partial_{\widetilde{z}}U)S, \qquad \partial_{\widetilde{w}}S = US - SU.$$

此外，(2.1) 意味着 $\partial_z\partial_{\widetilde{z}}\Theta = \partial_w\partial_{\widetilde{w}}\Theta$. 利用 Jacobi公式 $\partial\ln\det\Theta = \mathrm{tr}[(\partial\Theta)\Theta^{-1}]$ 以及迹的循环性，得到

$$\begin{aligned}\big(\partial_z\partial_{\widetilde{z}} - \partial_w\partial_{\widetilde{w}}\big)\ln\det\Theta &= \mathrm{tr}\Big[U(\partial_w\Theta)\Theta^{-1} - (\partial_{\widetilde{z}}\Theta)\Theta^{-1}(\partial_z\Theta)\Theta^{-1}\Big]\\ &= \mathrm{tr}\Big[U\Big((\partial_{\widetilde{z}}\Theta)\Lambda\Theta^{-1} - S(\partial_{\widetilde{z}}\Theta)\Theta^{-1}\Big)\Big] = \mathrm{tr}\big(U\partial_{\widetilde{z}}S\big).\end{aligned}$$

利用 U 和 S的恒等式，我们计算得

$$\begin{aligned}\partial_z\,\mathrm{tr}\big(U\partial_{\widetilde{z}}S\big) &= \mathrm{tr}\Big[(\partial_{\widetilde{w}}U)S(\partial_{\widetilde{z}}S) + U(\partial_{\widetilde{z}}\partial_{\widetilde{w}}S)S + U(\partial_{\widetilde{w}}S)(\partial_{\widetilde{z}}S)\Big]\\ &= \partial_{\widetilde{w}}\,\mathrm{tr}\big(US\partial_{\widetilde{z}}S\big) + \mathrm{tr}\Big[(SU-US)(\partial_{\widetilde{z}}\partial_{\widetilde{w}}S)\Big]\\ &= \partial_{\widetilde{w}}\,\mathrm{tr}\big(US\partial_{\widetilde{z}}S\big) - \mathrm{tr}\Big[(\partial_{\widetilde{w}}S)(\partial_{\widetilde{z}}\partial_{\widetilde{w}}S)\Big].\end{aligned} \tag{2.5}$$

同理，可得

$$\begin{aligned}\partial_w\,\mathrm{tr}\big(U\partial_{\widetilde{z}}S\big) &= \mathrm{tr}\Big[(\partial_{\widetilde{z}}U)S(\partial_{\widetilde{z}}S) + U(\partial_{\widetilde{z}}^2S)S + U(\partial_{\widetilde{z}}S)^2\Big]\\ &= \partial_{\widetilde{z}}\,\mathrm{tr}\big(US\partial_{\widetilde{z}}S\big) - \mathrm{tr}\Big[(\partial_{\widetilde{w}}S)(\partial_{\widetilde{z}}^2S)\Big].\end{aligned} \tag{2.6}$$

将 $\partial_{\widetilde{z}}$ 应用于 (2.5)，并将 $\partial_{\widetilde{w}}$ 应用于 (2.6)，再作差，可得混合导数项 $\mathrm{tr}(US\partial_{\widetilde{z}}S)$ 抵消。因此

$$\begin{aligned}\left(\partial_z\partial_{\widetilde{z}}-\partial_w\partial_{\widetilde{w}}\right)^2\ln\det\Theta &= \partial_{\widetilde{w}}\,\mathrm{tr}\Big[(\partial_{\widetilde{w}}S)(\partial_{\widetilde{z}}^2S)\Big]-\partial_{\widetilde{z}}\,\mathrm{tr}\Big[(\partial_{\widetilde{w}}S)(\partial_{\widetilde{z}}\partial_{\widetilde{w}}S)\Big]\\ &= \mathrm{tr}\Big[(\partial_{\widetilde{w}}^2S)(\partial_{\widetilde{z}}^2S)-\left(\partial_{\widetilde{z}}\partial_{\widetilde{w}}S\right)^2\Big]=-\mathcal{L}[S],\end{aligned}$$

其中第二个等式由乘积法则和混合偏导数的交换性得出。这就证明了 (2.3)。

□

定理 2.1 给出了通过一重 DT 得到的杨矩阵，并将其杨–米尔斯密度表示为一个行列式。于是，我们定义相应的 ASDYM τ-函数为 $\det\Theta$。在附录 A 中，我们将这一结果推广到 GL($r,\mathbb{C}$) ASDYM 方程的 n 重 DT，并证明每一种此类构造都可以表示为 GL($nr,\mathbb{C}$) ASDYM 方程的一重 DT，且具有相同的杨–米尔斯密度。因此，我们聚焦于定理 2.1 中的构造，它为我们后续研究 ASDYM 孤子的 Grassmann结构以及瞬子的 ADHM 构造提供了共同的起点。

3 孤子与格拉斯曼参数化

在定理 2.1 中，我们将杨–米尔斯密度表示为 ASDYM τ-函数的形式。为了构造 ASDYM 孤子，我们现在考虑由指数函数的有限线性组合构成的矩阵 Θ，与研究 KP 孤子时的做法相同。

3.1 ASDYM τ-函数的格拉斯曼参数化

回顾一下，KP τ-函数由有序实谱参数 $\kappa_1<\cdots<\kappa_M$以及一个点 $[A]\in\mathrm{Gr}(N,M;\,\mathbb{R})$ 参数化。我们为 ASDYM τ-函数建立类似的 Grassmann流形参数化：证明对于任意互不相同的非零谱参数 $\kappa_1,\dots,\kappa_M\in\mathbb{C}$以及任意 $[A]\in\mathrm{Gr}(N,M;\,\mathbb{C})$，总能构造一个矩阵 Θ，使其行列式与 (1.3) 中和 A 相关联的 τ-函数仅相差一个非零常数因子。

定理 3.1。 固定整数 $1\le N<M$、两两不同的非零参数 $\kappa_1,\dots,\kappa_M\in\mathbb{C}$，并令 $\Lambda=\mathrm{diag}(\kappa_1,\dots,\kappa_M)$。对于非零常数 $\alpha_j,\beta_j\in\mathbb{C}$，定义

$$\theta_j:=\alpha_j\kappa_j z+\kappa_j\beta_j w+\beta_j\widetilde{z}+\alpha_j\widetilde{w},\qquad E:=\mathrm{diag}(e^{\theta_1},\dots,e^{\theta_M}).\tag{3.1}$$

设 $A\in\mathbb{C}^{N\times M}$ 的秩为 N。定义

$$\Theta:=\begin{pmatrix}AE\\ B\end{pmatrix},\qquad B:=\left(\frac{\kappa_j^{M-N-i}}{\prod_{k\neq j}(\kappa_j-\kappa_k)}\right)_{1\le i\le M-N,1\le j\le M}.\tag{3.2}$$

则 Θ满足 (2.1) 且

$$\prod_{1\le i<j\le M}(\kappa_j-\kappa_i)\det\Theta=\det(AEV^T)=:\tau,\tag{3.3}$$

其中 $V=(\kappa_j^{i-1})_{1\le i\le N,\ 1\le j\le M}$。在每个满足 $\tau\neq0$的区域上，矩阵 $S=\Theta\Lambda\Theta^{-1}$ 是杨方程 (1.5)的解，相应的杨–米尔斯密度为

$$\mathcal{L}=-\left(\partial_z\partial_{\widetilde{z}}-\partial_w\partial_{\widetilde{w}}\right)^2\ln\det\Theta=-\left(\partial_z\partial_{\widetilde{z}}-\partial_w\partial_{\widetilde{w}}\right)^2\ln\tau.\tag{3.4}$$

For 固定的谱参数和相位参数， $\mathcal{L}$ 仅取决于格拉斯曼点 $[A]$.

