arXiv:2611.30441v1 [quant-ph] 23 Nov 2026

刘维尔准粒子谱学

Kai Li[1], * 和上田正仁[2], 3,4, †[1]理化学研究所新兴物质科学中心（*CEMS*），日本埼玉县和光市，*351-0198*[2]东京大学物理系，日本东京文京区本乡*7-3-1*，*113-0033*[3]东京大学智能物理研究所，日本东京文京区本乡*7-3-1*，*113-0033*[4]基础量子科学计划（*FQSP*）、*TRIP*总部及理化学研究所新兴物质科学中心（*CEMS*），理化学研究所，日本和光市，*351-0198*

准粒子在理解封闭量子多体系统方面发挥着核心作用，因为它们能将复杂的多体问题简化为有效的单粒子描述，并与光谱测量直接联系起来。在开放量子系统中，相干动力学与耗散之间的相互作用会产生独特现象，例如刘维尔皮肤效应以及从强到弱的自发对称性破缺。这引出了一个基本问题：如何将准粒子图像扩展到开放量子系统，以解释这些现象并实现对准粒子谱的实验探测？在此，我们提出相干和非相干刘维尔准粒子，分别由作用于密度矩阵一侧和两侧的微扰所引发的响应来定义。我们提出了光谱学方案，通过将系统与辅助能级耦合——以相干方式或通过耗散脉冲——来测量相应的复准粒子能量。对具有趋肤效应的刘维尔算符进行数值模拟，验证了这些方案，并揭示了与实空间单向输运相关的非平庸谱绕数。值得注意的是，相干和非相干准粒子可在同一系统中沿相反方向传播。此外，对于呈现弱对称性破缺和强到弱对称性破缺 $U(1)$的模型，我们的结果分别揭示了相干准粒子谱和非相干准粒子谱中的无隙南部–戈德斯通模；在这两种情况下，另一种准粒子谱仍有能隙。我们的工作为在理论上描述和通过实验探测开放量子多体系统中的相干与非相干准粒子提供了统一框架。

I. 引言

准粒子图像是理解量子多体系统的基础框架 [1, 2]。其重要性体现在两个方面。首先，它将复杂的多体问题映射为有效的单粒子描述，从而简化理论处理。作为典型例子，费米液体理论将相互作用电子的低能激发描述为准粒子；这些准粒子携带电子电荷和自旋，但具有重整化质量和有限寿命 [3]。其次，准粒子图像通过光谱学方法直接联系到实验可观测量。这些方法包括固态材料中的角分辨光电子能谱 [4, 5]和非弹性中子散射 [6]，以及超冷原子系统中的射频 [7, 8]和布拉格光谱学 [9, 10] 。这些技术能够直接获取准粒子谱，揭示密度波序 [11]，、超流性和超导性 [8, 12–14]，以及拓扑能带结构 [15]的特征。

开放量子系统近年来受到了广泛关注 [16–19]。相干动力学与耗散之间的相互作用产生了奇异的量子现象，例如耗散相变 [20–23]，耗散超流性 [24, 25]，混态拓扑 [26–31]，李乌维尔皮肤效应 [32, 33]，以及异常点 [34]。尤其值得关注的是与强对称性和弱对称性 [35]，相关的不同形式的自发对称性破缺（SSB），包括弱自发对称性破缺和强到弱自发对称性破缺 [36–43]。在封闭系统中，自发对称性破缺与准粒子的出现密切相关。例如，连续全局对称性的自发破缺会产生无能隙的南部–戈德斯通激发 [44–46]。鉴于开放量子系统中自发对称性破缺的独特性质，一个自然的问题是：如何将准粒子的概念推广到开放量子系统中，以及它们如何揭示这些不同形式的自发对称性破缺所蕴含的物理机制。

先前的研究引入了 Incoherentons，即由右矢和左矢自由度构成的束缚态，用以描述开放量子系-统中的退相干过程 [47]。尽管这一图景为理解开放量子系统本征的准粒子提供了宝贵见解，但它并非以响应函数的形式构建，因此缺乏与光谱学的直接联系。与光谱测-

通过对李乌维尔算符施加弱扰动，已经为开放量子系统建立了测量方法 [48–52]。然而，如何在这些响应函数与具有物理意义的准粒子之间建立清晰的联系，仍然难以捉摸，尤其是对于开放量子系统本征的准粒子而言。这一空白推动了统一框架的发展，该框架涵盖准

* 通讯作者： kaili24@foxmail.com
† 通讯作者： ueda@cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp

粒子在开放量子系统中的理论描述和光谱测量。

在本文中，我们引入了相干和非相干李乌维尔准粒子的概念，并提出了测量其复能量的光谱学协议。我们通过相应响应函数的极点定义这两类准粒子。对于相干准粒子，响应函数中的微扰作用于密度矩阵的右矢侧或左矢侧，而对于非相干准粒子，微扰同时作用于两侧。这些准粒子刻画了此类微扰在李乌维尔动力学下的传播与衰减。特别是，非相干准粒子光谱学能够揭示相干准粒子谱无法捕捉的密度动力学。利用线性响应理论，我们证明，可以分别通过将系统相干地耦合到辅助能级以及施加耗散脉冲，来测量相干和非相干准粒子谱。在这里，耗散被用于探测开放系统本身，这与利用耗散探测厄米系统性质的方法形成鲜明对比 [53, 54]。

对呈现趋肤效应的李乌维尔算符进行数值模拟，证明了我们所提出协议的可行性；提取出的复谱与直接计算所得结果高度吻合。随着动量变化，准粒子能量会围绕复平面中的某些参考点绕行。这种非平庸的谱拓扑与实空间中的单向输运相一致。值得注意的是，在同一系统中，相干准粒子与非相干准粒子可以沿相反方向传播，这凸显了各自谱中所蕴含的不同特性。

此外，我们运用准粒子能谱研究开放量子系统中的 $U(1)$ 自发对称性破缺。我们引入了具有弱和强 $U(1)$ 对称性的两种模型 [43]。对于具有弱 $U(1)$ 自发对称性破缺的模型，我们的结果揭示，相干准粒子谱中存在无能隙的南部–戈德斯通模，同时非相干谱存在能隙。对于呈现强到弱 $U(1)$ 自发对称性破缺的模型，非相干谱无能隙，而相干谱仍有能隙。这些发现表明，相干与非相干准粒子光谱学能够区分与不同形式的自发对称性破缺相关的集体激发。尤其是，非相干准粒子光谱学能够探测开放量子系统本征的激发。

II. 相干准粒子 S

我们从推迟响应函数开始

$$\chi_k^R(t) = -\mathrm{i}\Theta(t)\langle[\hat{O}_k(t), \hat{O}_k^\dagger(0)]_\zeta\rangle, \tag{1}$$

其中 $\hat{O}_k(t) = e^{\mathcal{L}_s^\dagger t}[\hat{O}_k]$，其中 $\mathcal{L}_s^\dagger$ 是 $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$系统刘维尔算符 $\mathcal{L}_s$ 的伴随算符，$\langle O\rangle = \mathrm{Tr}(O\rho_s)$，以及 $[O_1, O_2]_\zeta = \hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $O_1O_2 - \zeta O_2O_1$，其中 $\zeta = +1$ 适用于玻色子，$\zeta = -1$ 适用于费米子。频域响应函数和谱函数分别为

$$\chi_k^R(\omega) = \int_0^\infty dt\, e^{\mathrm{i}\omega t}\chi_k^R(t), \tag{2}$$

$$A_k(\omega) = -2\,\mathrm{Im}\,\chi_k^R(\omega). \tag{3}$$

响应函数（1）是将封闭系统中的响应函数直接推广到开放量子系统的结果。对于 $\mathcal{L}_s[\rho] = -\mathrm{i}[H_s, \rho]$，方程（1）化为封闭系统中的响应函数，其中 $\hat{O}_k(t) = e^{\mathrm{i}\cdot H_s t}\hat{}$ $O_k e^{-\mathrm{i}\hat{H}_s t}$。

准粒子对应于响应函数在复频率平面上的极点。当系统具有定义良好的准粒子时，响应函数可近似表示为

$$\chi_k^R(\omega) \approx \sum_\alpha \frac{a_{k\alpha} + \mathrm{i}b_{k\alpha}}{\omega - z_{k\alpha}}, \tag{4}$$

其中，α 标记准粒子分支，$z_{k\alpha} = \varepsilon_{k\alpha} - \mathrm{i}\gamma_{k\alpha}$ 是复准粒子能量，$\varepsilon_{k\alpha}$ 和 $-\gamma_{k\alpha}$ 分别表示其实部和虚部，而 $a_{k\alpha}$ 和 $b_{k\alpha}$ 是实系数。因此，谱函数可近似表示为

$$A_k(\omega) \approx 2\sum_\alpha \frac{a_{k\alpha}\gamma_{k\alpha} - b_{k\alpha}(\omega - \varepsilon_{k\alpha})}{(\omega - \varepsilon_{k\alpha})^2 + \gamma_{k\alpha}^2}. \tag{5}$$

$\hat{}$ O_k 的选择决定了响应函数探测的是哪些准粒子模。下文取$\hat{}O_k = \hat{c}_{km}$ 为动量为 k、处于模式 m中的粒子的湮灭算符。相应的准粒子是相干（非对角）扇区中的类单粒子李乌维尔准粒子。

为探测这些准粒子，我们引入辅助能级，并将其与系统能级进行相干耦合 [55]。耦合哈密顿量为

$$\begin{aligned}\hat{H}_c &= \sum_j \left[\frac{\Omega}{2}(\hat{a}_j^\dagger\hat{c}_{jm} + \hat{c}_{jm}^\dagger\hat{a}_j) + \omega_a\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\right] \\ &= \sum_k \left[\frac{\Omega}{2}(\hat{a}_k^\dagger\hat{c}_{km} + \hat{c}_{km}^\dagger\hat{a}_k) + \omega_a\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k\right],\end{aligned} \tag{6}$$

其中，$\hat{a}_j$ ($\hat{a}_k$)湮灭辅助能级中格点 j (动量为 k)上的粒子，Ω 为拉比频率，ω_a 为辅助能级与系统能级之间的失谐。完整的李乌维尔算符为 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_c\hat{}$，且 $\mathcal{L}_c[\rho] = -\mathrm{i}[H_c, \rho]$。随后，我们监测动量分辨的辅助占据数 $\hat{}N_{a,\,k} = \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k$ 并得到

$$\dot{N}_{a,k}(t) = \frac{d}{dt}\,\mathrm{Tr}\big[\hat{N}_{a,k}\rho(t)\big], \tag{7}$$

其中 $\rho(t) = e^{\mathcal{L}t}[\rho_0]$ 是由完整李乌维尔算符演化得到的密度矩阵。这里，初态为$\rho_0 = \rho_s \otimes \rho_{a0}$。我们假设 ρ_s 在 $\mathcal{L}_s$作用下是稳态，且 ρ_a 在动量基下是对角的。注意，

$\otimes$ 表示玻色子的普通张量积，而 $\mathbb{Z}_2$表示分次张量积 [56] 表示费米子。

一般而言，从辅助能级到系统能级的粒子转移以及反向过程都会对$N_{\mathrm{a},k}(t)$作出贡献。因此，我们将响应分解为

$$\chi_k^R(t) = \chi_k^+(t) - \zeta\chi_k^-(t), \tag{8}$$

其中

$$\chi_k^+(t) = -\mathrm{i}\Theta(t)\,\mathrm{Tr}\{\hat{c}_{km}e^{\mathcal{L}_\mathrm{s}t}[\hat{c}_{km}^\dagger\rho_\mathrm{s}]\}, \tag{9}$$
$$\chi_k^-(t) = -\mathrm{i}\Theta(t)\,\mathrm{Tr}\{\hat{c}_{km}e^{\mathcal{L}_\mathrm{s}t}[\rho_\mathrm{s}\hat{c}_{km}^\dagger]\}, \tag{10}$$

前者对应从辅助能级到系统能级的粒子转移，后者对应反向过程。类似地，谱函数可以写为

$$A_k(\omega) = A_k^+(\omega) - \zeta A_k^-(\omega), \tag{11}$$
$$A_k^\pm(\omega) = -2\,\mathrm{Im}\int_0^\infty dt\, e^{\mathrm{i}\omega t}\chi_k^\pm(t). \tag{12}$$

利用线性响应理论，我们得到

$$\dot{N}_{\mathrm{a},k}(t) \approx -\frac{\Omega^2}{4}\left[N_{\mathrm{a},k}^0 A_k^+(\omega_\mathrm{a}) - (1+\zeta N_{\mathrm{a},k}^0)A_k^-(\omega_\mathrm{a})\right], \tag{13}$$

其中$N_{\mathrm{a},k}^0 = \mathrm{Tr}(\hat{N}_{\mathrm{a},k}\rho_0)$是动量 k处辅助能级的初始占据数。推导过程见附录A。对于费米子系统，可以通过制备空辅助能级或完全占据的辅助能级来获得两个谱函数 $A_k^\pm(\omega_\mathrm{a})$。当$N_{\mathrm{a},k}^0 = 0$时，$A_k^+(\omega_\mathrm{a})$的贡献消失，且$\dot{N}_{\mathrm{a},k}(t) \approx \frac{\Omega^2}{4}A_k^-(\omega_\mathrm{a})$。当$N_{\mathrm{a},k}^0 = 1$时，$A_k^-(\omega_\mathrm{a})$的贡献消失，且$\dot{N}_{\mathrm{a},k}(t) \approx -\frac{\Omega^2}{4}A_k^+(\omega_\mathrm{a})$。对于玻色子系统，类似地，可以使用空辅助能级获得 $A_k^-(\omega_\mathrm{a})$；使用占据的辅助能级并从信号中减去$A_k^-(\omega_\mathrm{a})$贡献，则可以获得 $A_k^+(\omega_\mathrm{a})$。

我们使用李乌维尔算符 Rice-Mele（LRM）模型演示我们的光谱学方案。该模型将非厄米 Rice-Mele（NHRM）模型 [57] 扩展到了开放量子系统。每个晶胞包含两个费米子模，分别标记为 $\nu = \uparrow, \downarrow$，LRM 模型的系统刘维尔算符（以上标 R 标记）为

$$\mathcal{L}_\mathrm{s}^\mathrm{R}[\rho] = -\mathrm{i}[\hat{H}_\mathrm{s}^\mathrm{R}, \rho] + \sum_{j=1}^{L}\left(\hat{L}_j^\mathrm{R}\rho(\hat{L}_j^\mathrm{R})^\dagger - \frac{1}{2}\{(\hat{L}_j^\mathrm{R})^\dagger\hat{L}_j^\mathrm{R}, \rho\}\right), \tag{14}$$

其中

$$\hat{H}_\mathrm{s}^\mathrm{R} = \sum_{j=1}^{L}\Big[J_1\hat{c}_{j\uparrow}^\dagger\hat{c}_{j\downarrow} + J_2\hat{c}_{j\downarrow}^\dagger\hat{c}_{j+1,\uparrow} + \frac{\mathrm{i}J_3}{2}\left(\hat{c}_{j\uparrow}^\dagger\hat{c}_{j+1,\uparrow} - \hat{c}_{j\downarrow}^\dagger\hat{c}_{j+1,\downarrow}\right) + \mathrm{H.c.}\Big], \tag{15}$$

$\hat{L}_j^\mathrm{R} = \sqrt{\gamma}\hat{c}_{j\downarrow}^\dagger\hat{c}_{j\uparrow}$，$L$ 表示系统尺寸。相应的非厄米有效哈密顿量为

$$\hat{H}_\mathrm{eff}^\mathrm{R} = \hat{H}_\mathrm{s}^\mathrm{R} - \frac{\mathrm{i}\gamma}{2}\sum_{j=1}^{L}\hat{n}_{j\uparrow}(1-\hat{n}_{j\downarrow}), \tag{16}$$

若省略耗散相互作用项$\frac{\gamma}{2}\hat{n}_{j\uparrow}\hat{n}_{j\downarrow}$，该模型便化为 NHRM 模型。

二次厄米哈密顿量 $\hat{H}_\mathrm{s}^\mathrm{R}$使 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 分量沿相反方向运动。为此，我们计算右移和左移振幅：

$$\begin{aligned} g_\pm^\nu(t) &= \langle j\pm1, \nu|e^{-\mathrm{i}\hat{H}_\mathrm{s}^\mathrm{R}t}|j\nu\rangle \\ &= \mp\xi_\nu\frac{J_3}{2}t - \frac{J_1J_2}{2}t^2 + O(t^3), \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\nu \in \{\uparrow, \downarrow\}$、$\xi_\uparrow = 1$ 和 $\xi_\downarrow = -1$。因此，

$$|g_+^\nu(t)|^2 - |g_-^\nu(t)|^2 = \xi_\nu J_1J_2J_3t^3 + O(t^4). \tag{18}$$

我们假设 $J_1J_2J_3 > 0$，因此 $\uparrow$（$\downarrow$）分量向右（向左）运动。相互作用非厄米项 $-\frac{\mathrm{i}\gamma}{2}\sum_{j=1}^{L}\hat{n}_{j\uparrow}(1-\hat{n}_{j\downarrow})$ 会使 $\uparrow$分量发生损耗，从而导致准粒子单向向左传播；这一现象可由复准粒子谱的拓扑捕捉。

