arXiv:2611.30475v1 [hep-ph] 23 Nov 2026

逆振幅方法中的有限体积π介子散射：推广至运动参考系

Julián A. Sánchez[1], *, *Raquel* Molina[1], **, 以及 *Angel* Gómez Nicola[2], ***

[1]理论物理系和 IFIC，瓦伦西亚大学-CSIC联合中心，瓦伦西亚大学科学园，C/ Catedrático José Beltrán, 2, 46980 帕特纳，西班牙[2]马德里康普顿斯大学，物理科学学院，理论物理系和 IPARCOS，Plaza de las Ciencias 1, 28040 马德里，西班牙

摘要。我们研究运动参考系中阈值附近 $\pi\pi$ 散射的主导指数抑制有限体积修正。使用单圈逆振幅方法（IAM），我们计算盒子总动量为 $\vec{P} = 2\pi \vec{d}/L$时的$I = 0$和$I = 2$振幅，并纳入了在 Lüscher 量子化条件中被忽略的左手切、t道、u道及蝌蚪图贡献。我们推导出近阈值能级的相应修正，并测量其相对于 Lüscher项的大小。我们发现，在静止系中，当$m_\pi L \lesssim 1.5$–1.7 时，该修正与后者相当；在运动参考系中修正更大，当 $\vec{d} = [002]$ 时可达到 $m_\pi L \lesssim 2.8$。只有当 $m_\pi L \gtrsim 5$ 时，这些修正才可忽略。

1 引言

格点QCD使我们能够从第一性原理研究强子散射，以及 σ 和 ρ [1–4]等共振。通过Lüscher量子化条件 [1], ，可以从有限体积谱中提取共振性质；该条件还可推广至总动量为 $\vec{P} = 2\pi \vec{d}/L$ 的运动参考系，以获得更多能级 [6, 7]。然而，这一形式体系忽略了在$m_\pi L$下呈指数抑制的有限体积效应，例如来自左手切（LHC）以及t道、u道和蝌蚪圈图的效应 [5, 6]。在大盒子中，这些效应会消失；但在$m_\pi L$较小时，它们可能变得重要，而且预计会依赖于推动。

为量化这些效应，我们采用经单圈逆振幅方法（IAM）幺正化的手征微扰理论（ChPT） [3, 4]。文献 [7]中将 IAM 推广到了有限体积；本文则将该分析扩展至运动参考系，并研究多个推动 $\vec{d}$下d对应的近阈值 $\pi\pi$振幅，即$I = 0$和$I = 2$道中的振幅。

我们首先回顾无限体积下的手征微扰理论和逆振幅法振幅（第2节），然后介绍有限体积振幅和修正后的量子化条件（第3节），最后讨论修正的大小（第4节）。结论见第5节。

*电子邮箱：Julian.Sanchez@ific.uv.es
**电子邮箱：Raquel.Molina@ific.uv.es
***电子邮箱：gomez@fis.ucm.es

2 无限体积下的手征微扰理论与逆振幅法振幅

弹性π介子散射振幅 $\pi^a\pi^b \to \pi^c\pi^d$，记作 $\mathcal{T}_{abcd}$，取决于由外部动量构造的曼德尔施塔姆变量s、t、u，其总四动量为P。同位旋不变性和交叉对称性意味着，只需一个函数$A(s,t,u)$即可表征任意π介子散射振幅，即

$$\mathcal{T}_{abcd}(s,t,u) = A(s,t,u)\,\delta_{ab}\delta_{cd} + A(t,s,u)\,\delta_{ac}\delta_{bd} + A(u,t,s)\,\delta_{ad}\delta_{bc}. \tag{1}$$

逆振幅法 [3, 4] 近似 $\mathrm{Re}\,(1/t)$，其中t为振幅的分波投影，并以其手征微扰理论展开直至 $O(p^4)$，即 $\mathrm{Re}\,(1/t) = 1/t_2 - \mathrm{Re}\,t_4/t_2^2 + O(p^6)$。注意，$t_2$ 对于实的s 为实数，且微扰幺正~~性意味着~~在阈值以上有 $\mathrm{Im}\,t_4 = \sigma t_2^2$，其中$\sigma = \sqrt{1-4m_\pi^2/s}$ 为相空间因子。于是，分波的幺正化振幅为

$$t_{\mathrm{mIAM}}(s) = \frac{t_2^2(s)}{t_2(s) - t_4(s) + A_z(s)}, \tag{2}$$

其中$A_z(s)$是计入阿德勒零点的修正项。

3 有限体积下的手征微扰理论散射振幅

我们考虑边长为L 的立方盒，处于总动量为 $\vec{P} = 2\pi\vec{d}/L$的运动参考系中。散射振幅定义为有限体积中的截肢四点格林函数，其外部腿由重整化传播子的色散关系给出。在有限体积中，所有空间动量，无论内部（圈中）还是外部，均被离散化，即一般的三动量为 $\vec{q} = (2\pi/L)\vec{n}$，其中 $\vec{n} \in \mathcal{P}_{\vec{d}}$，