证明。 由于 B 是常数，且

$$\partial_z e^{\theta_j} = \kappa_j \partial_{\widetilde{w}} e^{\theta_j}, \qquad \partial_w e^{\theta_j} = \kappa_j \partial_{\widetilde{z}} e^{\theta_j},$$

矩阵 Θ 满足 (2.1)。引入一个 $M \times M$ 范德蒙德矩阵

$$K = \left(\kappa_j^{i-1}\right)_{1\le i,j\le M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \cdots & \kappa_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \kappa_1^{M-1} & \kappa_2^{M-1} & \cdots & \kappa_M^{M-1} \end{pmatrix},$$

于是， K 的前 N 行构成 V。在拉格朗日插值公式中比较 $M-1$ 次项的系数，得到

$$\sum_{j=1}^{M} \frac{\kappa_j^{i-1}}{\prod_{k\neq j}(\kappa_j - \kappa_k)} = \begin{cases} 0, & 1 \le i < M, \\ 1, & i = M. \end{cases}$$

根据 B的定义，这一恒等式意味着 $BV^T = 0$ 和

$$\Theta K^T = \begin{pmatrix} AEK^T \\ BK^T \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} AEV^T & * & & \\ \hline & 1 & * & \cdots & * \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right),$$

其中右下角分块的大小为 $(M-N)\times(M-N)$，其行列式为 1。因此，取行列式可得

$$\det(AEV^T) = \det\Theta \, \det K^T = \prod_{1\le i<j\le M} (\kappa_j - \kappa_i) \det\Theta.$$

由于 $\det K^T$ 是非零常数，因此在 $\tau \neq 0$处， Θ 可逆。由此，杨方程和密度公式随即由定理 2.1 得出。最后，将 A 替换为同一格拉斯曼点的另一个代表，会使 τ 乘以一个非零常数，因此 $\mathcal{L}$保持不变。

□

定理 3.1 在由格拉斯曼流形点参数化的 τ-函数层面确立了 ASDYM–KP 对应。对于任意 $[A] \in \mathrm{Gr}(N,\ M;\ \mathbb{R})$，我们将此构造限制到实切片 $(z,\ \widetilde{z},\ w,\ \widetilde{w}) \in \mathbb{R}^4$，并对相位参数和坐标施加如下特化：

$$\alpha_j = \kappa_j, \qquad \beta_j = \kappa_j^2, \qquad \kappa_j \in \mathbb{R}, \qquad x = \widetilde{w}, \qquad y = z + \widetilde{z}, \qquad t = w. \tag{3.5}$$

在这一特化下，ASDYM 相位 (3.1) 与 KP 相位 (1.2) 相同，而相应的 ASDYM τ-函数则化为 KP-II 方程的朗斯基行列式形式 (1.3)。特别地，若 $\kappa_1 < \cdots < \kappa_M$且 $[A] \in \mathrm{Gr}^{\ge 0}(N,\ M;\ \mathbb{R})$，则柯西–比内展开 (1.4) 表明 $\tau > 0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上处处成立。因此，它确定了一个正则的 KP-II 线孤子解，其形式为

$$u(x,y,t) = 2\partial_x^2 \ln\tau(x,y,t) = 2\partial_x^2 \ln\det(AEV^T).$$

因此，ASDYM τ-函数的格拉斯曼参数化包含了 KP-II 的正则线孤子 τ-函数作为其子族。

3.2 Grammian表示

与 KP线孤子理论 [9], 一样，我们将注意力限制在采用简化行阶梯形（RREF）的不可约 A 上。这里，如果 A 的每一列都非零，且每一行除主元外至少还包含一个非零元素，则称其为不可约的。事实上，删除零列不会改变 τ-函数，而仅含主元的行则可以通过提出相应的指数因子并重新缩放其余系数而消去。由于此类约化不会改变杨–米尔斯密度，我们始终假设 A 是不可约的。

我们首先证明，同时置换 A 的列及其对应的谱参数，不会改变 τ-函数。

引理3.2。 设 $A \in \mathbb{C}^{N\times M}$ 是简化行阶梯形中的不可约矩阵，其主元集合为 $I = \{i_1 < \cdots < i_N\}$。对于任意 $M \times M$ 置换矩阵 P，定义

$$A' = AP, \qquad \Lambda' = P^{-1}\Lambda P, \qquad E' = P^{-1}EP, \qquad V' = VP, \qquad B' = BP.$$

则对应的 τ-函数保持不变。特别地，可以选取 P 将主元列移至前 N 个位置，同时保持主元列和非主元列各自的相对顺序。所得矩阵具有如下形式

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix} = (I_N \mid C), \qquad C \in \mathbb{C}^{N\times(M-N)}.$$

S由于 A 不可约， C 的每一行和每一列都至少含有一个非零元素 y.

证明。 由于 $P^{-1} = P^T$，我们有

$$\tau' = \det\big(A'E'(V')^T\big) = \det\big(AP(P^{-1}EP)P^TV^T\big) = \det(AEV^T) = \tau.$$

相应杨–米尔斯密度相等可由密度公式 (3.4) 立即得出。

□

根据引理3.2，可以重新标记谱参数及其对应的列，而不改变 τ-函数。因此，不失一般性地，我们可以假设主元列占据前 N 个位置，并选取代表元 $A =(I_N \mid C)$。在此归一化下， τ-函数具有柯西型Grammian表示 [10]。

我们引入分块记号

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2), \qquad E = \mathrm{diag}(E_1, E_2), \qquad B = (B_1 \mid B_2), \qquad V = (V_1 \mid V_2), \tag{3.6}$$

其中 Λ_1、 E_1 和 V_1 是 $N \times N$ 矩阵，而 Λ_2、 E_2 和 B_2 是 $(M-N)\times(M-N)$ 矩阵。定义对角矩阵

$$D_1 := \mathrm{diag}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}(\kappa_i - \kappa_j)\right)_{i=1}^{N}, \qquad D_2 := \mathrm{diag}\left(\prod_{j=1}^{N}(\kappa_{N+k} - \kappa_j)\right)_{k=1}^{M-N},$$

以及柯西矩阵

$$G := \left(\frac{1}{\kappa_{N+k} - \kappa_i}\right)_{1\le k\le M-N,\, 1\le i\le N}.$$

等价地， G 是西尔维斯特方程的唯一解

$$\Lambda_2 G - G\Lambda_1 = \mathbf{1}_{M-N}\mathbf{1}_N^T,$$

whe其中 $\mathbf{1}_n$ 表示 n维全 1 列向量。由拉格朗日插值得 s

$$V_2^T (V_1^T)^{-1} = D_2 G D_1^{-1}.$$

回顾 $\tau = \det(AEV^T)$，直接代入可得

$$\begin{aligned} AEV^T &= E_1 V_1^T + C E_2 V_2^T \\ &= \left(I_N + C E_2 V_2^T (V_1^T)^{-1} E_1^{-1}\right) E_1 V_1^T \\ &= \left(I_N + C E_2 D_2 G D_1^{-1} E_1^{-1}\right) E_1 V_1^T \\ &= D_1 \left(I_N + D_1^{-1} C D_2 E_2 G E_1^{-1}\right) D_1^{-1} E_1 V_1^T. \end{aligned}$$

取行列式可得 Grammian表示

$$\tau = \det(E_1 V_1^T)\, \widehat{\tau}, \qquad \widehat{\tau} := \det(I_N + D_1^{-1} C D_2 E_2 G E_1^{-1}). \tag{3.7}$$

由于 $(\partial_z \partial_{\widetilde{z}} - \partial_w \partial_{\widetilde{w}})^2 \ln \det(E_1 V_1^T) = 0$，该 τ-函数中的前因子对杨–米尔斯密度没有贡献。因此，(3.4) 完全由这个 Grammian τ-函数决定，即

$$\mathcal{L} = -\left(\partial_z \partial_{\widetilde{z}} - \partial_w \partial_{\widetilde{w}}\right)^2 \ln \det \Theta = -\left(\partial_z \partial_{\widetilde{z}} - \partial_w \partial_{\widetilde{w}}\right)^2 \ln \tau = -\left(\partial_z \partial_{\widetilde{z}} - \partial_w \partial_{\widetilde{w}}\right)^2 \ln \widehat{\tau}.$$

这确立了本文所讨论的 Wronskian τ-函数与文献 [29,32] 中研究的 Grammian τ-函数之间的直接对应关系。

3.3 还原一个较小的杨矩阵

定理 3.1 通过 (3.2)，将一个 GL(M, $\mathbb{C}$) 值的杨矩阵 $S = \Theta \Lambda \Theta^{-1}$ 与 Gr(N, M; $\mathbb{C}$) 中的每一点 $[A]$ ∈相关联。虽然这种构造总能给出一个大小为 M 的杨矩阵，但要重现相同的杨–米尔斯密度，并不一定需要如此大的矩阵。对于不可约 A，我们现在构造一个具有相同杨–米尔斯密度的 SL(r, $\mathbb{C}$) 值杨矩阵，其中 $r \le 1 + \min\{N, M-N\}$。

Th在本小节中，我们沿用第 3.2 节的记号和假设。 t

$$H := C\Lambda_2 - \Lambda_1 C, \qquad \delta := \operatorname{rank} H \le \min\{N, M-N\}, \qquad r := \delta + 1. \tag{3.8}$$