为测量准粒子谱，我们使用方程（6）中的耦合哈密顿量，其中 $m = \uparrow$。在数值计算中，我们将辅助能级初始化为空（$N_{\mathrm{a},\,k}^0 = 0$），并让粒子在弱拉比驱动下从系统转移到辅助能级。随后我们测量布居数 $N_{\mathrm{a},\,k}(t)$，根据方程（13）可得到：

$$N_{\mathrm{a},k}(t) \approx \frac{\Omega^2 t}{4}A_k^-(\omega_\mathrm{a}). \tag{19}$$

我们考虑一个含有 N 个粒子的系统，并在相应的 N粒子扇区内进行计算。初始系统密度矩阵 ρ_s 取为限制在该扇区内的系统刘维尔算符的稳态。

图 1(a) 展示了辅助布居$N_{\mathrm{a},\,k}(t)$这是通过包含辅助能级的完整李维尔模拟，以及仅使用系统刘维尔算符并基于式（19）进行直接计算得到的。在早期时刻，完整模拟结果偏离了预测的线性行为；而在后期时刻，其斜率与直接计算结果吻合良好。通过对后期的模拟结果进行线性拟合，我们可以提取$A_k^-(\omega_\mathrm{a})$ 对应所有辅助频率 ω_a。如图 1(b) 所示，提取出的谱函数与直接计算结果一致。随后，我们使用式（5）拟合谱函数，得到复准粒子能量的实部 $\varepsilon_{k\alpha}$ 和虚部 $-\gamma_{k\alpha}$。拟合得到的复准粒子谱见图 1(c)，揭示了与准粒子单向运动相关的谱拓扑。

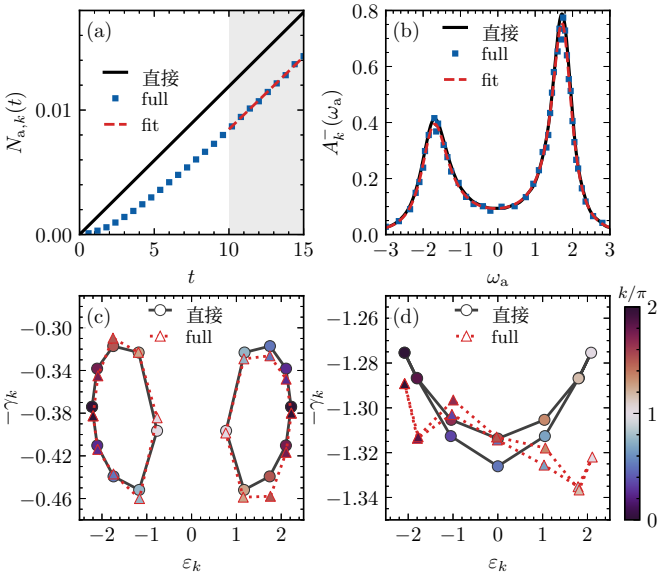

图 1. (a) 辅助布居 $N_{a,k}(t)$ 随 t 的变化，其中参数为 $k=\pi/2$ 和 $\omega_a=1.8$。黑线由公式 (19) 直接计算得到，蓝色方块来自包含辅助能级的完整李乌维尔算符模拟，红色虚线则是对 $t\in[10,15]$ 范围内的完整模拟结果进行线性拟合所得。(b) $k=\pi/2$ 时的谱函数 $A_k^-(\omega_a)$。黑线由公式 (10) 和 (12) 计算得到，蓝色方块是对每个 ω_a 下 $N_{a,k}(t)$ 在 $t\in[10,15]$ 范围内进行线性拟合后提取的结果，红色虚线则是使用公式 (5) 对完整模拟结果进行拟合所得。(c, d) LRM 模型 (c) 和 AJ 模型 (d) 的复相干准粒子谱，由对直接计算（带圆圈的实线）和完整模拟（带三角形的点线）得到的谱函数进行拟合获得。每个点的动量 k 用颜色表示。在 (a)–(c) 中，我们使用 LRM 模型，参数为 $L=8$、$N=4$、$J_1=0.75$、$J_2=1.5$、$J_3=0.5$、$\gamma=1.5$ 和 $\Omega=0.08$。在 (d) 中，我们使用 AJ 模型，参数为 $L=12$、$N=4$、
$J_h=1.0$ $\gamma_R=2.0$ $\gamma_L=0.4$ $=0.05$ 、 、
、和 Ω 。此处及下文均考虑周期性边界条件。直接计算在双倍希尔伯特空间中进行，而完整模拟采用量子跳跃演化 [58]，并在 (a)–(c) 中对 16384 个样本、在 (d) 中对 65536 个样本取平均。

我们将每个分支 α 的绕数定义为 [59]

$$w_\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dk\,\partial_k\arg[z_{k\alpha}-z_{\mathrm{ref},\alpha}],\tag{20}$$

其中 $z_{\mathrm{ref},\ \alpha}$ 取值位于回路内部。由傅里叶变换 ˆ $c_{jm}=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k e^{\mathrm{i}kj}\hat{c}_{km}$ 可知，向左偏置的跃迁会在复谱中产生一个 $e^{\mathrm{i}k}$ 项，从而当k 从 0 增至 2π时产生逆时针绕行。事实上，对于图 1(c) 中的两个分支，我们发现 $w_\alpha=+1$，这与左移准粒子的情况一致。

为说明该协议并非 LRM 模型所特有，我们还将其应用于表现出刘维尔皮肤效应 [33]的非对称跃迁（AJ）模型。AJ 模型的系统刘维尔算符（以右上角 A 标记）为给出

$$\mathcal{L}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{A}}[\rho]=-\mathrm{i}[\hat{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{A}},\rho]+\sum_{j=1}^{L}\sum_{\mu=\mathrm{L,R}}\Big(\hat{L}_{j\mu}^{\mathrm{A}}\rho(\hat{L}_{j\mu}^{\mathrm{A}})^\dagger-\frac{1}{2}\{(\hat{L}_{j\mu}^{\mathrm{A}})^\dagger\hat{L}_{j\mu}^{\mathrm{A}},\rho\}\Big),\tag{21}$$

其中

$$\hat{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{A}}=-J_h\sum_{j=1}^{L}(\hat{c}_{j+1}^\dagger\hat{c}_j+\mathrm{H.c.}),\tag{22}$$

and

$$\hat{L}_{j\mathrm{L}}^{\mathrm{A}}=\sqrt{\gamma_{\mathrm{L}}}\,\hat{c}_j^\dagger\hat{c}_{j+1},\qquad\hat{L}_{j\mathrm{R}}^{\mathrm{A}}=\sqrt{\gamma_{\mathrm{R}}}\,\hat{c}_{j+1}^\dagger\hat{c}_j.\tag{23}$$

这里，γ_{R} 和 γ_{L} 分别是向右和向左运动的量子跃迁强度。

采用与 LRM 模型相同的协议，我们得到图1(d) 所示的准粒子谱。直接计算在复能量平面上得到一个小回路，完整模拟很好地复现了这一结果。为量化这种一致性，我们计算平均相对误差

$$\delta x=\frac{1}{N_x}\sum_{n=1}^{N_x}\frac{|x_n^{\mathrm{full}}-x_n^{\mathrm{direct}}|}{|x_n^{\mathrm{direct}}|},\tag{24}$$

其中，我们排除了分母接近零的项（即 ε_k 在 $k=\pi/2$ 和 $k=3\pi/2$）。对于图 1(d)，平均相对误差为 $\delta\varepsilon\approx1.58\%$，$\delta\gamma\approx1.73\%$和 $\delta z\approx1.74\%$。

图1(d) 中的拟合谱绕数为$w=+1$，对应于向左运动的相干准粒子，尽管跳跃率满足 $\gamma_{\mathrm{R}}>\gamma_{\mathrm{L}}$。对此可以这样理解：跳跃率表征非相干过程，并导致对角扇区中的单向输运；而耦合哈密顿量ˆ所实现的相干探针 H_c 则测量非对角扇区中的性质。

向左缓慢移动的相干准粒子可以通过实空间响应来理解

$$\chi_r^-(t)=-\mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\big(\hat{c}_{j+r}e^{\mathcal{L}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{A}}t}[\rho_{\mathrm{s}}\hat{c}_j^\dagger]\big),\tag{25}$$

与 $r=\pm1$ 和 $t>0$。由于平移对称性，响应与 j 无关。物理上，$|\chi_r^-(t)|^2$描述了微扰从 j传播到 $j+r$ 所需时间 t内的传播过程。在短时间内，通过展开$e^{\mathcal{L}^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{s}}}$ $^t=\sum_{n=0}^{\infty}(\mathcal{L}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{A}}t)^n/n!$并数值计算不平衡量 $|\chi_{+1}^-(t)$ $|^2-|\chi_{-1}^-(t)|^2$，我们发现直到四阶的系数在数值精度范围内均为零，因此首个非零贡献是五阶项

$$|\chi_{+1}^-(t)|^2-|\chi_{-1}^-(t)|^2=\kappa t^5+O(t^6).\tag{26}$$

对于图1(d) 中使用的参数，我们有 $\kappa\approx-2.30\times10^{-3}$，这与从拟合光谱中提取出的微弱左行相干准粒子相符。

III. 非相干准粒子

相干准粒子光谱学无法捕捉 AJ 模型中由量子跃迁引发的输运，这表明存在开放量子系统所固有的准粒子，它们位于非相干（对角）扇区。为探测这些准粒子，我们将响应函数定义为

$$X_k(t) = -\mathrm{i}\Theta(t)\,\mathrm{Tr}\big(\mathcal{O}_k e^{\mathcal{L}_\mathrm{s} t}\mathcal{O}_k^\dagger[\rho_\mathrm{s}]\big), \tag{27}$$

其中，$\mathcal{O}_k$ 是作用于密度矩阵上的超算符，其伴随算符记为 $\mathcal{O}_k^\dagger$。取 $\mathcal{O}_k[\rho] = \hat{c}_{km}\rho$ 和 $\mathcal{O}_k[\rho] = \rho\hat{c}_{km}$时，$X_k(t)$分别化简为$\chi_k^+(t)$和$\chi_k^-(t)$。对于非相干准粒子，我们取$\mathcal{O}_k^\dagger = \mathcal{C}_{-k,m}$，其中

$$\mathcal{C}_{km} = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_j e^{-\mathrm{i}kj}\mathcal{C}_{jm}, \qquad \mathcal{C}_{jm}[\rho] = \hat{c}_{jm}\rho\hat{c}_{jm}^\dagger, \tag{28}$$

它作用于密度矩阵的两侧，使响应能够探测非相干扇区。相应的谱函数为

$$B_k(\omega) = -2\,\mathrm{Im}\int_0^\infty dt\, e^{\mathrm{i}\omega t}X_k(t). \tag{29}$$

取$\mathcal{O}_k^\dagger = \mathcal{C}_{-k,m}$ 可确保微扰$\mathcal{C}_{-k,m}[\rho_\mathrm{s}]$携带动量 k，因为$\hat{T}\mathcal{C}_{-k,m}[\rho_\mathrm{s}]\hat{T}^{-1} = e^{-\mathrm{i}k}\mathcal{C}_{-k,m}[\rho_\mathrm{s}]$，其中$\hat{T}$是平移算符，满足$\hat{T}\hat{c}_{jm}\hat{T}^{-1} = \hat{c}_{j+1,m}$和$\hat{T}\rho_\mathrm{s}\hat{T}^{-1} = \rho_\mathrm{s}$。这与相干响应函数 $\chi_k^+(t)$和 $\chi_k^-(t)$中的微扰$\hat{c}_{km}^\dagger\rho_\mathrm{s}$ 和 $\rho_\mathrm{s}\hat{c}_{km}^\dagger$ 一致，因为$\hat{T}\hat{c}_{km}^\dagger\rho_\mathrm{s}\hat{T}^{-1} = e^{-\mathrm{i}k}\hat{c}_{km}^\dagger\rho_\mathrm{s}$且$\hat{T}\rho\hat{c}_{km}^\dagger\hat{T}^{-1} = e^{-\mathrm{i}k}\rho\hat{c}_{km}^\dagger$。

为测量谱函数 $B_k(\omega)$，我们制备空辅助能级，并施加一个由 $e^{\mathcal{L}_\mathrm{d}t_\mathrm{d}}$ 描述的短时耗散脉冲，其中

$$\mathcal{L}_\mathrm{d}[\rho] = \sum_j\Big(\hat{L}_{\mathrm{d},j}\rho\hat{L}_{\mathrm{d},j}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}_{\mathrm{d},j}^\dagger\hat{L}_{\mathrm{d},j},\rho\}\Big), \tag{30}$$

跳跃算符为

$$\hat{L}_{\mathrm{d},j} = \sqrt{\gamma_\mathrm{d}[1+\cos(kj)]}\,\hat{a}_j^\dagger\hat{c}_{jm}. \tag{31}$$

这里 γ_d 很大，因此在脉冲期间可以忽略系统刘维尔算符；同时，我们令脉冲持续时间 t_d 很短，以使响应近似保持线性。随后关闭耗散脉冲，并在 $\mathcal{L}_\mathrm{s}$ 下进行时间演化，持续时间为 t，从而得到

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}_\mathrm{s}t}e^{\mathcal{L}_\mathrm{d}t_\mathrm{d}}[\rho_0], \tag{32}$$

其中初态由 $\rho_0 = \rho_\mathrm{s}\otimes|0\rangle_\mathrm{a}\langle 0|_\mathrm{a}$ 给出。经过 $\hat{\ }\hat{\ }\hat{\ }$ 演化后，我们测量算符 $M_{k,\ n} = N_\mathrm{a}D_{k,\ n}$，并得到

$$M_{k,n}(t) = \mathrm{Tr}\big[\hat{M}_{k,n}\rho(t)\big], \tag{33}$$

其中

$$\hat{N}_\mathrm{a} = \sum_j \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j, \tag{34}$$

$$\hat{D}_{k,n} = \sum_j \cos\Big(kj - \frac{n\pi}{2}\Big)\,\hat{c}_{jm}\hat{c}_{jm}^\dagger. \tag{35}$$

在附录 B 中，我们讨论如何工程化制备 $\mathcal{L}_\mathrm{d}$，并在实验上测量 $M_{k,\ n}(t)$

利用线性响应理论，我们得到

$$\begin{aligned} M_{k,0}(t) &= -\frac{\Theta_\mathrm{d}L}{2}(1+\delta_{k\pi}+3\delta_{k0})\,\mathrm{Im}\,X_k(t) + O(\Theta_\mathrm{d}^2),\\ M_{k,1}(t) &= -\frac{\Theta_\mathrm{d}L}{2}(1+\delta_{k\pi}+3\delta_{k0})\,\mathrm{Re}\,X_k(t) + O(\Theta_\mathrm{d}^2), \end{aligned} \tag{36}$$

其中 $\Theta_\mathrm{d} = \gamma_\mathrm{d}t_\mathrm{d}$。推导过程见附录C。因此，可以得到非相干准粒子的谱函数:

$$\begin{aligned} B_k(\omega) \approx{}& \frac{4}{\Theta_\mathrm{d}L(1+\delta_{k\pi}+3\delta_{k0})}\\ &\times\int_0^\infty dt\,[\cos(\omega t)M_{k,0}(t) + \sin(\omega t)M_{k,1}(t)]. \end{aligned} \tag{37}$$

现在，我们使用具体的模型来展示该协议。为清晰起见，我们首先考虑处于某一参数区域的 LRM 模型，在该区域中，非相干准粒子谱可以通过解析方法获得。我们令 ρ_s 为 $N=2$ 粒子数扇区中的稳态，并选择 $m=\uparrow$。进一步设定 $J_1 = J_3 = 0$，使得哈密顿量仅包含 $|j\downarrow\rangle$与 $|j+1$之间的跃迁，$\uparrow\rangle$，而跳跃算符则将 $|j\uparrow\rangle$ 转移至$|j\downarrow\rangle$。因此，粒子转移遵循序列$|j\uparrow\rangle \to |j\downarrow\rangle \leftrightarrow |j+1,\uparrow\rangle \to |j+1,\downarrow\rangle$，从而导致粒子单向向右传播。

