arXiv:2611.30476v1 [math.RA] 23 Nov 2026

正分次代数上的加权数值同调正则性

QUANSHUI WU 和 BOJUAN YI

摘要。设 A 是一个诺特正分次代数。我们研究若干加权数值同调正则性——加权 CM 正则性、加权 Tor 正则性（Ext 正则性）和加权 Ex 正则性——它们根据与分次 A-模相关的典范复形的加权上确界次数或下确界次数来定义。加权正则性由 Kirkman、Won 和 Zhang 引入，即使其非加权对应项为无穷大时，仍可提供有限不变量。通过参数化的次数重加权，它们统一了经典同调不变量，包括非加权数值正则性、上确界、下确界、深度、投射维数和局部上同调维数。这个框架阐明了同调正则性在次数平移下的行为，并揭示了这些不变量之间的内在关系，尤其是涉及 a-不变量的关系。

我们建立了若干不等式和等式，将这些加权正则性与导出 Hom 和导出张量复形的加权上确界次数或下确界次数联系起来。这些结果恢复了它们的非加权对应项，并在固定权下导出了涉及 a-不变量的新关系。其中一些结果将权的取值范围扩展至整个平面 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$，从而推广了 Kirkman–Won–Zhang 关于加权 CM 正则性与 Tor 正则性之间的不等式。我们还给出了这些不等式成为等式的条件，由此回答了 Kirkman–Won–Zhang 提出的问题。我们利用加权 AS 正则性研究 A 的 Artin–Schelter 正则性。在较弱的条件下，我们证明 A 的 ξ-AS 正则性为零，当且仅当 A 是一个 $\mathbb{N}$-分次 AS-正则代数。这推广了本文作者的一项非加权结果以及 Kirkman、Won 和 Zhang 的一项加权结果。

1. 引言

Castelnuovo–Mumford 正则性（简称 CM-正则性）源于 Mumford 关于射影概形 $\mathbb{P}^n$上相干层 $\mathcal{M}$ 的消失定理 [M]，随后 Ooishi [Ooi] 和 Eisenbud–Goto [EG] 将其发展为交换分次代数上分次模的一个同调不变量。在此背景下，它与 Tor 正则性、线性自由分解以及齐次关系生成元的次数密切相关。在非交换情形中，Jørgensen [

Jo2、Jo4]将 CM-正则性推广到连通分次代数，并建立了联系 CM-正则性与 Tor 正则性的基本不等式。随后，Römer [Rö],Dong–Wu [DW], 和 Kirkman–Won–Zhang [KWZ1] 进一步完善了这一理论。特别是，Kirkman–Won–Zhang [KWZ1] 引入了数值 AS 正则性，以刻画诺特连通分次情形下的 Artin–Schelter 正则代数。

2020 数学主题分类。16E65, 16E30, 16E05, 16E10,关键词和短语。加权卡斯特努沃-芒福德正则性、加权 Ext 正则性、加权 Ex 正则性、加权 AS 正则性、 $\mathbb{N}$-分次 Artin-Schelter 正则代数、非交换射影几何。此项研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12471032）和国家重点研发计划（项目编号：2020YFA0713200）的资助。

在对连通分次情形的早期研究基础上，我们研究了非交换诺特局部有限 $\mathbb{N}$-分次代数上复形的数值同调正则度 [WY], ，包括 CM-正则性、Tor 正则性、Ext 正则性、Ex 正则性及其对应的小写名称正则度。在 [WY], 中，我们在导出 Hom 和张量函子的背景下，建立了联系这些正则度的各种不等式和等式。我们还引入了齐次 CM-正则性和 Ex-正则齐次的概念，它们为不等式何时成为等式提供了判据。在温和假设下，数值 AS 正则性的消失（即 ASreg(A) $= 0$）刻画了 $\mathbb{N}$-分次 Artin–Schelter 正则代数，将早期连通分次情形的结果推广到 A_0 为半单的情形。同样，asreg(A) $= 0$ 刻画了有限维 $\mathbb{N}$-分次代数。

Kirkman-Won-Zhang 在 [KWZ2] 中为诺特连通分次代数引入了经典数值正则性（包括 CM-正则性、Tor 正则性、Ext 正则性和 AS-正则性）的加权版本 A 。这些加权正则性推广了相应的非加权不变量。复形的其他不变量，包括上确界、下确界、投射维数、深度以及 a-不变量，也可以在复形加权正则性的框架下研究。a-不变量是分次 Gorenstein 代数的经典数值不变量。在交换情形中，该不变量由 Goto 和 Watanabe 引入，并在 Bruns 和 Herzog 的专著 [GW, BH] 中得到系统阐述。 a_i-不变量族通过衡量每个分次局部上同调模的最高非零次数，推广了 a-不变量。Trung 及其合作者研究了这些不变量；原始结果见[Tr1, Tr2, HT, CHT, TW] ，综述见 [Tr3]。对于非交换诺特连通分次 AS-Gorenstein 代数， a-不变量的类比通常称为 AS 指数，最早出现在 Artin 和 Schelter 的工作中，它刻画了平衡对偶化复形的次数平移。全面的综述见 [AS, Jo3, Z, JZ]。正如 [KWZ2], 所指出的， a-不变量可以视为加权数值正则性形式体系的一个特例。此外，Kirkman-Won-Zhang 建立了这些不变量之间的基本不等式[KWZ2]。对于任意具有平衡对偶化复形的诺特连通分次代数 A ，以及任意 $X \in \mathrm{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$，不等式 $\mathrm{Torreg}^\xi(X) \leqslant \mathrm{CMreg}^\xi(X) + \mathrm{Torreg}^\xi(k)$ 和 $\mathrm{CMreg}^\xi(X) \leqslant \mathrm{Torreg}^\xi(X) + \mathrm{CMreg}^\xi(A)$ 对所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 都成立。当 X 的投射维数有限时，第二个不等式在 $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ 或 $\xi \ll 0$ 时取等号；对于所有 $\xi \leqslant 1$ 是否仍然取等号，目前尚不清楚。这个等式统一了若干经典同调恒等式，包括 Auslander–Buchsbaum 公式。Kirkman-Won-Zhang[KWZ2] 还证明，$\mathrm{ASreg}^\xi(A) = 0$ 刻画了 $\xi \leqslant 1$ 的 Artin–Schelter 正则代数，并运用加权理论证明，在有限映射下加权 Tor 正则性有限，且次数充分高的 Veronese 子环具有 Koszul 性质。

本文研究 [WY] 中上述数值正则性的加权版本，适用于 $\mathbb{N}$ 分次代数，并解决了 [KWZ2，注 3.11(2)] 中提出的一个问题。本文中，所有 $\mathbb{N}$ 分次代数都假定在域 k 上局部有限。

对于许多非交换分次代数，经典数值正则性可能是无穷的，无法为复形的经典同调不变量（上确界、下确界、投射维数、深度和 a-不变量）以及 Auslander–Buchsbaum 公式等恒等式提供统一框架。加权正则性通过引入可调节的权参数克服了这些局限。加权框架将所有非加权结果纳入其中，作为特殊情形，并能得到有限

的同调不变量，建立一般理论，并给出 Artin–Schelter 正则代数的新等价刻画。本文研究的加权数值正则性包括加权 CM 正则性、加权 Tor 正则性、加权 Ext 正则性和加权 Ex 正则性（见定义 3.1），其定义基于某些典范关联复形的加权上确界或下确界次数。

设 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$。$\xi$-上确界次数 和 ξ-下确界次数 分别定义为$X \in \mathbf{D}(\mathrm{Gr}\, A)$的

$$\sup.\deg_\xi(X) = \sup\{\xi_1 i + \xi_0 j \mid H^i(X)_j \neq 0, i, j \in \mathbb{Z}\},$$

$$\inf.\deg_\xi(X) = \inf\{\xi_1 i + \xi_0 j \mid H^i(X)_j \neq 0, i, j \in \mathbb{Z}\}.$$

定义 1.1。(参见定义 3.1) 假设 A 是一个 $\mathbb{N}$-分次代数，且$S = A/J$，其中 J是 A的分次 Jacobson 根。设 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$。

(1) 对任意 $X \in \mathbf{D}^+(\mathrm{Gr}\, A)$，$\xi$-CM-正则性和 ξ-Ex 正则性 X 分别定义为

$$\mathrm{CMreg}_\xi(X) := \sup\{\deg_\xi(R\Gamma_A(X))\},\ \mathrm{Ex\text{-}reg}_\xi(X) := \sup\{\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(S, X))\}。$$

(2) 对任意 $X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\, A)$，$\xi$-Tor 正则性和 ξ-Ext 正则性 X 分别定义为

$$\mathrm{Torreg}_\xi(X) := \text{上确界}.\deg_\xi(S \overset{L}{\otimes}_A X),\ \mathrm{Extreg}_\xi(X) := -\text{下确界}.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, S))。$$

对于权 $\xi = (1, 1)$ 和 $\xi = (-1, -1)$，上述定义的加权正则性还原为 [WY] 研究的非加权版本。对于权 $\xi = (1, 0)$，上述定义的加权 CM 正则性与 a-不变量一致，正如 [GW, Tr3]，在备注 3.2 和 3.3 中所讨论的那样。

加权 CM 正则性是一种重要的数值不变量。我们证明，相对于各种权，其有限性可确保 A 存在平衡对偶化复形；当 A 为有限维时，还可对其进行刻画；参见命题 3.5 和 3.6。

在第 3 节的后半部分，我们讨论定义 1.1 中定义的四种加权正则性之间的关系。以下两个定理是第 3 节的主要结果，它们确立了这些加权正则性之间的基本关系。第一个推广了 [DW 引理 5.2] 和 [WY 命题 3.14]，，第二个则利用定理 1.2 推广了 [WY 定理 3.16] 和 [Ngu 定理 3.9]。

定理 1.2 (命题 3.12)。设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，并设 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{\leqslant 0} \times \mathbb{R}$。对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\ A)$，

$$\mathrm{Torreg}_\xi(X) = \mathrm{Extreg}_\xi(X) \geqslant \sup.\deg_\xi(X).$$

此外，如果 A_0 是半单的且 $\xi_1 \geqslant \xi_0$，则

$$\mathrm{Torreg}_\xi(X) = \sup.\deg_\xi(X).$$

定理 1.3 (定理 3.14)。设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}$。那么，对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^+_{fg}(\mathrm{Gr}\ A)$，

$$\mathrm{CMreg}_\xi(X) \leqslant \mathrm{Ex\text{-}reg}_\xi(X).$$

此外，如果 $\xi_1 \leqslant \xi_0$ A_0 是半单的，且 A 具有一个平衡对偶化复形 R，那么

$$\mathrm{CMreg}_\xi(X) = \mathrm{Ex\text{-}reg}_\xi(X).$$

我们建立了关于诺特 $\mathbb{N}$-分次代数上 $R\mathrm{Hom}_A(X,\ Y)$ 和 $Y\overset{L}{\otimes}_A X$ 的权上确界或下确界次数的若干不等式与等式，其中 $X,\ Y\in\mathbf{D}(\mathrm{Gr}\ A)$。这些结果在命题 4.1、4.2、4.5、4.6、4.7、4.8 和 4.9 中给出，并利用上同调谱序列以及引理 4.3 和 4.4 得到。例如，

命题 1.4. 设 A 是诺特 $\mathbb{N}$-分次代数。则有以下结论。

(1) 对任意 $0\neq X\in\mathrm{D}^-(\mathrm{gr}\ A)$、$0\neq Y\in\mathrm{D}^+(\mathrm{Gr}\ A)$ 和 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}$，$-\inf.\deg_\xi(R\mathrm{Hom}_A(X,Y))\leqslant\mathrm{Ext}$ 正则度$_\xi(X)-\inf.\deg_\xi(Y)$。(2) 若 A 有平衡对偶化复形，则对任意 $0\neq X\in\mathrm{D}^-_{fg}(\mathrm{Gr}\ A)$、$0\neq Y\in\mathrm{D}^-(\mathrm{gr}\ A^o)$，其挠上同调为 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，有 $-\inf.\deg_\xi(R\mathrm{Hom}_A(X,\mathrm{D}(Y)))\leqslant\mathrm{CM}$ 正则度$_\xi(X)+\mathrm{Ext}$ 正则度$_\xi(Y)$。(3) 对任意 $0\neq X\in\mathrm{D}^-(\mathrm{gr}\ A)$、$0\neq Y\in\mathrm{D}^-(\mathrm{Gr}\ A^o)$ 和 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\overline{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$，有 $-\inf.\deg_\xi(Y\overset{L}{\otimes}_A X)\leqslant\mathrm{Ext}$ 正则度$_{-\xi}(X)-\inf.\deg_\xi(Y)$。

命题 1.5 (命题 4.5, 4.7)。设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 A_0 半单，并且 $\xi_1\leqslant\xi_0$，其中 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$。对于任意 $0\neq Y\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A^o)$，

(1) 对所有 $0\neq X\in\mathrm{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$，$\inf.\deg_\xi(Y\overset{L}{\otimes}_A X)=\inf.\deg_\xi(X)+\inf.\deg_\xi(Y)$，当且仅当对所有 $1\leqslant i\leqslant n$，$\inf.\deg_\xi(Ye_i)=\inf.\deg_\xi(Y)$。(2) $-$ 对于所有满足 $\mathrm{pdim}(X)$ 的 $0\neq X\in\mathrm{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$，$\inf.\deg_\xi(R\mathrm{Hom}_A(X,Y))=\mathrm{Ext}$ 正则度 $_\xi(X)-\inf.\deg_\xi(Y)$，当且仅当对所有 $1\leqslant i\leqslant n$，$\inf.\deg_\xi(e_iY)=\inf.\deg_\xi(Y)$。

沿用 [KWZ2 的方法，我们研究 $\mathbb{N}$-分次代数的加权 Artin-Schelter 正则性。诺特 $\mathbb{N}$-分次代数的 ξ-AS 正则性A 定义为

$$\mathrm{ASreg}_\xi(A)=\mathrm{CMreg}_\xi(A)+\mathrm{Torreg}_\xi(S).$$

对于 $\xi=(1,\ 1)$ 或 $(-1,\ -1)$，AS 正则度$^{(1,1)}(A)=$AS 正则度(A)，且 AS 正则度$^{(-1,-1)}(A)=\mathrm{asreg}(A)$，其中 $\mathrm{ASreg}(A)$ 和 $\mathrm{asreg}(A)$ 的定义见 [WY，定义 5.1 和 5.3]。

下面定理 1.6 的第 (1) 和 (2) 部分推广了 [KWZ2 中的定理 3.3 和 3.5], ，并且可以放宽关于 ξ 的条件，使 ξ 可以遍历整个平面$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。当 $\xi=(1,\ 1)$ 或 $(-1,\ -1)$ 时，该定理恢复了 [WY 的定理 1.8]；当$\xi=(1,\ 0)$ 时，它给出了 a-不变量与 b-不变量之间的新关系；见推论 4.12。

定理 1.6 (定理 4.11)。设 A 是一个带有平衡对偶化复形 R 的诺特 $\mathbb{N}$-分次代数。令 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。那么

(1) $\mathrm{CMreg}_\xi(X)\leqslant\mathrm{Torreg}_\xi(X)+\mathrm{CMreg}_\xi(A)$ 对所有 $0\neq X\in\mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\ A)$。

(2) $\mathrm{Torreg}_\xi(X)\leqslant\mathrm{CMreg}_\xi(X)+\mathrm{Torreg}_\xi(S)$ 对所有 $0\neq X\in\mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\ A)$。

(3) $\mathrm{ASreg}_\xi(A)\geqslant 0$。

对于 $\mathbb{N}$-分次代数，我们引入齐次加权 CM 正则性和齐次加权 Ex 正则性这两个性质，以研究先前定义的加权正则性之间的关系。我们确定定理 1.6 中的不等式何时取等号，将 [KWZ2 的定理 3.10] 推广到 $\mathbb{N}$-分次代数，并回答 Kirkman-Won-Zhang 在 [KWZ2 的注 3.11 (2)] 中提出的一个问题。

定义 1.7（定义 4.18）。设 A 是一个 $\mathbb{N}$-分次代数，并且 $\xi=(\xi_0,\ \xi_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。

（*1*）如果对于所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，*CMreg*$_{\xi}$（$A$）$=$*CMreg*$_{\xi}$（$Ae_i$）（分别为 *CMreg*$_{\xi}$（$A$）$=$ *CMreg*$_{\xi}$（e_iA））， 则称 A 具有左（分别为右） ξ-*CM*-正则性齐次。（*2*）如果对于所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，*Ex-reg*$_{\xi}$（${}_AA$）$=$*Ex-reg*$_{\xi}$（$Ae_i$）（分别为 *Ex-reg*$_{\xi}$（$A_A$）$=$ *Ex-reg*$_{\xi}$（e_iA））， 则称 A 具有左（分别为右） ξ-*Ex*-正则齐次。

每个连通分次代数 A 都是 ξ-CM-正则性齐次的，且对所有 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，都是 ξ-Ext-正则性齐次的。

定理 1.8 推广了 [KWZ2, 定理 3.10] 以及 [WY, 定理 5.24]。取 $Y = R$ 后，该定理可直接由命题 4.7 得出，其中 R 是 A的平衡对偶化复形。此外，若 A 是连通分次的，则定理 1.8 蕴含：对于任意满足 $\xi_1 \leqslant \xi_0$的 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$，对所有有限投射维数的 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$，等式 CMreg$_{\xi}(X)$ $=$Torreg$_{\xi}(X)$ $+$ CMreg$_{\xi}(A)$ 均成立。这回答了 Kirkman-Won-Zhang 在 [KWZ2, 注 3.11 (2)] 中提出的问题。

定理 1.8（定理 4.20）。设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数， A_0 为半单，且 A 具有平衡对偶化复形 R。设 $\xi =$（ξ_0、ξ_1）$\in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ 且 $\xi_1 \leqslant \xi_0$。则以下条件等价。

（1） A 具有左 ξ-齐次 *CM*-正则性。（2）CM 正则度$_{\xi}$（X）$=$ Tor 正则度$_{\xi}$（X）$+$ CM 正则度$_{\xi}$（A），对所有具有有限投射维数的 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b$（gr A）成立。