量 δ 仅取决于 Λ 和格拉斯曼点 $[A]$。事实上，令 $W = \ker(A)$，并记 $W\Lambda = \{w\Lambda : w \in W\}$。由于 $A = (I_N \mid C)$，我们有 $A\Lambda - \Lambda_1 A = (0 \mid H)$。因此，分块行变换可得

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A \\ A\Lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} I_N & C \\ 0 & H \end{pmatrix} = N + \delta.$$

因此，$\delta = \dim(W + W\Lambda) - \dim W$，所以大小 $r = \delta + 1$ 由 Λ 和 $[A]$ 决定。

定理 3.3。取秩分解 $H = PQ$，其中 $P \in \mathbb{C}^{N \times \delta}$ 和 $Q \in \mathbb{C}^{\delta \times (M-N)}$ 为常数矩阵，并定义

$$\Lambda_0 := \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & B_2 \Lambda_2 B_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad X := \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & B_2 D_2 \mathbf{1}_{M-N} \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & QE_2 \\ \mathbf{1}_N^T D_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

那么，$r \times r$ 矩阵值函数

$$\mathcal{J} := I_r + Y \Theta^{-1} \Lambda_0^{-1} X, \qquad \mathcal{K} := -Y \Theta^{-1} X \tag{3.9}$$

满足 行列式 $\mathcal{J} = 1$，并且

$$-(\partial_z \mathcal{J}) \mathcal{J}^{-1} = \partial_{\widetilde{w}} \mathcal{K}, \qquad -(\partial_w \mathcal{J}) \mathcal{J}^{-1} = \partial_{\widetilde{z}} \mathcal{K}. \tag{3.10}$$

因此，$\mathcal{J}$ 满足杨方程，并产生与 S相同的杨–米尔斯密度。其矩阵大小满足

$$r = \operatorname{rank}(C\Lambda_2 - \Lambda_1 C) + 1.$$

证明。 采用分块记号 (3.6)，式 (3.2) 中的矩阵 Θ 具有如下形式

$$\Theta = \begin{pmatrix} AE \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & CE_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}.$$

由于 $BV^T = 0$ 和 B_2 及 V_1 均可逆，我们有

$$B_2^{-1}B_1 = -V_2^T(V_1^T)^{-1} = -D_2GD_1^{-1}.$$

回顾西尔维斯特方程 $\Lambda_2 G - G\Lambda_1 = \mathbf{1}_{M-N}\mathbf{1}_N^T$，可得

$$\begin{aligned} B_1\Lambda_1 - B_2\Lambda_2 B_2^{-1}B_1 &= B_2\big((B_2^{-1}B_1)\Lambda_1 - \Lambda_2(B_2^{-1}B_1)\big) \\ &= B_2(\Lambda_2 D_2 G D_1^{-1} - D_2 G D_1^{-1}\Lambda_1) \\ &= B_2 D_2 \mathbf{1}_{M-N}\mathbf{1}_N^T D_1^{-1}. \end{aligned}$$

结合 $H = PQ$，得到

$$\begin{aligned} \Theta\Lambda - \Lambda_0\Theta &= \begin{pmatrix} 0 & HE_2 \\ B_1\Lambda_1 - B_2\Lambda_2 B_2^{-1}B_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & PQE_2 \\ B_2 D_2 \mathbf{1}_{M-N}\mathbf{1}_N^T D_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} = XY. \end{aligned}$$

因此 $S = \Theta\Lambda\Theta^{-1} = \Lambda_0 + XY\Theta^{-1}$。

回顾定理 2.1 中的 (2.2)，可知

$$\partial_z S = (\partial_{\widetilde{w}} S)S, \qquad \partial_w S = (\partial_{\widetilde{z}} S)S.$$

由于 Λ_0 和 X 为常数，且 X 具有满列秩 r，代入 $S = \Lambda_0 + XY\Theta^{-1}$ 并约去 X，得到

$$\begin{aligned} \partial_z(Y\Theta^{-1}) &= \partial_{\widetilde{w}}(Y\Theta^{-1})(\Lambda_0 + XY\Theta^{-1}), \\ \partial_w(Y\Theta^{-1}) &= \partial_{\widetilde{z}}(Y\Theta^{-1})(\Lambda_0 + XY\Theta^{-1}). \end{aligned}$$

在右侧乘以 $\Lambda_0^{-1}X$ 并使用 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{K}$ 的定义，可得

$$\begin{aligned} \partial_z\mathcal{J} &= \partial_{\widetilde{w}}(Y\Theta^{-1})X\mathcal{J} = -(\partial_{\widetilde{w}}\mathcal{K})\mathcal{J}, \\ \partial_w\mathcal{J} &= \partial_{\widetilde{z}}(Y\Theta^{-1})X\mathcal{J} = -(\partial_{\widetilde{z}}\mathcal{K})\mathcal{J}. \end{aligned}$$

由西尔维斯特行列式定理可得

$$\det\mathcal{J} = \det(I_M + \Lambda_0^{-1}XY\Theta^{-1}) = \frac{\det S}{\det\Lambda_0} = \frac{\det\Lambda}{\det\Lambda_0} = 1,$$

因为 $\det\ \Lambda_0 = \det\ \Lambda_1 \det\ \Lambda_2 = \det\Lambda$。因此，$\mathcal{J}$可逆，而前述导数恒等式推出 (3.10)。对第一个方程取 $\widetilde{z}$导数，对第二个方程取 $\widetilde{w}$导数，可知 $\mathcal{J}$ 满足杨方程。

为比较杨–米尔斯密度，注意到

$$\begin{aligned} (\partial_z S)S^{-1} &= X\partial_{\widetilde{w}}(Y\Theta^{-1}), \quad (\partial_w S)S^{-1} = X\partial_{\widetilde{z}}(Y\Theta^{-1}), \\ (\partial_z\mathcal{J})\mathcal{J}^{-1} &= \partial_{\widetilde{w}}(Y\Theta^{-1})X, \quad (\partial_w\mathcal{J})\mathcal{J}^{-1} = \partial_{\widetilde{z}}(Y\Theta^{-1})X. \end{aligned} \tag{3.11}$$

由于 X 是常数，微分保持这些因式分解。代入 (1.7)，并对每一项应用 $\mathrm{tr}_M(XUXV) = \mathrm{tr}_r(UXVX)$，其中 $U,\ V \in \mathbb{C}^{r\times M}$，可得 $\mathcal{L}[\mathcal{J}] = \mathcal{L}[S]$。因此，

$$\mathcal{L}[\mathcal{J}] = \mathcal{L}[S] = -\big(\partial_z\partial_{\widetilde{z}} - \partial_w\partial_{\widetilde{w}}\big)^2 \ln\tau,$$

其中，最后一个等式由定理 3.1 得出。 □

定理 3.3 中与 S 和 $\mathcal{J}$ 相对应的杨–米尔斯密度关系可以推广到规范势层面。设 $\mathcal{A}_S$ 和 $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ 分别为由 S 和 $\mathcal{J}$确定的相应联络。恒等式 (3.11) 给出

$$\mathcal{A}_S = -X\big[\partial_{\widetilde{w}}(Y\Theta^{-1})\,\mathrm{d}z + \partial_{\widetilde{z}}(Y\Theta^{-1})\,\mathrm{d}w\big],$$
$$\mathcal{A}_{\mathcal{J}} = -\big[\partial_{\widetilde{w}}(Y\Theta^{-1})\,\mathrm{d}z + \partial_{\widetilde{z}}(Y\Theta^{-1})\,\mathrm{d}w\big]X.$$

由于 X 是常数且具有满列秩 r，可选取一个常数矩阵 $X_0 \in \mathbb{C}^{M\times(M-r)}$，使得 $g = (X \mid X_0) \in \mathrm{GL}(M,\ \mathbb{C})$。于是 $g^{-1}X = \binom{I_r}{0}$。由于 $\mathrm{d}g = 0$，经过规范变换后，变换所得联络及其曲率可写为

$$g^{-1}\mathrm{d}g + g^{-1}\mathcal{A}_S g = g^{-1}\mathcal{A}_S g = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\mathcal{J}} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g^{-1}\mathcal{F}_S g = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\mathcal{J}} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由于非对角曲率块不会对曲率乘积的迹产生贡献，我们得到

$$\mathcal{L}[S] = \mathcal{L}[\mathcal{J}], \qquad \mathrm{tr}_M(\mathcal{F}_S \wedge \mathcal{F}_S) = \mathrm{tr}_r(\mathcal{F}_{\mathcal{J}} \wedge \mathcal{F}_{\mathcal{J}}).$$