如图 2（a）和 2（b）所示，完整模拟结果准确再现了通过直接计算获得的 $X_k(t)$ 和 $B_k(\omega)$。我们进一步拟合每个动量 k 处的谱函数，以获得图 2（c）所示的复准粒子谱。从完整模拟结果中提取的准粒子能量与通过直接计算谱函数得到的结果吻合良好。每个分支都具有一个绕数 $w_\alpha = -1$，其参考点位于相应回路内部，这与粒子向右单向传播的现象一致。

现在我们对非相干准粒子谱给出解析描述。首先注意到，扰动$\mathcal{C}_{-k,\ \uparrow}[\rho_\mathrm{s}]$在 $X_k(t)$中演化于单粒子扇区，因为 $\mathcal{C}_{-k,\ \uparrow}$ 会从$N=2$ 稳态 ρ_s 中移除一个粒子，并且 $\mathcal{L}_\mathrm{s}$ 守恒粒子数。因此，响应由随时间演化的单粒子密度矩阵元决定。对于单粒子扇区中的密度矩阵 ρ，我们定义

$$\begin{aligned} u_j &= \langle j\uparrow|\rho|j\uparrow\rangle,\\ d_j &= \langle j\downarrow|\rho|j\downarrow\rangle,\\ y_j &= \frac{\mathrm{i}}{2}\big(\langle j+1,\uparrow|\rho|j\downarrow\rangle - \langle j\downarrow|\rho|j+1,\uparrow\rangle\big). \end{aligned} \tag{38}$$

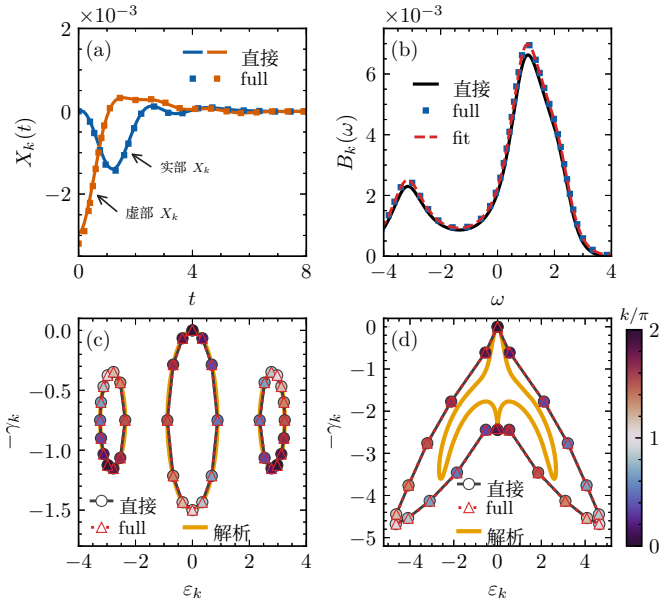

图 2. (a) $k = \pi/2$时 $X_k(t)$ 的实部和虚部。实线根据 $X_k(t)$ [式（27）], 的定义计算得出，方块则通过使用式（36）对该协议进行完整模拟得到。(b) $k = \pi/2$时的谱函数 $B_k(\omega)$。黑线和蓝色方块分别通过使用式（29）进行直接计算和使用式（37）进行完整模拟得到，红色虚线则是使用式（5）对完整模拟结果进行拟合得到的。(c, d) 通过拟合直接计算结果（带圆圈的实线）和完整模拟结果（带三角形的点线）得到的 LRM 模型 (c) 和 AJ 模型 (d) 的复数非相干准粒子谱。拟合过程中将 $k = 0$ 点单独处理，详情见附录 H。每个点的动量 k 以颜色表示。(c) 和 (d) 中的黄色线分别显示 $H^{\mathrm{R}}_{\mathrm{inc}}(k)$ [式（41）] 和 $\tilde{H}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{inc}}(k)$ [式（42）], 的本征值。(a)–(c) 中使用参数为 $L = 12$、 $N = 2$、 $J_1 = J_3 = 0$、 $J_2 = 1.5$、 $\gamma = 1.5$ 和 $\Theta_{\mathrm{d}} = 10^{-2}$ 的 LRM 模型。(d) 中使用参数为 $L = 12$、 $N = 4$ $J_h = 1.0$、 $\gamma_{\mathrm{R}} = 2.0$、 $\gamma_{\mathrm{L}} = 0.4$ 和 $\Theta_{\mathrm{d}} = 10^{-2}$ 的 AJ 模型。直接计算和完整模拟均在双倍希尔伯特空间中进行。完整模拟采用附录D中详述的约化密度矩阵动力学。

对于 $J_1 = J_3 = 0$, 主方程给出

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= -\gamma u_j + 2J_2 y_{j-1}, \\ \dot{d}_j &= \gamma u_j - 2J_2 y_j, \\ \dot{y}_j &= -J_2 u_{j+1} + J_2 d_j - \frac{\gamma}{2} y_j. \end{aligned} \tag{39}$$

应用傅里叶变换 $u_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_j e^{-\mathrm{i}kj} u_j$, 并对 d_k 和 y_k 采用类似定义，我们得到

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_k \\ d_k \\ y_k \end{pmatrix} = -\mathrm{i} H^{\mathrm{R}}_{\mathrm{inc}}(k) \begin{pmatrix} u_k \\ d_k \\ y_k \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$H^{\mathrm{R}}_{\mathrm{inc}}(k) = \mathrm{i} \begin{pmatrix} -\gamma & 0 & 2J_2 e^{-\mathrm{i}k} \\ \gamma & 0 & -2J_2 \\ -J_2 e^{\mathrm{i}k} & J_2 & -\gamma/2 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

我们绘制了 $H^{\mathrm{R}}_{\mathrm{inc}}(k)$ 相对于 k 的本征值，如图 2(c) 所示；这些本征值与在每个 k处通过直接计算和完整模拟提取出的准粒子能量在定量上吻合。具体而言，从直接计算中提取的非零复能量与解析本征值之间的平均相对误差低于10^{-5}，这表明测得的非相干准粒子确实源自非相干扇区中的单粒子物理。

接下来，我们考虑稳态为 ρ_{s}且处于 $N = 4$ 粒子数扇区的 AJ 模型，其中存在多体效应。按照相同的步骤，我们提取出图 2(d) 所示的准粒子谱，并发现直接计算结果与完整模拟结果高度一致。两条分支连接起来形成一个单一回路，其绕数为 $w = -1$，这与 $\gamma_{\mathrm{R}} > \gamma_{\mathrm{L}}$的右移非相干准粒子相一致。

为了在多体情形下获得非相干准粒子谱的解析描述，我们采用费米高斯态作为变分拟设，推导出一个控制关联函数动力学的有效哈密顿量（见附录 E），

$$\tilde{H}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{inc}}(k) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\tilde{h}(k) & \sqrt{2}J_h(e^{-\mathrm{i}k} - 1) \\ \sqrt{2}J_h(e^{\mathrm{i}k} - 1) & -\mathrm{i}(\gamma_{\mathrm{R}} + \gamma_{\mathrm{L}}) \end{pmatrix}, \tag{42}$$

其中

$$\tilde{h}(k) = \tilde{\gamma}_{\mathrm{R}}(e^{\mathrm{i}k} - 1) + \tilde{\gamma}_{\mathrm{L}}(e^{-\mathrm{i}k} - 1), \tag{43}$$

其中 $\tilde{\gamma}_{\mathrm{R}} = \gamma_{\mathrm{R}} - (1-\bar{n})(\gamma_{\mathrm{R}} - \gamma_{\mathrm{L}})$， $\tilde{\gamma}_{\mathrm{L}} = \gamma_{\mathrm{L}} + (1-\bar{n})(\gamma_{\mathrm{R}} - \gamma_{\mathrm{L}})$, 以及 $\bar{n} = N/L$ 表示填充率。图 $\tilde{H}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{inc}}(k)$的本征值以黄色曲线绘制于图 2(d) 中。所得回路围绕 $w = -1$，该参考点位于解析回路和数值回路的内部，从而捕捉到了由非对称跳跃过程诱导的非平庸谱绕行。

IV. 自发对称性破缺的准粒子光谱学

我们进一步将上述开发的光谱学方案应用于探测开放量子系统中的自发对称性破缺，其中对称性可以是强对称性，也可以是弱对称性，因此其自发对称性破缺形式比封闭系统更为丰富。通过采用具有弱和强 $U(1)$ 对称性的模型，我们展示了对称性破缺如何体现在相干与非相干准粒子谱中。

A. 弱 $U(1)$对称性

我们考虑一个改编自参考文献 [43], 的一维硬核玻色子模型，其中晶格由 L个包含两个子晶格 A 和 B的晶胞构成。系统

李乌维尔算符以右上标 W 表示，其形式为

$$\mathcal{L}_{\rm s}^{\rm W}[\rho] = -\,{\rm i}[\hat{H}_{\rm s}^{\rm W},\rho] + \sum_{j=1}^{L}\sum_{\mu=A,B}\Big(\hat{L}_{j\mu}^{\rm W}\rho(\hat{L}_{j\mu}^{\rm W})^{\dagger} - \frac{1}{2}\{(\hat{L}_{j\mu}^{\rm W})^{\dagger}\hat{L}_{j\mu}^{\rm W},\rho\}\Big), \tag{44}$$

哈密顿量为

$$\hat{H}_{\rm s}^{\rm W} = J\sum_{ij}\frac{\hat{b}_{iA}^{\dagger}\hat{b}_{jB}+\hat{b}_{jB}^{\dagger}\hat{b}_{iA}}{|2(j-i)+1|^{p}} \tag{45}$$

跳跃算符为

$$\hat{L}_{jA}^{\rm W} = \sqrt{\gamma}\,\hat{b}_{jA}^{\dagger}, \qquad \hat{L}_{jB}^{\rm W} = \sqrt{\gamma}\,\hat{b}_{jB}. \tag{46}$$

$\hat{}$这里 $b_{j\nu}$ 湮灭子晶格 ν 在晶胞 j, J 是跃迁强度，而 γ 是 A 格点的局域增益率和 B 格点的损耗率。我们通过将模型 I 的参考文献 [43] 中的最近邻哈密顿量替换为方程（45）中的长程哈密顿量，对其进行扩展，其中指数 p 决定跃迁范围。李乌维尔算符具有弱 $U(1)$ 对称性，因为

$$\hat{U}_{\theta}\mathcal{L}_{\rm s}^{\rm W}[\rho]\hat{U}_{\theta}^{\dagger} = \mathcal{L}_{\rm s}^{\rm W}[\hat{U}_{\theta}\rho\hat{U}_{\theta}^{\dagger}], \tag{47}$$

其中 $\hat{U}_{\theta} = e^{{\rm i}\theta\hat{N}_{\rm s}}$，其中 $\hat{N}_{\rm s} = \sum_{j\nu}\hat{b}_{j\nu}^{\dagger}\hat{b}_{j\nu}$是系统能级的总粒子数算符。另一方面，对于一般的 θ，$[\hat{U}_{\theta},\hat{L}_{j\mu}^{\rm W}] \neq 0$意味着李乌维尔算符不具有强 $U(1)$ 对称性。

平均场分析（见附录 F）预测存在两个稳态相，其序参量为 $\psi_{j\nu} = \hat{\langle} b_{j\nu}\rangle$。给定平均场临界点

$$J_{\rm c}^{\rm MF} = \frac{\gamma}{4(1-2^{-p})\zeta(p)}, \tag{48}$$

其中 $\zeta(p)$ 是黎曼ζ函数，这两个相的特征为

$$|\psi_A|^2 = |\psi_B|^2 = \begin{cases} 0, & J < J_{\rm c}^{\rm MF}, \\ \eta(1-\eta)/2, & J > J_{\rm c}^{\rm MF}, \end{cases} \tag{49}$$

其中 $\psi_{j\nu} = \psi_{\nu}$ 源于平移对称性，而 $\eta =$ $J_{\rm c}^{\rm MF}/J$ $J < J_{\rm c}^{\rm MF}$ U 1 。对于，弱 () 对称性得以保留。相比之下，对于 $J > J_{\rm c}^{\rm MF}$，弱 $U(1)$ 对称性发生自发破缺，从而产生非零的 $\psi_{j\nu}$。进一步分析表明，若相互作用的作用范围足够长（例如，对于 $p = 5/4$；见附录 F2），长程有序仍可存在。因此，我们在后续计算中采用$p = 5/4$。

利用量子跳跃演化，我们直接计算相干响应函数 $\chi_k^{-}(t)$，见方程（10），其中$\hat{c}_{jm}$ 替换为 b_{jm}，对于 $m = A$。随后，我们利用方程（12）得到相应的谱函数 $A_k^{-}(\omega)$，并将其拟合到方程（5），以提取复准粒子能量。在弱 $U(1)$ 对称性破缺区间，

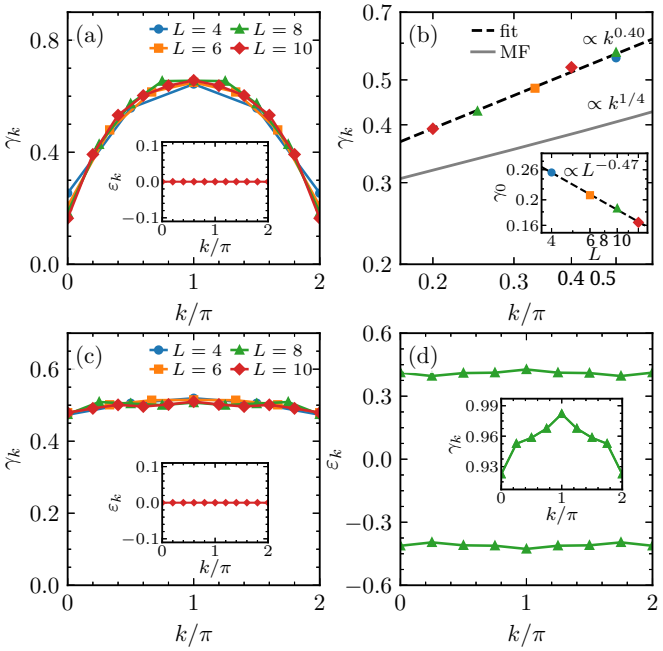

图 3。（a）对称性破缺区间内，不同系统尺寸 L下相干准粒子的衰减率 γ_k 随 k 的变化。插图显示了 $L = 10$时相干准粒子能量的实部 ε_k。（b）对数—对数坐标下，（a）中 γ_k 在较小 k 时的标度关系。黑色虚线为幂律拟合，灰色实线为方程（F15）给出的平均场结果。插图显示对数—对数坐标下 γ_0 随 L 的变化，虚线表示幂律拟合。（c）与（a）相同，但处于对称性未破缺区间。（d）对称性破缺区间内，非相干准粒子能量的实部 ε_k 随 k 的变化，取 $L = 8$。插图显示两个分支的 γ_k，二者近似重合。（a）、（b）和（d）中取 $J = 2J_{\rm c}^{\rm MF}$，（c）中取 $J = 0.4J_{\rm c}^{\rm MF}$。所有面板中均取 $\gamma = 1$，并探测子晶格 A。（a）–（c）的量子跳跃演化对 4096 次样本取平均，（d）则对 65536 次样本取平均。

准粒子衰减率 γ_k 在 $k = 0$ 处趋近于零，随着L 增大，而实部 ε_k 则消失，如图3(a)所示。这一行为表明存在无能隙相干准粒子谱，它与连续弱 $U(1)$ 对称性的自发破缺有关。

为进一步研究这种无能隙行为，我们将 γ_k在较小的非零 k 处拟合为幂律函数，得到$\gamma_k \propto k^{0.40}$，如图3(b)所示。数值结果与拟合非常吻合，支持热力学极限下存在无能隙色散关系。我们还将 γ_0 拟合为关于 L 的幂律函数，得到 $\gamma_0 \propto L^{-0.47}$ [，见图3(b)的插图]。无能隙谱的产生是因为弱 $U(1)$ 对称性的自发破缺产生了南部–戈德斯通模 [50]。这些模对应于序参量的长波长相位涨落，表示为 $\psi_{j\nu}^{(k)} \simeq \psi_{\nu}e^{{\rm i}\Delta\theta_{j\nu}^{(k)}}$，其中涨落$\Delta\theta_{j\nu}^{(k)} = \Delta\theta e^{{\rm i}kj}$ 足够小。将其展开至

