ModifiedGardner 方程中的弱非线性 Whitham 调制与色散激波

Nese Ozdemir*

马尔马拉大学，计算机工程系，

技术学院，伊斯坦布尔，34840，土耳其

Ali Demirci† 和 Ayse Peker Dobie‡土耳其伊斯坦布尔 34469，伊斯坦布尔技术大学数学工程系、理学与文学学院（日期：2026年11月24日）

arXiv:2611.30484v1 [nlin.PS] 23 Nov 2026

摘要

我们研究修正 Gardner 方程中的弱非线性 Whitham 调制和色散激波（DSW）。通过斯托克斯展开和平均守恒律，推导出一个三方程调制系统。对其特征结构进行微扰分析，得到了双曲性和真正非线性的显式条件，并确定了特征分裂从实数到复数的波数依赖型转变。借助 DSW拟合，考察压缩型黎曼数据的色散分解，并得出谐波边缘速度和孤波边缘速度的解析预测。行波能量分析进一步支持了孤立波的预测。调制特征的数值延拓揭示了弱非线性近似的局限性，而采用傅里叶伪谱法进行的直接数值模拟表明，对于已解析的情形，预测的前缘速度和前导孤波振幅与模拟结果高度吻合。这些结果阐明了修正 Gardner 方程的弱非线性特征结构以及色散冲击波的边缘动力学。

一、引言

非线性陡化与色散之间的竞争，是长波演化中的一种基本机制。当压缩型初始剖面在其无色散近似下形成梯度灾变时，保守的色散正则化可以用一个不断扩展、快速振荡的波列取代由此产生的不连续性，这种现象通常称为色散激波（DSW）。对此类转变的经典描述源于 Gurevich 和 Pitaevskii 对科特韦格–德弗里斯（KdV）方程的研究，以及 Whitham 关于缓慢调制周期波的平均理论 [1, 2]。由此建立的调制框架将振荡内部区域与小振幅谐波边缘及长周期孤波边缘联系起来。随后，人们通过逆谱方法和多相平均方法 [3, 4]，发展了其可积 KdV 形式。这些经典结果提供了基准，但本身并不能确定一般非线性色散守恒律的调制结构。

* nese.ozdemir@marmara.edu.tr

† demircial@itu.edu.tr；通讯作者。

‡ pdobie@itu.edu.tr

在长波渐近中保留高阶非线性贡献，会产生 KdV 型模型的扩展。特别是，扩展 KdV 和扩展–扩展 KdV 近似考虑了传统 KdV 二次截断之外的非线性效应 [5–7]。Norevik 和 Kalisch [8] 研究了单向表面波扩展–扩展 KdV（eeKdV）模型的能量守恒表述。在分层流体流动、等离子体模型和多组分凝聚态中也会出现相关的高阶约化和 Gardner 型约化；在这些系统中，竞争性非线性项之间的平衡会影响波形及其色散演化 [9–12]。Gardner 方程尤其值得关注，因为额外的三次非线性可能改变色散黎曼解的拓扑结构；其波状涌潮理论和强迫流应用已得到详细研究 [9, 10]。柱面和球面 Gardner 模型进一步展示了几何效应如何改变非线性调制 [13, 14]。本文则考虑一个标量、常系数方程，其守恒律通量包含二次、三次和四次非线性项。具体的物理尺度化和保留的渐近项将在第二节 A 中说明；该模型并非旨在描述前述示例所涵盖的所有物理情形。

对于非可积色散方程，通常无法完全对角化有限振幅 Whitham 系统，也无法显式求得其自相似解。El [15]指出，尽管如此，谐波边缘和孤立波边缘处的极限行为仍可在不求解整个调制系统的情况下，给出色散激波转变条件。El 和 Hoe- fer [16]系统地讨论了这种色散激波拟合观点及其假设与局限；后续发展包括广义非可积色散激波构造 [17]以及向 Benjamin–Ono 型非局部色散的扩展 [18]。这些结果凸显了一项重要区别：根据约化色散关系预测边缘速度，远比构造一个整体可接受的有限振幅调制解要求宽松。特别是，仅凭边缘匹配并不能确定内部振荡包络的形状。