这直接解释了杨–米尔斯密度为何相等，也确定了相应的第二陈形式。

4 瞬子与 ADHM 构造

ADHM 构造为 $\mathbb{R}^4$ 上有限作用量的反自对偶 SU(r) 瞬子提供了一种代数描述。本节将从正则 ADHM 数据构造一次Darboux变换，并导出杨–米尔斯密度的 Osborn公式。随后，我们将为所得的达布联络构造一个显式的规范变换，说明 ADHM 联络是秩 r 商丛上的诱导联络。这也直接解释了两者的杨–米尔斯密度为何相等。

在欧几里得实切片 $x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4$ 上，设

$$z = \frac{x^1 + ix^2}{\sqrt{2}}, \qquad w = \frac{x^3 + ix^4}{\sqrt{2}}, \qquad \widetilde{z} = \bar{z}, \qquad \widetilde{w} = -\bar{w}.$$

引入复坐标

$$u = z + \widetilde{w}, \qquad v = w + \widetilde{z}, \qquad \bar{u} = \widetilde{z} - w, \qquad \bar{v} = z - \widetilde{w}. \tag{4.1}$$

从 x 到 (u, v) 的变换是正交且保定向的，其中 $|u|^2+|v|^2 = |x|^2$。于是，欧几里得拉普拉斯算子可写为

$$\Delta_x := \sum_{\mu=1}^{4} \partial_{x^\mu}^2 = 2\big(\partial_z\partial_{\widetilde{z}} - \partial_w\partial_{\widetilde{w}}\big) = 4\big(\partial_u\partial_{\bar{u}} + \partial_v\partial_{\bar{v}}\big). \tag{4.2}$$

取定整数 $r \geq 2$ 和 $k \geq 1$，其中 r 是相应向量丛的秩，k 是瞬子数。ADHM 数据是常数矩阵 B_1,$\mathsf{B}_2 \in \mathbb{C}^{k\times k}$、$\mathsf{I} \in \mathbb{C}^{k\times r}$ 和 $\mathsf{J} \in \mathbb{C}^{r\times k}$，满足

$$\begin{aligned} [\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2] + \mathsf{I}\mathsf{J} &= 0, \\ [\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_1^\dagger] + [\mathsf{B}_2, \mathsf{B}_2^\dagger] + \mathsf{I}\mathsf{I}^\dagger - \mathsf{J}^\dagger\mathsf{J} &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

令 $m = r + 2k$ 并定义 $\Delta = (\alpha \mid \beta) \in \mathbb{C}^{m\times 2k}$，其中

$$\alpha = \begin{pmatrix} \mathsf{B}_1 - uI_k \\ \mathsf{B}_2 - vI_k \\ \mathsf{J} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} -\mathsf{B}_2^\dagger + \bar{v}I_k \\ \mathsf{B}_1^\dagger - \bar{u}I_k \\ \mathsf{I}^\dagger \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

ADHM 方程 (4.3) 等价于

$$\alpha^\dagger\alpha = \beta^\dagger\beta = \mathsf{R}, \qquad \alpha^\dagger\beta = 0, \tag{4.5}$$

其中

$$\mathsf{R} = (\mathsf{B}_1^\dagger - \bar{u}I_k)(\mathsf{B}_1 - uI_k) + (\mathsf{B}_2^\dagger - \bar{v}I_k)(\mathsf{B}_2 - vI_k) + \mathsf{J}^\dagger\mathsf{J}. \tag{4.6}$$

W我们假设 ADHM 数据是正则的，即对于所有 $x \in \mathbb{R}^4$都有 R(x) > 0，并记 f =R^{-1}。令 U $\in \mathbb{C}^{m\times r}$ 为 ker $\Delta^\dagger$的光滑正交归一标架，满足

$$\Delta^\dagger\mathsf{U} = 0, \qquad \mathsf{U}^\dagger\mathsf{U} = I_r. \tag{4.7}$$

ADHM 联络为 $\mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}} = \mathsf{U}^\dagger\mathrm{d}\mathsf{U}$ [2]。它是反厄米的，并且可以选取标架使得 tr $\mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}} = 0$。由于 $\Delta^\dagger\Delta$ = diag(R,R)，正交分解 $\mathbb{C}^m$ =ker $\Delta^\dagger \oplus$ im Δ给出完备关系

$$\mathsf{U}\mathsf{U}^\dagger + \alpha f\alpha^\dagger + \beta f\beta^\dagger = I_m. \tag{4.8}$$

对 $\mathsf{U}^\dagger\alpha = \mathsf{U}^\dagger\beta = 0$ 求微分并利用（4.8），我们得到曲率 $\mathcal{F}_{\mathrm{ADHM}} = \mathrm{d}\mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}} + \mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}} \wedge \mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}}$，其标准形式为 [13, 16]:

$$\mathcal{F}_{\mathrm{ADHM}} = \mathrm{d}\mathsf{U}^\dagger(I_m - \mathsf{U}\mathsf{U}^\dagger) \wedge \mathrm{d}\mathsf{U} = \mathsf{U}^\dagger\big(\mathrm{d}\alpha\, f \wedge \mathrm{d}\alpha^\dagger + \mathrm{d}\beta\, f \wedge \mathrm{d}\beta^\dagger\big)\mathsf{U}.$$

在归一化 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}$tr($F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$)下，Osborn公式 [36]给出

$$\mathcal{L}_{\mathrm{ADHM}} = -\frac{1}{4}\Delta_x^2 \ln\det\mathsf{R} = \frac{1}{4}\Delta_x^2 \ln\det f. \tag{4.9}$$

我们首先构造一次Darboux变换，使其杨–米尔斯密度公式重现式 (4.9) 中的行列式表达式。

定理 4.1. 设 *ADHM* 数据是正则的，并定义

$$\Theta = \begin{pmatrix} I_m & \alpha \\ -\alpha^\dagger & 0_k \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

则 Θ满足真空方程

$$\partial_z\Theta = (\partial_{\tilde{w}}\Theta)\Lambda, \qquad \partial_w\Theta = (\partial_{\tilde{z}}\Theta)\Lambda, \tag{4.11}$$

且 行列式 Θ = 行列式 R > 0。一次*Darboux*变换给出一个全局光滑的杨矩阵

$$S = \Theta\Lambda\Theta^{-1} = \begin{pmatrix} 2\alpha f\alpha^\dagger - I_m & 2\alpha f \\ 0 & -I_k \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = S, \tag{4.12}$$

其杨–米尔斯密度为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{DT}} = -\big(\partial_z\partial_{\tilde{z}} - \partial_w\partial_{\tilde{w}}\big)^2 \ln\det\Theta = -\frac{1}{4}\Delta_x^2 \ln\det\mathsf{R} = \mathcal{L}_{\mathrm{ADHM}}. \tag{4.13}$$

证明. 坐标关系 (4.1) 蕴含

$$\partial_z\alpha = \partial_{\tilde{w}}\alpha, \qquad \partial_w\alpha = \partial_{\tilde{z}}\alpha, \qquad \partial_z\alpha^\dagger = -\partial_{\tilde{w}}\alpha^\dagger, \qquad \partial_w\alpha^\dagger = -\partial_{\tilde{z}}\alpha^\dagger.$$

代入 (4.10) 即可证明 (4.11)。由于 $\alpha^\dagger\alpha$ =R，分块行变换

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ \alpha^\dagger & I_k \end{pmatrix}\Theta = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ \alpha^\dagger & I_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & \alpha \\ -\alpha^\dagger & 0_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & \alpha \\ 0 & \mathsf{R} \end{pmatrix}$$

得到 $\det\Theta = \det\mathsf{R} > 0$。此外，直接相乘可得

$$\Theta^{-1} = \begin{pmatrix} I_m - \alpha f\alpha^\dagger & -\alpha f \\ f\alpha^\dagger & f \end{pmatrix},$$

由此得到 (4.12)。特别地，S 及其相应的联络在整个 $\mathbb{R}^4$ 上都是光滑的。于是，由定理 2.1 和 (4.2) 可得 (4.13)。 □

现在，我们通过显式计算来联系相应的规范联络。令 e

$$\mathrm{d} := \partial + \widetilde{\partial}, \qquad \partial := \mathrm{d}z\,\partial_z + \mathrm{d}w\,\partial_w, \qquad \widetilde{\partial} := \mathrm{d}\widetilde{z}\,\partial_{\widetilde{z}} + \mathrm{d}\widetilde{w}\,\partial_{\widetilde{w}}.$$

杨矩阵 (4.12) 定义了达布联络

$$\widehat{\mathcal{A}}_{\mathrm{DT}} = -(\partial_z S)S^{-1}\,\mathrm{d}z - (\partial_w S)S^{-1}\,\mathrm{d}w = -(\partial S)S,$$