线性阶，得到 $\psi_{j\nu}^{(k)} - \psi_\nu \simeq \mathrm{i}\psi_\nu \Delta\theta e^{\mathrm{i}kj}$。响应函数 $\chi_k^-(t)$ 中的微扰 $\rho_{\mathrm{s}}\hat{b}_{km}^\dagger$ 预期会诱发此类涨落，例如 $\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{s}}\hat{b}_{km}^\dagger \hat{b}_{jm}) \sim e^{\mathrm{i}kj}$。因此，$\chi_k^-(t) \sim e^{-\mathrm{i}z_k t}$ 主要由能量为复数 z_k 的南部－戈德斯通模主导，使我们能够通过相干准粒子光谱学探测弱 $U(1)$ 对称性的自发破缺。在附录 F 1 中，我们推导了南部–戈德斯通模的平均场色散关系；对于 $p = 5/4$ [，当 k 较小时，其标度为 $k^{1/4}$，见图 3(b) 中的灰线]。

相比之下，在对称性未破缺区间，相干准粒子谱存在能隙。如图3(c)所示，衰减率 γ_k 即使随着 L增大仍然很大，而实部 ε_k 则近似保持为零。这一行为与弱$U(1)$对称性仍未破缺这一事实相符，因此不会产生无能隙的南部–戈德斯通模。因此，我们得出结论：通过探测无能隙南部–戈德斯通模，相干准粒子光谱学能够揭示弱 $U(1)$ 对称性的自发破缺。

最后，我们对非相干响应函数 $X_k(t)$ [应用相同的步骤，27以获得对称性破缺区间内的非相干准粒子谱。如图3(d)所示，该谱有两个分支，其实部非零 ε_k，且衰减率 γ_k近似相同。在此区间内，两个分支都有能隙，这与图3(a)中无能隙相干准粒子谱形成鲜明对比。

B. 强 $U(1)$ 对称性

接下来，我们考虑一个具有强 $U(1)$ 对称性的李乌维尔算符，该算符改编自参考文献 [43], 中的模型 II

$$\mathcal{L}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{S}}[\rho] = -\mathrm{i}[\hat{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{S}}, \rho] + \sum_{j=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{4}\left(\hat{L}_{j\mu}^{\mathrm{S}}\rho(\hat{L}_{j\mu}^{\mathrm{S}})^\dagger - \frac{1}{2}\{(\hat{L}_{j\mu}^{\mathrm{S}})^\dagger \hat{L}_{j\mu}^{\mathrm{S}}, \rho\}\right), \tag{50}$$

其哈密顿量为 $\hat{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{S}} = \hat{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{W}}$，见方程 (45)，跳跃算符为

$$\begin{aligned} \hat{L}_{j1}^{\mathrm{S}} &= \sqrt{\gamma}\,\hat{b}_{jB}^\dagger \hat{b}_{jA}, \quad \hat{L}_{j2}^{\mathrm{S}} = \sqrt{\gamma}\,\hat{b}_{j-1,B}^\dagger \hat{b}_{jA}, \\ \hat{L}_{j3}^{\mathrm{S}} &= \sqrt{\gamma_z}\,\hat{\sigma}_{jA}^z, \quad \hat{L}_{j4}^{\mathrm{S}} = \sqrt{\gamma_z}\,\hat{\sigma}_{jB}^z, \end{aligned} \tag{51}$$

其中 $\hat{\sigma}_{j\nu}^z = 1 - 2\hat{b}_{j\nu}^\dagger \hat{b}_{j\nu}$。此处，$\gamma$ 是从子晶格 A 到相邻 B 格点的跳跃率，γ_z 是局域退相干强度。李乌维尔算符具有强 $U(1)$ 对称性，因为 $[\hat{U}_\theta, \hat{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{S}}] = 0$ 以及 $[\hat{U}_\theta, \hat{L}_{j\mu}^{\mathrm{S}}] = 0$，其中 $\hat{U}_\theta = e^{\mathrm{i}\theta\hat{N}_{\mathrm{s}}}$。因此，系统可以限制在粒子数固定的扇区中，我们聚焦于粒子数为 $N = L$的半填充扇区。

密度矩阵 ρ 的强 $U(1)$ 对称性可表示为 $\hat{U}_\theta\rho = e^{\mathrm{i}\theta N}\rho$，其中 N 是粒子数。值得注意的是，强 $U(1)$ 对称性也确保了弱 $U(1)$ 对称性，$\hat{U}_\theta\rho\hat{U}_\theta^\dagger = \rho$。强

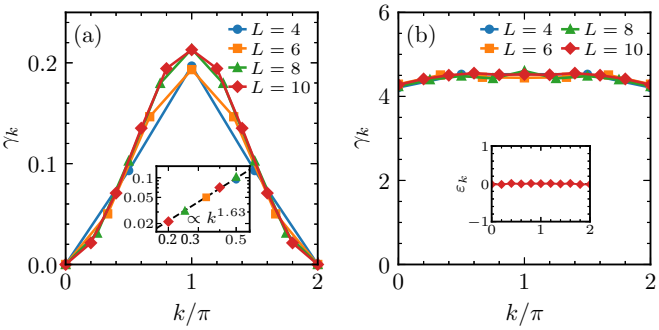

图 4. (a) 在具有强到弱 $U(1)$ 自发对称性破缺（SSB）的区域中，不同系统尺寸 L下，非相干准粒子的衰减率 γ_k 随 k 的变化。插图显示了较小 k 时γ_k 的标度关系，采用双对数坐标，其中黑色虚线表示幂律拟合 $\gamma_k \propto k^{1.63}$。(b) 不同系统尺寸 L下，相干准粒子的衰减率 γ_k。插图显示了 $L = 10$对应的相干准粒子能量的实部 ε_k。此处参数选为 $p = 3/2$、$J = 0.592$ $N = L$ B、$\gamma = 1$、$\gamma_z = 2$和，探测的是子晶格。数据通过量子跳跃演化获得，(a) 中对 32768 个样本取平均，(b) 中对 4096 个样本取平均。

当强对称性发生自发破缺而弱对称性保持未破缺时，就会出现自发对称性破缺。这种对称性破缺还可以通过将密度矩阵矢量化来进一步理解，即 $|\rho\rangle = \sum_{nn'}\rho_{nn'}|n\rangle \otimes |n'\rangle$，其中 $\rho_{nn'} = \langle n|\rho|n'\rangle$。在双倍希尔伯特空间中，强 $U(1)$对称性对应于分别作用于右矢空间和左矢空间、由 $\hat{N}_L = N_{\mathrm{s}} \otimes I$ 和 $\hat{N}_R = I \otimes N_{\mathrm{s}}$ 生成的两个相互独立的$U(1)$旋转。这些旋转可以重新组合为 $\hat{U}_\theta^{\mathrm{A}} = e^{\mathrm{i}\theta(\hat{N}_L + \hat{N}_R)/2}$ 和 $\hat{U}_\theta^{\mathrm{W}} = e^{\mathrm{i}\theta(\hat{N}_L - \hat{N}_R)}$。这里，$\hat{U}_\theta^{\mathrm{W}}$ 充当弱 $U(1)$变换 $\hat{U}_\theta^{\mathrm{W}}|\rho\rangle = |\hat{U}_\theta\rho\hat{U}_\theta^\dagger\rangle$。强到弱 $U(1)$自发对称性破缺随后对应于由 $\hat{U}_\theta^{\mathrm{A}}$ 表示的对称性的自发破缺。

为探测强到弱的 $U(1)$ 自发对称性破缺，我们采用非相干准粒子光谱学，结果如图 4(a) 所示。参数根据附录 G 中的平均场分析选取。随着 k 减小，衰减率 γ_k 趋近于零，满足 $\gamma_k \propto k^{1.63}$[（见图 4(a) 的插图）]，；实部 ε_k 则近似保持为零（此处未显示），表明存在无能隙非相干准粒子谱。在 $k = 0$ 处，强 $U(1)$ 对称性确保 $t \to \infty$ 时 $X_0(t)$ 非零，从而导致 $\gamma_0 = 0$（见附录 H）。相比之下，随着 L 增大，相干谱仍保持有隙 [（见图 4(b)）]，这与弱 $U(1)$ 对称性未破缺相一致。

微扰 $|\mathcal{O}_k^\dagger[\rho_{\mathrm{s}}]\rangle$预计会产生与强到弱 $U(1)$ 自发对称性破缺 [43]相关的南部–戈德斯通模。这可以通过注意到 $\hat{U}_\theta$ $\hat{U}_\theta$算符 $b_{jm} \otimes b_{jm}$在强对称性下作非平凡变换，但在弱对称性下保持不变，因此可作为这种对称性破缺的序参量（见附录 G）。

由于在双倍希尔伯特空间中 $\mathcal{O}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_j e^{ikj}(\hat{}b_{jm}\otimes\hat{}b_{jm})$，它会在较小的 k 下产生该序参量的长波长涨落，这与弱 $U(1)$ 情形类似。由此产生的响应 $X_k(t)\sim e^{-iz_k t}$ 可用于提取小 k 下南部–戈德斯通模的复能量 z_k，其无能隙色散表明存在强到弱 $U(1)$ 自发对称性破缺。

V. 总结与展望

在本研究中，我们提出了相干和非相干李乌维尔准粒子的概念，并提出了用于测量其复能量的光谱学方案。我们通过对 LRM 和 AJ 模型进行数值模拟，展示了这些方案的可行性。通过这些方案获得的复谱与直接计算所得的结果高度一致，揭示了与单向准粒子输运相关的非平凡谱拓扑。此外，我们展示了开放量子系统中的自发对称性破缺（SSB）如何体现于李乌维尔准粒子谱中。对于弱 $U(1)$ SSB，我们的结果揭示了相干谱中的无隙南部–戈德斯通模，同时伴随有隙的非相干谱。对于从强到弱的 $U(1)$ SSB，非相干谱变为无隙，而相干谱仍保持有隙。因此，无隙准粒子的性质反映了 $U(1)$ SSB 的具体类型。

我们的方法可以扩展到研究开放量子多体系统中的其他奇异现象。例如，混合态可以呈现由强、弱对称性共同保护的非平庸拓扑 [27–29]。一个自然的问题是，如何表征与这些非平庸态相关的边界模。我们预计，将我们的协议扩展到位点分辨光谱学，便可以探测这些边界模并测量其复激发能。此外，相干与非相干准粒子的输运性质可能存在显著差异，甚至会在同一系统中朝相反方向传播，正如第II节和第III节所展示的。这些发现促使我们从准粒子视角进一步研究开放量子系统中的输运。另一个研究方向是运用刘维尔准粒子谱学，探究例外点及其相关的奇异特征，例如复能带的编织 [60]和体费米弧 [61]。因此，我们的协议为通过相干与非相干刘维尔准粒子理解开放量子物质开辟了新途径。

致谢

感谢李洪超和龚明提供的有益讨论。M.U. 得到了 RIKEN TRIP 计划的支持。

数据可用性

我们的数值模拟数据和代码可应合理请求向通讯作者索取。

附录 A：相干准粒子光谱学的线性响应理论

在此，我们在假设系统与辅助能级之间的耦合较弱的前提下，推导式（13）。首先，我们将耦合哈密顿量分解为失谐项和拉比项，

$$\hat{H}_{\rm c} = \hat{H}_{\rm a} + \hat{V}, \tag{A1}$$

$$\hat{H}_{\rm a} = \omega_{\rm a}\sum_q \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q, \tag{A2}$$

$$\hat{V} = \frac{\Omega}{2}\sum_q \left(\hat{a}_q^\dagger \hat{c}_{qm} + \hat{c}_{qm}^\dagger \hat{a}_q\right). \tag{A3}$$

然后，我们将未微扰的李乌维尔算符定义为

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{\rm s} + \mathcal{L}_{\rm a} \tag{A4}$$

其中 $\mathcal{L}_{\rm a}[\rho] = -i[\hat{}H_{\rm a},\ \rho]$，而李乌维尔算符微扰为

$$\mathcal{L}_V[\rho] = -i[\hat{V},\rho], \tag{A5}$$

它与拉比频率 Ω 成正比。

对于初态 $\rho_0 = \rho_{\rm s}\otimes\rho_{\rm a}$，假设 $\rho_{\rm s}$ 在 $\mathcal{L}_{\rm s}$ 下是定态，且 $\rho_{\rm a}$ 在动量基底中是对角的，则分别有 $\mathcal{L}_{\rm s}[\rho_{\rm s}]=0$ 和 $\mathcal{L}_{\rm a}[\rho_{\rm a}]=0$。因此，初态 ρ_0 在未受扰动的李乌维尔算符 $\mathcal{L}_0$ 下是定态，即 $\mathcal{L}_0[\rho_0]=0$。由于 $\rho_{\rm a}$ 是对角的，我们进一步有 $\mathrm{Tr}_{\rm a}(\hat{}a_k^\dagger \hat{a}_q\rho_{\rm a}) = N^0_{{\rm a},\ k}\delta_{kq}\hat{}$；若 $O_{\rm a}$ 改变辅助粒子数（例如 $\hat{a}_k$ 和 $\hat{a}_k\hat{a}_q$），则有 $\mathrm{Tr}_{\rm a}(O_{\rm a}\rho_{\rm a})=0$。这些关系将在接下来的推导中用到。

我们将密度矩阵写作 $\rho(t) = \rho_0 + \delta\rho(t)$，其中 $\delta\rho(t)$ 满足

$$\frac{d}{dt}\delta\rho(t) = \mathcal{L}_0[\delta\rho(t)] + \mathcal{L}_V[\rho_0] + \mathcal{L}_V[\delta\rho(t)]. \tag{A6}$$

将 $\delta\rho(t) = \sum_{n\ge1}\delta\rho^{(n)}(t)$ 按 $\delta\rho^{(n)}(t)$ 展开到 Ω 的 ^{n}阶，将此展开代入式（A6），并收集 Ω 的同阶项，我们得到递推关系

$$\delta\rho^{(n)}(t) = \int_0^t dt'\, e^{\mathcal{L}_0(t-t')}\mathcal{L}_V[\delta\rho^{(n-1)}(t')], \tag{A7}$$

其中有 $\delta\rho^{(0)}(t)=\rho_0$。对于足够小的 Ω，我们仅保留线性项，并将 $\delta\rho(t)$ 近似为

$$\delta\rho(t) = \delta\rho^{(1)}(t) + O(\Omega^2) \approx \int_0^t dt'\, e^{\mathcal{L}_0(t-t')}\mathcal{L}_V[\rho_0]. \tag{A8}$$

辅助占据数的时间导数可以用伴随李乌维尔算符表示为

$$\dot{N}_{\mathrm{a},k}(t)=\mathrm{Tr}\big\{\mathcal{L}^{\dagger}[\hat{N}_{\mathrm{a},k}]\rho(t)\big\}. \tag{A9}$$

由于 $\mathcal{L}_0^{\dagger}[\hat{N}_{\mathrm{a},k}]=0$，因此只有李乌维尔算符微扰有贡献，得到

$$\dot{N}_{\mathrm{a},k}(t)=\mathrm{Tr}\big\{\mathcal{L}_V^{\dagger}[\hat{N}_{\mathrm{a},k}]\rho(t)\big\}=\mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\big\{[\hat{V},\hat{N}_{\mathrm{a},k}]\rho(t)\big\}. \tag{A10}$$

代入式（A3），得到

$$\dot{N}_{\mathrm{a},k}(t)=\frac{\mathrm{i}\Omega}{2}\,\mathrm{Tr}\big[(\hat{c}_{km}^{\dagger}\hat{a}_k-\hat{a}_k^{\dagger}\hat{c}_{km})\rho(t)\big]. \tag{A11}$$

利用 $\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}(\hat{a}_k\rho_{\mathrm{a}})=0$ 这一事实，我们发现来自 ρ_0 的贡献为零，得到

$$\begin{aligned}\dot{N}_{\mathrm{a},k}(t)&=\frac{\mathrm{i}\Omega}{2}\,\mathrm{Tr}\big[(\hat{c}_{km}^{\dagger}\hat{a}_k-\hat{a}_k^{\dagger}\hat{c}_{km})\delta\rho(t)\big]\\&\approx\frac{\mathrm{i}\Omega}{2}\int_0^t dt'\,\mathrm{Tr}\big\{(\hat{c}_{km}^{\dagger}\hat{a}_k-\hat{a}_k^{\dagger}\hat{c}_{km})e^{\mathcal{L}_0 t'}\mathcal{L}_V[\rho_0]\big\}.\end{aligned} \tag{A12}$$

随后，我们将 $\mathcal{L}_V[\rho_0]=-\mathrm{i}[\hat{V},\rho_0]$ 代入该方程并计算迹，得到

$$\begin{aligned}\dot{N}_{\mathrm{a},k}(t)\approx\frac{\Omega^2}{2}\,\mathrm{Im}\int_0^t dt'\,e^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{a}}t'}\\\times\big[N_{\mathrm{a},k}^0\chi_k^{+}(t')-(1+\zeta N_{\mathrm{a},k}^0)\chi_k^{-}(t')\big],\end{aligned} \tag{A13}$$