调制方程的特征类型引出了一个独立的问题。周期行波的存在并不能保证其缓慢变化的参数满足双曲型调制系统。对于广义 KdV 方程，Johnson、Zumbrun 和 Bronski 以及 Johnson 对平均 Whitham 方程与周期波的长波长谱行为之间的联系进行了研究

以及 Zumbrun [19, 20]。更一般的调制不稳定性判据，以及实特征与复特征之间转变的几何性质，也已得到研究 [21–25]。这种转变具有重要意义，因为实特征速度是通常简单波色散激波构造所必需的局部条件，而复特征则表明这种双曲型描述失效。然而，不能将低阶弱振幅判别式解读为精确的有限振幅谱稳定性边界。

更广泛的色散流体动力学文献进一步表明，调制波列的类型及其可容许性应通过评估确定，而不应想当然地认定。非凸线性色散可在五阶 KdV 型方程中产生辐射型或行进色散冲击波 [26, 27]；调制系统的可容许间断也可能是异宿行波的零色散极限 [28]。Benjamin–Bona–Mahony 色散黎曼问题还呈现出其他波态，包括多相波列和色散冲击波，其特征显著取决于初始阶跃的平滑方式 [29]。这些现象可作为有益的比较，但其色散机制不同于本文研究的三阶局部色散。因此，这些现象仅作为背景，而非当前模型的直接类比。相应地，这些模型中存在双曲—椭圆调制转变或非经典色散冲击波结构，并不意味着当前方程中也会出现相同的波型。

受这些进展的启发，我们研究修正 Gardner 方程

$$v_\tau + f(v)v_\xi + \varepsilon^2 v_{\xi\xi\xi} = 0, \qquad f(v) = v - v^2 + 2v^3, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{1}$$

相应的无色散通量 F，定义为 $F'(v) = f(v)$，是严格凸的，因为对于每个实数 v，$f'(v) = 1 - 2v + 6v^2 > 0$；而曲率 $f''(v) = 12v - 2$ 则会改变符号。因此，该模型使我们能够研究一种调制类型的转变，同时不损失无色散通量的凸性。

本工作的主要贡献有四点。首先，我们通过斯托克斯展开和平均守恒律推导出一个弱非线性三分量 Whitham 系统，并确定其主阶特征分裂、双曲性和真正非线性。其次，我们确定了波数相关判别式

$$\Delta(m, k) = [f'(m)]^2 - 3k^2 f''(m), \tag{2}$$

该方法能够区分转变曲线之外两个合并的调制特征之间的实分裂与复分裂。第三，我们通过

DSW拟合研究压缩型黎曼数据，推导两个边缘速度，并将孤立波边缘与通过行波能量积分获得的精确振幅–速度关系联系起来。第四，我们采用傅里叶伪谱模拟评估前沿传播速度，并将预测的孤波振幅和波峰对齐剖面与多个压缩跃变的直接解进行比较。

本研究的范围仅限于弱非线性调制和边缘拟合。我们不构造全局有限振幅 Whitham 解，也不构造经过全面验证的解析DSW包络；第一节IIIC将讨论这些局限。

本文其余部分安排如下。第II节介绍物理尺度化、行波表述以及弱非线性惠斯曼特征结构。第III节阐述色散黎曼问题及其谐波边缘和孤波边缘条件。第IV节给出数值诊断，并与色散偏微分方程的直接计算结果进行比较。结论总结研究结果的范围，并讨论尚未解决的有限振幅调制和双曲–椭圆跃迁问题。

II. 弱非线性Whitham 调制理论

我们首先说明控制方程的物理起源和无量纲尺度化，并特别关注其推导所依据的渐近假设。随后，我们考察周期行波问题，并构造弱非线性斯托克斯展开，以获得对守恒律进行平均所需的各项量。接着，通过分析由此得到的Whitham调制系统的特征速度和特征向量，我们确定严格双曲性成立的条件、椭圆性的起始条件以及真正非线性的条件。这一框架为下一节所讨论的色散黎曼问题和DSW边缘分析奠定了理论基础。