其中我们使用了 $S^{-1} = S$。令

$$\mathsf{H} := 2\alpha f \alpha^\dagger - I_m$$

表示 S 的左上块。由于 $\mathsf{H}^2 = I_m$，直接进行分块乘法可得

$$\widehat{\mathcal{A}}_{\mathrm{DT}} = \begin{pmatrix} -(\partial\mathsf{H})\mathsf{H} & 2\partial(\alpha f) - 2(\partial\mathsf{H})\alpha f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，左上块定义了一个秩为 m 的约化联络

$$\mathcal{A}_{\mathrm{DT}} := -(\partial\mathsf{H})\mathsf{H}, \qquad \mathsf{H} \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}).$$

此外， S 的杨方程的左上块恰好为

$$\partial_{\widetilde{z}}\big((\partial_z\mathsf{H})\mathsf{H}^{-1}\big) - \partial_{\widetilde{w}}\big((\partial_w\mathsf{H})\mathsf{H}^{-1}\big) = 0.$$

定理 4.2。 在定理 *4.1* 的假设下，定义

$$\mathsf{G} := \begin{pmatrix} \alpha - \beta & \mathsf{U} & \alpha f \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

那么，$\mathsf{G} \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{R}^4$ 上光滑，且其逆为

$$\mathsf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} -f\beta^\dagger \\ \mathsf{U}^\dagger \\ \alpha^\dagger + \beta^\dagger \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

它对约化达布联络的作用为

$$\mathsf{G}^{-1}\mathcal{A}_{\mathrm{DT}}\mathsf{G} + \mathsf{G}^{-1}\mathrm{d}\mathsf{G} = \begin{pmatrix} 0 & f\,\mathrm{d}\beta^\dagger\,\mathsf{U} & -f\beta^\dagger\,\mathrm{d}\beta\,f \\ 0 & \mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}} & \mathsf{U}^\dagger\,\mathrm{d}\beta\,f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

其中各分块的大小分别为 k、r、k和 $\mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}} = \mathsf{U}^\dagger\mathrm{d}\mathsf{U}$。

证明。 该结果可通过直接计算得到，详见附录 B。 □

(4.16) 中的分块形式也意味着 $\mathcal{L}_{\mathrm{DT}} = \mathcal{L}_{\mathrm{ADHM}}$。它提供了 (4.13) 的另一种证明，且无需使用 (2.3)。

例 4.3。 我们说明在这种达布变换框架下如何恢复 BPST瞬子密度 [4] 。取 $k = 1$、 $r = 2$，以及

$$\mathsf{B}_1 = \mathsf{B}_2 = 0, \qquad \mathsf{I} = (\rho, 0), \qquad \mathsf{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix}, \qquad \rho > 0.$$

这些数据满足 (4.3)，且

$$\alpha = \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{R} = |u|^2 + |v|^2 + \rho^2 = |x|^2 + \rho^2.$$

相应的一重 DT 由以下条件确定

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \rho \\ \bar{u} & \bar{v} & 0 & -\rho & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1,1).$$

因此 $\det\Theta = |x|^2 + \rho^2$，并且

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BPST}} = -\frac{1}{4}\Delta_x^2 \ln(|x|^2+\rho^2) = \frac{24\rho^4}{(|x|^2+\rho^2)^4}. \tag{4.17}$$

5 总结性评述

本文在基于一次Darboux变换及其相关 τ-函数的统一框架内，研究了ASDYM方程的孤子解和ADHM瞬子，并特别关注它们的杨–米尔斯拉格朗日密度。对于孤子解，我们构造了由复格拉斯曼流形中任意点参数化的 τ-函数，这与KP孤子的Grassmann流形描述相类似。对于ADHM瞬子，我们由正则ADHM 数据构造了一次Darboux变换，并从相关的行列式 τ-函数中恢复了Osborn公式。我们还给出了一个显式规范变换，在该变换下，所得的达布联络变为分块上三角形式，并在秩为r 的商丛上诱导出ADHM 联络。

ASDYM方程与KP层次之间的联系长期以来一直受到广泛关注 [22,31,38]。一种经典方法是允许规范势取值于由矩阵伪微分算子构成的无限维代数中，从而将KP层次实现为ASDYM层次的约化 [1]。近年来，人们建立了规范群为GL(2,$\mathbb{C}$)的ASDYM方程到KP和mKP层次的无算子约化，并构造了Gram型解 [28]。相关工作还将ASDYM解的杨–米尔斯拉格朗日密度表示为某个 τ-函数；在适当的特化下，该函数呈现为Grammian KP τ-函数的形式 [29]。

本工作在这一方向上的主要贡献，是通过一种由复格拉斯曼流形 Gr(N, M; $\mathbb{C}$) 中任意点参数化的共同行列式构造，建立孤子型 ASDYM 与 KP τ-函数之间的直接对应关系（定理 3.1）。由于 KP 线孤子解可由有限维 Grassmann流形完全参数化，这一对应关系使我们能够将 KP孤子理论的系统框架应用于 ASDYM 孤子的研究。

在 KP孤子理论中， u和 τ-函数均为标量值函数，它们通过 $u = 2\partial_x^2 \ln\ \tau$相关联。相较之下，对于 ASDYM方程，杨矩阵是矩阵值的，而与之关联的τ-函数则是标量值的。因此，用 τ表示杨–米尔斯密度，并不能直接得到相应的杨矩阵。我们的第二项贡献是：针对每个不可约格拉斯曼点$[A] \in$ Gr(N, M; $\mathbb{C}$)，显式构造一个取值于 SL($r, \mathbb{C}$) 的杨矩阵，其中 $r \le 1 + \min\{N, M-N\}$（定理 3.3）。所得杨矩阵的杨–米尔斯密度恰好由相应的 τ-函数确定。

最后，我们确立了一重 DT 与 ADHM 瞬子构造之间的关系。在这一框架下，恢复了瞬子密度的 Osborn公式以及 ADHM 联络。然而，相应的谱矩阵 Λ = diag($-I_m$, I_k)具有重特征值，而我们的Grassmann流形参数化要求谱参数两两不同。因此，本文发展的Grassmann流形理论无法直接推广到 ADHM瞬子。将该方法推广到重谱参数的情形，仍是未来研究的一个有趣方向。

致谢

本研究得到日本学术振兴会（JSPS）P25326号资助，以及中国国家自然科学基金（NSFC）12601462号资助。

声明与披露

竞争利益。 作者声明，就本文内容而言，不存在相关的财务或非财务竞争利益。

数据可用性。 本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

一重达布变换与 n重达布变换之间的对应关系

在本附录中，我们保留 [26,第 3 节1]中所使用的 n重达布变换记号。固定整数 $n \geq 1$ 和 $r \geq 2$。设 $\Lambda_i \in \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ 为常数矩阵，并设 Θ_i为满足真空线性系统的 $r \times r$ 矩阵值函数

$$\partial_z \Theta_i = (\partial_{\widetilde{w}} \Theta_i)\Lambda_i, \qquad \partial_w \Theta_i = (\partial_{\widetilde{z}} \Theta_i)\Lambda_i, \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{A.1}$$

对于 $k \geq 0$，令 $\Pi_k := (\Theta_1 \Lambda_1^k,\ \ldots\ldots,\ \Theta_n \Lambda_n^k)$，并构造 $nr \times nr$ 分块矩阵

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \Theta_1 & \cdots & \Theta_n \\ \Theta_1\Lambda_1 & \cdots & \Theta_n\Lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \Theta_1\Lambda_1^{n-1} & \cdots & \Theta_n\Lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_0 \\ \Pi_1 \\ \vdots \\ \Pi_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

我们在 $\det \Sigma \neq 0$ 的定义域上进行局部讨论。相应的首一达布矩阵多项式为

$$T(\lambda) = \lambda^n I_r - \Pi_n \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} I_r \\ \lambda I_r \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} I_r \end{pmatrix} = \lambda^n I_r + \sum_{k=0}^{n-1} T_k \lambda^k,$$

其中 T_k 是 $r \times r$ 矩阵值函数。特别地，每个系数 T_k 都具有如下拟行列式表示

$$T_k = \begin{vmatrix} \Theta_1 & \cdots & \Theta_n & \delta_{0k} I_r \\ \Theta_1\Lambda_1 & \cdots & \Theta_n\Lambda_n & \delta_{1k} I_r \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Theta_1\Lambda_1^{n-1} & \cdots & \Theta_n\Lambda_n^{n-1} & \delta_{n-1,k} I_r \\ \Theta_1\Lambda_1^{n} & \cdots & \Theta_n\Lambda_n^{n} & \boxed{0} \end{vmatrix}, \qquad 0 \leq k \leq n-1,$$