对于 $\xi =$（1，0），上述定理确立了 a-不变量的若干性质；见推论 4.21。

基于 [KWZ2] 和 [WY], 的思想，我们研究加权 AS 正则性与诺特 $\mathbb{N}$-分次代数的 $\mathbb{N}$-分次 AS-正则性质之间的关系，从而推广了连通分次情形 [KWZ2，第 0.6] 定理，以及 $\mathbb{N}$-分次代数的非加权情形 [WY，第 1.16、1.17] 定理中的结果。 A 满足 Auslander–Buchsbaum 公式是以下定理证明中的一个关键假设。对于满足 χ [Jo1，第 3.2] 定理的连通分次代数，Auslander–Buchsbaum 公式成立。引理 5.3 使用齐次左加权 CM 正则性考察了诺特 $\mathbb{N}$-分次代数满足 Auslander–Buchsbaum 公式的条件。

在定理 5.5 中，我们应用 [IKU, 定理 4.7] 的方法，调整 $\mathbb{N}$-分次 AS-戈伦斯坦代数的 Gorenstein 参数。 [IKU] 中也引入了平均 Gorenstein 参数。利用定理 5.5，我们证明

定理 1.9 (定理 5.7、5.10)。设 A 是一个环不可分解的基本诺特局部有限 $\mathbb{N}$-分次代数，且具有平衡对偶化复形，并且 A_0 是半单的。那么以下陈述等价。

(1) A 是 $\mathbb{N}$分次 *AS*-正则代数，其维数为 d，平均 *Gorenstein* 参数为 $\ell_{av}^A \in \mathbb{Z}$。$_n$*(2)* 对某些整数 p_1、p_2、……、p_n、 $B :=$自同态环$_A$*(*$\bigoplus Ae_i(p_i)$*)* 是一个 $\mathbb{N}$分次$_{i=1}$*CM*-代数，维数为 d，其中 B_0 是半单的，并且 *AS* 正则度*(*B*)* $= 0$。$_n$ *(3)* 对某些整数 p_1、p_2、……、p_n、 $B :=$自同态环$_A$*(*$\bigoplus Ae_i(p_i)$*)* 是一个 $\mathbb{N}$分次$_{i=1}$*CM*-代数，维数为 d，其中 B_0 是半单的，并且 *AS* 正则度$_{\xi}$*(*B*)* $= 0$，对某些 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$成立。$_n$*(4)* 对某些整数 p_1、p_2、……、p_n、 $B :=$自同态环$_A$*(*$\bigoplus Ae_i(p_i)$*)* 是一个 $\mathbb{N}$分次$_{i=1}$代数，其中 B_0 是半单的，并且 *AS* 正则度$_{\xi}$*(*B*)* $= 0$，对某些 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ 成立，其中 $\xi_1 \ll 0$。

$_n(5)$ 对某些整数 p_1、p_2、.....、p_n、 $B :=$ 自同态环$_A(\bigoplus Ae_i(p_i))$ 是一个 $\mathbb{N}$分次$_{i=1}$代数，其中 B_0 是半单的，并且 AS-正则度$\xi(B) = 0$ 对所有 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ 成立，其中 $\xi_1 \leqslant \xi_0$。

引理 5.11 刻画了任意 $\mathbb{N}$-分次 AS-戈伦斯坦代数 A 的 Gorenstein 参数何时相同。因此，下面的定理将 KWZ2 定理 0.6] 和 WY 定理 6.10] 推广到了 $\mathbb{N}$-分次代数。

定理 1.10 (定理 5.12, 5.13)。 设 A 是一个诺特、局部有限的$\mathbb{N}$-分次代数，具有平衡对偶化复形，且 A_0 是半单的。则以下陈述等价。

(1) A 是具有相同 *Gorenstein* 参数的 $\mathbb{N}$-分次 *AS*-正则代数，其维数为 d 。
(2) AS 正则度$\xi(A) = 0$ 对所有满足 $\xi_1 \leqslant \xi_0$ 的 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ 均成立。
(3) AS 正则度$\xi(A) = 0$ 对某个满足 $\xi_1 \ll 0$ 的 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ 成立。

此外，如果 A 同时满足左、右 *Auslander–Buchsbaum* 公式，则 *(1)* 等价于

(4) $\mathrm{ASreg}_\xi(A) = 0$ *for some* $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ *with* $\xi_1 \leqslant \xi_0$.

2. 预备知识

$_\infty$设 k 为一个域。若一个 $\mathbb{N}$-分次 k-代数 $A = \bigoplus A_i$ 满足局部有限，则称其为局部有限的，即$_{i=0}$对所有 $i \geqslant 0$都有$_k A_i < \infty$ 。若一个 $\mathbb{N}$-分次 k-代数 A 满足$A_0 = k$，则称其为连通分次。在本文中， $\mathbb{N}$-分次代数一词指局部有限的$\mathbb{N}$-分次代数。分次 A-模是指分次左 A-模。对于本文中使用但未在本节介绍的符号，请参阅 [WY]。

分次 A-模（或更一般地，分次向量空间） M 的上确界次数是其非零齐次元素次数的上确界，即

$$\sup.\deg(M) = \sup\{i \mid M_i \neq 0\} \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}.$$

类似地， M 的下确界次数是其非零齐次元素次数的下确界：

$$\inf.\deg(M) = \inf\{i \mid M_i \neq 0\} \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}.$$

按照约定，$\sup(\emptyset) = -\infty$ 和 $\inf(\emptyset) = +\infty$。

设 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$。对于分次向量空间复形 X，或对于 $X \in \mathbf{D}(\mathrm{Gr}\, A)$， ξ-上确界次数定义为

$$\sup.\deg_\xi(X) = \sup\{\xi_1 i + \xi_0 j \mid H^i(X)_j \neq 0, i, j \in \mathbb{Z}\}.$$

类似地，对于分次向量空间复形 X ，或对于 $X \in \mathbf{D}(\mathrm{Gr}\, A)$， ξ-下确界次数定义为

$$\inf.\deg_\xi(X) = \inf\{\xi_1 i + \xi_0 j \mid H^i(X)_j \neq 0, i, j \in \mathbb{Z}\}.$$

令 $\mathrm{D}(-) := \underline{\mathrm{Hom}}_k(-, k)$ 表示 Matlis 对偶函子，并令 $(-)^* := \underline{\mathrm{Hom}}_A(-, A)$。
Matlis 对偶函子在 $\mathbf{D}^{lf}(\mathrm{Gr}\ A)$ 与$\mathbf{D}^{lf}(\mathrm{Gr}\ A^o)$ 之间诱导出对偶（例如参见 [VdB，命题 3.1]）。

对于任意 $X \in \mathbf{D}(\mathrm{Gr}\, A)$，有

$$\sup.\deg_\xi(X) = -\inf.\deg_\xi(\mathrm{D}(X)) = -\inf.\deg_{-\xi}(X) \text{ and} \tag{E2.1}$$

$$\inf.\deg_\xi(X) = -\sup.\deg_\xi(\mathrm{D}(X)) = -\sup.\deg_{-\xi}(X). \tag{E2.2}$$

我们有时使用记号

(E2.3) $\sup(X)=\sup\{i\in\mathbb{Z}\mid H^i(X)\neq 0\}$ and $\inf(X)=\inf\{i\in\mathbb{Z}\mid H^i(X)\neq 0\}$.

对于任意分次 A-模 M，子模 $\Gamma_A(M)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Hom}_A(A/A_{\geqslant n}, M)$ 称为 M 的挠子模。函子 $\Gamma_A:\mathrm{Gr}\,A\to\mathrm{Gr}\,A$ 是左正合的。记其右导出函子为 $R\Gamma_A$。M 的第 i 个局部上同调定义为 $R^i\Gamma_A(M):=H^i(R\Gamma_A(M))\cong\lim_{n\to\infty}\mathrm{Ext}^i_A(A/A_{\geqslant n}, M)$。类似地，我们定义 Γ_{A^o} 和 $R\Gamma_{A^o}$。

如果 $\sup(R\Gamma_A(M))=d$，我们称 $M\in\mathrm{Gr}\,A$ 具有上同调维数 d；将此维数记为 $\mathrm{cd}(M)$。如果 $\sup\{\mathrm{cd}(M)\mid M\in\mathrm{Gr}\,A\}=d$，我们称代数 A 或 Γ_A 具有上同调维数 d；将此维数记为 $\mathrm{cd}(\Gamma_A)$。

定义 2.1. 设 M 是一个有限生成的分次左 A-模。若对所有 $i\neq s$ 都有 $R^i\Gamma_A(M)=0$，且 $R^s\Gamma_A(M)\neq 0$，则称 M 为维数为 s 的分次 Cohen–Macaulay 模。若 ${}_AA$ 是维数为 s 的分次 Cohen–Macaulay 模，则称 A 为维数为 s 的分次 CM 代数。

显然，当且仅当 $\mathrm{depth}\,M=\mathrm{cd}(M)=s$ 时，M 是维数为 s 的分次 Cohen–Macaulay 模。

（平衡）对偶化复形最早由 [Ye] 在非交换情形下定义。定义请参见 [WY, 定义 2.12] 。Van den Bergh 在 [VdB，定理 5.1, 6.3] 中证明了平衡对偶化复形的存在性定理和局部对偶定理。这些结果对局部有限分次代数同样成立。若 R 是 A 的对偶化复形，则 $R\,\mathrm{Hom}_A(-, R)$ 和 $R\,\mathrm{Hom}_{A^o}(-, R)$ 在 $\mathbf{D}^{fg}(\mathrm{Gr}\,A)$ 与 $\mathbf{D}^{fg}(\mathrm{Gr}\,A^o)$ 之间定义了一种对偶（参见 [YZ，命题 1.3]）。

$\mathbb{N}$-分次 AS-戈伦斯坦代数（有时称为广义 AS-Gorenstein 代数）以几种略有不同的方式定义过 [MV1, MV2, MM, RR, RRZ]。以下定义见于 [LW]。

定义 2.2。诺特 $\mathbb{N}$-分次代数 A 称为维数为 d 的 $\mathbb{N}$-分次 Artin-Schelter 戈伦斯坦代数（简称 $\mathbb{N}$-分次 AS-戈伦斯坦代数），如果它满足以下条件。

(1) $\mathrm{injdim}({}_AA)=\mathrm{injdim}(A_A)=d<\infty$, (2) 对每个分次单左 A-模 M，若 $i\neq d$，则 $\mathrm{Ext}^i_A(M,A)=0$；对每个分次单右 A-模 N，若 $i\neq d$，则 $\mathrm{Ext}^i_{A^o}(N,A)=0$；(3) $\mathrm{Ext}^d_A(-,A)$ 在分次单 A-模的同构类与分次单 A^o-模的同构类之间诱导一个双射，其逆由 $\mathrm{Ext}^d_{A^o}(-,A)$ 给出。

此外，如果 A 具有有限整体维数，那么 A 称为 $\mathbb{N}$-分次 Artin-Schelter 正则代数（简称 $\mathbb{N}$-分次 AS-正则代数）。

设 A 是一个 $\mathbb{N}$-分次代数，且 $S=A/J$，其中 J 是分次 Jacobson 根。设 $\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$ 是所有简单 S-模同构类以及（在移位意义下）所有分次简单 A-模同构类的一组代表。存在一组正交本原幂等元 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 属于 A_0，使得 $S_i\cong S\bar{e_i}$，其中 $\bar{e_i}$ 是 e_i 在 $A_0/J(A_0)$ 中的像。如果 $e_1+e_2+\cdots+e_n=1$，则称 A 为基本的。

使用上述记号，若 A 是一个 $\mathbb{N}$ 分次的 AS-戈伦斯坦代数，维数为 d，则存在一个置换 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$，使得 $\mathrm{Ext}^d_A(S_i, A)\cong S'_{\sigma(i)}(\ell_i)$，其中 $\ell_i\in\mathbb{Z}\,(1\leqslant i\leqslant n)$。因此，

$$\underline{\mathrm{Ext}}^d_A(S,A)\cong\bigoplus_{i=1}^n(e_{\sigma(i)}S(\ell_i))^{r_i}. \tag{E2.4}$$

集合 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n\}$ 称为 A 的 Gorenstein 参数集合。若 A 是一个 $\mathbb{N}$ 分次的 AS-戈伦斯坦代数，维数为 d，则 A 是一个维数为 d 的 CM-代数。

定义 2.3。 [IKU，定义 4.3] $\ell_{av}^A := n^{-1}\sum_{i=1}^n \ell_i \in \mathbb{Q}$ 称为 A的平均 Gorenstein 参数。

以下定理总结了 $\mathbb{N}$-分次 AS-戈伦斯坦代数的若干性质。

定理 2.4。 [LW，引理 3.8 和定理 4。12] 设 A 是一个维数为 d的 $\mathbb{N}$-分次 *AS*-戈伦斯坦代数。使用上述记号，对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，$\mathrm{Ext}^d_{A^o}(S'_i, A) \cong {}^{S_{\sigma^{-1}(i)}(\ell_{\sigma^{-1}(i)})}$。因此，

$$\underline{\mathrm{Ext}}^d_{A^o}(S, A) \cong \bigoplus_{i=1}^n (Se_{\sigma^{-1}(i)}(\ell_{\sigma^{-1}(i)}))^{r_i}. \tag{E2.5}$$

此外， A 存在一个平衡对偶化复形，形式为$\mathrm{D}(R^d\Gamma_A(A))[d]$。事实上， A 的平衡对偶化复形 R 具有如下形式

$$R = \mathrm{D}(R^d\Gamma_A(A))[d] \cong \bigoplus_{i=1}^n (Ae_{\sigma(i)}(-\ell_i))^{r_i}[d] \cong \bigoplus_{i=1}^n (e_iA(-\ell_i))^{r_{\sigma(i)}}[d]. \tag{E2.6}$$

对于 $\mathbb{N}$-分次代数，Minamoto 和 Mori 还定义了相对于 A_0 [MM]的*AS*-戈伦斯坦（*AS*-正则）性质 。

定义 2.5。 [MM，定义 3.1] 若诺特 $\mathbb{N}$分次代数 A 满足以下条件，则称其为维数为 d 、Gorenstein参数为 ℓ的 AS-Gorenstein 代数 over A_0 （分别地，称其为维数为 d 的 AS-正则代数 over A_0）。

(1) 内射维数 ${}_AA = d$（分别地，全局维数 $A = d$）； **(2)** 存在一个代数自同构 ν over A_0 ，使得

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(A_0, A) \cong {}^1\mathrm{D}(A_0)^\nu(\ell)[-d]$$

在 $\mathbf{D}(\mathrm{Gr}\,A^e)$ 中。

若 A 是 over A_0上维数为 d 的 AS-Gorenstein 代数，则 A 是 $\mathbb{N}$-分次、维数为 d的 AS-Gorenstein 代数。此外，若 A 是基本的且 A_0 是半单的，则 A 是 over A_0 上维数为 d 的 AS-Gorenstein 代数，当且仅当 A 是 $\mathbb{N}$-分次、维数为 d的 AS-Gorenstein 代数。

3. 加权同调正则性

Kirkman-Won-Zhang 在 [KWZ2] 中为诺特连通分次代数引入了加权正则性。在本节中，我们将其框架扩展到局部有限的 $\mathbb{N}$-分次代数，并研究加权数值正则性，包括加权 Castelnuovo-Mumford 正则性、加权 Tor 正则性（Ext 正则性）以及加权 Ex 正则性。这些正则性涵盖了 [WY] 中讨论的所有数值正则性。我们还将考察这些加权数值正则性之间的关系。复形的同调不变量，包括上确界、下确界、投射维数、深度和 a-不变量，都自然地适用于复形的加权正则性框架。

第3节中未给出证明的结果，其证明与 [WY]，的无权版本类似，只需将权 (1，1) 替换为任意一对 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$。

3.1. **各种数值加权正则性**。本小节回顾上述正则性的定义，并从 $X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\ A)$ 的最小分次投射分解的生成元次数、Matlis 对偶函子 D(–)，以及由平衡对偶化复形 R 诱导的对偶函子 $R\mathrm{Hom}_A(-, R)$ 的角度探讨它们之间的关系。

定义 3.1。设 A是一个 $\mathbb{N}$分次代数，$S = A/J$且 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$。

(1) [KWZ2] ξ-Castelnuovo-Mumford 正则性（简称ξ-*CM*-正则性 ）$X \in \mathbf{D}^+(\mathrm{Gr}\ A)$ 的定义为

$$\mathrm{CMreg}_\xi(X) = \sup.\deg_\xi(R\Gamma_A(X)) = \sup_{i,j\in\mathbb{Z}}\{\xi_1 i + \xi_0 j \mid R^i\Gamma_A(X)_j \neq 0\}.$$

(2) [KWZ2] ξ-*Tor* 正则性 的定义为：$X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\ A)$

$$\mathrm{Torreg}_\xi(X) = \sup.\deg_\xi(S \overset{L}{\otimes}_A X) = \sup_{i,j\in\mathbb{Z}}\{-\xi_1 i + \xi_0 j \mid \mathrm{Tor}_i^A(S,X)_j \neq 0\}.$$

(3) [KWZ2] ξ-*Ext* 正则性 的定义为：$X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\ A)$

$$\text{Ext 正则度}_\xi(X) = -\text{下确界}.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, S)) = -\text{下确界}_{i,\ j\in\mathbb{Z}}^{\{\xi_1 i + \xi_0 j \mid} \underline{\mathrm{Ext}}_A^i(X, S)_j \neq 0\}.$$

(4) ξ-*Ex* 正则性 的 $X \in \mathbf{D}^+(\mathrm{Gr}\ A)$定义为

$$\text{Ex-正则度}_\xi(X) = \text{上确界}.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(S, X)) = \text{上确界}_{i,\ j\in\mathbb{Z}}^{\{\xi_1 i + \xi_0 j \mid} \underline{\mathrm{Ext}}_A^i(S, X)_j \neq 0\}.$$