A. 物理起源与控制方程

本文研究的方程源自扩展–扩展科特韦格–德弗里斯（eeKdV）近似，该近似描述水平底部上方的单向表面重力波。在 Norevik 和 Kalisch 的有量纲表述中， [8], 自由表面位移

$\eta(x,t)$ 相对于未扰动水深 h_0 满足

$$\eta_t + c_w\eta_x + \frac{3c_w}{2h_0}\eta\eta_x - \frac{3c_w}{8h_0^2}\eta^2\eta_x + \frac{3c_w}{16h_0^3}\eta^3\eta_x + \frac{c_w h_0^2}{6}\eta_{xxx} = 0, \qquad c_w = \sqrt{gh_0}, \tag{3}$$

其中， g 表示重力加速度。该形式渐近模型假设流体无黏、不可压且无旋，表面张力和横向效应可忽略，并且以右行长波为主。针对表面波和内波，已有研究推导并分析了保留更高阶非线性修正和色散修正的扩展 KdV 模型，包括其波状涌浪、共振色散激波及孤立波动力学 [5–7, 30]；方程 (3) 仅保留非线性修正。若 a_0 和 Λ 分别表示特征表面位移尺度和水平长度尺度，则相关的无量纲参数为

$$\alpha = \frac{a_0}{h_0}, \qquad \beta = \frac{h_0^2}{\Lambda^2}, \qquad 0 < \alpha \ll 1, \quad 0 < \beta \ll 1. \tag{4}$$

经典 KdV 平衡采用 $\beta = O(\alpha)$，而 eeKdV 近似在特定标度关系 $\beta = O(\alpha^3)$ 下保留二次和三次非线性修正。在原始渐近展开中，被略去的项阶为 $O(\alpha^4,\ \alpha\beta,\ \beta^2)$；因此，式 (3) 应被视为截断模型，而非完整欧拉自由表面问题的精确表述。

为了将这一物理表述与调制分析中使用的数学归一化联系起来，引入任意固定的水平尺度 $L > 0$ 并令

$$\xi = \frac{x - c_w t}{L}, \qquad \tau = \frac{6c_w t}{L}, \qquad \eta(x,t) = 4h_0 v(\xi,\tau), \qquad \varepsilon = \frac{h_0}{6L}. \tag{5}$$

移动坐标消除了以长波波速 c_w进行的线性输运。将式（5）代入式（3）并除以 $24c_w h_0/L$，得到无量纲的修正 Gardner 方程

$$v_\tau + \varepsilon^2 v_{\xi\xi\xi} + vv_\xi - v^2 v_\xi + 2v^3 v_\xi = 0, \tag{6}$$

其中， $0 < \varepsilon \ll 1$ 对应于 $L \gg h_0$。对于截断的 eeKdV 方程而言，该变换是一个精确的变量变换，但它并不能消除该方程最初推导时所依据的物理限制。特别是，对于直接的弱振幅自由表面解释而言，需要满足 $|\eta|/h_0 = 4|v| \ll 1$。因此，后文黎曼问题中考察的有限 $O(1)$归一化状态，是用于研究约化色散模型数学动力学的；在没有额外论证的情况下，不应将其

解释为在定量上有效的小振幅水波状态。此外，仅凭 $\varepsilon \ll 1$并不能保证满足特定的物理阶序 $\beta = O(\alpha^3)$。

我们引入通量函数及其原函数

$$f(v) = v - v^2 + 2v^3, \qquad F(v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{2}v^4, \tag{7}$$

使得 $F'(v) = f(v)$，且（6）式可写成守恒形式

$$v_\tau + \partial_\xi \left(F(v) + \varepsilon^2 v_{\xi\xi} \right) = 0. \tag{8}$$