其中 δ_{jk} 表示克罗内克δ，拟行列式按照右下角分块展开。

根据构造，这些系数满足插值恒等式

$$\Pi_n = -\sum_{k=0}^{n-1} T_k \Pi_k = -T_0\Pi_0 - T_1\Pi_1 - \cdots - T_{n-1}\Pi_{n-1}.$$

该恒等式可写成分块矩阵形式：

$$\widehat{\Sigma} = S\Sigma, \qquad \widehat{\Sigma} := \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \vdots \\ \Pi_n \end{pmatrix}, \qquad S := \begin{pmatrix} 0 & I_r & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & I_r \\ -T_0 & -T_1 & \cdots & -T_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

对于 $n = 1$，伴随矩阵化简为 $S = -T_0$。

现在令 $\Gamma := \mathrm{diag}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$。由于 $\Pi_{k+1} = \Pi_k\Gamma$，我们还有 $\Sigma = \Sigma\Gamma$。因此，$S = \Sigma\Gamma\Sigma^{-1}$. 此外，(A.1) 表明

$$\partial_z\Sigma = (\partial_{\widetilde{w}}\Sigma)\Gamma, \qquad \partial_w\Sigma = (\partial_{\widetilde{z}}\Sigma)\Gamma.$$

因此，Σ 满足与 (2.1) 中相同的线性系统，其中以 Γ 代替 Λ。根据定理 2.1，伴随矩阵 S 满足 (2.2)，因而满足 GL(nr, $\mathbb{C}$) 的杨方程。

由于 Σ 和 Γ 均可逆，因此 S也可逆，进而可知 T_0 可逆。比较 (2.2) 中左下角的 $r \times r$ 块，得到

$$-(\partial_z T_0)T_0^{-1} = \partial_{\widetilde{w}} T_{n-1}, \qquad -(\partial_w T_0)T_0^{-1} = \partial_{\widetilde{z}} T_{n-1}. \tag{A.4}$$

这些关系表明，T_0 满足杨方程 (1.5)。将 (A.4) 代入 (1.7)，得到

$$\mathcal{L}[T_0] = \mathrm{tr}\Big[(\partial_{\widetilde{z}}\partial_{\widetilde{w}} T_{n-1})^2 - (\partial_{\widetilde{w}}^2 T_{n-1})(\partial_{\widetilde{z}}^2 T_{n-1})\Big].$$

另一方面，由 (2.4) 得到

$$\mathcal{L}[S] = \mathrm{tr}\Big[(\partial_{\widetilde{z}}\partial_{\widetilde{w}} S)^2 - (\partial_{\widetilde{w}}^2 S)(\partial_{\widetilde{z}}^2 S)\Big].$$

由伴随形式 (A.3)，对于任意 $\mu, \nu \in \{\widetilde{z}, \widetilde{w}\}$，有

$$\partial_\mu\partial_\nu S = -\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_\mu\partial_\nu T_0 & \cdots & \partial_\mu\partial_\nu T_{n-1} \end{pmatrix}.$$

因此，对于任意 $\mu, \nu, \rho, \sigma \in \{\widetilde{z}, \widetilde{w}\}$,

$$(\partial_\mu\partial_\nu S)(\partial_\rho\partial_\sigma S) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial_\mu\partial_\nu T_{n-1})(\partial_\rho\partial_\sigma T_0) & \cdots & (\partial_\mu\partial_\nu T_{n-1})(\partial_\rho\partial_\sigma T_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

取迹可得

$$\mathrm{tr}\big[(\partial_\mu\partial_\nu S)(\partial_\rho\partial_\sigma S)\big] = \mathrm{tr}\big[(\partial_\mu\partial_\nu T_{n-1})(\partial_\rho\partial_\sigma T_{n-1})\big].$$

特别地,

$$\mathcal{L}[S] = \mathrm{tr}\Big[(\partial_{\widetilde{z}}\partial_{\widetilde{w}} T_{n-1})^2 - (\partial_{\widetilde{w}}^2 T_{n-1})(\partial_{\widetilde{z}}^2 T_{n-1})\Big] = \mathcal{L}[T_0].$$

将定理 2.1 应用于 $S = \Sigma\Gamma\Sigma^{-1}$，我们得出

$$\mathcal{L}[T_0] = \mathcal{L}[S] = -\big(\partial_z\partial_{\widetilde{z}} - \partial_w\partial_{\widetilde{w}}\big)^2 \ln\det\Sigma. \tag{A.5}$$

因此，GL($r, \mathbb{C}$) 的 n 重达布变换与 GL($nr, \mathbb{C}$) 的相应单重构造具有相同的杨–米尔斯密度。这意味着，我们可以通过定理 2.1 的单重构造来研究多重 DT 所产生的杨–米尔斯密度。

B 定理 4.2 的证明

由 (4.5) 和 (4.7)，直接计算可得

$$\begin{pmatrix} -f\beta^\dagger \\ \mathsf{U}^\dagger \\ \alpha^\dagger + \beta^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - \beta & \mathsf{U} & \alpha f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\mathsf{R} & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{R}f \end{pmatrix} = I_m.$$

这就证明了 (4.15)。正则性意味着 $f = \mathsf{R}^{-1}$ 是光滑的。由于 α、β 和选定标架 U 都是光滑的，因此 G 和 G^{-1} on $\mathbb{R}^4$ 也是光滑的。

为验证 (4.16)，我们先建立一些有用的恒等式。因式分解和正交关系给出

$$\begin{aligned} \mathsf{H}\alpha &= 2\alpha f(\alpha^\dagger\alpha) - \alpha = 2\alpha f\mathsf{R} - \alpha = \alpha, \\ \mathsf{H}\beta &= 2\alpha f(\alpha^\dagger\beta) - \beta = -\beta, \\ \mathsf{H}\mathsf{U} &= 2\alpha f(\alpha^\dagger\mathsf{U}) - \mathsf{U} = -\mathsf{U}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

由 (4.4) 和 (4.1)，可得

$$\alpha + \beta = \begin{pmatrix} \mathsf{B}_1 - \mathsf{B}_2^\dagger - 2\widetilde{w}I_k \\ \mathsf{B}_2 + \mathsf{B}_1^\dagger - 2\widetilde{z}I_k \\ \mathsf{J} + \mathsf{I}^\dagger \end{pmatrix}, \qquad \alpha - \beta = \begin{pmatrix} \mathsf{B}_1 + \mathsf{B}_2^\dagger - 2zI_k \\ \mathsf{B}_2 - \mathsf{B}_1^\dagger - 2wI_k \\ \mathsf{J} - \mathsf{I}^\dagger \end{pmatrix}.$$

因此

$$\partial(\alpha + \beta) = 0, \qquad \widetilde{\partial}(\alpha - \beta) = 0. \tag{B.2}$$

微分可得

$$\partial\alpha = \begin{pmatrix} -\mathrm{d}z\, I_k \\ -\mathrm{d}w\, I_k \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \partial\alpha^\dagger = \begin{pmatrix} \mathrm{d}w\, I_k & -\mathrm{d}z\, I_k & 0 \end{pmatrix}.$$

由此，坐标关系 (4.1) 给出

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\beta &= \begin{pmatrix} \mathrm{d}\bar{v}\, I_k \\ -\mathrm{d}\bar{u}\, I_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\mathrm{d}u + 2\mathrm{d}z)I_k \\ (-\mathrm{d}v + 2\mathrm{d}w)I_k \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}\alpha - 2\partial\alpha, \\ \mathrm{d}\beta^\dagger &= \begin{pmatrix} \mathrm{d}v\, I_k & -\mathrm{d}u\, I_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\mathrm{d}w + \mathrm{d}\bar{u})I_k & (-2\mathrm{d}z + \mathrm{d}\bar{v})I_k & 0 \end{pmatrix} = 2\partial\alpha^\dagger - \mathrm{d}\alpha^\dagger. \end{aligned} \tag{B.3}$$

我们还有

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}\alpha^\dagger)\alpha &= -\mathrm{d}\bar{u}\,(\mathsf{B}_1 - uI_k) - \mathrm{d}\bar{v}\,(\mathsf{B}_2 - vI_k) \\ &= \begin{pmatrix} -\mathsf{B}_2 + vI_k & \mathsf{B}_1 - uI_k & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\bar{v}\, I_k \\ -\mathrm{d}\bar{u}\, I_k \\ 0 \end{pmatrix} = \beta^\dagger \mathrm{d}\beta. \end{aligned} \tag{B.4}$$