注 3.2. (1) 实际上，对于任意 $X \in \mathbf{D}^+(\mathrm{Gr}\ A)$，$\mathrm{CMreg}(X) = \text{CM 正则度}^{(1,1)}(X)$，$\mathrm{cmreg}(X) = \text{CM 正则度}^{(-1,-1)}(X)$，$\sup(R\Gamma_A(X)) = \text{CM 正则度}^{(0,1)}(X)$，且$-\inf(R\Gamma_A(X)) = -$深度 X = CM 正则度$^{(0,-1)}(X)$，其中 $\mathrm{cmreg}(X)$ 定义于 [WY，定义 3.1]。

(2) 对任意 $X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\ A)$，$\mathrm{Torreg}(X) = \mathrm{Torreg}^{(1,1)}(X)$，且 $\mathrm{torreg}(X) = \mathrm{Torreg}^{(-1,-1)}(X)$，其中 $\mathrm{torreg}(X)$ 的定义见 [WY，定义 3.3]。若 $X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\ A)$ 有一个最小投射分解 $P^\bullet$，则

$$\mathrm{Torreg}_{(0,1)}(X) = \sup(S \overset{L}{\otimes}_A X) = \sup(P^\bullet),$$

$\mathrm{Torreg}^{(0,-1)}(X) = -\inf(S \overset{L}{\otimes}_A X) = \mathrm{pdim}\ X$.(3) 对任意 $X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\ A)$，$\mathrm{Extreg}(X) = \mathrm{Extreg}^{(1,1)}(X)$，且 $\mathrm{extreg}(X) = \mathrm{Extreg}^{(-1,-1)}(X)$，其中 $\mathrm{extreg}(X)$ 的定义见 [WY，定义 3.5]。若 $X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\ A)$ 有一个最小投射分解 $P^\bullet$，则

$$\mathrm{Extreg}_{(0,1)}(X) = -\inf(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,S)) = \sup(P^\bullet),$$
$$\mathrm{Extreg}_{(0,-1)}(X) = \sup(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,S)) = \mathrm{pdim}\, X.$$

(4) 对任意 $X \in \mathbf{D}^+(\mathrm{Gr}\ A)$，$\text{ex-reg}(X) = \text{Ex-正则度}^{(-1,-1)}(X)$，$\text{Ex-正则度}(X) = \text{Ex-正则度}^{(1,1)}(X)$，上确界$(R\mathrm{Hom}_A(S,X)) = \text{Ex-正则度}^{(0,1)}(X)$，并且

$$-\operatorname{depth} X = -\inf(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(S,X)) = \text{Ex-reg}_{(0,-1)}(X),$$

其中 Ex-正则度(X) 和 ex-正则度(X) 定义见 [WY，定义 3.8]。

注 3.3. (1) a-不变量为

$$a^*(X) := \sup_i\{j \mid R^i\Gamma_A(X)_j \neq 0\} = \mathrm{CMreg}_{(1,0)}(X),$$

其中，在交换情形下，$a^*(X)$ 定义见 [GW，Tr2，Tr3]。

(2) b-不变量为

$$b^*(X) := \sup_i\{b_i(X)\} = \sup_i\{j \mid \mathrm{Tor}_i^A(S,X)_j \neq 0\} = \mathrm{Torreg}_{(1,0)}(X),$$

其中，$b_i(X) :=$ 上确界$\{j \mid \mathrm{Tor}_i^A(S,X)_j \neq 0\}$ 定义于 [Tr3] 中，适用于分次交换代数。

（3）对于所有 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，Tor 正则度$\xi(S_A)$ = Tor 正则度$\xi({}_AS)$。本文余下部分将该公共值记为Tor 正则度$\xi(S)$。

现在我们考察在什么条件下，CM 正则度$\xi(X)$ 是有限的，其中 $\xi=(\xi_0,\ \xi_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。当 $\xi_0\geqslant 0$ 时，下面的引理与 [WY 的引理 3.2] 类似。

引理 3.4. 设 A 是一个带有平衡对偶化复形的诺特 $\mathbb{N}$-分次代数。那么

(1) 对所有 $0\neq X\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$，都有 CM 正则度$\xi(X)<\infty$。$\xi=(\xi_0,\ \xi_1)\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}$。*(2)* 对所有 $(,\ \xi_1)$，CM 正则度$\xi({}_AA)$ = CM 正则度$\xi(A_A)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，记作 CM 正则度$\xi(A)$。

下面的命题表明，对于各种权而言，加权 CM 正则性有限足以确保 A 具有平衡对偶化复形。

命题 3.5。设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数。若对于所有 $0\neq M\in\mathrm{Gr}\,A$以及所有 $0\neq N\in\mathrm{Gr}\,A^o$，CM 正则度$\xi(M)<\infty$和 CM 正则度$\xi(N)<\infty$对 $\xi=(1,\ 0)$和 $\xi=(0,\ 1)$均成立，则 A 具有一个平衡对偶化复形。

证明。设 $\xi=(0,\ 1)$。则对所有$M\in\mathrm{Gr}\ A$，CM 正则度$^{(0,1)}(M)$ =等于上确界$(R\Gamma_A(M))$ =上同调维数$(M)<\infty$。我们断言，当对所有 $M\in\mathrm{Gr}\,A$均有上同调维数$(M)<\infty$时，Γ_A具有有限的上同调维数。

断言的证明。设上确界$(R\Gamma_A(A))=d<\infty$。对于任意 $M\in\mathrm{gr}\ A$，设 $P^\bullet$是 M的最小分次投射分解，K^{-s}：对所有 $s\geqslant 0$有 =核 d^{-s}，以及$K^1:=M$。于是存在一个短正合列

$$0\to K^{-s}\to P^{-s}\to K^{-s+1}\to 0.$$

它导出一个长正合序列

$$\cdots\to R^i\Gamma_A(P^{-s})\to R^i\Gamma_A(K^{-s+1})\to R^{i+1}\Gamma_A(K^{-s})\to R^{i+1}\Gamma_A(P^{-s})\to\cdots.$$

因此，对于任意 $i>d$,

$$R^i\Gamma_A(M)\cong R^{i+1}\Gamma_A(K^0)\cong R^{i+2}\Gamma_A(K^{-1})\cong\cdots\cong R^{i+s}\Gamma_A(K^{-s+1})\cong\cdots.$$

如果存在 $i>d$，使得对于任意 $s\geqslant 0$, $R^{i+s}\Gamma_A(K^{-s+1})\neq 0$，那么 $\mathrm{cd}(K^{-s+1})\geqslant i+s>d$且 $\mathrm{cd}(K^{-s})\geqslant i+1+s$。令 $K=\bigoplus K^{-s}\in\mathrm{Gr}\ A$。那么 $\mathrm{cd}(K)=\infty$,s 这就产生了矛盾。因此，对于任意 $i>d$，都存在 $s\geqslant 0$，使得$R^{i+s}\Gamma_A(K^{-s+1})=0$，也就是说，对于任意 $i>d$，$R^i\Gamma_A(M)=0$。因此，对所有 $M\in\mathrm{gr}\,A$，$\mathrm{cd}(M)\leqslant d$。由 [VdB 引理 4.3] 可知，$R^i\Gamma_A(-)$与直接极限可交换。因此，对于任意 $M\in\mathrm{Gr}\ A$，由 $R^i\Gamma_A(M)=\varinjlim_j R^i\Gamma_A(M_j)$ 可知，其中 $M_j\in\mathrm{gr}\ A$，$\mathrm{cd}(M)\leqslant d$。因此 $\mathrm{cd}(\Gamma_A)\leqslant d$。

对于 $\xi=(1,\ 0)$，我们有 CM 正则度$^{(1,0)}(M)$ =上确界$\{j\mid R^i\Gamma_A(M)_j\neq 0,\ \ i,\ \ j\in\mathbb{Z}\}<\infty$。因此，对于任意 $M\in\mathrm{gr}\ A$和任意 i，$R^i\Gamma_A(M)$ 都是右有界的。由 [AZ、推论 3.6 和命题 3.11]，A满足 χ-条件。

关于右模的论证类似。因此，由 [VdB、定理 6.3] 可知，A具有一个平衡对偶化复形。□

对于 $\xi_0\leqslant 0$，下面的命题表明，当且仅当代数 A 是有限维时，CM 正则度$\xi(X)<\infty$。取 $\xi=(-1,\ -1)$，即可将 [WY、推论 5.15] 的结果作为特例得到。

命题 3.6。设 A 是一个具有平衡对偶化复形的诺特 $\mathbb{N}$-分次代数。以下条件等价：

(1) A 是有限维的。(2) CM 正则度$\xi(X)<\infty$对所有 $0\neq X\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$以及所有 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{\leqslant 0}\times\mathbb{R}$均成立。(3) CM 正则度 $\xi(X)<\infty$ 对所有 $0\neq X\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$以及某些 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{<0}\times\mathbb{R}$成立。

证明。 (1)⇒(2)，(2)⇒(3)。显然。

(3)⇒(1) 对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{CMreg}_\xi(X) &= \sup.\deg_\xi(R\Gamma_A(X))\\ &= -\inf.\deg_\xi(\mathrm{D}(R\Gamma_A(X)))\\ &= \sup.\deg_{-\xi}(\mathrm{D}(R\Gamma_A(X))) < \infty.\end{aligned}$$

这等价于如下条件：对于所有 $0 \neq Y \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A^o)$，$\sup.\deg\text{-}\xi(Y) < \infty$；因此，$A$ 是有限维的。□

对于任意 $X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\ A)$ 和 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$，$X$ 的 ξ-Tor 正则性与 ξ-Ext 正则度相同，如下述引理所述（参见 [WY，引理 3.6]）。因此，在这种情况下，我们不区分 $\mathrm{Extreg}_\xi(X)$ 和 $\mathrm{Torreg}_\xi(X)$。

引理 3.7。设 A 是一个 $\mathbb{N}$-分次代数，$X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\, A)$，且 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$。那么

$$\mathrm{Extreg}_\xi(X) = \mathrm{Torreg}_\xi(X).$$

利用 $0 \neq X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\ A)$ 的最小分次投射分解的生成元次数，可以对 $\mathrm{Torreg}_\xi(X)$（$= \mathrm{Extreg}_\xi(X)$）作出更具体的描述。设 $P^\bullet$ 是 X 的一个最小分次投射分解。若 $P^{-m} \neq 0$，我们可以假设 P^{-m} 具有以下形式（见 §2）

$$P^{-m} = \bigoplus_i \big(\bigoplus_j Ae_i(-s_m^{i,j})\big).$$

我们约定记号如下：

$$u^m(X) := \sup\{s_m^{i,j} \mid i,j\},\ \text{and}\ \ l^m(X) := \inf\{s_m^{i,j} \mid i,j\} \tag{E3.1}$$

它们分别是 P^{-m} 的最小生成集中的元素的最大次数和最小次数。事实上，$l^m(X) = \inf.\deg(P^{-m})$.

引理 3.8。设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 $0 \neq X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\, A)$。则

(1) $\mathrm{Torreg}_\xi(X) = \mathrm{Extreg}_\xi(X) = \sup\{\xi_0 u^m(X) - \xi_1 m \mid P^{-m} \neq 0\}$ *for all* $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}$.
(2) $\mathrm{Torreg}_\xi(X) = \mathrm{Extreg}_\xi(X) = \sup\{\xi_0 l^m(X) - \xi_1 m \mid P^{-m} \neq 0\}$ *for all* $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{\leqslant 0}\times\mathbb{R}$.

设 A 具有平衡对偶化复形。则 $\mathrm{D}(R\Gamma_A(-))$ 在 $\mathbf{D}^{fg}(\mathrm{Gr}\ A)$ 与 $\mathbf{D}^{fg}(\mathrm{Gr}\, A^o)$ 之间诱导出一个对偶。因此，当 A 具有平衡对偶化复形时，加权 Ex 正则性与加权 Ext 正则性是对偶概念。

引理 3.9。设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，具有平衡对偶化复形 R 和 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$。则

(1) 对于任意 $X \in \mathbf{D}^+_{fg}(\mathrm{Gr}\, A)$，Ex-正则度$_\xi(X)$ = Ext 正则度$_{-\xi}(\mathrm{D}(R\Gamma_A(X)))$;
(2) 对于任意 $X \in \mathbf{D}^-_{fg}(\mathrm{Gr}\, A)$，Ext 正则度$_\xi(X)$ = Ex-正则度$_{-\xi}(\mathrm{D}(R\Gamma_A(X)))$。

Matlis 对偶在 $\mathbf{D}^{lf}(\mathrm{Gr}\ A)$ 与 $\mathbf{D}^{lf}(\mathrm{Gr}\ A^o)$ 之间建立了对偶，从而在加权 Ex 正则性与加权 Ext 正则性（或加权 Tor 正则性）之间诱导出对偶关系。

引理 3.10. 设 A 是一个 $\mathbb{N}$分次代数，且 S 是有限维的，并且 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$。那么

(1) *for any* $X \in \mathbf{D}^+_{lf}(\mathrm{Gr}\, A)$,

$$\text{Ex-reg}_\xi(X) = \mathrm{Extreg}_{-\xi}(\mathrm{D}(X)), \tag{E3.2}$$

(2) 对于任意 $X \in \mathbf{D}^-_{lf}(\mathrm{Gr}\ A)$,

$$\mathrm{Extreg}_\xi(X) = \text{Ex-reg}_{-\xi}(\mathrm{D}(X)). \tag{E3.3}$$

以下引理描述了短正合列中各模的数值加权正则性之间的关系。这些关系由相应的长正合列推出（见 [KWZ2，引理 3.7]），其中

$$\mathrm{reg}_\xi \in \{\mathrm{CMreg}_\xi, \mathrm{Torreg}_\xi, \mathrm{Extreg}_\xi, \text{Ex-reg}_\xi\}.$$

引理 3.11。设 A 是一个 $\mathbb{N}$-分次代数，且 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}$。对于 $\mathbf{D}^b(\mathrm{Gr}\ A)$ 中的任意特 *distinguished* 三角 $X \to Y \to Z \to X[1]$，

(1) $\mathrm{reg}_\xi(Y) \leqslant \max\{\mathrm{reg}_\xi(X), \mathrm{reg}_\xi(Z)\}$.(2)

$\mathrm{reg}_\xi(X) \leqslant \max\{\mathrm{reg}_\xi(Y), \mathrm{reg}_\xi(Z) + \xi_1\}$.(3)

$\mathrm{reg}_\xi(Z) \leqslant \max\{\mathrm{reg}_\xi(X) - \xi_1, \mathrm{reg}_\xi(Y)\}$.

3.2. 正则性之间的进一步关系。如果 A_0 是半单的，且 A 具有一个平衡对偶化复形，我们将在定理 3.14 中证明，在温和条件下，对于任意 $0 \neq X \in \mathrm{D}^+_{fg}(\mathrm{Gr}\ A)$，都有 $\mathrm{CMreg}_\xi(X) = \text{Ex-正则度}_\xi(X)$，从而将 [WY、定理 3.16] 和 [Ngu、定理 3.9] 推广到非交换分次情形。我们还将在命题 3.15 中证明，如果 A_0 是半单的且 $\mathrm{pdim}\, X < \infty$，那么 Ext 正则度$_\xi(X) = -$下确界$_\xi(R\mathrm{Hom}_A(X, A))$，从而推广 [Jo2、定理 5.1] 和 [WY、定理 3.18]。为证明定理 3.14 和命题 3.15，我们首先证明命题 3.12，该命题推广了 [DW、引理 5.2] 和 [WY、命题 3.14]。它指出，如果 A_0 是半单的，$\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{\leqslant 0} \times \mathbb{R}$，且 $\xi_1 \geqslant \xi_0$，那么对于任意 $X \in \mathrm{D}^-(\mathrm{gr}\ A)$,

$$\mathrm{Extreg}_\xi(X) = \sup.\deg_\xi(X).$$

命题 3.12。设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，并设 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{\leqslant 0} \times \mathbb{R}$。对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\ A)$，

$$\mathrm{Torreg}_\xi(X) = \mathrm{Extreg}_\xi(X) \geqslant \sup.\deg_\xi(X).$$

此外，如果 A_0 是半单的且 $\xi_1 \geqslant \xi_0$，则

$$\mathrm{Torreg}_\xi(X) = \sup.\deg_\xi(X).$$

注 3.13。对于任意固定整数 $c \geqslant 0$，[WY 的命题 3.14] 中的论证表明，对于每个满足 $\xi_1 \geqslant \xi_0$ 的 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{\leqslant 0} \times \mathbb{R}$，

$$\begin{aligned}&\sup\{-\xi_1 i + \xi_0 \inf.\deg(H^{-i}(X)) \mid 0 \leqslant i \leqslant c\}\\ &= -\inf\{\xi_1 i + \xi_0 \sup.\deg(\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(X, A_0)) \mid 0 \leqslant i \leqslant c\}.\end{aligned}$$

这推广了 [Jo2 的推论 5.2], [、Sch 的定理 5.2], 以及 [WY 的注 3.15]。

假设 A_0 是半单的，且 A 具有一个平衡对偶化复形。下面的定理表明，对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^+_{fg}(\mathrm{Gr}\ A)$，加权 CM 正则性与加权 Ex 正则性相同，从而推广了 [Ngu 的定理 3.9] 和 [WY 的定理 3.16]。命题 3.12 在证明中发挥了关键作用。

定理 3.14. 假设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}$。那么，对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^+_{fg}(\mathrm{Gr}\ A)$,

$$\mathrm{CMreg}_\xi(X) \leqslant \text{Ex-reg}_\xi(X).$$

此外，如果 $\xi_1 \leqslant \xi_0$, A_0 是半单的，且 A 具有平衡对偶化复形 R，那么

$$\mathrm{CMreg}_\xi(X) = \text{Ex-reg}_\xi(X).$$

证明。 CM 正则度$\mathrm{ś}(X)$ 与 Ex-正则度$\mathrm{ś}(X)$ 之间不等式的证明，与 [WY，引理 3.11] 的证明类似。

令 $Z = \mathrm{D}(R\Gamma_A(X)) \in \mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\, A^o)$。于是，根据定义 3.1，

$$\mathrm{CMreg}_\xi(X) = \sup.\deg_\xi(R\Gamma_A(X)) = -\inf.\deg_\xi(Z) = \sup.\deg_{-\xi}(Z).$$