$$\mathcal{P}_{\vec{d}} = \left\{ \vec{n} \;\middle|\; \vec{k} = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\Big(\vec{n} - \frac{1}{2}\vec{d}\,\epsilon\Big) \right\}, \qquad \epsilon = 1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{s}, \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{\gamma}$ 是洛伦兹 boost 矩阵，$\gamma = E/\sqrt{s}$ 是其洛伦兹因子，E 是运动参考系中的总能量。对于两个质量相等的π介子，$\epsilon = 1$。圈积分会变为空间内部动量分量上的离散求和，

$$(-i)\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \to (-i)\frac{1}{L^3}\sum_{\vec{n}}\int \frac{dq_0}{2\pi}. \tag{4}$$

The 交叉关系和同位旋投影的有限体积推广为

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^0(S,T,U;L) &= 3A(S,T,U;L) + A(T,S,U;L) + A(U,T,S;L),\\
\mathcal{T}^1(S,T,U;L) &= A(T,S,U;L) - A(U,T,S;L),\\
\mathcal{T}^2(S,T,U;L) &= A(T,S,U;L) + A(U,T,S;L),
\end{aligned} \tag{5}$$

其中，$S_\mu = P^\mu$、$T^\mu = (p-p')^\mu$和$U^\mu = (p+p'-P)^\mu$是广义曼德尔斯塔姆变量，p和p'分别是入射和出射动量，A 是$\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$的有限体积振幅。在有限体积中，振幅取决于各个动量，而不仅仅取决于s、t、u；此处隐去了这种依赖关系。

我们将每个同位旋道的振幅写作

$$\mathcal{T}^I(S,T,U;L) = \mathcal{T}^I(s,t,u;L\to\infty) + \Delta\mathcal{T}^I(S,T,U;L). \tag{6}$$

所有紫外发散都包含在 $L \to \infty$ 项中，因此通过维数正规化中的标准无限体积重整化，振幅变得有限。

在单圈阶，有限体积贡献可写为

$$\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}_4^{\infty} + \sum_{i=H,u,t,2u,2t} f_i \, \Delta J_i, \tag{7}$$

其中 ΔJ_i 是圈函数中呈指数抑制的有限体积部分，而f_i是它们在振幅中的系数，分别对应$i = \{H$、u、t、$2u$、$2t\}$（H是鱼雷图贡献，其余项与t– 道和u–道圈图有关，更多详情见 [7] ）。s道和2s道圈图被吸收到呈指数抑制的部分 $\Delta J^{\exp}(s)$以及下文定义的普适 Lüscher函数 $\mathcal{S}_d$ 中。将 $\Delta J^{\exp}(s)$吸收到 $\delta\mathcal{T}_4$ 中（详情见参考文献 [7]），$\delta\mathcal{T}_4$ 包含t道、u道和鱼雷图的有限体积修正，以及s道中呈指数抑制的部分。在阈值附近，量子化条件可化简为

$$p(s)\cot\delta - 16\pi\sqrt{s}\,\frac{\delta\mathcal{T}_4(s;L)}{\mathcal{T}_2^2} = \frac{1}{\gamma\pi L}\,\mathcal{S}_d\!\left(\frac{p(s)^2L^2}{4\pi^2}\right), \tag{8}$$

其中 $\delta(s)$是无限体积相移，通常与完整的无限体积振幅相关联，

$$T^{\mathrm{IAM}}(s) = \frac{\sqrt{s}}{2}\Big(p(s)\cot\delta(s) - i\,p(s)\Big)^{-1}, \tag{9}$$

且 $\mathcal{S}_d$ 是Lüscher函数，

$$\mathcal{S}_d\!\left(\frac{p^2(s)L^2}{4\pi^2}\right) = 4\pi^2 L\left[\frac{1}{L^3}\sum_{\vec{q}\in\mathcal{P}_{\vec{d}}} - \int\frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\right]\frac{1}{|\vec{q}|^2 - p^2(s)}. \tag{10}$$

在阈值附近展开，$E \simeq 2m_\pi$ 和 $p\cot\delta \simeq 1/a$，其中 a 为连续极限散射长度（包含低能常数贡献），式（8）给出了最低能级 E_0的有限体积能量移动$\Delta E = E_0 - 2m_\pi$。来自 $\delta\mathcal{T}_4$的额外近阈值贡献由下式衡量

$$\mathcal{P} = 32\pi m_\pi \left| a\,\frac{\delta\mathcal{T}_4}{\mathcal{T}_2^2}\right|_{s\to 4m_\pi^2}. \tag{11}$$