对 $\mathsf{R}f = I_k$ 求导，得到

$$(\mathrm{d}\mathsf{R})f + \mathsf{R}\,\mathrm{d}f = 0.$$

由于 $\mathsf{R} = \alpha^\dagger\alpha$，因此得到

$$\mathrm{d}f = -f(\mathrm{d}\mathsf{R})f = -f\big((\mathrm{d}\alpha^\dagger)\alpha + \alpha^\dagger\mathrm{d}\alpha\big)f. \tag{B.5}$$

设 $\nabla_{\mathrm{DT}} := \mathsf{d} + \mathcal{A}_{\mathrm{DT}}$。现在我们计算 $\nabla_{\mathrm{DT}}\mathsf{G}$ 的三个分块列。

1. 第一块列。 方程（B.1）给出

$$\mathsf{H}(\alpha-\beta)=\alpha+\beta,\qquad \mathsf{H}(\alpha+\beta)=\alpha-\beta.$$

根据乘积法则和（B.2），

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathrm{DT}}(\alpha-\beta)&=\mathrm{d}(\alpha-\beta)-(\partial\mathsf{H})\mathsf{H}(\alpha-\beta)\\&=\mathrm{d}(\alpha-\beta)-(\partial\mathsf{H})(\alpha+\beta)\\&=\mathrm{d}(\alpha-\beta)-\partial\big(\mathsf{H}(\alpha+\beta)\big)+\mathsf{H}\partial(\alpha+\beta)\\&=\mathrm{d}(\alpha-\beta)-\partial(\alpha-\beta)=\widetilde{\partial}(\alpha-\beta)=0.\end{aligned}\tag{B.6}$$

2. 第二块列。 对 $\alpha^\dagger\mathsf{U}=\beta^\dagger\mathsf{U}=0$ 求导可得

$$\alpha^\dagger\mathrm{d}\mathsf{U}=-(\mathrm{d}\alpha^\dagger)\mathsf{U},\qquad \beta^\dagger\mathrm{d}\mathsf{U}=-(\mathrm{d}\beta^\dagger)\mathsf{U}.$$

因此，完备关系（4.8）给出

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathsf{U}&=\big(\mathsf{U}\mathsf{U}^\dagger+\alpha f\alpha^\dagger+\beta f\beta^\dagger\big)\mathrm{d}\mathsf{U}\\&=\mathsf{U}(\mathsf{U}^\dagger\mathrm{d}\mathsf{U})-\alpha f(\mathrm{d}\alpha^\dagger)\mathsf{U}-\beta f(\mathrm{d}\beta^\dagger)\mathsf{U}.\end{aligned}$$

由于 $\mathsf{H}\mathsf{U}=-\mathsf{U}$ 且 $\alpha^\dagger\mathsf{U}=0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathrm{DT}}\mathsf{U}&=-(\partial\mathsf{H})\mathsf{H}\mathsf{U}=(\partial\mathsf{H})\mathsf{U}\\&=2\partial(\alpha f\alpha^\dagger)\mathsf{U}\\&=2(\partial\alpha)f\alpha^\dagger\mathsf{U}+2\alpha(\partial f)\alpha^\dagger\mathsf{U}+2\alpha f(\partial\alpha^\dagger)\mathsf{U}\\&=2\alpha f(\partial\alpha^\dagger)\mathsf{U}.\end{aligned}$$

利用（B.3）和 $\mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}}=\mathsf{U}^\dagger\mathrm{d}\mathsf{U}$，我们得到

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathrm{DT}}\mathsf{U}&=\mathrm{d}\mathsf{U}+\mathcal{A}_{\mathrm{DT}}\mathsf{U}\\&=\mathsf{U}\mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}}-\alpha f(\mathrm{d}\alpha^\dagger)\mathsf{U}-\beta f(\mathrm{d}\beta^\dagger)\mathsf{U}+2\alpha f(\partial\alpha^\dagger)\mathsf{U}\\&=\mathsf{U}\mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}}+\alpha f(2\partial\alpha^\dagger-\mathrm{d}\alpha^\dagger)\mathsf{U}-\beta f(\mathrm{d}\beta^\dagger)\mathsf{U}\\&=(\alpha-\beta)f(\mathrm{d}\beta^\dagger)\mathsf{U}+\mathsf{U}\mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}}.\end{aligned}\tag{B.7}$$

3. 第三块列。 将 ∂ 应用于（B.1）中的 $\mathsf{H}\alpha=\alpha$，得到

$$(\partial\mathsf{H})\alpha+\mathsf{H}\partial\alpha=\partial\alpha,$$

so

$$(\partial\mathsf{H})\alpha=(I_m-\mathsf{H})\partial\alpha=2(I_m-\alpha f\alpha^\dagger)\partial\alpha.$$

Thus

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathrm{DT}}(\alpha f)&=\mathrm{d}(\alpha f)-(\partial\mathsf{H})\mathsf{H}\alpha f\\&=(\mathrm{d}\alpha)f+\alpha\,\mathrm{d}f-(\partial\mathsf{H})\alpha f\\&=(\mathrm{d}\alpha)f+\alpha\,\mathrm{d}f-2(I_m-\alpha f\alpha^\dagger)(\partial\alpha)f\\&=(\mathrm{d}\alpha-2\partial\alpha)f+\alpha\,\mathrm{d}f+2\alpha f\alpha^\dagger(\partial\alpha)f.\end{aligned}$$

代入（B.3）和（B.5），然后应用（B.4），得到

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathrm{DT}}(\alpha f)&=(\mathrm{d}\beta)f-\alpha f\big((\mathrm{d}\alpha^\dagger)\alpha+\alpha^\dagger\mathrm{d}\alpha\big)f+2\alpha f\alpha^\dagger(\partial\alpha)f\\&=(\mathrm{d}\beta)f-\alpha f\big((\mathrm{d}\alpha^\dagger)\alpha+\alpha^\dagger(\mathrm{d}\alpha-2\partial\alpha)\big)f\\&=(\mathrm{d}\beta)f-\alpha f\big(\beta^\dagger\mathrm{d}\beta+\alpha^\dagger\mathrm{d}\beta\big)f\\&=(\mathrm{d}\beta)f-\alpha f(\alpha^\dagger+\beta^\dagger)(\mathrm{d}\beta)f.\end{aligned}$$

由（4.8）可得,

$$I_m - \alpha f \alpha^\dagger = \mathsf{U}\mathsf{U}^\dagger + \beta f \beta^\dagger.$$

因此我们有

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathrm{DT}}(\alpha f) &= (I_m - \alpha f \alpha^\dagger)(\mathrm{d}\beta) f - \alpha f \beta^\dagger (\mathrm{d}\beta) f \\ &= \mathsf{U}\mathsf{U}^\dagger (\mathrm{d}\beta) f + \beta f \beta^\dagger (\mathrm{d}\beta) f - \alpha f \beta^\dagger (\mathrm{d}\beta) f \\ &= -(\alpha - \beta) f \beta^\dagger (\mathrm{d}\beta) f + \mathsf{U}\big(\mathsf{U}^\dagger \mathrm{d}\beta\, f\big). \end{aligned} \tag{B.8}$$

由方程 (B.6)、(B.7) 和 (B.8) 可得

$$\nabla_{\mathrm{DT}} \mathsf{G} = \mathsf{G} \begin{pmatrix} 0 & f(\mathrm{d}\beta^\dagger)\mathsf{U} & -f\beta^\dagger(\mathrm{d}\beta) f \\ 0 & \mathcal{A}_{\mathrm{ADHM}} & \mathsf{U}^\dagger(\mathrm{d}\beta) f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

在左侧乘以 G^{-1}，并利用 $\nabla_{\mathrm{DT}}\mathsf{G} = \mathrm{d}\mathsf{G} + \mathcal{A}_{\mathrm{DT}}\mathsf{G}$，即可证明 (4.16)。