由于 R 是 A 的平衡对偶化复形， $R\mathrm{Hom}_A(A_0, X) \cong R\mathrm{Hom}_{A^o}(Z, A_0)$。根据定义 3.1，

$$\begin{aligned}\text{Ex-reg}_\xi(X) &= \sup.\deg_\xi(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(A_0, X)) \\ &= \sup.\deg_\xi(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{A^o}(Z, A_0)) = \mathrm{Extreg}_{-\xi}(Z).\end{aligned}$$

由于 $-\xi = (-\xi_0, -\xi_1)$ 满足 $-\xi_0 \leqslant 0$ 和 $-\xi_0 \leqslant -\xi_1$，命题 3.12 的右侧版本推出

$$\mathrm{CMreg}_\xi(X) = \sup.\deg_{-\xi}(Z) = \mathrm{Extreg}_{-\xi}(Z) = \text{Ex-reg}_\xi(X). \qquad \square$$

根据引理 3.4 和定理 3.14，若 A 有平衡对偶化复形且 A_0 是半单的，则对任意满足 $\xi_1 \leqslant \xi_0$ 的 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}$，Ex-正则度$\mathrm{ś}({}_AA) =$ Ex-正则度$\mathrm{ś}(A_A)$。这个共同值有时记作 Ex-正则度$\mathrm{ś}(A)$。若 A 有平衡对偶化复形 R，则引理 3.9 (1) 推出 Ex-正则度$-\mathrm{ś}({}_AA) =$Tor 正则度$\mathrm{ś}(R_A)$。因此，对任意 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，Ex-正则度$-\mathrm{ś}({}_AA) =$Ex-正则度$-\mathrm{ś}(A_A)$ 当且仅当 Tor 正则度$\mathrm{ś}({}_AR) =$ Tor 正则度$\mathrm{ś}(R_A)$。

下面的命题给出了 [WY 定理 3.18] 的加权版本，并推广了 [Jo2 定理 5.1]。

命题 3.15。 设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}$。对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\, A)$，

$$\mathrm{Torreg}_\xi(X) = \mathrm{Extreg}_\xi(X) \geqslant -\inf.\deg_\xi(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, A)).$$

此外，若 A_0 是半单的且 $\xi_1 \leqslant \xi_0$，则对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$ 且满足投射维数 $X < \infty$，

$$\mathrm{Torreg}_\xi(X) = -\inf.\deg_\xi(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, A)).$$

4. 加权数值Artin-Schelter正则性

4.1. Hom 和 Tensor 复形的加权上确界与下确界次数。 本小节将建立若干不等式和等式，涉及 $R\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ 以及 $Y \overset{L}{\otimes}_A X$ for $X, Y \in \mathbf{D}(\mathrm{Gr}\ A)$ 的加权上确界或下确界次数。本文中，称 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，意指 A 是一个诺特局部有限 $\mathbb{N}$-分次代数；因此，$\mathbf{D}(\mathrm{gr}\, A)$ 是 $\mathbf{D}^{lf}(\mathrm{Gr}\ A)$ 的满子范畴。

以下命题的证明使用上同调谱序列，并由 [WY，命题 4.1，4.2] 得出。

命题 4.1。 设 A 为一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}$。则以下陈述成立。

（1）对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\, A)$ 和 $0 \neq Y \in \mathbf{D}^+(\mathrm{Gr}\ A)$，

$$-\inf.\deg_\xi(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, Y)) \leqslant \mathrm{Extreg}_\xi(X) - \inf.\deg_\xi(Y). \tag{E4.1}$$

（2）对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\, A)$，其具有挠上同调，且 $0 \neq Y \in \mathbf{D}^+(\mathrm{Gr}\ A)$，

$$\sup.\deg_\xi(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, Y)) \leqslant -\inf.\deg_\xi(X) + \text{Ex-reg}_\xi(Y). \tag{E4.2}$$

(3) 若 A 具有一个平衡对偶化复形，则对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^-_{fg}(\mathrm{Gr}\, A)$和 $0 \neq Y \in \mathbf{D}^+_{fg}(\mathrm{Gr}\, A)$，

$$\sup.\deg_\xi(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, Y)) \leqslant \mathrm{CMreg}_{-\xi}(X) + \text{Ex-reg}_\xi(Y). \tag{E4.3}$$

下述命题表明， $R\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ 和 $Y\overset{L}{\otimes}_A X$ 的带权上确界次数与带权下确界次数的不等式对平面中的所有权对都成立。它还推广了 [KWZ2 的定理 3.3、3.5] 以及 [WY 的命题 4.4、4.5]。

命题 4.2。 设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。则以下结论成立。

(1) 对于任意 $0\neq X\in\mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\ A)$ 和 $0\neq Y\in\mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\ A^o)$,

$$-\inf.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,\mathrm{D}(Y)))\leqslant\sup.\deg_\xi(X)+\mathrm{Extreg}_\xi(Y). \tag{E4.4}$$

(2) 若 A 有一个平衡对偶化复形，则对于任意 $0\neq X\in\mathbf{D}^-_{fg}(\mathrm{Gr}\ A)$和 $0\neq Y\in\mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\ A^o)$ 且其挠上同调,

$$-\inf.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,\mathrm{D}(Y)))\leqslant\mathrm{CMreg}_\xi(X)+\mathrm{Extreg}_\xi(Y). \tag{E4.5}$$

(3) *For any* $0\neq X\in\mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\ A)$, $0\neq Y\in\mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\ A^o)$,

$$-\inf.\deg_\xi(Y\overset{L}{\otimes}_A X)\leqslant\mathrm{Extreg}_{-\xi}(X)-\inf.\deg_\xi(Y). \tag{E4.6}$$

(4) 对于任意 $0\neq X\in\mathbf{D}^-(\mathrm{Gr}\ A)$、 $0\neq Y\in\mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\ A^o)$,

$$-\inf.\deg_\xi(Y\overset{L}{\otimes}_A X)\leqslant-\inf.\deg_\xi(X)+\mathrm{Extreg}_{-\xi}(Y). \tag{E4.7}$$

证明。 假设 $\xi_0\geqslant 0$。本命题的证明沿用 [WY 命题 4.4 和 4.5] 中的论证。

假设 $\xi_0\leqslant 0$。

对于（1），由 $\mathrm{D}(Y\overset{L}{\otimes}_A X)\cong R\mathrm{Hom}_A(X,\ \mathrm{D}(Y))$ 且 E4.7 对于$\xi_0\geqslant 0$ 成立可得

$$\begin{aligned}-\inf.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,\mathrm{D}(Y)))&=\sup.\deg_{-\xi}(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,\mathrm{D}(Y)))\\&=\sup.\deg_{-\xi}(\mathrm{D}(Y\overset{L}{\otimes}_A X))\\&=-\inf.\deg_{-\xi}(Y\overset{L}{\otimes}_A X)\\&\leqslant-\inf.\deg_{-\xi}(X)+\mathrm{Extreg}_\xi(Y)\\&=\sup.\deg_\xi(X)+\mathrm{Extreg}_\xi(Y).\end{aligned}$$

对于（2），由 [WY，引理 4.3] 可得

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,\mathrm{D}(Y))\cong R\underline{\mathrm{Hom}}_A(R\Gamma_A(X),\mathrm{D}(Y))\cong\mathrm{D}(Y\overset{L}{\otimes}_A R\Gamma_A(X)).$$

由于 E4.7 对 $\xi_0\geqslant 0$成立,

$$\begin{aligned}-\inf.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,\mathrm{D}(Y)))&=\sup.\deg_{-\xi}(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,\mathrm{D}(Y)))\\&=\sup.\deg_{-\xi}(\mathrm{D}(Y\overset{L}{\otimes}_A R\Gamma_A(X)))\\&=-\inf.\deg_{-\xi}(Y\overset{L}{\otimes}_A R\Gamma_A(X))\\&\leqslant-\inf.\deg_{-\xi}(R\Gamma_A(X))+\mathrm{Extreg}_\xi(Y)\\&=\mathrm{CMreg}_\xi(X)+\mathrm{Extreg}_\xi(Y).\end{aligned}$$

对于 (3)，由 $\mathrm{D}(Y\overset{L}{\otimes}_A X)\cong R\mathrm{Hom}_A(X,\ \mathrm{D}(Y))$ 可知，且 (E4.1) 对$\xi_0\geqslant 0$ 成立，因此

$$\begin{aligned}-\inf.\deg_\xi(Y\overset{L}{\otimes}_A X)&=\sup.\deg_{-\xi}(Y\overset{L}{\otimes}_A X)\\&=-\inf.\deg_{-\xi}(\mathrm{D}(Y\overset{L}{\otimes}_A X))\\&=-\inf.\deg_{-\xi}(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,\mathrm{D}(Y)))\\&\leqslant\mathrm{Extreg}_{-\xi}(X)-\inf.\deg_{-\xi}(\mathrm{D}(Y))\\&=\mathrm{Extreg}_{-\xi}(X)-\inf.\deg_\xi(Y).\end{aligned}$$

(4) 类似于 (3) 的证明，只需使用 (E4.1) 的右版本，或者

$$\begin{aligned}-\inf.\deg_{\xi}(Y\overset{L}{\otimes}_A X) &= \sup.\deg_{-\xi}(Y\overset{L}{\otimes}_A X)\\ &= -\inf.\deg_{-\xi}(\mathrm{D}(Y\overset{L}{\otimes}_A X))\\ &= -\inf.\deg_{-\xi}(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,\mathrm{D}(Y)))\\ &\leqslant \mathrm{Extreg}_{-\xi}(Y)+\sup.\deg_{-\xi}(X)\quad(\text{by (E4.4)})\\ &= \mathrm{Extreg}_{-\xi}(Y)-\inf.\deg_{\xi}(X).\end{aligned}$$

□

在命题 4.2 (2) 中取 $Y=S$，得到 Ext 正则度ξ(X) ⩽ CM 正则度ξ(X)+Ext 正则度ξ(S)，推广了[KWZ2，定理 3.3]。若 A 具有平衡对偶化复形，则在命题 4.2 (1) 中令$X=R\Gamma_A(A)$，得到 CM 正则度ξ(Y) ⩽Ext 正则度ξ(Y) +CM 正则度ξ(A)，推广了 [KWZ2，定理 3.5]。

接下来，我们探讨命题 4.1 和 4.2 中的不等式 (E4.1)、(E4.2)、(E4.6) 和 (E4.7) 在何种条件下取等号。等号成立的情形与同一命题中其他不等式的情形类似。此外，它们还为 [WY] 中的结果提供了加权推广。

我们假设 A_0 是半单的，并首先给出两个技术引理。接下来的论证与 [WY] 中非加权版本的论证相同。

引理 4.3. 设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 A_0 是半单的，并且 $\xi_1\leqslant\xi_0$，其中 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$。令 $0\neq X\in\mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\ A)$，并令 $P^\bullet$ 为 X 的最小分次投射分解。

若 $p=-$下确界$.\deg_\xi(X)$，则某个 $P^{-\alpha}$ 有一个不可分解直和项，该项由一个次数为 $\xi_0^{-1}(\xi_1\alpha-p)$ 的元素生成，且该元素属于核 $d_{P^\bullet}^{-\alpha}$。

引理 4.4. 设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 A_0 是半单的，并且 $\xi_1\leqslant\xi_0$，其中 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$。令 $0\neq X\in\mathbf{D}^-(\mathrm{gr}\ A)$，并令 $P^\bullet$ 为 X 的最小分次投射分解。

若对某个 $1\leqslant k\leqslant n$，有 $p=-$下确界$.\deg_\xi(X)=-$下确界$.\deg_\xi(e_kX)$，则存在$\beta\in\mathbb{Z}$，使得 $H^{-\beta}(e_kP^\bullet)\neq0$，满足

$$\inf.\deg(\ker d_{P^\bullet}^{-\beta})=\xi_0^{-1}(\xi_1\beta-p)\ \ and\ \ e_k(\ker d_{P^\bullet}^{-\beta})_{\xi_0^{-1}(\xi_1\beta-p)}\neq0.$$

现在我们给出判据，说明当 A_0 为半单时，(E4.1)、(E4.2)、(E4.6) 和 (E4.7) 何时取等号。注意，若 A_0 为半单，$\xi=(\xi_0,\ \xi_1)\in\mathbb{R}_{\leqslant0}\times\mathbb{R}$且 $\xi_1\geqslant\xi_0$，则由命题 3.12 可得 sup.degξ(X) =Ext 正则度ξ(X)。若 A 为连通分次，则本小节以下各命题和推论中的条件 (2) 均自动满足，因此在连通分次情形下，(1) 中的等式总是成立。

命题 4.5 和 4.6 给出了当 A_0 为半单时，(E4.6) 和 (E4.7) 取等号的等价条件。

命题 4.5。设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$分次代数，且 A_0 半单并满足 $\xi_1\leqslant\xi_0$，其中 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$。对于任意 $0\neq Y\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A^o)$，以下条件等价。

(1) inf。 degξ(Y $\overset{L}{\otimes}_A$ X) =inf。 degξ(X) +inf。 degξ(Y) 对所有 $0\neq X\in\mathbf{D}^b$(gr A)。(2) inf。degξ(Ye_i) =inf。 degξ(Y) 对所有 $1\leqslant i\leqslant n$。

证明。 (1) ⇒ (2) 由取 $X=Ae_i$ 可得 .

(2) ⇒ (1) 不失一般性，设对于所有 $i>0$，X 的上确界 $=Y$ 的上确界 $=0$。由于 $0\neq X\in\mathbf{D}^b$(gr A) 且 $0\neq Y\in\mathbf{D}^b$(gr A^o)，$-$下确界。degξ(X) $\neq\pm\infty$ 且 $-$下确界。 degξ(Y) $\neq\pm\infty$。令 $p_1=-$下确界。 degξ(X) 且 $p_2=-$下确界。 degξ(Y)。令 $P^\bullet$ 和 $Q^\bullet$ 分别为 X 和 Y 的最小分次投射分解。

注意， $Y\ {}^L\otimes_A X\cong Q^\bullet\otimes_A P^\bullet$，其中 $(Q^\bullet\otimes_A P^\bullet)^m=\bigoplus Q^q\otimes_A P^{m-q}$，且其第 m 个微分是态射

$$\partial^m(x\otimes y)=d_{Q^\bullet}(x)\otimes y+(-1)^q x\otimes d_{P^\bullet}(y).$$

由命题 4.2 (3) 可得

$$\begin{aligned}
&-\inf.\deg_\xi(Y\ {}^L\otimes_A X)\\
&=-\inf\{\xi_1 m+\xi_0\inf.\deg(H^m(Q^\bullet\otimes_A P^\bullet))\mid \mathrm{Tor}^A_{-m}(Y,X)\neq 0\}\\
&\leqslant \mathrm{Extreg}_{-\xi}(X)-\inf.\deg_\xi(Y)\\
&=\sup.\deg_{-\xi}(X)+p_2\\
&=-\inf.\deg_\xi(X)+p_2\\
&=p_1+p_2.
\end{aligned}$$

因此，对于任意满足 $\mathrm{Tor}^A_{-m}(Y,X)\neq 0$ 的 $m\in\mathbb{Z}$，

$$\inf.\deg(H^m(Q^\bullet\otimes_A P^\bullet))\geqslant \xi_0^{-1}(-p_1-p_2-\xi_1 m).$$

要证明 (1)，只需证明存在某个 $\alpha\in\mathbb{Z}$，使得 $\mathrm{Tor}^A_{-\alpha}(Y,X)\neq 0$，且满足

$$\inf.\deg(H^\alpha(Q^\bullet\otimes_A P^\bullet))\leqslant \xi_0^{-1}(-p_1-p_2-\xi_1\alpha).$$

一方面，由引理 4.3 可知，存在某个 $\alpha_1\in\mathbb{Z}$，使得$P^{-\alpha_1}$ 有一个由次数为 $\xi_0^{-1}(\xi_1\alpha_1-p_1)$的元素生成的不可分解直和项，且该项包含于 $\ker\ d^{-\alpha_1}_{P^\bullet}$。因此，存在某个 k，满足 $1\leqslant k\leqslant n$，使得$Ae_k(\xi_0^{-1}(p_1-\xi_1\alpha_1))\subseteq\ker\ d^{-\alpha_1}_{P^\bullet}$。

另一方面，根据 (2) 中的假设以及引理 4.4 的右侧版本，存在某个 $\alpha_2\in\mathbb{Z}$，满足 $H^{-\alpha_2}(Q^\bullet e_k)\neq 0$，使得

$$\inf.\deg(\ker d^{-\alpha_2}_{Q^\bullet})=\xi_0^{-1}(\xi_1\alpha_2-p_2)\ \text{ and }\ (\ker d^{-\alpha_2}_{Q^\bullet})_{\xi_0^{-1}(\xi_1\alpha_2-p_2)}e_k\neq 0.$$

存在某个 $0\neq y\in(\text{核}\ d^{-\alpha_2}_{Q^\bullet})_{\xi_0^{-1}\ (\xi_1\alpha_2-p_2)}\subseteq Q^{-\alpha_2}$ 使得

$$0\neq y\otimes_A e_k(\xi_0^{-1}(p_1-\xi_1\alpha_1))\subseteq Q^{-\alpha_2}\otimes_A P^{-\alpha_1}.$$

于是 $0\neq y\otimes_A e_k(\xi_0^{-1}(p_1-\xi_1\alpha_1))\in$核 ∂^α，其中 $\alpha=-\alpha_2-\alpha_1$。因此

$$\inf.\deg(\ker\partial^\alpha)\leqslant\xi_0^{-1}(\xi_1\alpha_2-p_2)+\xi_0^{-1}(\xi_1\alpha_1-p_1)=-\xi_1\alpha-p_1-p_2.$$

于是 $0\neq y\otimes_A e_k(\xi_0^{-1}(p_1-\xi_1\alpha_1))\in$核 ∂^α，其中 $\alpha=-\alpha_2-\alpha_1$。因此

$$\inf.\deg(\ker\partial^\alpha)\leqslant\xi_0^{-1}(\xi_1\alpha_2-p_2)+\xi_0^{-1}(\xi_1\alpha_1-p_1)=\xi_0^{-1}(-\xi_1\alpha-p_1-p_2).$$

由于 $P^\bullet$ 和 $Q^\bullet$ 都是最小分次投射分解，

$$\mathrm{Im}\,\partial^{\alpha-1}\subseteq\bigoplus_q(Q^{q+1}A_{\geqslant 1}\otimes_A P^{\alpha-1-q}+Q^q\otimes_A A_{\geqslant 1}P^{\alpha-q})\subseteq(Q^\bullet\otimes_A P^\bullet)^\alpha.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\inf.\deg(\mathrm{Im}\,\partial^{\alpha-1})\\
\geqslant&\min\{l^{-q-1}(Y)+1+l^{-\alpha+1+q}(X),l^{-q}(Y)+1+l^{-\alpha+q}(X)\}\\
\geqslant&\min\{\xi_0^{-1}(\xi_1(-q-1)-p_2)+1+\xi_0^{-1}(\xi_1(-\alpha+1+q)-p_1),\\
&\xi_0^{-1}(-\xi_1 q-p_2)+1+\xi_0^{-1}(\xi_1(-\alpha+q)-p_1)\}\\
=&\xi_0^{-1}(-p_1-p_2-\xi_1\alpha)+1.
\end{aligned}$$

因此 下确界。 $\deg(H^\alpha(Q^\bullet\otimes_A P^\bullet))\leqslant\xi_0^{-1}(-p_1-p_2-\xi_1\alpha)$。

因此， $-$下确界。 度$\xi(Y\ {}^L\otimes_A X)=p_1+p_2=-$下确界。 度$\xi(X)-$下确界。 度$\xi(Y)$，于是（2）$\Rightarrow$（1）的证明完成了。□

命题 4.6。 设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$ 分次代数，具有 A_0 半单性和 $\xi_1 \leqslant \xi_0$，其中 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$。对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$，以下各项等价。

(1) 下确界$.\deg_\xi(Y \overset{L}{\otimes}_A X) =$ 下确界$.\deg_\xi(X)+$下确界$.\deg_\xi(Y)$ 对所有 $0 \neq Y \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A^o)$.(2) 下确界$.\deg_\xi(e_i X) =$ 下确界$.\deg_\xi(X)$ 对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$.