Lüscher极限对应于 $\mathcal{P} = 0$，而 $\mathcal{P} \simeq 1$ 意味着 $\delta\mathcal{T}_4$ 修正与Lüscher项的阶数相同。

4 结果与讨论

为估算振幅中不同贡献的大小，我们考虑质心系中阈值处的$I = 0$、2投影，即 $E = 2m_\pi$ 且 $\vec{p} = \vec{p}\,' = \vec{0}$。在此极限下，可以得到有限体积振幅和能级的封闭解析表达式，其推导方式与文献 [7], 相同，从而可以直接比较s道、t道、u道以及蝌蚪图贡献。我们采用文献 [8]中的物理π介子质量和低能常数。

相关量是公式（11）中的 $\mathcal{P}$： $\mathcal{P} = 0$表示 Lüscher极限，而 $\mathcal{P} \simeq 1$ 表示指数修正与Lüscher项处于同一量级。图 1 展示了每个推动下 $\mathcal{P}$ 随$m_\pi L$ 的变化，表 1 给出了$m_\pi L$ 的数值，低于该数值时 $\mathcal{P} \gtrsim 1$。在静止参考系中，尽管这些修正在形式上受到指数抑制，但当$m_\pi L \lesssim 1$时，它们已经与 Lüscher项相当，为 1.5–1.7。在运动参考系中，当体积更大时，它们才达到这一量级：对于 $\vec{d} = [001]$、$[110]$、$[111]$，$m_\pi L \lesssim 2$为 2.15–2.54；对于 $\vec{d} = [002]$（$\vec{d}^2 = 4$），$m_\pi L \lesssim 2$为 2.8，因此有推动量系对这些修正更加敏感。对于$m_\pi L \gtrsim 5$，我们在所有情况下都发现 $\mathcal{P} \to 0$。

$\vec{d}$	$I=0$	$I=2$
[000]	1.70	1.52
[001]	2.33	2.25
[110]	2.15	2.54
[111]	2.15	2.15
[002]	2.80	2.78

表 1：各推动 $\vec{d}$ 及同位旋道下，使 $\mathcal{P} \gtrsim 1$成立的$m_\pi L$ 取值（阈值在质心系中评估）。

5 结论

我们将 $\pi\pi$ 散射的有限体积 IAM 分析扩展到了运动参考系，计算了$I=0$ 和$I=2$道中阈值附近振幅的主导指数修正。这些修正通过项 $\delta\mathcal{T}_4$改变了 Lüscher量子化条件，其相对大小由公式（11）中的量 $\mathcal{P}$衡量。

我们发现，尽管这些修正形式上呈指数抑制，但当$m_\pi L \lesssim 1$时，其大小在静止情况下与 Lüscher 项（$\mathcal{P} \simeq 1$）相当，为 0.5–1.7。在运动参考系中，指数贡献比静止时更为显著，$\vec{d}=[002]$（$\vec{d}^{\,2}=4$）是最敏感的情况，此时当$m_\pi L \lesssim 2$时达到 $\mathcal{P} \simeq 1$。只有当$m_\pi L \gtrsim 5$时，指数贡献才变得可以忽略。

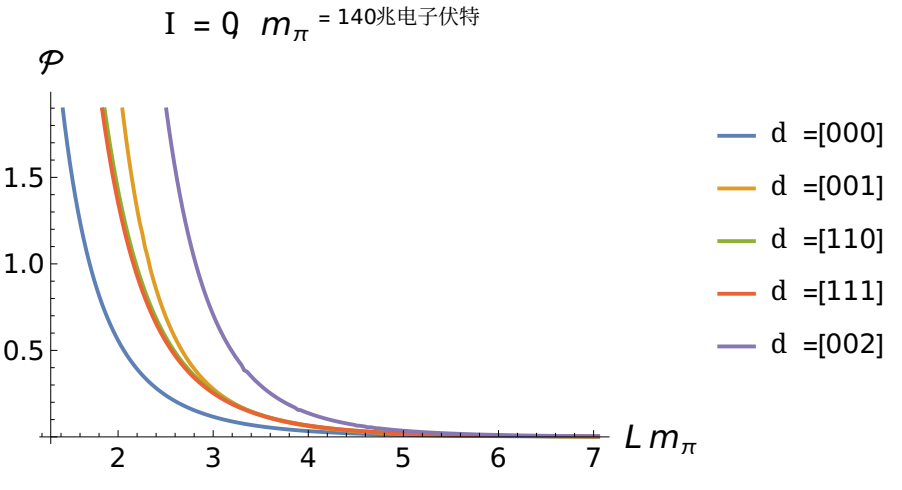
作为未来工作，我们计划计算阈值以上的能级及相应的相移，包括 ρ 道（$I=1$），并研究运动参考系设置下 π介子质量对提取出的可观测量的影响。