其中我们使用了 $\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}(\hat{a}_k^{\dagger}\hat{a}_q\rho_{\mathrm{a}})=N_{\mathrm{a},k}^0\delta_{kq}$，$\hat{a}_k\hat{a}_q^{\dagger}=\delta_{kq}+\zeta\hat{a}_q^{\dagger}\hat{a}_k$，$\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}(\hat{a}_k\hat{a}_q\rho_{\mathrm{a}})=0$，以及 $[\hat{H}_{\mathrm{a}},\rho_{\mathrm{a}}]=0$。当时间 t 足够长时，积分上限可替换为无穷大，因此式（A13）可化简为式（13）。实际上，这要求 $t\gtrsim 1/\gamma_{\min}$，其中 $\gamma_{\min}$ 是系统中最小的准粒子衰减率。

附录 B：非相干准粒子光谱学的实现

此处我们讨论如何设计耗散脉冲，并介绍两种测量 $M_{k,n}(t)$ 在方程（33）中的方法。

1. 设计耗散脉冲

假设每个晶胞 j 包含由 m 标记的系统能级以及一个辅助能级，其湮灭算符分别记为 $\hat{c}_{jm}$ 和 $\hat{a}_j$。我们引入一个短寿命激发态，其湮灭算符由 $\hat{e}_j$ 给出。我们假设弱光学驱动将系统能级 m 耦合到该激发态，随后该激发态通过自发辐射衰变到辅助能级。描述这些过程的泵浦哈密顿量及相关跳跃算符由下式给出

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathrm{p}}&=\frac{1}{2}\sum_j\big(\Omega_j\hat{e}_j^{\dagger}\hat{c}_{jm}+\mathrm{H.c.}\big),\\\hat{L}_{\mathrm{e},j}&=\sqrt{\Gamma}\,\hat{a}_j^{\dagger}\hat{e}_j,\end{aligned} \tag{B1}$$

其中 Ω_j 为拉比频率，Γ 为衰减率。具体而言，通过施加两束波矢相差 k 的激光，可以实现如下形式的拉比频率

$$\Omega_j=\Omega_{\mathrm{p}}(1+e^{\mathrm{i}kj}). \tag{B2}$$

对于 $|\Omega_j|\ll\Gamma$ 且辅助能级起初为空的情况，对激发态进行绝热消除后，会得到纯耗散耦合，其跳跃算符为 [62]

$$\hat{L}_{\mathrm{d},j}=\frac{\mathrm{i}\Omega_j}{\sqrt{\Gamma}}\hat{a}_j^{\dagger}\hat{c}_{jm}. \tag{B3}$$

由于每个跳跃算符的整体相位不会影响耗散子，因此我们也可以等价地写成

$$\hat{L}_{\mathrm{d},j}=\sqrt{\gamma_{\mathrm{d},j}}\,\hat{a}_j^{\dagger}\hat{c}_{jm}, \tag{B4}$$

其中 $\gamma_{\mathrm{d}}=\gamma_{\mathrm{d},j}=|\Omega_j|^2/\Gamma=\gamma_{\mathrm{d}}[1+\cos(kj)]$ 且 $\Omega_{\mathrm{p}}=2|\Omega_j|/\Gamma$。这实现了由 $\mathcal{L}_{\mathrm{d}}$ 在方程（30）中生成的耗散脉冲。

2. M_k的测量，n

现在我们讨论如何测量 $M_{k,n}=\langle\hat{N}_{\mathrm{a}}\hat{D}_{k,n}\rangle$，其中 $\hat{N}_{\mathrm{a}}$ 和 $\hat{D}_{k,n}$ 分别由方程（34）和（35）给出，而 $\langle\hat{O}\rangle=\mathrm{Tr}(O\rho)$ 是任意密度矩阵 ρ 的期望值。由于

$$M_{k,n}=\sum_{ij}\cos\Big(kj-\frac{n\pi}{2}\Big)\big(\langle\hat{n}_{\mathrm{a},i}\rangle+\zeta\langle\hat{n}_{\mathrm{a},i}\hat{n}_{jm}\rangle\big), \tag{B5}$$

其中 $\hat{n}_{\mathrm{a},i}=\hat{a}_i^{\dagger}\hat{a}_i$ 和 $\hat{n}_{jm}=\hat{c}_{jm}^{\dagger}\hat{c}_{jm}$，一种直接的方法是进行位点分辨测量，例如量子气体显微镜 [63–65]，，以同时确定系统和辅助占据数。每轮测量 α中，我们记录所有格点上的辅助占据数和系统占据数 $n_{\mathrm{a}\,i}^{(\alpha)}$ 以及 $n_{jm}^{(\alpha)}$。对于费米子，这些数值为0或1；对于玻色子，则为非负整数（通过投影测量获得）。于是我们有

$$M_{k,n}\approx\frac{1}{R}\sum_{\alpha=1}^{R}N_{\mathrm{a}}^{(\alpha)}\sum_j\cos\Big(kj-\frac{n\pi}{2}\Big)\big(1+\zeta n_{jm}^{(\alpha)}\big), \tag{B6}$$

其中 R 为轮数，$N_{\mathrm{a}}^{(\alpha)}=\sum_i n_{i\,\mathrm{a}}^{(\alpha)}$ 为第 α轮的总辅助占据数。

或者，$M_{k,n}$ 也可以在不依赖位点分辨测量的情况下进行探测。我们在每个晶胞中引入一个读出能级 j，其湮灭算符为

$\hat{r}_j$。这些能级可以利用原子的附加内部态来实现。从初始密度矩阵 $\rho\otimes|0\rangle_{\rm r}\langle 0|_{\rm r}$出发，其中 $|0\rangle_{\rm r}$ 表示所有读出能级的真空态，我们施加两个连续的 $\pi/2$ 脉冲。这些脉冲通过以下哈密顿量将系统能级 m耦合到读出能级

$$\hat{H}_{\rm r}(\boldsymbol{\vartheta})=\frac{\Omega_{\rm r}}{2}\sum_j\left(e^{{\rm i}\vartheta_j}\hat{r}_j^\dagger\hat{c}_{jm}+{\rm H.c.}\right), \tag{B7}$$

其中 $\boldsymbol{\vartheta}=(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_L)$。每个脉冲的持续时间为$t_{\pi/2}=\pi/(2\Omega_{\rm r})$，第一脉冲的相位取为 $\vartheta_{1,j}=0$，第二脉冲的相位取为 $\vartheta_{2,j}=kj-n\pi/2$。两个脉冲的演化算符为

$$\hat{U}=e^{-{\rm i}t_{\pi/2}\hat{H}_{\rm r}(\boldsymbol{\vartheta}_2)}e^{-{\rm i}t_{\pi/2}\hat{H}_{\rm r}(\boldsymbol{\vartheta}_1)}. \tag{B8}$$

于是有

$$M_{k,n}=f_{k,n}\,{\rm Tr}(\hat{N}_{\rm a}\rho')+\zeta\,{\rm Tr}(\hat{N}_{\rm a}\hat{N}_{\rm r}\rho')-\zeta\,{\rm Tr}(\hat{N}_{\rm a}\hat{N}_m\rho'), \tag{B9}$$

其中，$\rho'=\hat{U}(\rho\otimes|0\rangle_{\rm r}\langle 0|_{\rm r})\hat{U}^\dagger$是两个脉冲作用后的密度矩阵，$f_{k,n}=\sum_j\cos(kj-n\pi/2)$，$\hat{N}_{\rm r}=\sum_j\hat{r}_j^\dagger\hat{r}_j$，且$\hat{N}_m=\sum_j\hat{c}_{jm}^\dagger\hat{c}_{jm}$。要同时测量$\hat{N}_{\rm a}$、$\hat{N}_{\rm r}$和$\hat{N}_m$，可以采用态分辨测量。在每轮测量 α中，我们分别记录辅助能级、读出能级和系统能级中的总粒子数 $N_{\rm a}^{(\alpha)}$、$N_{(\alpha){\rm r}}$以及 $N_{(\alpha)m}$。对 R 轮测量取平均，得到

$$M_{k,n}\approx\frac{1}{R}\sum_{\alpha=1}^{R}N_{\rm a}^{(\alpha)}\left(f_{k,n}+\zeta N_{\rm r}^{(\alpha)}-\zeta N_m^{(\alpha)}\right). \tag{B10}$$

下面给出方程（B9）的简要推导。由方程（B8）可得

$$\begin{aligned}\hat{U}^\dagger(\hat{N}_{\rm r}-\hat{N}_m)\hat{U}=&\sum_j\cos\vartheta_{2,j}\left(\hat{n}_{jm}-\hat{r}_j^\dagger\hat{r}_j\right)\\&+\sum_j\sin\vartheta_{2,j}\left(\hat{r}_j^\dagger\hat{c}_{jm}+\hat{c}_{jm}^\dagger\hat{r}_j\right).\end{aligned} \tag{B11}$$

由于 $\rho'=\hat{U}(\rho\otimes|0\rangle_{\rm r}\langle 0|_{\rm r})\hat{U}^\dagger$与 $\hat{U}$对易于 $N_{\rm a}$，我们有

$$\begin{aligned}&{\rm Tr}\left(\hat{N}_{\rm a}(\hat{N}_{\rm r}-\hat{N}_m)\rho'\right)\\&={\rm Tr}\left(\hat{N}_{\rm a}\hat{U}^\dagger(\hat{N}_{\rm r}-\hat{N}_m)\hat{U}(\rho\otimes|0\rangle_{\rm r}\langle 0|_{\rm r})\right)\\&=\sum_j\cos\vartheta_{2,j}\,{\rm Tr}(\hat{N}_{\rm a}\hat{n}_{jm}\rho),\end{aligned} \tag{B12}$$

其中我们使用了 $\hat{r}_j|0\rangle_{\rm r}=0$。结合${\rm Tr}(\hat{N}_{\rm a}\rho')={\rm Tr}(\hat{N}_{\rm a}\rho)$，我们得到式（B9）：

$$\begin{aligned}&{\rm Tr}\left(\hat{N}_{\rm a}(f_{k,n}+\zeta\hat{N}_{\rm r}-\zeta\hat{N}_m)\rho'\right)\\&=\sum_j\cos\left(kj-\frac{n\pi}{2}\right)\langle\hat{N}_{\rm a}(1+\zeta\hat{n}_{jm})\rangle=M_{k,n}.\end{aligned} \tag{B13}$$

附录 C：非相干准粒子光谱学的线性响应理论

我们推导出在弱脉冲极限下 $M_{k,n}(t)$ 与 $X_k(t)$之间的关系，如式（36）所示。从式（32）出发，我们得到

$$\rho(t)=e^{\mathcal{L}_{\rm s}t}[\rho_0]+t_{\rm d}e^{\mathcal{L}_{\rm s}t}\mathcal{L}_{\rm d}[\rho_0]+O(\Theta_{\rm d}^2). \tag{C1}$$

由于 $e^{\mathcal{L}_{\rm s}t}[\rho_0]=\rho_0$ 不含辅助粒子，我们有 $\hat{N}_{\rm a}\rho_0=0$；因此，该项不对$M_{k,n}(t)$作出贡献。对于 $\mathcal{L}_{\rm d}[\rho_0]$的反对易子部分，即 $-\sum_j\frac{1}{2}\{\hat{L}_{{\rm d},j}^\dagger\hat{L}_{{\rm d},j},\rho_0\}$，结论同样成立。因此，只有量子跃迁项 $\sum_j\hat{L}_{{\rm d},j}\rho_0\hat{L}_{{\rm d},j}^\dagger$ 对$M_{k,n}(t)$作出贡献，从而得到

$$\begin{aligned}M_{k,n}(t)&=t_{\rm d}\sum_j{\rm Tr}\left[\hat{N}_{\rm a}\hat{D}_{k,n}e^{\mathcal{L}_{\rm s}t}[\hat{L}_{{\rm d},j}\rho_0\hat{L}_{{\rm d},j}^\dagger]\right]+O(\Theta_{\rm d}^2)\\&={\rm i}\Theta_{\rm d}\sum_{ij}[1+\cos(kj)]\cos\left(ki-\frac{n\pi}{2}\right)X_{ij}(t)+O(\Theta_{\rm d}^2),\end{aligned} \tag{C2}$$

with

$$X_{ij}(t)=-{\rm i}\,{\rm Tr}\left[\hat{c}_{im}\hat{c}_{im}^\dagger e^{\mathcal{L}_{\rm s}t}[\hat{c}_{jm}\rho_{\rm s}\hat{c}_{jm}^\dagger]\right]. \tag{C3}$$

对于平移不变的初态和系统李乌维尔算符，我们有 $X_{ij}(t)=X_r(t)$，其中 $r=i-j$。于是得到

$$\begin{aligned}M_{k,n}(t)=&\frac{{\rm i}\Theta_{\rm d}L}{2}[1+(-1)^n\delta_{2k,0}+2\delta_{k0}]\\&\times\sum_r\cos\left(kr-\frac{n\pi}{2}\right)X_r(t)+O(\Theta_{\rm d}^2),\end{aligned} \tag{C4}$$

其中，当且仅当 $\delta_{2k,0}=1$ $k=0$ 或 π 时成立。这里我们取 $k\in[0,2\pi)$。

响应函数满足

$$X_k(t)=\sum_r e^{-{\rm i}kr}X_r(t). \tag{C5}$$

我们还利用了 $X_r(t)$ 为纯虚数这一事实，这可由下式推出

$$X_{ij}^*(t)={\rm i}\,{\rm Tr}\left[e^{\mathcal{L}_{\rm s}t}[\hat{c}_{jm}\rho_{\rm s}\hat{c}_{jm}^\dagger]\hat{c}_{im}\hat{c}_{im}^\dagger\right]=-X_{ij}(t). \tag{C6}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}{\rm Im}\,X_k(t)&=-{\rm i}\sum_r\cos(kr)X_r(t),\\{\rm Re}\,X_k(t)&=-{\rm i}\sum_r\sin(kr)X_r(t),\end{aligned} \tag{C7}$$

由此得

$$\begin{aligned}M_{k,0}(t)&=-\frac{\Theta_{\rm d}L}{2}(1+\delta_{k\pi}+3\delta_{k0})\,{\rm Im}\,X_k(t)+O(\Theta_{\rm d}^2),\\M_{k,1}(t)&=-\frac{\Theta_{\rm d}L}{2}(1-\delta_{k\pi}+\delta_{k0})\,{\rm Re}\,X_k(t)+O(\Theta_{\rm d}^2).\end{aligned} \tag{C8}$$

这一事实表明 $X_r(t)$ 纯粹为虚数，也导致${\rm Re}\,X_0(t)={\rm Re}\,X_\pi(t)=0$。因此，式（C8）等价于式（36）。

附录D：约化密度矩阵的时间演化

在此，我们证明，对于费米子系统中的非相干准粒子光谱学，时间演化可以使用系统的约化密度矩阵来进行。我们将约化密度矩阵的耗散脉冲刘维尔算符定义为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{d,s}}[\rho_{\mathrm{s}}]=\sum_{j}\Big(\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}\rho_{\mathrm{s}}\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}^{\dagger}-\frac{1}{2}\{\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}^{\dagger}\hat{\ell}_{\mathrm{d},j},\rho_{\mathrm{s}}\}\Big),\tag{D1}$$

其中跳跃算符为

$$\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}=\sqrt{\gamma_{\mathrm{d}}[1+\cos(kj)]}\,\hat{c}_{jm}.\tag{D2}$$

然后我们可以证明

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}[\rho(t)]&=\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}\big(e^{\mathcal{L}_{\mathrm{s}}t}e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d}}t_{\mathrm{d}}}[\rho_{\mathrm{s}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{a}}\langle 0|_{\mathrm{a}}]\big)\\&=e^{\mathcal{L}_{\mathrm{s}}t}e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d,s}}t_{\mathrm{d}}}[\rho_{\mathrm{s}}].\end{aligned}\tag{D3}$$

我们首先注意到，由于 $\mathcal{L}_{\mathrm{s}}$ 仅作用于系统能级，因此有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}\big(e^{\mathcal{L}_{\mathrm{s}}t}e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d}}t_{\mathrm{d}}}[\rho_{\mathrm{s}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{a}}\langle 0|_{\mathrm{a}}]\big)\\&=e^{\mathcal{L}_{\mathrm{s}}t}\big[\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}\big(e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d}}t_{\mathrm{d}}}[\rho_{\mathrm{s}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{a}}\langle 0|_{\mathrm{a}}]\big)\big].\end{aligned}\tag{D4}$$