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 由在 (1) 中取 $Y = e_i A$ 可得。

(2) $\Rightarrow$ (1) 类似于命题 4.5 中 (2) $\Rightarrow$ (1) 的证明。 □

命题 4.7 和 4.8 给出了在 A_0为半单时，等式 (E4.1) 成立的判据。

命题 4.7。 设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数， A_0 为半单且 $\xi_1 \leqslant \xi_0$，其中 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$。对于任意 $0 \neq Y \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$，以下条件等价。

(1) $-\inf.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, Y)) = \mathrm{Extreg}_\xi(X) - \inf.\deg_\xi(Y)$ *for all* $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$ *with* $\mathrm{pdim}(X) < \infty$.
(2) $\inf.\deg_\xi(e_i Y) = \inf.\deg_\xi(Y)$ *for all* $1 \leqslant i \leqslant n$.

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 通过在 (1) 中取 $X = Ae_i$ 可得

$$-\inf.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(Ae_i, Y)) = \mathrm{Extreg}_\xi(Ae_i) - \inf.\deg_\xi(Y).$$

由于 $R\underline{\mathrm{Hom}}_A(Ae_i, Y) \cong e_i Y$作为分次 k-空间，并且 Ext 正则度$_\xi(Ae_i) = 0$,

$$\inf.\deg_\xi(e_i Y) = 0 + \inf.\deg_\xi(Y) = \inf.\deg_\xi(Y).$$

(2) $\Rightarrow$(1) 令 $Z = R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, A)$。由于 $\mathrm{pdim}(X) < \infty$, $0 \neq Z \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A^o)$，并且

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, Y) \cong R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, A) \overset{L}{\otimes}_A Y \cong Z \overset{L}{\otimes}_A Y. \tag{E4.8}$$

由命题 4.6 可得

$$\inf.\deg_\xi(Z \overset{L}{\otimes}_A Y) = \inf.\deg_\xi(Y) + \inf.\deg_\xi(Z).$$

根据定理 3.15，Ext 正则度$_\xi(X) = -$ 下确界。 $\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, A)) = -$ 下确界。 $\deg_\xi(Z)$。因此，

$$\begin{aligned} -\inf.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, Y)) &= -\inf.\deg_\xi(Z \overset{L}{\otimes}_A Y) \\ &= -\inf.\deg_\xi(Y) - \inf.\deg_\xi(Z) \\ &= -\inf.\deg_\xi(Y) + \mathrm{Extreg}_\xi(X). \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$(1) 的证明完成。 □

命题 4.8. 设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 A_0 是半单的，并且 $\xi_1 \leqslant \xi_0$，其中 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$。对于任意满足 $\mathrm{pdim}(X) < \infty$ 的 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$，以下各项等价。

(1) $-\inf.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, Y)) = \mathrm{Extreg}_\xi(X) - \inf.\deg_\xi(Y)$ *for all* $0 \neq Y \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$.
(2) $\mathrm{Extreg}_\xi(X) = -\inf.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, Ae_i))$ *for all* $1 \leqslant i \leqslant n$.

P证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 取 $Y = Ae_i$即可得出。

(2) $\Rightarrow$(1) 令 $Z = R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, A)$。由于 $\mathrm{pdim}(X) < \infty$, $0 \neq Z \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A^o)$。由定理 3.15 和 $R\mathrm{Hom}_A(X, Ae_i) \cong Z \otimes_A Ae_i \cong Ze_i$ 可得

$$-\inf.\deg_\xi(Z) = \mathrm{Extreg}_\xi(X) \overset{(2)}{=} -\inf.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, Ae_i)) = -\inf.\deg_\xi(Ze_i).$$

因此由命题 4.5 和 (E4.8) 可得,

$$\begin{aligned}-\inf.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)) &= -\inf.\deg_\xi(Z\overset{L}{\otimes}_A Y)\\ &= -\inf.\deg_\xi(Y)-\inf.\deg_\xi(Z)\\ &= -\inf.\deg_\xi(Y)+\mathrm{Extreg}_\xi(X).\end{aligned}$$

(2) ⇒(1) 的证明完成。 □

命题 4.9 说明了等式在 (E4.2) 中成立的条件。

命题 4.9。 设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 A_0 半单， $\xi_1 \leqslant \xi_0$，其中 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$。对于任意 $0\neq X\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$，以下各项等价。

(1) $\sup.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y))=-\inf.\deg_\xi(X)+\text{Ex-reg}_\xi(Y)$ *for all* $0\neq Y\in\mathbf{D}^b(\mathrm{Gr}\ A)$ *with* $\mathrm{D}(Y)\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A^o)$.
(2) $\inf.\deg_\xi(e_iX)=\inf.\deg_\xi(X)$ *for all* $1\leqslant i\leqslant n$.

证明。 (1) ⇒ (2) 取 $Y=\mathrm{D}(e_iA)$，由 Ex-正则度$_\xi(Y)$ 可得 $=$ Ext 正则度$_{-\xi}(\mathrm{D}(Y))$ $=0$。

(2) ⇒ (1) 由于 $\mathrm{D}(Y)\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A^o)$， $Y\in\mathbf{D}^b_{lf}(\mathrm{Gr}\ A)$ 且 $\mathrm{D}(\mathrm{D}(Y))\cong Y$。于是 $\mathrm{D}(\mathrm{D}(Y)\overset{L}{\otimes}_A X)\cong R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,\ \mathrm{D}(\mathrm{D}(Y)))\cong R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,\ Y)$。因此

$$\begin{aligned}\sup.\deg_\xi(R\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)) &= -\inf.\deg_\xi(\mathrm{D}(Y)\overset{L}{\otimes}_A X)\\ &= -\inf.\deg_\xi(X)-\inf.\deg_\xi(\mathrm{D}(Y)) \quad \text{(by Proposition 4.6)}\\ &= -\inf.\deg_\xi(X)+\sup.\deg_{-\xi}(\mathrm{D}(Y))\\ &= -\inf.\deg_\xi(X)+\mathrm{Extreg}_{-\xi}(\mathrm{D}(Y))\\ &\overset{(E3.2)}{=} -\inf.\deg_\xi(X)+\text{Ex-reg}_\xi(Y).\end{aligned}$$

□

4.2. 加权数值阿廷–谢尔特正则性。在本小节中，遵循[KWZ2], , 我们首先为诺特 $\mathbb{N}$-分次代数引入加权数值阿廷–谢尔特正则性的概念。然后，我们将 [KWZ2] 中的定理 3.3 和 3.5 推广到配备平衡对偶化复形的 $\mathbb{N}$-分次代数，并建立这些正则度之间更多类似且在某些情况下更强的关系（例如，见定理 4.11 (4) 和命题 4.16）。对于任意具有平衡对偶化复形的诺特 $\mathbb{N}$-分次代数 A 以及任意$\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，我们证明以下条件等价：AS 正则度$_\xi(A)=0$；对于所有 $0\neq X\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$，CM 正则度$_\xi(X)$ $=$ Tor 正则度$_\xi(X)$ $+$ CM 正则度$_\xi(A)$；以及对于所有 $0\neq X\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$，Tor 正则度$_\xi(X)$ $=$ CM 正则度$_\xi(X)$ $+$ Tor 正则度$_\xi(S)$。

定义 4.10。 （参见 [KWZ2，定义 0.2]）令 $\xi\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。对于诺特$\mathbb{N}$-分次代数 A，ξ-Artin-Schelter 正则度（简称 ξ-*AS* 正则度 ）定义为

$$\mathrm{ASreg}_\xi(A)=\mathrm{CMreg}_\xi(A)+\mathrm{Torreg}_\xi(S).$$

显然，AS 正则度$^{(1,1)}(A)$ $=$AS 正则度(A)，且 AS 正则度$^{(-1,-1)}(A)$ $=$asreg(A)，其中 AS 正则度(A) 和 asreg(A) 定义见 [WY，定义 5.1 和 5.3]。

设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数， A_0 为半单，且A 具有平衡对偶化复形。若 $\xi_1\leqslant\xi_0$，其中 $\xi=(\xi_0,\ \xi_1)\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}$，则根据定理 3.14，AS 正则度$_\xi(A)$ $=$ Ex-正则度$_\xi(A)$ $+$Tor 正则度$_\xi(S)$。

定理 4.11 的 (1) 和 (2) 推广了 [KWZ2、定理 3.3 和 3.5]。此外，关于 ξ 的条件可以放宽，允许 ξ 在整个平面$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$内变化。证明依赖于命题 4.1 (1)、(E4.6) 和命题 4.2 (2)。

定理 4.11。 设 A 是一个具有平衡对偶化复形 R 的诺特 $\mathbb{N}$-分次代数。令 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。则

(1) CM 正则度$\xi(X) \leqslant$Tor 正则度$\xi(X) +$CM 正则度$\xi(A)$ 对所有 $0 \neq X \in \mathbf{D}^{-}(\mathrm{gr}\ A)$。(2) Tor 正则度$\xi(X) \leqslant$CM 正则度$\xi(X) +$Tor 正则度$\xi(S)$ 对所有 $0 \neq X \in \mathbf{D}^{-}(\mathrm{gr}\ A)$。(3) AS 正则度$\xi(A) \geqslant 0$。

对于 $\xi = (1, 0)$，定理 4.11 给出了若干个联系 a-不变量和 b-不变量的不等式，表述如下推论。这些不变量的定义见注 3.3。

推论 4.12. 假设 A 是一个带有平衡对偶化复形 R的诺特 $\mathbb{N}$-分次代数。那么

(1) $a^*(X) \leqslant b^*(X) + a^*(A)$ 对所有 $0 \neq X \in \mathbf{D}^{-}(\mathrm{gr}\ A)$。
(2) $b^*(X) \leqslant a^*(X) + b^*(S)$ 对所有 $0 \neq X \in \mathbf{D}^{-}(\mathrm{gr}\ A)$。(
3) $a^*(A) + b^*(S) \geqslant 0$。

在非加权或连通分次情形中，定理 4.11 的 (1) 或 (2) 中的不等式恒为等式这一条件，与代数的 Artin-Schelter 正则性或有限维性密切相关（[KWZ2，推论 3.4]和 [WY，推论 5.16]）。

下面的推论表明，AS 正则度$\xi(A) = 0$ 刻画了定理 4.11 中 (1) 或 (2) 的不等式何时总是等式。证明见 [WY，推论 5.6 和 5.17]。

推论 4.13。设 A 是一个带有平衡对偶化复形的诺特 $\mathbb{N}$-分次代数。令 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$。则以下条件等价。

(1) AS 正则度$\xi(A) = 0$。(2) CM 正则度$\xi(X) =$Tor 正则度$\xi(X) +$CM 正则度$\xi(A)$ 对所有 $0 \neq X \in \mathbf{D}^{b}(\mathrm{gr}\ A)$。(3) Tor 正则度$\xi(X) =$CM 正则度$\xi(X) +$Tor 正则度$\xi(S)$ 对所有 $0 \neq X \in \mathbf{D}^{b}(\mathrm{gr}\ A)$。(4) 存在某个 $0 \neq X \in \mathbf{D}^{b}(\mathrm{gr}\ A)$ 使得
CM 正则度$\xi(X) =$Tor 正则度$\xi(X)+$CM 正则度$\xi(A)$ 和Tor 正则度$\xi(X) =$CM 正则度$\xi(X)+$Tor 正则度$\xi(S)$。

以下推论通过在推论 4.13 中令 $\xi = (1, 0)$，确立了 a-不变量与 b-不变量之间若干新的关系。

推论 4.14。假设 A 是一个带有平衡对偶化复形的诺特 $\mathbb{N}$-分次代数。那么以下条件等价。

(1) $a^*(A) + b^*(S) = 0$。*(2)* 对所有 $0 \neq X \in D^b(\mathrm{gr}\ A)$, $a^*(X) = b^*(X) + a^*(A)$。*(3)* 对所有 $0 \neq X \in D^b(\mathrm{gr}\ A)$, $b^*(X) = a^*(X) + b^*(S)$。*(4)* 存在 $0 \neq X \in D^b(\mathrm{gr}\ A)$，使得

$$a^*(X) = b^*(X) + a^*(A) \ \ and \ \ b^*(X) = a^*(X) + b^*(S).$$

下面的推论表明，加权 CM 正则性或加权 AS 正则性可作为不变量，用来衡量代数 A 距离有限维有多远。

推论 4.15. 设 A 是一个带有平衡对偶化复形 R的诺特 $\mathbb{N}$-分次代数。令 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}$ 且满足 $\xi_1 \geqslant \xi_0$。若 A_0 是半单的，则以下条件等价。

(1) CM 正则度$\xi(A) < \infty$。(2) CM 正则度$\xi(X) < \infty$ 对所有 $0 \neq X \in \mathbf{D}^{b}(\mathrm{gr}\ A)$。(3) A 是有限维的。(4) CM 正则度$\xi(A) = 0$。(5) AS 正则度$\xi(A) = 0$。(6) AS 正则度$\xi(A) < \infty$。

证明。 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 由于 A_0 是半单的，Ext 正则度$\xi(S)=0$。因此，根据定理 4.11 (3)，CM 正则度$\xi(A)\geqslant 0$。由命题 4.11 (1) 和命题 3.12，对于任意 $0\neq X\in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$,

$$\mathrm{CMreg}_\xi(X)\leqslant \mathrm{Extreg}_\xi(X)+\mathrm{CMreg}_\xi(A)=\sup.\deg_\xi(X)+\mathrm{CMreg}_\xi(A).$$

由于上确界.deg$\xi(X)<\infty$，可知 CM 正则度$\xi(A)<\infty$ 当且仅当 CM 正则度$\xi(X)<\infty$ 对所有 $0\neq X\in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$。

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 由命题 3.6 可得。(3) $\Rightarrow$ (4)、(4) $\Rightarrow$ (1) 以及 (4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) 都是显然的。 □

命题 4.16。设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，A_0是半单的，且 A具有一个平衡对偶化复形 R。如果 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}$且 $\xi_1\leqslant\xi_0$，那么，对于任意 $0\neq X\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$，其投射维数 $X<\infty$,

$$\mathrm{Torreg}_\xi(X)\leqslant \mathrm{CMreg}_\xi(X)+\text{Ex-reg}_{-\xi}({}_AA), \tag{E4.9}$$

并且，对于任意 $0\neq X\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$，其内射维数 $X<\infty$,

$$\text{Ex-reg}_{-\xi}(X)\leqslant -\inf.\deg_\xi(X)+\text{Ex-reg}_{-\xi}(A_A). \tag{E4.10}$$

特别是，CM 正则度$\xi(A)$+Ex-正则度$-\xi({}_AA)\geqslant 0$ 并且CM 正则度$\xi(A)$+Ex-正则度$-\xi(A_A)\geqslant 0$。

证明沿用了 [WY, 命题 5.4 和 5.9 (3)] 中的方法。不等式 (E4.10) 直接由 $\mathbf{D}^{fg}$(Gr A) 与$\mathbf{D}^{fg}$(Gr A^o) 之间的对偶，以及不等式 (E4.9) 的右侧版本得出。

注 4.17。若 A_0 是半单的，且 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}$，其中 $\xi_1\leqslant\xi_0$，则不等式 (E4.9) 强于定理 4.11 (2) 中的不等式。此外，若 A_0 是半单的，且内射维数 ${}_AA=$ 内射维数 $A_A<\infty$，则投射维数 $R_A<\infty$ 且投射维数 ${}_AR<\infty$。命题 4.16 及其右侧版本的证明蕴含，Tor 正则度$\xi(R_A)=$ Tor 正则度$\xi({}_AR)$，且 Ex-正则度$-\xi({}_AA)=$ Ex-正则度$-\xi(A_A)$，其中$\xi=(\xi_0,\ \xi_1)\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}$，且 $\xi_1\leqslant\xi_0$。