致谢

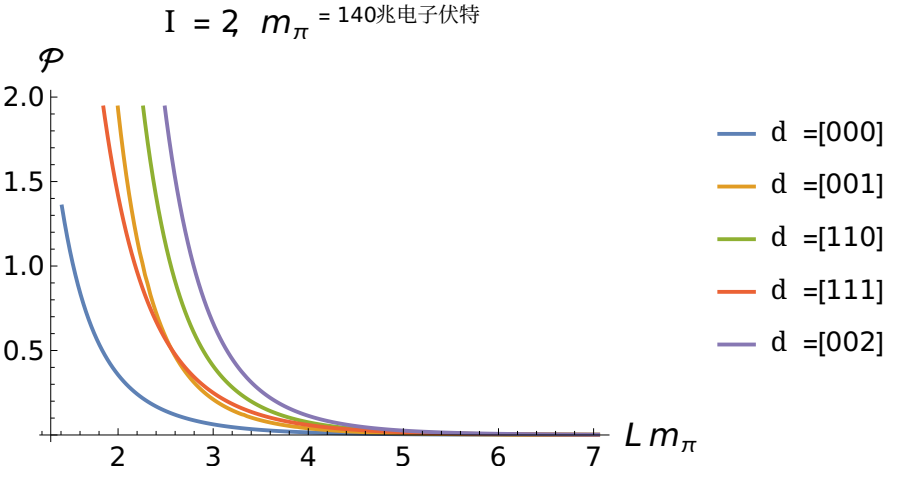
我们感谢 Michael Döring 和 Raúl A. Briceño 提供的有益讨论。本研究得到科学与创新部研究合同 PID2022-136510NB-C31 和 PID2023-147458NB-C21 的资助，资助来源为 MICIU/AEI/10.13039/501100011033。R. M. 还感谢瓦伦西亚自治区政府（GVA）通过 ESGENT 计划（编号 ESGENT/018/2024）和 PROMETEU 计划（编号 CIPROM/2023/59）提供的支持，并感谢西班牙经济与竞争力部和欧盟（NextGenerationEU/PRTR）通过编号 CNS2022-136146 的资助提供的支持。R. M. 和 J. A. S. 感谢瓦伦西亚自治区政府（GVA）创新、大学、科学与数字社会部的 Grisolia 计划，项目编号为 CIGRIS/2021/089。本研究还部分得到西班牙经济与竞争力部（MINECO）和欧洲 FEDER 基金根据合同 FIS2017-84038-C2-1-P B、PID2020-112777GB-I00 的资助，以及瓦伦西亚自治区政府根据合同 PROMETEO/2020/023 的资助。本项目获得了欧盟地平线 2020 研究与创新计划 H2020-INFRAIA-2018-1 项目的资助，资助协议编号为 STRONG-2020 项目下的 824093。

参考文献

[1] M. Lüscher，《Communications in Mathematical Physics》**105**，153（1986）。[2] arXiv:1205.35082v1 [格点高能物理]（2012）。[3] J. A. Oller、E. Oset 和 J. R. Peláez，《Physical Review D》**59**，074001（1999）。



(a) $\mathcal{P}$ 对于 $I = 0$



(b) $\mathcal{P}$ 对于 $I = 2$

图1：公式（11）的量 $\mathcal{P}$，用于衡量阈值附近 Lüscher方法的有限体积修正，其随 $m_\pi L$ 的变化情况，适用于不同的推动 $\vec{d}$ 以及 $I = 0,2$。我们采用文献 [8] 中的低能常数；不确定性带对应于重整化耦合常数l^r_{1-4}的变化。

[4] A. Gómez Nicola 和 J. R. Peláez，《Physical Review D》**65**，054009（2002）。[5] P. F. Bedaque、I. Sato 和 A. Walker-Loud，《Physical Review D》**73**，074501（2006）。[6] M. Döring、H.-W. Hammer、M. Mai、J.-Y. Pang、A. Rusetsky 和 J. Wu，《Physical Review D》**97**，114508（2018）。[7]A. Gómez Nicola、R. Molina 和 J. A. Sánchez，《高能物理学杂志》**06**，057（2026），数字对象唯一标识符：10.1007/JHEP06(2026)057 [arXiv:2512.23462 [格点高能物理]].[8] C. Hanhart、J. R. Peláez 和 G. Ríos，《Physical Review Letters》**100**，152001（2008）。