此外，通过定义

$$\rho_{\mathrm{s}}'(t_{\mathrm{d}})=\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}\big(e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d}}t_{\mathrm{d}}}[\rho_{\mathrm{s}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{a}}\langle 0|_{\mathrm{a}}]\big),\tag{D5}$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_{\mathrm{s}}'(t)&=\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}\big(\mathcal{L}_{\mathrm{d}}e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d}}t}[\rho_{\mathrm{s}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{a}}\langle 0|_{\mathrm{a}}]\big)\\&=\sum_{j}\Big(\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}\rho_{\mathrm{s}}'(t)\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}^{\dagger}-\frac{1}{2}\{\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}^{\dagger}\hat{\ell}_{\mathrm{d},j},\rho_{\mathrm{s}}'(t)\}\Big)\\&=\mathcal{L}_{\mathrm{d,s}}[\rho_{\mathrm{s}}'(t)],\end{aligned}\tag{D6}$$

其中我们在推导第二个等式时用到了以下关系：

$$\begin{aligned}&\hat{c}_{jm}\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}\big(\hat{a}_{j}^{\dagger}\hat{a}_{j}e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d}}t}[\rho_{\mathrm{s}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{a}}\langle 0|_{\mathrm{a}}]\big)\\&=\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}\big(\hat{a}_{j}^{\dagger}\hat{a}_{j}e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d}}t}[\rho_{\mathrm{s}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{a}}\langle 0|_{\mathrm{a}}]\big)\hat{c}_{jm}^{\dagger}\\&=0.\end{aligned}\tag{D7}$$

这个关系可通过将 $e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d}}t}$ 展开为泰勒级数来证明（对于每一项，占据的辅助能级 j 意味着一个空的系统能级 j，m）。因此，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}\big(\hat{L}_{\mathrm{d},j}e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d}}t}[\rho_{\mathrm{s}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{a}}\langle 0|_{\mathrm{a}}]\hat{L}_{\mathrm{d},j}^{\dagger}\big)\\&=\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}\big[\hat{a}_{j}\hat{a}_{j}^{\dagger}e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d}}t}[\rho_{\mathrm{s}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{a}}\langle 0|_{\mathrm{a}}]\big]\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}^{\dagger}\\&=\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}\rho_{\mathrm{s}}'(t)\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}^{\dagger}-\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}\big[\hat{a}_{j}^{\dagger}\hat{a}_{j}e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d}}t}[\rho_{\mathrm{s}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{a}}\langle 0|_{\mathrm{a}}]\big]\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}^{\dagger}\\&=\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}\rho_{\mathrm{s}}'(t)\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}^{\dagger},\end{aligned}\tag{D8}$$

类似地，

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}\big(\{\hat{L}_{\mathrm{d},j}^{\dagger}\hat{L}_{\mathrm{d},j},e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d}}t}[\rho_{\mathrm{s}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{a}}\langle 0|_{\mathrm{a}}]\}\big)=\{\hat{\ell}_{\mathrm{d},j}^{\dagger}\hat{\ell}_{\mathrm{d},j},\rho_{\mathrm{s}}'(t)\}.\tag{D9}$$

最后，利用 $\rho_{\mathrm{s}}'(0)=\rho_{\mathrm{s}}$，我们得到

$$\rho_{\mathrm{s}}'(t_{\mathrm{d}})=e^{\mathcal{L}_{\mathrm{d,s}}t_{\mathrm{d}}}[\rho_{\mathrm{s}}],\tag{D10}$$

由此完成了对方程（D3）的证明。

还可以进一步证明，对于守粒子数系统李乌维尔算符 $\mathcal{L}_{\mathrm{s}}$ 以及满足 $\hat{N}_{\mathrm{s}}\rho_{\mathrm{s}}=N\rho_{\mathrm{s}}$, $M_{k,\,n}(t)$ 的初态 ρ_{s}，可以利用约化密度矩阵计算：

$$M_{k,n}(t)=\mathrm{Tr}\big\{(N-\hat{N}_{\mathrm{s}})\hat{D}_{k,n}\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}[\rho(t)]\big\},\tag{D11}$$

其中 $\hat{N}_{\mathrm{s}}$ 是系统能级的总粒子数算符。为证明这一点，我们利用耗散脉冲李乌维尔算符 $\mathcal{L}_{\mathrm{d}}$ 守恒总粒子数这一事实，因此 $N\rho(t)=N\rho(t)$，其中 $N=N_{\mathrm{s}}+N_{\mathrm{a}}$。于是我们有

$$\begin{aligned}M_{k,n}(t)&=\mathrm{Tr}\big[(\hat{N}-\hat{N}_{\mathrm{s}})\hat{D}_{k,n}\rho(t)\big]\\&=\mathrm{Tr}\big[(N-\hat{N}_{\mathrm{s}})\hat{D}_{k,n}\rho(t)\big]\\&=\mathrm{Tr}_{\mathrm{s}}\big\{(N-\hat{N}_{\mathrm{s}})\hat{D}_{k,n}\mathrm{Tr}_{\mathrm{a}}[\rho(t)]\big\}.\end{aligned}\tag{D12}$$

附录 E：有效哈密顿量的推导

这里我们推导有效哈密顿量 $\tilde{H}_{\mathrm{inc}}^{\mathrm{A}}(k)$，见式（42），其中使用费米高斯态作为变分拟设。我们将密度矩阵取为

$$\rho=\frac{1}{Z}\exp\Big(-\sum_{ij}K_{ij}\hat{c}_{i}^{\dagger}\hat{c}_{j}\Big),\tag{E1}$$

其中，$K=K^{\dagger}$ 和 Z 确保 $\mathrm{Tr}(\rho)=1$。我们将关联函数定义为

$$C_{ij}=\mathrm{Tr}(\hat{c}_{j}^{\dagger}\hat{c}_{i}\rho).\tag{E2}$$

我们利用主方程得到 C 的动力学方程

$$\begin{aligned}\dot{C}_{ij}&=\mathrm{Tr}\Big(\hat{c}_{j}^{\dagger}\hat{c}_{i}\mathcal{L}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{A}}[\rho]\Big)\\&=\mathrm{i}J_{h}\big(C_{i+1,j}+C_{i-1,j}-C_{i,j+1}-C_{i,j-1}\big)\\&\quad-(\gamma_{\mathrm{R}}+\gamma_{\mathrm{L}})C_{ij}\\&\quad+\delta_{ij}\big(\gamma_{\mathrm{R}}C_{i-1,i-1}+\gamma_{\mathrm{L}}C_{i+1,i+1}\big)\\&\quad+\frac{\gamma_{\mathrm{R}}-\gamma_{\mathrm{L}}}{2}\big(C_{i+1,i+1}-C_{i-1,i-1}\\&\qquad+C_{j+1,j+1}-C_{j-1,j-1}\big)C_{ij}\\&\quad+\frac{\gamma_{\mathrm{R}}-\gamma_{\mathrm{L}}}{2}\big(C_{i,i-1}C_{i-1,j}+C_{i,j-1}C_{j-1,j}\\&\qquad-C_{i,i+1}C_{i+1,j}-C_{i,j+1}C_{j+1,j}\big),\end{aligned}\tag{E3}$$

其中我们使用了威克定理 [66]，

$$\mathrm{Tr}(\hat{c}_{i}^{\dagger}\hat{c}_{j}^{\dagger}\hat{c}_{\alpha}\hat{c}_{\beta}\rho)=C_{\beta i}C_{\alpha j}-C_{\alpha i}C_{\beta j}.\tag{E4}$$

对于具有周期性边界条件的 AJ 模型，稳态关联由下式给出

$$C^{\mathrm{s}}_{ij} = \bar{n}\delta_{ij}, \tag{E5}$$

其中，$\bar{n} = N/L$ 为填充率。我们考虑稳态附近的小涨落，并写成

$$C_{ij} = \bar{n}\delta_{ij} + \Delta C_{ij}. \tag{E6}$$

将该表达式代入方程（E3）并仅保留关于 ΔC_{ij}的一次项，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta C_{ij} = \mathrm{i}J_h\big(&\Delta C_{i+1,j} + \Delta C_{i-1,j} \\ &- \Delta C_{i,j+1} - \Delta C_{i,j-1}\big) \\ &- (\gamma_{\mathrm{R}} + \gamma_{\mathrm{L}})\Delta C_{ij} \\ &+ \delta_{ij}\big[(\gamma_{\mathrm{R}} - \bar{n}(\gamma_{\mathrm{R}} - \gamma_{\mathrm{L}}))\Delta C_{i-1,i-1} \\ &\quad + (\gamma_{\mathrm{L}} + \bar{n}(\gamma_{\mathrm{R}} - \gamma_{\mathrm{L}}))\Delta C_{i+1,i+1}\big].\end{aligned} \tag{E7}$$

接着将 ΔC_{ij} 写成 $\Delta C_{j,\ r}$ 其中 $r = i - j$，并对 j 进行傅里叶变换，得到

$$\Delta C_{k,r} = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_j e^{-\mathrm{i}kj}\Delta C_{j,r}. \tag{E8}$$

方程（E7）于是变为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta C_{k,r} = \mathrm{i}J_h\big[&(1 - e^{-\mathrm{i}k})\Delta C_{k,r+1} + (1 - e^{\mathrm{i}k})\Delta C_{k,r-1}\big] \\ &- (\gamma_{\mathrm{R}} + \gamma_{\mathrm{L}})\Delta C_{k,r} \\ &+ \delta_{r0}\big[(\gamma_{\mathrm{R}} - \bar{n}(\gamma_{\mathrm{R}} - \gamma_{\mathrm{L}}))e^{-\mathrm{i}k} \\ &\quad + (\gamma_{\mathrm{L}} + \bar{n}(\gamma_{\mathrm{R}} - \gamma_{\mathrm{L}}))e^{\mathrm{i}k}\big]\Delta C_{k,0}.\end{aligned} \tag{E9}$$

定义

$$\Delta\boldsymbol{C}_k = (\Delta C_{k,0}, \Delta C_{k,1}, \ldots, \Delta C_{k,L-1})^T. \tag{E10}$$

于是有

$$\mathrm{i}\frac{d}{dt}\Delta\boldsymbol{C}_k = H^{\mathrm{A}}_{\mathrm{inc}}(k)\Delta\boldsymbol{C}_k, \tag{E11}$$

其中

$$H^{\mathrm{A}}_{\mathrm{inc}}(k) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\tilde{h}(k) & t_k & 0 & \cdots & t_k^* \\ t_k^* & -\mathrm{i}\Gamma & t_k & \ddots & 0 \\ 0 & t_k^* & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_k \\ t_k & 0 & \cdots & t_k^* & -\mathrm{i}\Gamma \end{pmatrix}, \tag{E12}$$

其中 $\Gamma = \gamma_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{R}}$、$t_k = J_h\,(e^{-\mathrm{i}k} - 1)$ 和

$$\begin{aligned}\tilde{h}(k) = &\big[\gamma_{\mathrm{L}} + \bar{n}(\gamma_{\mathrm{R}} - \gamma_{\mathrm{L}})\big](e^{\mathrm{i}k} - 1) \\ &+ \big[\gamma_{\mathrm{R}} - \bar{n}(\gamma_{\mathrm{R}} - \gamma_{\mathrm{L}})\big](e^{-\mathrm{i}k} - 1).\end{aligned} \tag{E13}$$

哈密顿量 $H^{\mathrm{A}}_{\mathrm{inc}}(k)$ 控制着高斯假设下微扰的演化。具体而言，假设受微扰的密度矩阵为

$$\rho = \frac{\rho_{\mathrm{s}} + \epsilon\,\mathcal{C}_{-k}[\rho_{\mathrm{s}}]}{1 + \epsilon\sqrt{L}\bar{n}\delta_{k0}}, \tag{E14}$$

其中 ρ_{s} 是由方程（E5）表征的高斯稳态，$\mathcal{C}_{-k}[\rho_{\mathrm{s}}]$ 是微扰，分母确保$\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ 对所有 k均成立。于是有

$$\begin{aligned}\Delta C_{q,r} &= \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_j e^{-\mathrm{i}qj}\,\mathrm{Tr}\big[\hat{c}_j^\dagger\hat{c}_{j+r}(\rho - \rho_{\mathrm{s}})\big] \\ &= \big[-\epsilon\bar{n}^2 + O(\epsilon^2)\big]\delta_{qk}\delta_{r0}.\end{aligned} \tag{E15}$$

因此，初始时只有 $\Delta C_{k,0}$ 非零。为了在保留主要特征的同时进一步简化动力学，我们仅考虑 $\Delta C_{k,0}$ 及其最近邻 $\Delta C_{k,\pm1}$，并忽略距离更远处的关联 $|r|$。于是，截断空间中的动力学由下式给出

$$\mathrm{i}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Delta C_{k,0}\\ \Delta C_{k,1}\\ \Delta C_{k,-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{i}\tilde{h}(k) & t_k & t_k^*\\ t_k^* & -\mathrm{i}\Gamma & 0\\ t_k & 0 & -\mathrm{i}\Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta C_{k,0}\\ \Delta C_{k,1}\\ \Delta C_{k,-1}\end{pmatrix}. \tag{E16}$$

还可以进一步定义

$$\begin{aligned}u_k &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\Delta C_{k,1} - e^{\mathrm{i}k}\Delta C_{k,-1}\big), \\ v_k &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\Delta C_{k,1} + e^{\mathrm{i}k}\Delta C_{k,-1}\big).\end{aligned} \tag{E17}$$

于是有

$$\mathrm{i}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Delta C_{k,0}\\ u_k\\ v_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{i}\tilde{h}(k) & \sqrt{2}t_k & 0\\ \sqrt{2}t_k^* & -\mathrm{i}\Gamma & 0\\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta C_{k,0}\\ u_k\\ v_k\end{pmatrix}. \tag{E18}$$

这里，u_k 与 $\Delta C_{k,0}$ 耦合，而 v_k 以速率 Γ独立衰减。由于 v_k 初始为零，因此在时间演化过程中始终为零。因此，$(\Delta C_{k,0}, u_k)^T$ 的动力学由下式支配

$$\tilde{H}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{inc}}(k) = \begin{pmatrix}\mathrm{i}\tilde{h}(k) & \sqrt{2}t_k\\ \sqrt{2}t_k^* & -\mathrm{i}\Gamma\end{pmatrix}, \tag{E19}$$

这给出了方程（42）。

附录 F：弱 $U(1)$对称模型的平均场分析

这里我们推导第 48 式和第 49 式中给出的平均场临界点和稳态序参量，该模型见第 IVA 节。我们采用乘积态

$$\rho_{\mathrm{MF}} = \bigotimes_{i=1}^{L}(\rho_{iA}\otimes\rho_{iB}) \tag{F1}$$

作为平均场假设，其中 $\rho_{i\nu}$ 是格点（i，ν）处的局域密度矩阵。我们将局域场和密度定义为

$$\begin{aligned}\psi_{i\nu} &= \langle \hat{b}_{i\nu} \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_{i\nu}\hat{b}_{i\nu}),\\ n_{i\nu} &= \langle \hat{n}_{i\nu} \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_{i\nu}\hat{n}_{i\nu}),\end{aligned} \tag{F2}$$

其中 $\hat{n}_{i\nu} = \hat{b}^{\dagger}_{i\nu}\hat{b}_{i\nu}$ 和 $\nu = A,\ B$。在平均场近似下，我们从主方程中得到由它们导出的微分方程：

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_{iA} &= -\frac{\gamma}{2}\psi_{iA} - \mathrm{i}(1-2n_{iA})\sum_j h_{ij}\psi_{jB},\\ \dot{\psi}_{iB} &= -\frac{\gamma}{2}\psi_{iB} - \mathrm{i}(1-2n_{iB})\sum_j h_{ji}\psi_{jA},\\ \dot{n}_{iA} &= \gamma(1-n_{iA}) + 2\sum_j h_{ij}\,\mathrm{Im}(\psi^*_{iA}\psi_{jB}),\\ \dot{n}_{iB} &= -\gamma n_{iB} - 2\sum_j h_{ji}\,\mathrm{Im}(\psi^*_{jA}\psi_{iB}),\end{aligned} \tag{F3}$$

其中

$$h_{ij} = \frac{J}{|2(j-i)+1|^p}. \tag{F4}$$

为求得平均场稳态，我们进一步利用平移对称性，使得 $\psi_{i\nu} = \psi_\nu$ 和$n_{i\nu} = n_\nu$。稳态即为下列方程的解：

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{\gamma}{2}\psi_A - \mathrm{i}K_p(1-2n_A)\psi_B,\\ 0 &= -\frac{\gamma}{2}\psi_B - \mathrm{i}K_p(1-2n_B)\psi_A,\\ 0 &= \gamma(1-n_A) + 2K_p\,\mathrm{Im}(\psi^*_A\psi_B),\\ 0 &= -\gamma n_B - 2K_p\,\mathrm{Im}(\psi^*_A\psi_B),\end{aligned} \tag{F5}$$