若 A_0 是半单的，$A<\infty$ 的全局维数以及 $\xi=(\xi_0,\ \xi_1)\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}$，其中 $\xi_1\leqslant\xi_0$，那么根据定理 4.11 (2) 和命题 4.16，Torreg$\xi(R)=$ Ex-正则度$-\xi(A)$ =Torreg$\xi(A_0)$。

4.3.**加权 CM 正则性齐次与 Ex 正则性齐次**。在本小节中，我们为诺特 $\mathbb{N}$-分次代数引入加权 CM 正则性齐次和加权 Ex 正则性齐次性质。我们考察定理 4.11 中不等式成为等式的条件，将 KWZ2 定理 3.10] 推广到 $\mathbb{N}$-分次代数，并回答 Kirkman、Won 和 Zhang 在 KWZ2 注 3.11 (2)]中提出的问题。

定义 4.18。设 A 是一个 $\mathbb{N}$-分次代数，且 $\xi=(\xi_0,\ \xi_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。

(1) 若对所有 $1\leqslant i\leqslant n$，均有 *CMreg$\xi(A)$ =CMreg$\xi(Ae_i)$*（分别地，*CMreg$\xi(A)=$ CMreg$\xi(e_iA)$*），则称 A 具有左（分别地，右） ξ-齐次 *CM*-正则性。*(2)* 若对所有 $1\leqslant i\leqslant n$，均有 *Ex-reg$\xi({}_AA)$ =Ex-reg$\xi(Ae_i)$*（分别地，*Ex-reg$\xi(A_A)=$ Ex-reg$\xi(e_iA)$*），则称 A 具有左（分别地，右） ξ-*Ex*-正则齐次性。

注 4.19。若 A 具有平衡对偶化复形 R，则对所有 $1\leqslant i\leqslant n$ 及所有 $\xi=(\xi_0,\ \xi_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，Ex-reg$\xi({}_AA)=$ Ex-reg$\xi(Ae_i)$（分别地，Ex-reg$\xi(A_A)=$Ex-reg$\xi(e_iA)$）当且仅当 Torreg$-\xi(R_A)=$ Torreg$-\xi(e_iR)$（分别地，Torreg$-\xi({}_AR)=$Torreg$-\xi(Re_i)$）。

每个连通分次代数 A 对于任意 $\xi=(\xi_0,\ \xi_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，既具有 ξ-CM-正则齐次性，也具有ξ-Ex 正则齐次性。

下面的定理 4.20 刻画了定理 4.11 (2) 中不等式取等号的条件。它推广了 [KWZ2, 定理 3.10] 和 [WY, 定理 5.24] ，并且通过取 $Y = R$可直接由命题 4.7 得到，其中 R 表示 A的平衡对偶化复形。此外，如果 A 是连通分次的，那么定理 4.20 表明，对于任意 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ 且满足 $\xi_1 \leqslant \xi_0$，等式 CM 正则度$_\xi(X)$ =Tor 正则度$_\xi(X)$ + CM 正则度$_\xi(A)$ 对所有具有有限投射维数的 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$ 都成立。这回答了 Kirkman-Won-Zhang 在 [KWZ2, 注 3.11 (2)]中提出的问题。

定理 4.20. 设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$ 分次代数，满足 A_0 是半单的，且 A 具有平衡对偶化复形 R。设 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$，其中 $\xi_1 \leqslant \xi_0$。则以下陈述等价。

(1) A 是左 ξ-齐次 *CM*-正则性。(2) CM 正则度$_\xi(X)$ = Tor 正则度$_\xi(X)$ + CM 正则度$_\xi(A)$ 对所有具有有限投射维数的 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$ 均成立。

证明。 根据定义 3.1,

$$\mathrm{CMreg}_\xi(A) = -\inf.\deg_\xi(\mathrm{D}(R\Gamma_A(A))) = -\inf.\deg_\xi(R).$$

由 [VdB 定理 5.1] 可知，对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\begin{aligned}\mathrm{CMreg}_\xi(Ae_i) &= -\inf.\deg_\xi(\mathrm{D}(R\Gamma_A(Ae_i)))\\ &= -\inf.\deg_\xi(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(Ae_i, R))\\ &= -\inf.\deg_\xi(e_iR).\end{aligned}$$

因此，CMreg$_\xi(A)$ =CMreg$_\xi(Ae_i)$ 当且仅当 $-$下确界. deg$_\xi(R)$ = $-$下确界. deg$_\xi(e_iR)$。类似地,

$$\begin{aligned}\mathrm{CMreg}_\xi(X) &= -\inf.\deg_\xi(\mathrm{D}(R\Gamma_A(X)))\\ &= -\inf.\deg_\xi(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, R)).\end{aligned}$$

由命题 4.7 可知，对于任意具有有限投射维数的 $X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$,

$$\mathrm{CMreg}_\xi(X) = -\inf.\deg_\xi(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, R)) = \mathrm{Extreg}_\xi(X) - \inf.\deg_\xi(R)$$

当且仅当对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$, inf.deg$_\xi(e_iR)$ =inf. deg$_\xi(R)$。因此,

$$\mathrm{CMreg}_\xi(X) = \mathrm{Torreg}_\xi(X) + \mathrm{CMreg}_\xi(A)$$

对于所有具有有限投射维数的 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$，该条件成立，当且仅当 A 是左 CM 正则齐次。□

当 $\xi = (1,0)$ 时，定理 4.20 给出了 a-不变量与 b-不变量之间的关系，如下述推论所示。

推论 4.21。 设 A 是诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 A_0 是半单的， A 具有平衡对偶化复形 R。则以下条件等价。

(1) A 是左 $(1, 0)$-*CM*-正则性齐次。(2) $a^*(X) = b^*(X) + a^*(A)$ 对所有具有有限投射维数的 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\, A)$ 均成立。

命题 4.22。 设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，满足 A_0是半单的，且 A具有平衡对偶化复形 R。令 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$满足 $\xi_1 \leqslant \xi_0$。如果 内射维数 $_AA$ =内射维数 $A_A < \infty$，则以下陈述等价。

(1) A 是右$(-\xi)$-*Ex*-正则齐次。

(2) Ext 正则度$\xi(X)$ = CM 正则度$\xi(X)$ + Ex-正则度$-\xi(A)$ 对所有 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$ 满足投射维数 $X < \infty$。(3) $-$ 下确界。 次数$\xi(R\operatorname{Hom}_A(X,\ A)) =$ CM 正则度$\xi(X)$ + Ex-正则度$-\xi(A)$ 对所有 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (3) 由 $R\operatorname{Hom}_{A^o}(R,\ \underline{e_iA}) \cong R\operatorname{Hom}_A(\mathrm{D}(R\underline{\Gamma_{A^o}(e_iA)})\ A) \cong R\operatorname{Hom}_A(Re_i, A)$ 可得

$$\begin{aligned}
-\inf.\deg_\xi(R\underline{\operatorname{Hom}}_{A^o}(R, e_iA)) &= -\inf.\deg_\xi(R\underline{\operatorname{Hom}}_A(Re_i, A)) \\
&= \operatorname{Extreg}_\xi(Re_i) \quad (\text{by Theorem 3.15}) \\
&= \operatorname{Torreg}_\xi(Re_i) \quad (\text{by Lemma 3.7}) \\
&= \operatorname{Torreg}_\xi(R) \quad (\text{by (1) and Remark 4.19}) \\
&= \operatorname{Extreg}_\xi(R) \quad (\text{by Lemma 3.7}).
\end{aligned}$$

由于 $\operatorname{pdim} R_A < \infty$，由命题 4.8 的右版本可知，对于任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$,

$$\begin{aligned}
-\inf.\deg_\xi(R\underline{\operatorname{Hom}}_A(X, A)) &= -\inf.\deg_\xi(R\underline{\operatorname{Hom}}_{A^o}(R, \mathrm{D}(R\Gamma_A(X)))) \\
&= \operatorname{Extreg}_\xi(R_A) - \inf.\deg_\xi(\mathrm{D}(R\Gamma_A(X))) \\
&= \text{Ex-reg}_{-\xi}(A) + \operatorname{CMreg}_\xi(X).
\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (2) 若 $\operatorname{pdim} X < \infty$，则根据定理 3.15,

$$\operatorname{Torreg}_\xi(X) = -\inf.\deg_\xi(R\underline{\operatorname{Hom}}_A(X, A)) = \operatorname{CMreg}_\xi(X) + \text{Ex-reg}_{-\xi}(A).$$

(2) $\Rightarrow$ (1) 由于 $\mathrm{D}(R\Gamma_A(Re_i)) \cong e_iA$，因此对于任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，有 CM 正则度$\xi(Re_i) = 0$。在 (2) 中取 $X = Re_i$ 得

$$\text{Ex-reg}_{-\xi}(e_iA) = \operatorname{Extreg}_\xi(Re_i) = \operatorname{CMreg}(Re_i) + \text{Ex-reg}_{-\xi}(A) = \text{Ex-reg}_{-\xi}(A).$$

因此， A 是右 $(-\xi)$-Ex-正则齐次的。 □

若 $\operatorname{gldim} A < \infty$，鉴于注 4.17 中给出的等式 $\operatorname{Torreg}\xi(A_0) =$ Ex-正则度$-\xi(A)$, 以下结论可直接由命题 4.22 得出。

推论 4.23。 设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数，且 A_0 是半单的， A 具有平衡对偶化复形 R。令 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$，且 $\xi_1 \leqslant \xi_0$。若 全局维数 $A < \infty$，则下列命题等价

(1) Tor 正则度$\xi(X)$ = CM 正则度$\xi(X)$ + Tor 正则度$\xi(A_0)$ 对所有 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$ 均成立。(2) A 是右$(-\xi)$-*Ex*-正则齐次。

5. 加权同调正则性与 AS-正则性质之间的关系

本节沿用 [KWZ2] 和 [WY]，中的思路，研究加权同调正则性与诺特 $\mathbb{N}$-分次代数的 $\mathbb{N}$-分次 AS-正则性质之间的关系，从而推广连通分次代数以及 $\mathbb{N}$-分次代数的非加权情形下的相关结果。

若诺特 $\mathbb{N}$分次代数 A 满足左侧 *Auslander-Buchsbaum* 公式，则对任意 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ A)$，若其投射维数为 $X < \infty$,

$$\operatorname{pdim} X + \operatorname{depth} X = \operatorname{depth} A,$$

其中深度 $X :=$ 下确界$\{i \in \mathbb{Z} \mid \underline{\operatorname{Ext}}^i_A(S, X) \neq 0\}$.

任何满足 χ-条件的诺特连通分次代数都满足左 Auslander-Buchsbaum 公式 [Jo1, 定理 3.2]。对于具有平衡对偶化复形的 $\mathbb{N}$- 分次代数 A，以下引理刻画了 A sat- isfies Auslander-Buchsbaum 公式的条件。

定理 5.1。 [LW, 定理 1。4] 设 A 是一个具有平衡对偶化复形的诺特 $\mathbb{N}$-分次代数。那么，当且仅当对于每个分次单 A^o-模 M， A 满足左 *Auslander-Buchsbaum* 公式，且 $\operatorname{Ext}^d_{A^o}(M, A) \neq 0$，其中 d =深度 A。

假设 Auslander-Buchsbaum 公式成立，则下述关于 $\mathbb{N}$-分次 AS-戈伦斯坦代数的刻画拓展了 [DW 定理 3.6] 的结果。

命题 5.2. [LW，定理 8。14] 设 A 是一个带有平衡对偶化复形 R 的诺特 $\mathbb{N}$-分次代数。若 A 满足左右 *Auslander-Buchsbaum* 公式，则下列条件等价。

(1) A 是一个 $\mathbb{N}$-分次 *AS*-戈伦斯坦代数。(2) 内射维数$({}_AA) < \infty$。(3) 投射维数$({}_AR) < \infty$。(4) 对于任意 $X \in \mathbf{D}^b(\operatorname{gr} A)$，投射维数$(X) < \infty$ 当且仅当内射维数$(X) < \infty$。

接下来，我们利用左加权 CM-正则性的齐次性质，建立使 Auslander-Buchsbaum 公式对带有平衡对偶化复形的 $\mathbb{N}$-分次代数 A 成立的充分条件。

引理 5.3。 设 A 是一个诺特 $\mathbb{N}$-分次代数， A_0 为半单代数，并具有平衡对偶化复形 R。令 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$。若对于 $\xi_1 \ll 0$， A 是左 ξ-齐次 *CM*-正则性，则

（1）对所有具有有限投射维数的 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\operatorname{gr} A)$，有 深度 ${}_AA =$ 投射维数 $X +$深度 X。（2）对于所有具有有限投射维数的 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\operatorname{gr} A)$，

$$\begin{aligned}&\sup.\deg(R^{\operatorname{depth} X}\Gamma_A(X))\\ =&\sup.\deg(\operatorname{Tor}^A_{\operatorname{pdim} X}(A_0, X)) + \sup.\deg(R^{\operatorname{depth} A}\Gamma_A(A)).\end{aligned}$$

证明。 由定理 4.20 和 $\xi_1 \ll 0 \leqslant \xi_0$ 可知，对于任意具有有限投射维数的 $0 \neq X \in \mathbf{D}^b(\operatorname{gr} A)$，CM 正则度$\xi(X)$ = Tor 正则度$\xi(X)$+CM 正则度$\xi(A)$。由于 $\xi_1 \ll 0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{CMreg}_\xi(X) &= \xi_1 \operatorname{depth} X + \xi_0 \sup.\deg(R^{\operatorname{depth} X}\Gamma_A(X)),\\ \operatorname{Torreg}_\xi(X) &= \xi_0 \sup.\deg(\operatorname{Tor}^A_{\operatorname{pdim} X}(A_0, X)) - \xi_1 \operatorname{pdim} X.\end{aligned}$$

特别地,

$$\operatorname{CMreg}_\xi(A) = \xi_1 \operatorname{depth} A + \xi_0 \sup.\deg(R^{\operatorname{depth} A}\Gamma_A(A)).$$

因此，深度 $A =$ 深度 $X +$ 投射维数 X 且

$$\sup.\deg(R^{\operatorname{depth} X}\Gamma_A(X)) = \sup.\deg(\operatorname{Tor}^A_{\operatorname{pdim} X}(A_0, X)) + \sup.\deg(R^{\operatorname{depth} A}\Gamma_A(A)).$$

□

引理 5.4. [WY，引理 6。3] 设 A 是一个 $\mathbb{N}$-分次代数。设 $P = \bigoplus_{i=1}^n Ae_i(p_i)$, 其中 p_1、p_2、……、p_n 是整数，并设 $B =$ 自同态环$_A(P)$。则

(1) A 满足右 *Auslander-Buchsbaum* 公式，当且仅当 B 满足该公式。(2) A 具有平衡对偶化复形，当且仅当 B 具有该复形。(3) [IKU，引理 2。8] A 是广义 *AS-Gorenstein*（正则）代数，当且仅当 B 是。

为证明本节的主要结果定理 5.5，我们对 [IKU, 定理 4.7] 作了调整，以确保其中出现的代数 B 与A 分次 Morita 等价，并且 B_0 是半单的。注意， [IKU] 考虑的是右分次模,

而我们考虑的是左分次模。以下定理已在[WY, 定理 6.4]中得到证明。

定理 5.5。 [WY，定理 6。4] 设 A 是一个环不可分解的基本 $\mathbb{N}$-分次 *AS*-戈伦斯坦代数，其维数为 d，平均 *Gorenstein* 参数为 $\ell_{av}^A \in \mathbb{Z}$。若 A_0 是半单的，则存在一个环不可分解的基本 $\mathbb{N}$-分次 *AS*-戈伦斯坦代数 B，其维数为 d，且其 *Gorenstein* 参数均等于 ℓ_{av}^A，使得 B_0 是半单的，并且 B 与 A 分次 *Morita* 等价。

为方便起见，我们作出如下假设。

假设 5.6。 A 是一个带有平衡对偶化复形 R 的诺特（局部有限） $\mathbb{N}$-分次代数，且 A_0 是半单的。

现在我们准备证明定理 5.7、5.10 和 5.12 及其推论，从而推广 [KWZ1、定理 3.2、0.8]。对于任意带有平衡对偶化复形的诺特连通分次代数 A， [KWZ1、定理 3.2、0.8] 表明以下条件等价： A 是 AS-正则的； A 是 Cohen–Macaulay 的，且 AS 正则度$(A) = 0$；AS 正则度$(A) = 0$。

定理 5.7。 设 A 满足假设 *5.6*， A 为基本且环不可分解。则以下条件等价。

(1) A 是维数为 d 、具有平均 *Gorenstein* 参数 $\ell_{av}^A \in \mathbb{Z}$的 $\mathbb{N}$-分次 *AS*-正则代数。$_n$*(2)* 对某些整数 p_1、 p_2、*.....*、 p_n、 $B := \mathit{End}_A(\bigoplus Ae_i(p_i))$ 是一个维数为 d 的 $\mathbb{N}$-分次$_{i=1}$*CM*-代数，其中 B_0 半单，且 *AS* 正则度*(B)* $= 0$。$_n$ *(3)* 对某些整数 p_1、 p_2、*.....*、 p_n、 $B := \mathit{End}_A(\bigoplus Ae_i(p_i))$ 是一个维数为 d 的 $\mathbb{N}$-分次$_{i=1}$*CM*-代数，其中 B_0 半单，且 *AS* 正则度ξ*(B)* $= 0$ ，对于某个 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 参见 [WY，定理 6.6]。

(2) $\Rightarrow$ (3) 结论由 $\xi = (1,1)$ 和 (2) 得出。

(3) $\Rightarrow$ (1) 假设 $B_0 = B_0e_1' \oplus B_0e_2' \oplus \cdots \oplus B_0e_n'$，其中 $\{e_1', e_2', \cdots, e_n'\}$是 B_0的一组完备正交原始幂等元。由 AS 正则度$\xi(B) = 0$ 以及推论 4.13 可知，对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，CM 正则度$\xi(B)$ = CM 正则度$\xi(Be_i')$；因此， B 是左 ξ-齐次 CM-正则性。

由于 B 是一个维数为 d的 CM-代数，对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\mathrm{CMreg}_\xi(B) = \xi_1 d + \xi_0 \sup.\deg(R^d\Gamma_B(B)) \text{ and}$$

$$\mathrm{CMreg}_\xi(Be_i') = \xi_1 d + \xi_0 \sup.\deg(R^d\Gamma_A(Be_i')).$$

因此，对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，上确界。$\deg(R^d\Gamma_B(B))$ = 上确界。$\deg(R^d\Gamma_B(Be_i'))$ 且 d = 深度 B = 深度 Be_i'。

由此可知，对于任意 $\eta = (\eta_0, \eta_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ 以及任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，$\mathrm{CMreg}_\eta(B) = \mathrm{CMreg}_\eta(Be_i')$；也就是说， B 具有左 η-齐次 CM-正则性。由引理 5.3， B满足左 Auslander-Buchsbaum 公式。类似地，右侧版本表明， B 满足右 Auslander-Buchsbaum 公式。

首先，假设 $\mathrm{gldim}\, B = d_1 < \infty$。由引理 5.4 可知， B 具有平衡对偶化复形。由命题 5.2， B 是一个 $\mathbb{N}$分次的 AS-正则代数，其维数为 d_1，Gorenstein 参数为 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n\}$。由于 B满足左 Auslander-Buchsbaum 公式,

$$d_1 = \mathrm{injdim}\, B_B = \mathrm{pdim}\, {}_BR = \mathrm{depth}\, B - \mathrm{depth}\, R = \mathrm{depth}\, B = d.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{CMreg}_{\xi}(B) =&\xi_1 d+\xi_0 \sup.\deg(R^d\Gamma_B(B))\\ =&\xi_1 d+\xi_0 \sup.\deg(\bigoplus_{i=1}^{n}(\mathrm{D}(Be'_{\sigma(i)})(\ell_i))^{r_i}) \quad (\text{By (E2.6) })\\ =&\xi_1 d-\xi_0 \min\{\ell_i\}.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{ASreg}_{\xi}(B)=0$, $\mathrm{Torreg}_{\xi}(B_0)=-\mathrm{CMreg}_{\xi}(B)=-\xi_1 d+\xi_0\min\{\ell_i\}$.