参考文献

[1] M. J. Ablowitz、S. Chakravarty 和 L. A. Takhtajan，自对偶杨–米尔斯层级及其约化为 $1+1$ 维和 $2+1$ 维可积系统，Commun. Math. Phys. 158 (1993), 289–314. https://doi.org/10.1007/BF02108076.[2] M. F. Atiyah、N. J. Hitchin、V. G. Drinfeld 和 Yu. I. Manin，瞬子的构造，Phys. Lett. A 65 (1978), 185–187. https://doi.org/10.1016/0375-9601(78)90141-X.[3] M. F. Atiyah 和 R. S. Ward，瞬子与代数几何，Commun. Math. Phys. 55 (1977), 117–124. https://doi.org/10.1007/BF01626514.[4] A. A. Belavin、A. M. Polyakov、A. S. Schwartz 和 Yu. S. Tyupkin，杨–米尔斯方程的赝粒子解，Phys. Lett. B 59 (1975), 85–87. https://doi.org/10.1016/0370-2693(75) 90163-X.[5] A. A. Belavin 和 V. E. Zakharov，将杨–米尔斯方程视为逆散射问题，Phys. Lett. B 73 (1978), 53–57. https://doi.org/10.1016/0370-2693(78)90170-3.[6] G. Biondini、D. Kireyev 和 K. I. Maruno，Davey–Stewartson系统中的孤子共振与网状结构，J. Phys. A: Math. Theor. 55 (2022), 305701. https://doi.org/10.1088/ 1751-8121/ac78db.[7] G. Biondini 和 D. Wang，关于二维Toda晶格的孤子解，J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010), 434007. https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/43/434007.[8] S. Chakravarty 和 Y. Kodama，KPII线孤子解的分类，J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008), 275209. https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/27/275209.[9] S. Chakravarty 和 Y. Kodama，KP方程的孤子解及其在浅水波中的应用，Stud. Appl. Math. 123 (2009), 83–151. https://doi.org/10.1111/j.1467-9590. 2009.00448.x.[10] S. Chakravarty、T. Lewkow 和 K. I. Maruno，关于KP线孤子的构造及其相互作用，Appl. Anal. 89 (2010), 529–545. https://doi.org/10.1080/00036810903403343.[11] E. Corrigan、D. B. Fairlie、R. G. Yates 和 P. Goddard，B¨acklund变换与自对偶SU(2)规范场的Atiyah–Ward ans¨atz构造，Phys. Lett. B 72 (1978), 354–356. https://doi.org/10.1016/0370-2693(78)90137-5.[12]E. Corrigan、P. Goddard、H. Osborn 和 S. Templeton，ζ函数正则化与多瞬子行列式，Nucl. Phys. B 159 (1979), 469–496. https://doi.org/10.1016/ 0550-3213(79)90346-8.[13] N. Dorey、T. J. Hollowood、V. V. Khoze 和 M. P. Mattis，多瞬子演算，Phys. Rep. 371 (2002), 231–459. https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00301-0.

[14] N. C. Freeman 和 J. J. C. Nimmo，Korteweg–de Vries 方程和 Kadomtsev–Petviashvili 方程的孤子解：Wronskian技术，Phys. Lett. A 95 (1983), 1–3. https://doi.org/10.1016/0375-9601(83)90764-8.[15] C. R. Gilson、M. Hamanaka、S. C. Huang 和 J. J. C. Nimmo，非交换反自对偶 Yang–Mills 方程的孤子解，J. Phys. A: Math. Theor. 53 (2020), 404002. https://doi.org/10.1088/1751-8121/aba72e.[16] M. Hamanaka，非交换孤子与D膜，博士论文，东京大学，2003；arXiv:hep-th/0303256. https://arxiv.org/abs/hep-th/0303256.[17] M. Hamanaka 和 S. C. Huang，反自对偶 Yang–Mills 方程的新孤子解，J. High Energy Phys. 10 (2020), 101. https://doi.org/10.1007/JHEP10(2020)101.[18] M. Hamanaka 和 S. C. Huang，反自对偶规范场的多孤子动力学，J. High Energy Phys. 01 (2022), 039. https://doi.org/10.1007/JHEP01(2022)039.[19] S. C. Huang，反自对偶 Yang–Mills 方程的拟Grammian与拟Wronskian N-孤子解之间的渐近等价，arXiv:2607.17749 (2026). https://doi.org/10. 48550/arXiv.2607.17749.[20] R. Jackiw、C. Nohl 和 C. Rebbi，赝粒子构型的共形性质，Phys. Rev. D 15 (1977), 1642–1646. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.1642.[21] B. B. Kadomtsev 和 V. I. Petviashvili，弱色散介质中孤立波的稳定性，Sov. Phys. Dokl. 15 (1970), 539–541. 俄文原文：Dokl. Akad. Nauk SSSR 192 (1970), 753–756. https://www.mathnet.ru/eng/dan35447.[22] S. Kakei、T. Ikeda 和 K. Takasaki，$(2+1)$维非线性Schr¨odinger方程、自对偶 Yang–Mills 方程与环面Lie代数的层级，Ann. Henri Poincar ´e 3 (2002), 817–845. https://doi.org/10.1007/s00023-002-8638-1.[23] Y. Kodama，《KP 孤子与Grassmann流形：二维波形的组合学与几何》，Springer数学物理简明丛书，第22卷，Springer，新加坡，2017. https: //doi.org/10.1007/978-981-10-4094-8.[24] Y. Kodama 和 L. Williams，Grassmann流形的Deodhar分解与KP孤子的正则性，Adv. Math. 244 (2013), 979–1032. https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.06.011.[25] Y. Kodama 和 L. Williams，KP 孤子与Grassmann流形的全正性，Invent. Math. 198 (2014), 637–699. https://doi.org/10.1007/s00222-014-0506-3.[26] S. S. Li，关于反自对偶 Yang–Mills 方程解结构的等价性，arXiv:2610.14469 (2026). https://doi.org/10.48550/arXiv.2610.14469.[27] S. S. Li、M. Hamanaka、S. C. Huang 和 D. J. Zhang，四维Wess–Zumino–Witten模型中的孤子共振，Phys. Rev. D 111 (2025), 086023. https://doi.org/10.1103/PhysRevD. 111.086023.[28] S. S. Li、K. I. Maruno 和 D. J. Zhang，通过反自对偶Yang–Mills约化统一处理AKNS、DNLS、KP和mKP层级，arXiv:2603.23060 (2026). https: //doi.org/10.48550/arXiv.2603.23060.[29] S. S. Li、K. I. Maruno 和 D. J. Zhang，通过反自对偶Yang–Mills约化实现若干相关的$(2+1)$维可积系统，arXiv:2610.22753 (2026). https: //doi.org/10.48550/arXiv.2610.22753.[30] K. I. Maruno 和 G. Biondini，离散孤子系统中的共振与网状结构：二维Toda晶格及其全离散和超离散类比，J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004), 11819–11839. https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/49/005.[31] L. J. Mason 和 N. M. J. Woodhouse，《可积性、自对偶性与扭量理论》，伦敦数学会专著新编，第15卷，Clarendon Press，牛津，1996. https: //doi.org/10.1093/oso/9780198534983.001.0001.[32] T. McLoughlin，反自对偶Yang–Mills理论中的经典孤子，arXiv:2610.27074 (2026). https://doi.org/10.48550/arXiv.2610.27074.

[33] R. Navarro Betancourt、M. A. Hahn、V. Posch 和 V. Reda，《二维 Toda 格与 Davey–Stewartson 方程的组合几何》，arXiv:2607.20109（2026）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2607.20109。[34] J. J. C. Nimmo、C. R. Gilson 和 Y. Ohta，《达布变换在自对偶 Yang–Mills 方程中的应用》，《理论与数学物理》**122**（2000），239–246。https://doi.org/10.1007/BF02551200。[35] Y. Ohta、J. J. C. Nimmo 和 C. R. Gilson，《Pfaff 自对偶 Yang–Mills 方程的双线性方法》，《格拉斯哥数学杂志》**43**（2001），99–108。https://doi.org/10.1017/S001708950100009X。[36] H. Osborn，《自对偶规范场的半经典泛函积分》，《物理年刊》**135**（1981），373–415。https://doi.org/10.1016/0003-4916(81)90159-7。[37] N. Sasa、Y. Ohta 和 J. Matsukidaira，《自对偶 Yang–Mills 方程与（$2+1$）维可积系统的双线性形式方法》，《日本物理学会志》**67**（1998），83–86。https://doi.org/10.1143/jpsj.67.83。[38] K. Takasaki，《直接线性化、柯西矩阵与 Sato 格拉斯曼流形》，arXiv:2608.24538（2026）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2608.24538。[39] K. Ueno 和 Y. Nakamura，《反自对偶方程的变换理论与黎曼–希尔伯特问题》，*Phys. Lett. B* **109**（1982），273–278。https://doi.org/10.1016/0370-2693(82) 90434-8。[40] R. S. Ward，《可积与可解系统及其相互关系》，《伦敦皇家学会哲学汇刊 *A* 辑》**315**（1985），451–457。https://doi.org/10.1098/rsta.1985.0051。[41] 杨振宁，《欧几里得四维空间中 SU(2) 规范场的自对偶条件》，《物理评论快报》**38**（1977），1377–1379。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.38.1377。