其中

$$K_p = \sum_j h_{ij} = \sum_j h_{ji} = 2J(1-2^{-p})\zeta(p), \tag{F6}$$

其中 $\zeta(p)$为黎曼ζ函数。

我们考虑 $J>0$ 和 $\gamma>0$，得到两类平均场稳态。一类是弱 $U(1)$ 对称解，表示为

$$\psi_A = \psi_B = 0, \qquad n_A = 1, \qquad n_B = 0, \tag{F7}$$

它对所有 $J>0$ 都存在。另一个是对称性破缺解，表示为

$$\begin{aligned}\psi_A &= \mathrm{i}\psi_B = e^{\mathrm{i}\phi}\sqrt{\frac{\eta(1-\eta)}{2}},\\ n_A &= \frac{1+\eta}{2}, \qquad n_B = \frac{1-\eta}{2},\end{aligned} \tag{F8}$$

其中 $\eta = \gamma/(2K_p)$ 和 ϕ 为任意相位。该解存在于 $J > \gamma/[4(1-2^{-p})\zeta(p)]$，并由于非零的 ψ_A 和 ψ_B而自发破缺弱 $U(1)$ 对称性。

我们进一步注意到，对于 $J > \gamma/[4(1-2^{-p})\zeta(p)],$，对称解是不稳定的。通过考虑对称解附近场的小扰动，并忽略超出线性阶的项，我们得到

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\delta\psi_A\\ \delta\psi_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\gamma/2 & \mathrm{i}K_p\\ -\mathrm{i}K_p & -\gamma/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\psi_A\\ \delta\psi_B\end{pmatrix}. \tag{F9}$$

对于 $J > \gamma/[4(1-2^{-p})\zeta(p)],$，一般的小微扰会呈指数增长，并使系统偏离对称解。

1. 色散关系

这里我们推导与弱 $U(1)$ 对称性的自发破缺相关的南部–戈德斯通模的平均场色散关系。在对称性破缺相中，我们将微扰后的局域场写为

$$\psi_{iA} = \psi_{\mathrm{abs}}e^{\mathrm{i}\theta_{iA}}, \qquad \psi_{iB} = -\mathrm{i}\psi_{\mathrm{abs}}e^{\mathrm{i}\theta_{iB}}, \tag{F10}$$

其中 $\psi_{\mathrm{abs}} = \sqrt{\eta(1-\eta)/2},$ $\theta_{i\nu}$ 是局部相位微扰，我们选取全局相位为 $\phi = 0$。将这些代入式（F3），并将局部密度固定为式（F8）中的稳态值，只保留关于 θ的一阶项，可得

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{iA} &= -\frac{\gamma}{2}\theta_{iA} + \eta\sum_j h_{ij}\theta_{jB},\\ \dot{\theta}_{iB} &= -\frac{\gamma}{2}\theta_{iB} + \eta\sum_j h_{ji}\theta_{jA}.\end{aligned} \tag{F11}$$

我们代入傅里叶变换

$$\theta_{k\nu} = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_j e^{-\mathrm{i}kj}\theta_{j\nu} \tag{F12}$$

在方程（F11）中得到

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta_{kA}\\ \theta_{kB}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\gamma/2 & \eta h_k\\ \eta h^*_k & -\gamma/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_{kA}\\ \theta_{kB}\end{pmatrix}, \tag{F13}$$

其中

$$h_k = J\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{|2r+1|^p}. \tag{F14}$$

方程（F13）中矩阵的本征值为

$$\lambda_{\pm}(k) = -\frac{\gamma}{2} \pm \eta|h_k|. \tag{F15}$$

由于 $h_0 = K_p$ 和 $\eta K_p = \gamma/2$，我们有 $\lambda_+(0) = 0$ 和 $\lambda_-(0) = -\gamma$。因此，λ_+ 分支描述了与弱 $U(1)$ 对称性自发破缺相关联的南部–戈德斯通模。

为了求得长波色散，我们使用参考文献 [67], 中的式 (20)，它在一维情况下可写为

$$\tilde{E}_p(q)=\sum_{n\neq 0}\frac{1-\cos(nq)}{|n|^p}\propto\begin{cases}|q|^{p-1}, & 1<p<3,\\ q^2\log(1/|q|), & p=3,\\ q^2, & p>3\end{cases}\tag{F16}$$

如 $q\to 0$。我们还得到

$$\begin{aligned}h_k&=2Je^{-\mathrm{i}k/2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\cos[(r+1/2)k]}{(2r+1)^p}\\&=e^{-\mathrm{i}k/2}\{h_0-J[\tilde{E}_p(k/2)-2^{-p}\tilde{E}_p(k)]\}.\end{aligned}\tag{F17}$$

对于足够小的 $|k|$，有 $|h_k|=e^{\mathrm{i}k/2}h_k$。利用$\eta h_0=\gamma/2$，我们得到

$$\begin{aligned}-\lambda_+(k)&=J\eta[\tilde{E}_p(k/2)-2^{-p}\tilde{E}_p(k)]\\&\propto\begin{cases}|k|^{p-1}, & 1<p<3,\\ k^2\log(1/|k|), & p=3,\\ k^2, & p>3\end{cases}\end{aligned}\tag{F18}$$

对于 $k\to 0$。

2. 长程有序

在具有短程相互作用的一维和二维系统中，序参量的涨落会在非零温度下破坏 $U(1)$ 长程有序 [68,69]。然而，在某些经典系统中，长程相互作用可以在非零温度下维持 $U(1)$ 长程有序 [70, 71]。在此，我们采用团簇平均场和多体计算，考察模型中的长程耦合是否能使长程有序得以维持。

我们将链划分为若干团簇 $\mathcal{C}$，每个团簇包含N_{uc} 个连续晶胞，并采用乘积态

$$\rho_{\mathrm{CMF}}=\bigotimes_{\mathcal{C}}\bar{\rho}_{\mathcal{C}}\tag{F19}$$

作为数值计算的簇平均场试探态 [72]。我们假设平移不变性，因此所有簇具有相同的密度矩阵 $\bar{\rho}_{\mathcal{C}}$。从主方程出发，我们对簇外的所有格点进行偏迹 $\mathcal{C}$ ，得到

$$\dot{\bar{\rho}}_{\mathcal{C}}=-\mathrm{i}[\hat{H}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{MF}},\bar{\rho}_{\mathcal{C}}]+\gamma\sum_{i\in\mathcal{C}}\big(\mathcal{D}[\hat{b}_{iA}^{\dagger}]+\mathcal{D}[\hat{b}_{iB}]\big)\bar{\rho}_{\mathcal{C}},\tag{F20}$$

其中

$$\mathcal{D}[\hat{o}]\rho=\hat{o}\rho\hat{o}^{\dagger}-\frac{1}{2}\{\hat{o}^{\dagger}\hat{o},\rho\},\tag{F21}$$

且平均场哈密顿量为

$$\hat{H}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{MF}}=\sum_{i,j\in\mathcal{C}}h_{ij}\hat{b}_{iA}^{\dagger}\hat{b}_{jB}+\sum_{i\in\mathcal{C},\nu}F_{i\nu}\hat{b}_{i\nu}^{\dagger}+\mathrm{H.c.},\tag{F22}$$

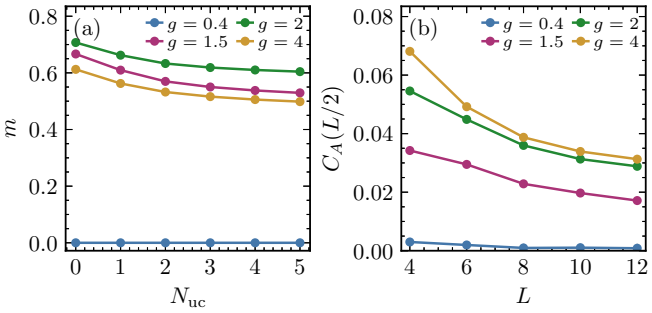

图 5。（a）序参量 m 与每个簇中的晶胞数 N_{uc} 的关系。（b）多体稳态关联函数 $C_A\,(L/2)$ 与系统尺寸 L 的关系，满足周期性边界条件，并对来自 1024 条演化轨迹的 4096 个稳态样本取平均。不同曲线对应于 $g=J/J_{\mathrm{c}}^{\mathrm{MF}}$的不同取值。在（a）中，$N_{\mathrm{uc}}=0$处的点表示由单点平均场理论得到的结果，[式（F8）]。这里 $\gamma=1$ 和 $p=5/4$。

with

$$F_{iA}=\sum_{j\notin\mathcal{C}}h_{ij}\psi_{jB},\qquad F_{iB}=\sum_{j\notin\mathcal{C}}h_{ji}\psi_{jA}.\tag{F23}$$

我们选择初态为

$$\bar{\rho}_{\mathcal{C}}(0)=|\varphi_{\mathcal{C},0}\rangle\langle\varphi_{\mathcal{C},0}|,\tag{F24}$$

其中

$$|\varphi_{\mathcal{C},0}\rangle=\bigotimes_{i\in\mathcal{C},\nu}\frac{|0\rangle_{i\nu}+|1\rangle_{i\nu}}{\sqrt{2}}.\tag{F25}$$

然后，我们根据式（F20）对其进行演化，并计算序参量

$$m=\frac{1}{N_{\mathrm{uc}}}\sum_{i\in\mathcal{C},\nu}\big|\mathrm{Tr}(\bar{\rho}_{\mathcal{C}}\hat{b}_{i\nu})\big|.\tag{F26}$$

我们的数值计算表明，对于 $p=5/4$，在满足$J\gtrsim J_{\mathrm{c}}^{\mathrm{MF}}$的区域内，随着团簇大小增加，序参量仍保持非零 [，见图 5（a）]。

我们通过直接计算式（ $\mathcal{L}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{W}}$中的稳态，即多体李乌维尔算符的稳态，进一步考察长程有序性44）。具体而言，我们计算多体关联函数

$$C_{\nu}(r)=\frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\mathrm{Tr}\big(\rho_{\mathrm{s}}\hat{b}_{j\nu}^{\dagger}\hat{b}_{j+r,\nu}\big),\tag{F27}$$

其中 ρ_{s} 是 $\mathcal{L}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{W}}$的稳态。利用量子跳跃演化，我们计算了 $C_A(L/2)$ ，直至 $L=12$ [，见图5(b)]。当 $g=1.5$、2、4时，关联函数仍然较大；而当 $g=0.4$时，关联函数接近于零。这些结果与簇平均场分析一致，表明足够长程的耦合（例如 $p=5/4$）能够在该系统中维持长程有序。

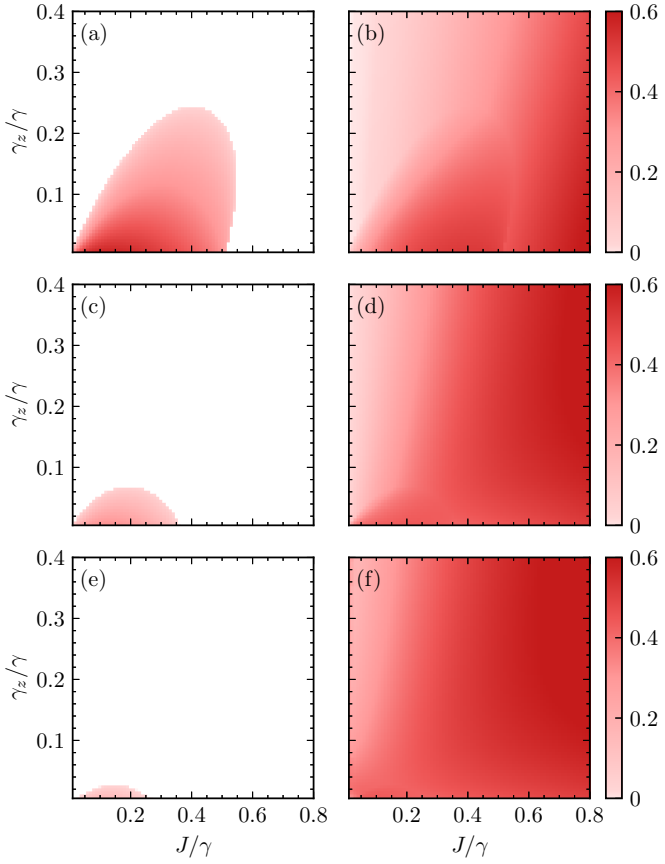

图 6. $p = 3/2$ 的簇平均场相图。(a、c、e) 普通序参量 m 和 (b、d、f) Rényi-2 序参量 $m^{(2)}$ 随 J/γ 和 γ_z/γ 的变化。上、中、下三行分别对应 (a、b) $N_{\rm uc} = 1$、(c、d) $N_{\rm uc} = 2$ 和 (e、f) $N_{\rm uc} = 3$。

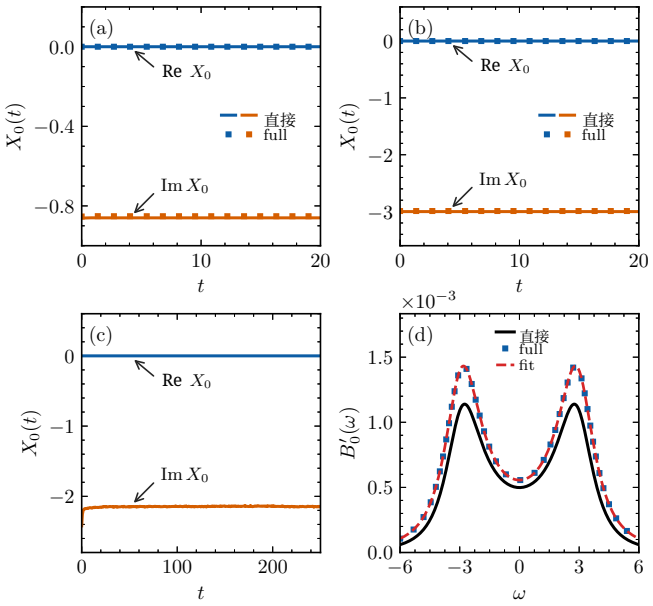

图 7. (a)–(c) 非相干响应 $X_0(t)$ 分别对应 (a) LRM 模型、(b) AJ 模型和 (c) 第 IVB 节讨论的硬核玻色子模型。蓝色和橙色分别表示实部和虚部。实线表示直接计算结果，而 (a) 和 (b) 中的方块表示完整模拟结果。(a) 和 (b) 中的参数分别与图 2(c) 和 2(d) 中的参数相同。对于 (c)，我们使用图 4(a) 中的参数，并取 $L = 10$。(d) LRM 模型的谱函数 $B_0'(\omega)$，其中黑线和蓝色方块分别来自直接计算和完整模拟，红色虚线则是使用式 (5) 对完整模拟结果进行双峰拟合所得。

附录 G：强 $U(1)$对称模型的平均场分析

这里我们对第IVB节中的模型进行平均场分析。我们采用与附录F2 相同的步骤，得到簇密度矩阵的平均场动力学：

$$\begin{aligned}\dot{\bar\rho}_{\mathcal C} = &-\mathrm{i}[\hat H_{\mathcal C}^{\rm MF}, \bar\rho_{\mathcal C}] + \gamma_z \sum_{i\in\mathcal C,\nu} \mathcal D[\hat\sigma^z_{i\nu}]\bar\rho_{\mathcal C} \\ &+ \gamma\Big[\sum_{i=1}^{N_{\rm uc}} \mathcal D[\hat b^\dagger_{iB}\hat b_{iA}] + \sum_{i=2}^{N_{\rm uc}} \mathcal D[\hat b^\dagger_{i-1,B}\hat b_{iA}]\Big]\bar\rho_{\mathcal C} \\ &+ \gamma\Big[(1-n_{N_{\rm uc},B})\mathcal D[\hat b_{1A}] + n_{1A}\mathcal D[\hat b^\dagger_{N_{\rm uc},B}]\Big]\bar\rho_{\mathcal C},\end{aligned} \tag{G1}$$

这里我们假设半填充，$N_{\rm uc}^{-1}\sum_{i\in\mathcal C}(n_{iA}+n_{iB}) = 1$。这里，$\mathcal C$中的晶胞标记为 $i = 1,\ldots,N_{\rm uc}$，且$\hat{} H_{\mathcal C}^{\rm MF}$由式 (F22) 给出。

我们采用方程（F24）中的初态，并根据方程（G1）对其进行演化。然后，我们计算方程（F26）中定义的普通序参量 m，以及二阶 Rényi 序参量

$$m^{(2)} = \frac{1}{N_{\rm uc}}\sum_{i\in\mathcal C,\nu}\frac{\mathrm{Tr}(\bar\rho_{\mathcal C}\hat b_{i\nu}\bar\rho_{\mathcal C}\hat b^\dagger_{i\nu})}{\mathrm{Tr}(\bar\rho_{\mathcal C}^2)}. \tag{G2}$$