另一方面，设 $P^{\bullet}$ 是 ${}_BB_0$ 的最小分次投射分解。由 B 的 AS-正则性质可得 $P^{-d}=\bigoplus Be_{\sigma(i)}(-\ell_i)$。因此，$i=1$上确界. $\deg(B_0\otimes_B P^{-d})=\max\{\ell_i\}$ 且

$$\begin{aligned}\mathrm{Torreg}_{\xi}(B_0) =&\sup\{-\xi_1 i+\xi_0 \sup.\deg \mathrm{Tor}_i^B(B_0,B_0)\}\\ \geqslant&-\xi_1 d+\xi_0 \sup.\deg(B_0\otimes_B P^{-d})=-\xi_1 d+\xi_0\max\{\ell_i\}.\end{aligned}$$

由此可得 $-\xi_1 d+\xi_0\min\{\ell_i\}\geqslant -\xi_1 d+\xi_0\max\{\ell_i\}$。由于 $\xi_0>0$, $\min\{\ell_i\}=\max\{\ell_i\}=\ell_{av}^B$。根据定理 5.5, $\ell_{av}^A=\ell_{av}^B\in\mathbb{Z}$。由于 A 与 B 分次 Morita 等价，A 是一个 $\mathbb{N}$ 分次 AS-正则代数，其维数为 d，Gorenstein参数为$\ell_{av}^A\in\mathbb{Z}$。

为完成证明，只需证明 $\mathrm{gldim}\, B<\infty$。假设 $\mathrm{gldim}\, B=\infty$。那么 $\mathrm{pdim}(B_0)=+\infty$。令

$$\cdots\to P^{-j}\overset{\partial^{-j}}{\to}P^{-j+1}\to\cdots\to P^{-1}\to B\to B_0\to 0$$

为 B_0 作为左 B-模的最小分次投射分解。那么

$$\cdots\to P^{-j-2}\to P^{-j-1}\overset{\partial^{-j-1}}{\to}\ker\partial^{-j}\to 0$$

是一个最小分次投射分解，并且对所有 $j\geqslant 0$, $\mathrm{pdim}(\ker\partial^{-j})=+\infty$。

由于 B 是维数为 d 的 CM-代数，$\mathrm{D}(R\Gamma_B(B))\cong\mathrm{D}(R^d\Gamma_B(B))[d]:=\omega[d]$。我们断言 $\mathrm{injdim}_B\omega=d$ 且 $d=\mathrm{cd}(\Gamma_B)$。

根据 [VdB 定理 5.1], , $\mathrm{D}(R\Gamma_B(X))\cong\mathrm{RHom}_B(X,\omega[d])$，对所有 $X\in\mathbf{D}^b(\mathrm{gr}\ B)$ 均成立。因此，对于任意 $i>0$ 和 $M\in\mathrm{gr}\ B$, $\mathrm{Ext}_B^i(M,\omega[d])\cong\underline{\mathrm{D}(R^{-i}\Gamma_B(M))}=0$。此外，对于任意非零挠模 N, $\mathrm{Ext}_B^0(N,\omega[d])\cong\mathrm{D}(R^0\Gamma_B(N))\cong\mathrm{D}(N)\neq 0$。因此，$\underline{\mathrm{injdim}}(\omega[d])=0$, 从而 $\mathrm{injdim}\,\omega=d$。

由于 $\mathrm{D}(R^q\Gamma_B(M))\cong\underline{\mathrm{Ext}_B^{-q}}(M,\omega[d])=\underline{\mathrm{Ext}_B^{-q+d}}(X,\omega)=0$ 对任意 $q>d$ 和 $M\in\mathrm{Gr}\,B$ 均成立，因此可得 $d=\mathrm{cd}(\Gamma_B)$。

由于 $\mathrm{RHom}_B(B_0,\omega)=\mathrm{RHom}_B(B_0,\omega[d])[-d]\cong\mathrm{D}(R\Gamma_B(B_0))[-d]\cong B_0[-d]$,

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(R^i\Gamma_B(\ker\partial^{-j}))&\cong\underline{\mathrm{Ext}}_B^{-i}(\ker\partial^{-j},\omega[d])\\ &\cong\underline{\mathrm{Ext}}_B^{d-i}(\ker\partial^{-j},\omega)\\ &\cong\underline{\mathrm{Ext}}_B^{d-i+j+1}(B_0,\omega).\end{aligned}$$

因此，对于任意 $i<d$ 和 $j\geqslant d-1$, $\mathrm{D}(R^i\Gamma_B(\ker\partial^{-j}))=0$。所以，对于所有 $j\geqslant d-1$, $\mathrm{CMreg}_{\xi}(\ker\partial^{-j})=\xi_1 d+\xi_0\sup_{\circ}\deg(R^d\Gamma_B(\ker\partial^{-j}))$。

如果 $j\geqslant d$，则短正合列 $0\to\ker\partial^{-j}\to P^{-j}\to^{\partial^{-j}}\ker\partial^{-j+1}\to 0$诱导出一个正合列

$$0\to R^d\Gamma_B(\ker\partial^{-j})\to R^d\Gamma_B(P^{-j})\to R^d\Gamma_B(\ker\partial^{-j+1})\to 0. \tag{E5.1}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathrm{CMreg}_{\xi}(\ker\partial^{-j}) =&\xi_1 d+\xi_0 \sup.\deg(R^d\Gamma_B(\ker\partial^{-j}))\\ \leqslant&\xi_1 d+\xi_0 \sup.\deg(R^d\Gamma_B(P^{-j})) \quad (\text{by (E5.1)})\\ =&\mathrm{CMreg}_{\xi}(P^{-j}) \quad (B \text{ is Cohen-Macaulay})\end{aligned} \tag{E5.2}$$

and

$$
\begin{aligned}
&\sup.\deg(B_0\otimes_B P^{-j-1})\\
=&\xi_0^{-1}(-\xi_1 0+\xi_0\sup.\deg(B_0\otimes_B P^{-j-1}))\leqslant \xi_0^{-1}(\mathrm{Torreg}_\xi(\ker\partial^{-j}))\\
\leqslant&\xi_0^{-1}(\mathrm{CMreg}_\xi(\ker\partial^{-j})+\mathrm{Torreg}_\xi(B_0))\quad(\text{by Theorem4.11 (2)})\\
\leqslant&\xi_0^{-1}(\mathrm{CMreg}_\xi(P^{-j})+\mathrm{Torreg}_\xi(B_0))\quad(\text{by (E5.2)})\\
=&\xi_0^{-1}\,\mathrm{Torreg}_\xi(P^{-j})\quad(\text{by Corollary 4.13})\\
=&\sup.\deg(B_0\otimes_B P^{-j}).
\end{aligned}
\tag{E5.3}
$$

令 $c:=$ Tor 正则度$_\xi(B_0)$ $=$ −CM 正则度$_\xi(B)$ $<\infty$，并设 c_1 为正整数，使得 $c_1>\xi_0^{-1}(c+(\xi_1-\xi_0)d)$。由于 sup。 deg$(B_0\otimes_B P^{-j})$ $\geqslant j$当 $P^{-j}\neq 0$时，由 (E5.3) 可得

$$d+c_1\leqslant\sup.\deg(B_0\otimes_B P^{-d-c_1})\leqslant\cdots\leqslant\sup.\deg(B_0\otimes_B P^{-d}).$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\xi_0\sup.\deg(B_0\otimes_B P^{-d})-\xi_1 d&\geqslant\xi_0(d+c_1)-\xi_1 d\\
&>\xi_0(d+\xi_0^{-1}(c+(\xi_1-\xi_0)d))-\xi_1 d\\
&=\xi_0 d+c+(\xi_1-\xi_0)d-\xi_1 d=c,
\end{aligned}
$$

这与 $c=$Tor 正则度$_\xi(B_0)$ 矛盾。 □

推论 4.13 中对 ASreg$_\xi(A)=0$ 的刻画，给出了与定理 5.7 中 (1) 等价的其他条件。

推论 5.8. 假设 A 满足假设 *5.6*， A 是基本且环不可分解的。那么，以下条件等价。

(1) A 是维数为 d 的 $\mathbb{N}$-分次 *AS*-正则代数，平均 *Gorenstein* 参数为 $\ell_{av}^A\in\mathbb{Z}$。*(4)* $B=\mathrm{End}_A(\bigoplus Ae_i(p_i))$ 是维数为 d 的 $\mathbb{N}$-分次 *CM*-代数，其中$_{i=1}$存在整数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，使得 B_0 是半单的，并且对于所有 $0\neq X\in D^b(\mathrm{gr}\,B)$ 以及某个 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$，*CM* 正则度$_\xi(X)$ − *Tor* 正则度$_\xi(X)$ $=c$ 为常数。*(5)* $B=\mathrm{End}_A(\bigoplus Ae_i(p_i))$ 是维数为 d 的 $\mathbb{N}$-分次 *CM*-代数，其中$_{i=1}$存在整数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，使得 B_0 是半单的，并且对于所有 $0\neq M\in\mathrm{gr}\,B$ 以及某个 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$，*CM* 正则度$_\xi(M)$ − *Tor* 正则度 $_\xi(M)$ $=c$ 为常数。*(6)* $B=\mathrm{End}_A(\bigoplus Ae_i(p_i))$ 是维数为 d 的 $\mathbb{N}$- 分次 *CM*- 代数，其中 $_{i=1}$ 存在整数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，使得 B_0 是半单的，并且对于所有 $0\neq X\in D^b(\mathrm{gr}\,B)$，*Ex*-正则度−$_\xi(X)$ +下确界. deg$_\xi(X)$ $=-c$ 成立，其中某个常数为 c，且某个 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$。*(7)* $B=\mathrm{End}_A(\bigoplus Ae_i(p_i))$ 是维数为 d 的 $\mathbb{N}$-分次 *CM*-代数，其中$_{i=1}$存在整数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，使得 B_0 是半单的，并且对于所有 $0\neq M\in\mathrm{gr}\,B$ 以及某个 $\xi=(\xi_0,\xi_1)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$，*Ex*-正则度−$_\xi(M)$ +下确界. deg$_\xi(M)$ $=-c$。

为了在定理 5.7 的第 (3) 部分中去除 Cohen-Macaulay 条件，我们引入以下引理。

引理 5.9。设 A 是一个具有有限局部上同调维数的 $\mathbb{N}$ 分次代数。对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，令 $d =$ 深度(A)，$d_i =$ 深度(Ae_i)，且 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$。那么存在 $t \in \mathbb{R}$，使得对任意 $\xi_1 \leqslant t\xi_0$，

$$\begin{aligned}\mathrm{CMreg}_\xi(A) &= \xi_1 d + \xi_0 \sup.\deg(R^d\Gamma_A(A)),\\ \mathrm{CMreg}_\xi(Ae_i) &= \xi_1 d_i + \xi_0 \sup.\deg(R^{d_i}\Gamma_A(Ae_i)).\end{aligned}$$

证明。设 $m =$sup$(R\Gamma_A(A))$，且 $m_i =$sup$(R\Gamma_A(Ae_i))$。由

$$\begin{aligned}\mathrm{CMreg}_\xi(A) &= \xi_1 d + \xi_0 \sup.\deg(R^d\Gamma_A(A)),\\ \mathrm{CMreg}_\xi(Ae_i) &= \xi_1 d_i + \xi_0 \sup.\deg(R^{d_i}\Gamma_A(Ae_i)),\end{aligned}$$

可知，对于任意 $i \geqslant d$，

$$\begin{aligned}\xi_1 i + \xi_0 \sup.\deg(R^i\Gamma_A(A)) &\leqslant \xi_1 d + \xi_0 \sup.\deg(R^d\Gamma_A(A)),\\ \xi_1 i + \xi_0 \sup.\deg(R^i\Gamma_A(Ae_i)) &\leqslant \xi_1 d_i + \xi_0 \sup.\deg(R^{d_i}\Gamma_A(Ae_i)).\end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned}\gamma &:= \sup.\deg(R^d\Gamma_A(A)) - \max_{d\leqslant j\leqslant m}\{\sup.\deg(R^j\Gamma_A(A))\};\\ \gamma_i &:= \sup.\deg(R^{d_i}\Gamma_A(Ae_i)) - \max_{d_i\leqslant j_i\leqslant m_i}\{\sup.\deg(R^{j_i}\Gamma_A(Ae_i))\}.\end{aligned}$$

于是我们可以取 $-\infty < t =$ min$\{\gamma, \gamma_i\} \leqslant 0$，结论得证。 □

定理 5.10。假设 A 满足假设 *5.6*，A 是基本且环不可分解的。令 t 按引理 *5.9* 中的定义给出。则以下各项等价。

(1) A 是维数为 d 的 $\mathbb{N}$ 分次 *AS*-正则代数，且平均 *Gorenstein* 参数为$\ell_{av}^A \in \mathbb{Z}$。

(8) $B =$ *End*$_A(\bigoplus_{i=1}^n Ae_i(p_i))$ 是一个 $\mathbb{N}$ 分次代数，其中整数 p_1、p_2、$\cdots$、p_n 满足 B_0 是半单的，且 *ASreg*$^\xi(B) = 0$，对某个 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$，其中 $\xi_1 < t\xi_0$。

(9) $B =$ *End*$_A(\bigoplus_{i=1}^n Ae_i(p_i))$ 是一个 $\mathbb{N}$ 分次代数，其中整数 p_1、p_2、$\cdots$、p_n 满足 B_0 是半单的，且对于所有 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$，*ASreg*$^\xi(B) = 0$，其中 $\xi_1 \leqslant \xi_0$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (9) 根据定理 5.5 和引理 5.4，存在一个环不可分解的n基本 $\mathbb{N}$-分次 AS-正则代数 $B =$ End$_A(\bigoplus_{i=1}^n Ae_i(p_i))$，其维数为 d，具有$i=1$Gorenstein 参数 $\{\ell_{av}^A, \ell_{av}^A, \cdots, \ell_{av}^A\}$，且 B_0 为半单。根据定理 2.4 和定义 2.2，B 具有一个平衡对偶化复形 $R_B = B[d](-\ell_{av}^A)$。因此，对于任意 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ 且 $\xi_1 \leqslant \xi_0$，CM 正则度$^\xi(B) =-$ 下确界。deg$^\xi(R) = \xi_1 d - \xi_0 \ell_{av}^A$。

根据命题 3.15，对于任意$X \in \mathbf{D}^b($gr $B)$，Ext 正则度$^\xi(X) = -$ 下确界$\{\xi_1 i + \xi_0 j \mid$ Ext$_B^i(X, B)_j \neq 0\}$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{CMreg}_\xi(X) &= -\inf.\deg_\xi\big(D(R\Gamma(X))\big) = -\inf.\deg_\xi\big(\mathrm{RHom}(X, R_B)\big)\\ &= -\inf\{\xi_1 i + \xi_0 j \mid \underline{\mathrm{Ext}}_B^i(X, R_B)_j \neq 0\}\\ &= -\inf\{\xi_1 i + \xi_0 j \mid \underline{\mathrm{Ext}}_B^i(X, B[d](-\ell_{av}^A))_j \neq 0\}\\ &= \mathrm{Extreg}_\xi(X) + \xi_1 d - \xi_0 \ell_{av}^A = \mathrm{Torreg}_\xi(X) + \mathrm{CMreg}_\xi(B).\end{aligned}$$

由推论 4.13 可知，对于所有满足 $\xi_1 \leqslant \xi_0$ 的 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$，AS 正则度$^\xi(B) = 0$。

(9) $\Rightarrow$ (8) 显然。

(8) $\Rightarrow$ (1) 根据定理 5.7，只需证明 B 是一个维数为 d的 CM-代数。由推论 4.13 可知，对于任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，CMreg$_\xi(B)$ =CMreg$_\xi(Be_i')$；也就是说， B 是左 ξ-齐次 CM-正则性。根据引理 5.9,

$$\begin{aligned}\mathrm{CMreg}_\xi(B) &= \xi_1 d + \xi_0 \sup.\deg(R^d\Gamma_B(B)),\\ \mathrm{CMreg}_\xi(Be_i') &= \xi_1 d_i + \xi_0 \sup.\deg(R^{d_i}\Gamma_B(Be_i')),\end{aligned}$$