对于 $m^{(2)} \neq 0$ 和 $m = 0$，系统表现出强到弱的 $U(1)$ 自发对称性破缺。剩余的弱 $U(1)$ 对称性在 m也变为非零时自发破缺。

图6 展示了 $p = 3/2$的结果。对于所考虑的所有参数值和团簇大小，我们发现 $m^{(2)}$ [非零（见图6(b,d,f)], ），这表明强$U(1)$ 对称性要么破缺为弱对称性，要么完全破缺。对于 $N_{\rm uc} = 1$，我们也发现了一个 m [宽广的非零区间（见图6(a)]）。然而，随着 $N_{\rm uc}$ 增加 [，该区间显著缩小（见图6(c,e)], ），是否存在具有额外弱 $U(1)$自发对称性破缺的区间仍不清楚。

附录 H： $k = 0$处的非相干响应

这里我们讨论 $k = 0$ 第 IVB 节介绍的 LRM 模型、AJ 模型和硬核玻色子模型的IVB非相干响应。由于所有这些模型

都具有强 $U(1)$对称性，因此可以考虑双倍希尔伯特空间中的强$U(1)$对称扇区 $\mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_N$。这里， $\mathcal{H}_N = \text{span}\{|\psi\rangle \mid \hat{N}_s|\psi\rangle = N|\psi\rangle\}$ 是包含 N 个粒子的希尔伯特空间。这些扇区中的每一个至少包含一个稳态。假设 ρ_s 属于 N粒子扇区，则微扰 $\mathcal{C}_{0m}[\rho_s]$ 属于 $(N-1)$粒子扇区，并可表示为

$$\mathcal{C}_{0m}[\rho_s] = \text{Tr}\big(\mathcal{C}_{0m}[\rho_s]\big)\rho_s' + \delta\rho, \tag{H1}$$

其中， ρ_s' 是（$N-1$）粒子扇区中的一个稳态，满足 $\text{Tr}(\rho_s') = 1$ ，并且 $e^{\mathcal{L}_s t}[\delta\rho] \to 0$ 如 $t \to \infty$所示。长时间响应随后可表示为

$$X_0(t \to \infty) = -\mathrm{i}\,\text{Tr}\big(\mathcal{C}_{0m}[\rho_s]\big)\,\text{Tr}\big(\mathcal{C}_{0m}^{\dagger}[\rho_s']\big), \tag{H2}$$

通常不为零。事实上，三个模型都表现出非零 $X_0($ $t \to \infty)$ [见图 7(a–c)], ; 相比之下， $k \neq 0$ 处的响应衰减至 0 [见图 2(a)]。这一非零的长时间值带来了一个 $\delta(\omega)$ 对 $B_0(\omega)$ 的贡献，对应于能量为 $z = 0$ 的非相干准粒子。

拟合非相干准粒子谱时，我们将 $k = 0$点与其他 k 点分开处理。具体而言，对于 LRM 模型，我们将一个准粒子能量固定为 $z = 0$ 并进行拟合

$$B_0'(\omega) = -2\,\text{Im}\int_0^{\infty} dt\, e^{\mathrm{i}\omega t}\big[X_0(t) - X_0(\infty)\big] \tag{H3}$$

利用方程 (5) 可得到图 2(c) [见图 7(d)]中所示的另外两个准粒子能量。对于第 IV B 节介绍的 AJ 模型和硬核玻色子模型，我们假设在 $k = 0$处只有一个准粒子能量，并将其固定为 $z = 0$。对于 AJ 模型，在 $k \neq 0$ 处存在两个分支，但在 $k = 0$处只有一个能量。为形成图 2(d) 中的回路，我们将 $k = 0$ 点归入第一分支，将 $k = 2\pi$处的第一分支 $(L-1)/L$连接到 $k = 2\pi/L$处的第二分支，并将 $k = 2\pi$处的第二分支 $(L-1)/L$ 连接到 $k = 0$处的第一分支。

[1] R. B. Laughlin 和 D. Pines，万物理论，美国国家科学院院刊 97, 28 (2000). [2] B. Keimer 和 J. E. Moore，量子材料物理学，《自然·物理》13, 1045 (2017). [3] L. D. Landau，费米液体理论，《苏联物理学·实验与理论物理学杂志》3, 920 (1957). [4] A. Damascelli、Z. Hussain 和 Z.-X. Shen，铜氧化物超导体的角分辨光电子发射研究，《现代物理评论》75, 473 (2003). [5] J. A. Sobota、Y. He 和 Z.-X. Shen，量子材料的角分辨光电子发射研究，《现代物理评论》93, 025006 (2021). [6] P. Dai，铁基超导体中的反铁磁序与自旋动力学，《现代物理评论》87, 855 (2015). [7] S. Gupta、Z. Hadzibabic、M. W. Zwierlein、C. A. Stan、K. Dieckmann、C. H. Schunck、E. G. M. van Kempen、B. J. Verhaar 和 W. Ketterle，超冷费米子的射频光谱学，《科学》300, 1723 (2003). [8] C. Chin、M. Bartenstein、A. Altmeyer、S. Riedl、S. Jochim、J. Hecker Denschlag 和 R. Grimm，强相互作用费米气体中配对能隙的观测，《科学》305, 1128 (2004). [9] J. Stenger、S. Inouye、A. P. Chikkatur、D. M. Stamper-Kurn、D. E. Pritchard 和 W. Ketterle，玻色–爱因斯坦凝聚体的布拉格光谱学，物理评论快报 82, 4569 (1999). [10] D. M. Stamper-Kurn、A. P. Chikkatur、A. Görlitz、S. Inouye、S. Gupta、D. E. Pritchard 和 W. Ketterle，光散射激发玻色–爱因斯坦凝聚体中的声子，物理评论快报 83, 2876 (1999). [11] J. M. Tranquada、H. Woo、T. G. Perring、H. Goka、G. D. Gu、G. Xu、M. Fujita 和 K. Yamada，铜氧化物超导体中条纹序产生的量子磁激发，《自然》429, 534 (2004). [12] Z.-X. Shen、D. S. Dessau、B. O. Wells、D. M. King、W. E. Spicer、A. J. Arko、D. Marshall、L. W. Lombardo、A. Kapitulnik、P. Dickinson、S. Doniach、J. DiCarlo、T. Loeser 和 C. H. Park，$Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ 的 a-b 平面中异常大的能隙各向异性，《物理评论快报》70，1553（1993年）。[13] J. T. Stewart、J. P. Gaebler 和 D. S. Jin，利用光电子能谱探测强相互作用费米气体，《自然》454，744（2008年）。[14] A. Schirotzek、Y.-I. Shin、C. H. Schunck 和 W. Ket- terle，通过准粒子能谱测定原子费米气体中的超流能隙，《物理评论快报》101，140403（2008年）。[15] D. Hsieh、D. Qian、L. Wray、Y. Xia、Y. S. Hor、R. J. Cava 和 M. Z. Hasan，量子自旋霍尔相中的拓扑狄拉克绝缘体，《自然》452，970（2008年）。[16] S. Diehl、A. Micheli、A. Kantian、B. Kraus、H. P. Büchler 和 P. Zoller，冷原子驱动开放量子系统中的量子态与相，《自然·物理》4，878（2008年）。[17] F. Verstraete、M. M. Wolf 和 J. I. Cirac，由耗散驱动的量子计算与量子态工程，《自然·物理》5，633（2009年）。[18] A. J. Daley，量子轨迹与开放多体量子系统，《先进物理学》63，77（2014年）。[19] L. M. Sieberer、M. Buchhold、J. Marino 和 S. Diehl，驱动开放量子物质中的普适性，《现代物理评论》97，025004（2025年）。[20] E. M. Kessler、G. Giedke、A. Imamoglu、S. F. Yelin、M. D. Lukin 和 J. I. Cirac，中心自旋系统中的耗散相变，《物理评论A辑》86，012116（2012年）。[21] T. E. Lee、S. Gopalakrishnan 和 M. D. Lukin，通过对相互作用自旋系统进行光泵浦实现非常规磁性，《物理评论快报》110，257204（2013年）。[22] M. Fitzpatrick、N. M. Sundaresan、A. C. Y. Li、J. Koch 和 A. A. Houck，观测到一维电路量子电动力学晶格中的耗散相变——

变，《物理评论X》7，011016（2017年）。[23] F. Minganti、A. Biella、N. Bartolo 和 C. Ciuti，耗散相变的李乌维尔算符谱理论，《物理评论A辑》98，042118（2018年）。[24] K. Yamamoto、M. Nakagawa、N. Tsuji、M. Ueda 和 N. Kawakami，耗散费米超流体中的集体激发与非平衡相变，《物理评论快报》127，055301（2021年）。[25] H. Li、X.-H. Yu、M. Nakagawa 和 M. Ueda，分子玻色–爱因斯坦凝聚体中的耗散超流性，《物理评论快报》135，166001（2025年）。[26] C.-E. Bardyn、L. Wawer、A. Altland、M. Fleischhauer 和 S. Diehl，探测密度矩阵的拓扑，《物理评论X》8，011035（2018年）。[27] R. Ma 和 C. Wang，平均对称性保护的拓扑相，《物理评论X》13，031016（2023年）。[28] Y. Guo、J.-H. Zhang、H.-R. Zhang、S. Yang 和 Z. Bi，用于混合态对称性保护拓扑相的局域纯化密度算符，《物理评论X》15，021060（2025年）。[29] R. Ma、J.-H. Zhang、Z. Bi、M. Cheng 和 C. Wang，具有平均对称性的拓扑相：退相干、无序与本征，《物理评论X》15，021062 2025( )。[30] Z. Yue、Y.-F. Mao、X. Liang、Z.-X. Hua、P. Ge、Y.- X. Chao、K. Li、C. Jia、M. K. Tey、Y. Xu 和 L. You，无序里德伯原子阵列中的平均拓扑相，《自然·物理》22，844（2026年）。[31] L. Su、R. Sahay、M. Szurek、A. Douglas、O. Marković、C. B. Dag、R. Verresen 和 M. Greiner，哈伯德量子模拟器中的拓扑相变与混合态序，《自然·物理》22，1672（2026年）。[32] F. Song、S. Yao 和 Z. Wang，开放量子系统中的非厄米趋肤效应与手性阻尼，《物理评论快报》123，170401（2019年）。[33] T. Haga、M. Nakagawa、R. Hamazaki 和 M. Ueda，刘维尔皮肤效应：无能隙闭合的弛豫过程减缓，《物理评论快报》127，070402（2021年）。[34] F. Minganti、A. Miranowicz、R. W. Chhajlany 和 F. Nori，非厄米哈密顿量与刘维尔算符的量子例外点：量子跃迁的影响，《物理评论A辑》100，062131（2019年）。[35] B. Buča 和 T. Prosen，关于林德布拉德方程对称性约化的注记：受约束开放自旋链中的输运，《新物理学杂志》14，073007（2012年）。[36] S. Lieu、R. Belyansky、J. T. Young、R. Lundgren、V. V. Albert 和 A. V. Gorshkov，开放量子系统中的对称性破缺与纠错，《物理评论快报》125，240405（2020年）。[37] J. Y. Lee、C.-M. Jian 和 C. Xu，退相干或弱测量下的量子临界性，PRX Quantum 4，030317（2023年）。[38] O. Ogunnaike、J. Feldmeier 和 J. Y. Lee，跨越对称性、约束与长程相互作用，统一涌现流体力学与林德布拉德低能谱，《物理评论快报》131，220403（2023年）。[39] P. Sala、S. Gopalakrishnan、M. Oshikawa 和 Y. You，开放系统中的自发强对称性破缺：纯化视角，《物理评论B》110，155150（2024年）。[40] S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，作为局域超算符基态的对称性：流体动力学的 implications，《PRX Quantum》5，040330（2024）。[41] L. A. Lessa、R. Ma、J.-H. Zhang、Z. Bi、M. Cheng 和 C. Wang，混合量子态中的强到弱自发对称性破缺，《PRX Quantum》6，010344（2025）。[42] X. Huang、M. Qi、J.-H. Zhang 和 A. Lucas，流体动力学作为强到弱自发对称性破缺的有效场论，《物理评论B》111，125147（2025）。[43] D. Gu、Z. Wang 和 Z. Wang，开放量子系统中的自发对称性破缺：强、弱以及强到弱，《物理评论B》112，245123（2025）。[44] J. Goldstone，具有“超导体”解的场论，Nuovo Cimento 19，154（1961）。[45] Y. Nambu 和 G. Jona-Lasinio，基于超导类比的基本粒子动力学模型I，《物理评论》122，345（1961）。[46] J. Goldstone、A. Salam 和 S. Weinberg，破缺的对称性，《物理评论》127，965（1962）。[47] T. Haga、M. Nakagawa、R. Hamazaki 和 M. Ueda，开放量子多体系统退相干过程的准粒子：Incoherentons，《物理评论研究》5，043225（2023）。[48] R. Chetrite 和 K. Mallick，Lindblad主方程的量子涨落关系，J. Stat. Phys. 148，480（2012年）。[49] L. Campos Venuti 和 P. Zanardi，驱动耗散量子系统的动力学响应理论，《物理评论A辑》93，032101（2016）。[50] L. M. Sieberer、M. Buchhold 和 S. Diehl，驱动开放量子系统的Keldysh场论，Rep. Prog. Phys. 79，096001（2016）。[51] V. V. Albert、B. Bradlyn、M. Fraas 和 L. Jiang，Lindblad算符的几何与响应，《物理评论X》6，041031（2016）。[52] M. Konopik 和 E. Lutz，非平衡稳态的量子响应理论，《物理评论研究》1，033156（2019）。[53] L. Pan、X. Chen、Y. Chen 和 H. Zhai，非厄米线性响应理论，《自然·物理》16，767（2020）。[54] X. He 和 Y. Chen，耗散光谱学，arXiv:2602.14557。[55] K. Li 和 Y. Xu，非厄米吸收光谱学，物理评论快报129，093001（2022）。[56] N. Bultinck、D. J. Williamson、J. Haegeman 和 F. Verstraete，费米子矩阵乘积态与一维拓扑相，物理评论B 95，075108（2017）。[57] Y. Yi 和 Z. Yang，由格点耗散诱导的非厄米趋肤模与手性隧穿效应，物理评论快报125，186802（2020）。[58] J. Dalibard、Y. Castin 和 K. Mølmer，量子光学中耗散过程的波函数方法，物理评论快报68，580（1992）。[59] Z. Gong、Y. Ashida、K. Kawabata、K. Takasan、S. Hi-gashikawa 和 M. Ueda，非厄米系统的拓扑相，物理评论X 8，031079（2018）。[60] H. Hu 和 E. Zhao，纽结与非厄米布洛赫能带，物理评论快报126，010401（2021）。[61] V. Kozii 和 L. Fu，有限寿命准粒子的非厄米拓扑理论：例外点导致体费米弧的预言，物理评论B 109，235139（2024）。[62] F. Reiter 和 A. S. Sørensen，开放量子系统的有效算符形式——

式，《物理评论A辑》**85**，032111（2012年）。[63] W. S. Bakr、J. I. Gillen、A. Peng、S. Fölling 和 M. Greiner，用于探测Hubbard区光学晶格中单个原子的量子气体显微镜，《自然》**462**，74（2009年）。[64] P. M. Preiss、R. Ma、M. E. Tai、J. Simon 和 M. Greiner，具有自旋、原子数和多层读出功能的量子气体显微术，《物理评论A辑》**91**，041602(R)（2015）。[65] T. Fukuhara、S. Hild、J. Zeiher、P. Schauß、I. Bloch、M. Endres 和 C. Gross，Bose-Hubbard链中自旋纠缠波的空间分辨探测，物理评论快报**115**，035302（2015）。[66] J. Surace 和 L. Tagliacozzo，费米子高斯态：数值方法简介，SciPost Phys. Lect. Notes 54（2022）。[67] P. Bruno，海森堡一维和二维 XY 系统中非零温度下不存在自发磁序，具有长程相互作用的等，物理评论快报 **87**，137203（2001）。[68] N. D. Mermin 和 H. Wagner，《一维或二维各向同性海森堡模型中铁磁性或反铁磁性的缺失》，物理评论快报 **17**，1133（1966）。[69] P. C. Hohenberg，《一维和二维中长程有序的存在性》，物理评论 **158**，383（1967）。[70] J. M. Kosterlitz，《长程铁磁链中的相变》，物理评论快报 **37**，1577（1976）。[71] J. Fröhlich、R. Israel、E. H. Lieb 和 B. Simon，《相变与反射正性。I. 一般理论与长程晶格模型》，数学物理通讯 **62**，1（1978）。[72] J. Jin、A. Biella、O. Viyuela、L. Mazza、J. Keeling、R. Fazio 和 D. Rossini，《耗散自旋系统稳态相图的簇平均场方法》，物理评论X **6**，031011（2016）。