其中 $d =$深度 B，且 $d_i =$深度 Be_i'。假设存在一个 i使得$d_i > d$。那么根据 $\xi_1 < 0$, $\xi_1 d > \xi_1 d_i$。由于 $\xi_1 < t\xi_0$,

$$\begin{aligned}&\xi_1 d_i + \xi_0 \sup.\deg(R^{d_i}\Gamma_B(B)) - \xi_1 d - \xi_0 \sup.\deg(R^d\Gamma_B(B))\\ =&\xi_1(d_i - d) - \xi_0(\sup.\deg(R^d\Gamma_B(B)) - \sup.\deg(R^{d_i}\Gamma_B(B)))\\ <&\xi_0 t(d_i - d) - \xi_0 t\\ =&\xi_0 t(d_i - d - 1) \leqslant 0.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\xi_1 d + \xi_0 \sup.\deg(R^d\Gamma_B(B)) &= \xi_1 d_i + \xi_0 \sup.\deg(R^{d_i}\Gamma_B(Be_i'))\\ &\leqslant \xi_1 d_i + \xi_0 \sup.\deg(R^{d_i}\Gamma_B(B))\\ &< \xi_1 d + \xi_0 \sup.\deg(R^d\Gamma_B(B)),\end{aligned}$$

矛盾。因此，对于任意 $1 \leqslant i \leqslant n$、 $d = d_i$ 和

$$\sup.\deg(R^d\Gamma_B(B)) = \sup.\deg(R^{d_i}\Gamma_B(Be_i')) = \sup.\deg(R^d\Gamma_B(Be_i')).$$

由引理 5.9 和 $\xi_1 < \xi_0 t$ 可知，对于任意 $\eta \leqslant \xi$ 以及任意 $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\mathrm{CMreg}_\eta(B) = \mathrm{CMreg}_\eta(Be_i').$$

因此， B 满足左 Auslander-Buchsbaum 公式。类似的论证表明， B 满足右 Auslander-Buchsbaum 公式。

假设 gldim $B < \infty$。由 [LW，引理 3.6], pdim $_BR =$ injdim$(B_B) < \infty$。令 $P^\bullet$ 为 $R \in \mathbf{D}^b$(gr B) 的最小分次投射分解。于是

$$\mathrm{pdim}\, R = -\inf\{r \in \mathbb{Z} \mid P^r \neq 0\} \geqslant -\inf R.$$

由于 $R\Gamma_B(R) \cong$D(B)，深度 $R = 0$ 且深度 $B =$ pdim $R \geqslant -$inf R。根据深度 B的定义,

$$\mathrm{depth}\, B = \inf\{r \in \mathbb{Z} \mid R^r\Gamma_B(B) \neq 0\} = -\sup R.$$

因此，sup $R \leqslant$ inf R，且 B 是一个维数为 d 的 CM-代数。

只需证明 gldim $B < \infty$。反设 pdim $B_0 = +\infty$。由于对任意 i，sup. deg(Tor$_i^B(B_0, B_0)$) $\geqslant i$,

$$\xi_0 \sup.\deg(\mathrm{Tor}_i^B(B_0, B_0)) - \xi_1 i \geqslant \xi_0 i - \xi_1 i = (\xi_0 - \xi_1)i.$$

由 $\xi_1 < t\xi_0 < \xi_0$ 可得 Tor 正则度$\xi(B_0) = +\infty$。因此，CM 正则度$\xi(B) = -\infty$, 这与 CM 正则度$\xi(B) < \infty$矛盾。因此 gldim $B < \infty$。□

下述定理将 [KWZ2, 定理 0.6]直接推广到了 $\mathbb{N}$-分次代数。根据 [WY, 引理 5.8], ，对于任意 $\mathbb{N}$-分次 AS-戈伦斯坦代数 A，条件 Ex-正则度(A) +ex-正则度(A) $= 0$ 意味着 A 的 Gorenstein 参数相同。对于某个满足 $\xi_0 \neq 0$ 的 $\xi = (\xi_0, \xi_1)$ $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，这一条件也等价于 Ex-正则度$\xi(A)$ + Ex-正则度$-\xi(A) = 0$。

引理 5.11. 设 A 是一个维数为 d 、*Gorenstein* 参数为 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n\}$的 $\mathbb{N}$-分次 *AS*-戈伦斯坦代数。那么以下条件等价。

(1) $\ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_n$.

(2) Ex-正则度$\xi(A)$ + Ex-正则度$-\xi(A) = 0$ 对所有 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$。(3) Ex-正则度$\xi(A)$ + Ex-正则度$-\xi(A) = 0$ 存在 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 满足 $\xi_0 \neq 0$。

证明。 由于 A 是维数为 d 、带有 Goren-$n$stein 参数 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n\}$ 的 $\mathbb{N}$-分次 AS-戈伦斯坦代数，因此我们有 $R\operatorname{Hom}_A(\underline{S, A}) \cong \bigoplus (e_{\sigma(i)} S(\ell_i))^{r_i}[-d]_{i=1}$因此，对于任意 $\xi_0 \geqslant 0$,

$$\text{Ex-正则度}\xi(A) = \xi_1 d - \xi_0 \min_i \{\ell_i\}, \text{ 且 Ex-正则度}-\xi(A) = -\xi_1 d + \xi_0 \max_i \{\ell_i\}.$$

因此，对于所有 $\xi_0 \geqslant 0$，Ex-正则度$\xi(A)$+Ex-正则度$-\xi(A) = \xi_0(\max\{\ell_i\} - \min\{\ell_i\})$。类似地，对于任意 $\xi_0 \leqslant 0$,

$$\text{Ex-reg}_{\xi}(A) = \xi_1 d - \xi_0 \max_i\{\ell_i\}, \text{ and } \text{Ex-reg}_{-\xi}(A) = -\xi_1 d + \xi_0 \min_i\{\ell_i\}.$$

因此，对于所有 $\xi_0 \leqslant 0$，Ex-正则度$\xi(A)$+Ex-正则度$-\xi(A) = -\xi_0(\max\{\ell_i\} - \min\{\ell_i\})$。

(1) $\Rightarrow$(2) 由 $\ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_n$ 可知，对于所有 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，Ex-正则度$\xi(A)$ + Ex-正则度$-\xi(A) = 0$。

(2) $\Rightarrow$(3) 显然。

(3) $\Rightarrow$ (1) 由 $\xi_0 \neq 0$ 可知，Ex-正则度$\xi(A)$+Ex-正则度$-\xi(A) = 0$ 等价于 $\ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_n$。

□

定理 5.12。 假设 A 满足假设 *5.6*，并令 t 按引理 *5.9* 中的定义给出。那么以下条件等价。

(1) A 是维数为 d 的 $\mathbb{N}$-分次 *AS*-正则代数，并且对于某个 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 满足 $\xi_0 \neq 0$, *Ex*-正则度$\xi(A)$+*Ex*-正则度$-\xi(A) = 0$。 *(2)* 对于所有满足 $\xi_1 \leqslant \xi_0$的 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$，*AS* 正则度$\xi(A) = 0$。 *(3)* 对于某个满足 $\xi_1 < t\xi_0$的 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$，*AS* 正则度$\xi(A) = 0$。

此外，如果 A 是基本的，则以下条件等价： A 在 A_0上是 *AS*-正则的；对于某个 $\xi_1 < \xi_0 t$，AS 正则度$\xi(A) = 0$ ；以及对于所有$\xi_1 \leqslant \xi_0$，AS 正则度$\xi(A) = 0$ 。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 根据 Ex-正则度$\xi(A) = -$对于某个 $\xi_0 \neq 0$ ，Ex-正则度$-\xi(A)$，以及引理n5.11, $\ell :=\max\{\ell_i\} =\min\{\ell_i\}$。由（E2.6）， $R \cong \bigoplus_{i=1} (Ae_{\sigma(i)}(-\ell))^{r_i}[d]$， CM 正则度$\xi(A) =\xi_1 d-\xi_0\ell$，且 Tor 正则度$\xi(R) = \xi_0\ell-\xi_1 d$。注 4.17 随即推出，Tor 正则度$\xi(A_0) =$Tor 正则度$\xi(R) = \xi_0\ell - \xi_1 d$。因此，对于所有 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ 且满足$\xi_1 \leqslant \xi_0$的情形，AS 正则度$\xi(A) = 0$ 。

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然。

(3) $\Rightarrow$ (1) 在定理 5.10 的证明中取 $B = A$ ，可由 (8) $\Rightarrow$(1) 得出，A 是维数为 d、Gorenstein 参数为 $\{\ell, \ell, \cdots, \ell\}$ 的 $\mathbb{N}$-分次 AS-正则代数。因此，由引理 5.11 可知，对于某个 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，有 Ex-正则度$\xi(A)$+Ex-正则度$-\xi(A) = 0$ ，其中 $\xi_0 \neq 0$。

若 A 是基本的，则由定义 2.5 可知，AS 正则度$(A) = 0$ 当且仅当 A 是关于 A_0. □的 AS-正则代数。

若 A 满足左右 Auslander–Buchsbaum 公式，则下述定理是对 [KWZ2, 定理 0.6] 和 [WY，定理 6.10]的直接推广。

定理 5.13. 假设 A 满足假设 *5.6*以及左右 *Auslander-Buchsbaum* 公式。那么，下列条件等价。

(1) A 是维数为 d 的 $\mathbb{N}$-分次 *AS*-正则代数，且对于某些满足 $\xi_0 \neq 0$ 的 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，有 Ex-正则度$\xi(A)$+Ex-正则度$-\xi(A) = 0$。(2) 对于某些满足 $\xi_1 \leqslant \xi_0$ 的 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$，有 AS 正则度 $\xi(A) = 0$ 。

如果 A 还是基本的，那么当且仅当对于某些满足 $\xi_1 \leqslant \xi_0$ 的 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，有 AS 正则度$\xi(A) = 0$ 时， A 才是关于 A_0 的 ***AS*-正则代数。**

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 根据定理 5.12 中的 (1) $\Rightarrow$ (2)，AS 正则度$\xi(A) = 0$对所有 $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ 均成立，其中 $\xi_1 \leqslant \xi_0$。

(2) $\Rightarrow$ (1) 如果 $\xi_1 = \xi_0 > 0$，则不妨设$\xi_1 = \xi_0 = 1$。结论由 [WY，定理 6.10] 得出。

现在，令 $\xi_1 < \xi_0$，并设全局维数 $A < \infty$。根据命题 5.2， A 是 $\mathbb{N}$-分次 AS-正则代数，其维数为 d，Gorenstein 参数为 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n\}$。根据$_n$(E2.6)， $R \cong \bigoplus_{i=1}^{}$($Ae_{\sigma(i)}(-\ell_i))^{r_i}[d]$，CM 正则度$\xi(A) = \xi_1 d - \xi_0 \min\{\ell_i\}$，且 Tor 正则度$\xi(R) = \xi_0 \max\{\ell_i\} - \xi_1 d$。由注 4.17 可知，Tor 正则度$\xi(A_0)$ = Tor 正则度$\xi(R) = \xi_0 \max\{\ell_i\} - \xi_1 d$。因此， $0 =$ AS 正则度$\xi(A)$ = CM 正则度$\xi(A)$+Tor 正则度$\xi(A_0) = \xi_0(\max\{\ell_i\} - \min\{\ell_i\})$。所以，根据引理 5.11， $\ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_n$ 且 Ex-正则度$\xi(A)$ + Ex-正则度$-\xi(A) = 0$。

还需证明 gldim $A < \infty$。反设 pdim $A_0 = \infty$。由于对所有 $i \geqslant 0$， $\sup.\deg(\mathrm{Tor}_i^A(A_0, A_0)) \geqslant i$，

$$\xi_0 \sup.\deg(\mathrm{Tor}_i^A(A_0, A_0)) - \xi_1 i \geqslant \xi_0 i - \xi_1 i = (\xi_0 - \xi_1) i.$$

由于 $\xi_1 < \xi_0$ 且 pdim $A_0 = \infty$， 可得 Torreg$\xi(A_0) \geqslant (\xi_0 - \xi_1) \max\{i \mid i \in \mathbb{N}\} = \infty$。因此， CMreg$\xi(A)$ = −Torreg$\xi(A_0) = \infty$，这与引理 3.4 中证明的 CMreg$\xi(A)$ 的有限性矛盾。因此， gldim $A =$ pdim $A_0 < \infty$。□

人工智能声明。 作者使用人工智能工具编辑语言、检查语法并提高稿件的可读性。数学结果和证明均由作者完成，作者对稿件承担全部责任。

参考文献

[AS] M. Artin 和 W. F. Schelter，《整体维数为 3 的分次代数》，Adv. Math. 66 (1987年)，171–216。[AZ] M. Artin 和 J.J. Zhang，《非交换射影概形》，Adv. Math. 109 (1994年)，228–287。[BH] W. Bruns 和 J. Herzog，《Cohen-Macaulay环》，《剑桥高等数学研究丛书》第 39 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[CHT] S. D. Cutkosky、J. Herzog 和 N. V. Trung，《Castelnuovo–Mumford 正则性的渐近行为》，Compositio Math. 118 (1999年)，243–261。[DW] Z.-C. Dong 和 Q.-S. Wu，《非交换Castelnuovo–Mumford正则度与AS正则代数》，J. Algebra 322 (2009年)，122–136。[EG] D. Eisenbud 和 S. Goto，《线性自由分解与最小重数》，J. Algebra 88 (1984年)，89–133。[GW] S. Goto 和 K. Watanabe，《论分次环，I》，J. Math. Soc. Japan 30 (1978年)，179–213。[HT] L. T. Hoa 和 N. V. Trung，a_i-不变量与理想幂的Castelnuovo–Mumford正则度，J. Algebra 241 (2001年)，154–178。[IKU] O. Iyama、Y. Kimura 和 K. Ueyama，《一维Artin-Schelter Gorenstein代数的Cohen-Macaulay表示》，arxiv:2404.05925，2024年。[Jo1] P. Jørgensen，《非交换分次同调恒等式》，J. London Math. Soc. 57 (1998年)，336–350。[Jo2] P. Jørgensen，《非交换Castelnuovo–Mumford正则度》，Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 125 (1999年)，203–221。[Jo3] P. Jørgensen，《连通分次代数上的非交换Castelnuovo–Mumford正则度》，J. Algebra 211 (1999年)，280–298。[Jo4] P. Jørgensen，《非交换代数上的线性自由分解》，Compositio Math. 140 (2004年)，1053–1058。[JZ] P. Jørgensen 和 J. J. Zhang，《Gorenstein性质指南》，Adv. Math. 151 (2000年)，313–345。[KWZ1] E. Kirkman、R. Won 和 J.J. Zhang，《同调正则度与凹性》，Algebra and Number Theory，第 20 卷（2026年），第 8 期，1559–1595。

[KWZ2] E. Kirkman、R. Won 和 J.J. Zhang，《加权同调正则性》，《美国数学会汇刊》376 (2023年)，7407–7445。[LW] H.-N Li 和 Q.-S Wu，《通常分次代数及其同调性质》，arXiv: 2508.06068，2025年。[M] D. Mumford，《代数曲面上的曲线讲义》，普林斯顿大学出版社，1966年。[MM] H. Minamoto 和 I. Mori，《Artin-Schelter Gorenstein代数的结构》，Adv. Math. 226 (2011年)，4061–4095。[MV1] R. Martinez-Villa，《Koszul代数与Gorenstein条件》，《代数表示》（圣保罗，1999年），135–156，《纯粹数学与应用数学讲义》第 224 卷，Dekker，纽约，2002年。[MV2] R. Martinez-Villa，《局部上同调与非交换Gorenstein代数》，Int. J. Algebra 8 (2014年)，329–348。[Ngu] H.D. Nguyen，《复形及其同调的正则度界》，Math. Proc. Camb. Phil. Soc.159 (2015年)，355–377。[Ooi] A. Ooishi，《分次环与模的Castelnuovo正则性》，Hiroshima Math. J. 12 (1982年)，627–644。[Rö] T. Römer，《正分次代数上的正则度》，J. Algebra 319 (2008年)，1–15。[RR] M. L. Reyes 和 D. Rogalski，《分次扭曲Calabi-Yau代数是广义Artin-Schelter正则代数》，《名古屋数学杂志》245 (2022年)，100–153。[RRZ] M. L. Reyes、D. Rogalski 和 James J. Zhang，《斜Calabi-Yau代数与同调恒等式》，Adv. Math. 264 (2014年)，308–354。[Sch] P. Schenzel，《Koszul同调在生成元个数和齐次关系中的应用》，J. Pure Appl. Algebra 114 (1997年)，287–303。[Tr1] N. V. Trung，《Castelnuovo–Mumford正则度与分次子模的生成元次数》，J. Algebra 200 (1998年)，146–167。[Tr2] N. V. Trung，《分次局部上同调模的最大非零次数》，J. Algebra 215 (1999年)，481–499。[Tr3] N.V. Trung，《Castelnuovo-Mumford正则度与相关不变量》，《交换代数与组合学》，Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser. 4 (2007年)，157–180。[TW] N. V. Trung 和 H. J. Wang，《Castelnuovo–Mumford正则度与算术度》，Math. Z. 249 (2005年)，813–826。[VdB] M. Van den Bergh，《非交换分次环与滤过环上对偶化复形的存在性定理》，J. Algebra 195 (1997年)，662–679。[WY] Quanshui Wu、Bojuan Yi，《正分次代数上的数值同调正则性》，J. Algebra 686 (2026年)，677–748。[Ye] A. Yekutieli，《非交换分次代数上的对偶化复形》，J. Algebra 153 (1992年)，41–84。[YZ] A. Yekutieli、J.J. Zhang，《具有Auslander对偶化复形的环》，J. Algebra 213 (1999年)，1–51。[Z] J. J. Zhang，《非交换分次代数上的对偶化复形》，J. Algebra 218 (1999年)，401–421。复旦大学数学科学学院，中国上海，200433

电子邮箱地址： qswu@fudan.edu.cn

数学科学学院 ，华东师范大学 ，上海 200241，中国
电子邮箱地址： bjyi@math.ecnu.edu.cn