方程（6）属于具有多项式通量的广义 KdV（gKdV）方程类。对于这一类方程，Whitham 调制方程与周期波长波谱稳定性之间的关系已得到严格确立 [19, 20],非线性调制不稳定性已得到证明 [25], 而孤子沿大尺度背景波传播的情形也已有描述 [31]。具有竞争性二次和三次非线性的 Gardner 型方程，包括受迫、柱面和球面变体，以及用于等离子体波的修正 Gardner 方程，都是密切相关的例子 [9–11, 13, 14]。

在确立控制方程及其通量函数后，我们现在转向构造弱非线性周期波列。

B. 斯托克斯展开与平均 Whitham 系统

现在，我们构造周期行波的斯托克斯展开，并用它对控制方程的守恒律取平均。该过程遵循 Whitham 的平均守恒律方法 [2, 32]；关于其在色散激波理论中的应用，参见参考文献 [16, 33] 。近年来，非可积模型的 Whitham 调制方程及其小振幅极限已被用于确定调制不稳定性和凸性性质 [23, 34]。下文发展的弱非线性调制理论以平均值 m、振幅 a 和波数 k 描述缓慢变化的周期波列。这些量允许在慢变量 (ξ, τ) 尺度上演化，而快速振荡则由相位变量 θ 表示。

设快速相位 θ 满足

$$\theta_\xi = \frac{k(\xi,\tau)}{\varepsilon}, \qquad \theta_\tau = -\frac{\omega(\xi,\tau)}{\varepsilon}, \tag{9}$$

其中， k 和 ω 分别表示局部波数和频率。相容条件 $\theta_{\xi\tau} = \theta_{\tau\xi}$ 立即得到波守恒定律,

$$k_\tau + \omega_\xi = 0. \tag{10}$$

我们寻求如下形式的多尺度展开

$$v(\theta, \xi, \tau) = v_0(\theta, \xi, \tau) + \varepsilon v_1(\theta, \xi, \tau) + \cdots, \tag{11}$$

其中每个 v_j i s 关于 θ 具有 2π-周期性。在主阶，将 (9)–(11) 代入 (6) 得 s

$$-\omega v_{0,\theta} + k^3 v_{0,\theta\theta\theta} + k f(v_0) v_{0,\theta} = 0. \tag{12}$$

引入局部相速度 $c = \omega/k$ ，并对 θ 积分一次，周期行波方程变为

$$k^2 v_{0,\theta\theta} - c v_0 + F(v_0) = C_1, \tag{13}$$

其中 C_1 是一个积分常数。

在构造小振幅展开之前，先将周期行波的存在性与其在缓变扰动下的稳定性区分开来是有益的。将 (13) 乘以 $v_{0,\ \theta}$ 并积分，得到

$$\frac{k^2}{2} v_{0,\theta}^2 + \mathcal{V}(v_0; c, C_1) = E, \qquad \mathcal{V}(v; c, C_1) = \int^v F(s)\,\mathrm{d}s - \frac{c}{2} v^2 - C_1 v, \tag{14}$$

其中 E 沿轨道保持常数。非恒定周期剖面在两个相邻的简单转向点 $v_- < v_+$ 之间振荡，其中 $E - \mathcal{V}(v) > 0$ 适用于 $v \in (v_-, v_+)$。其相位周期为

$$\mathcal{T}_\theta = \sqrt{2}\, k \int_{v_-}^{v_+} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{E - \mathcal{V}(v; c, C_1)}}. \tag{15}$$

对于此处采用的 2π 周期相位约定，参数必须满足 $\mathcal{T}_\theta = 2\pi$。特别地，当 $\mathcal{V}''(m) = f(m) - c > 0$ 时，常值状态 $v_0 = m$ 是行波相平面上的中心。在小振幅极限下，周期条件给出 $f(m) - c = k^2 > 0$，与下文推导的线性相速度关系一致。此相平面条件确立了局部周期轨道的存在性；它并非底层演化方程的动力学稳定性判据。对于 KdV 方程，这些周期轨道是经典的椭圆余弦波 [35]；对于修正 KdV 方程，椭圆余弦波的调制稳定性由相应振子多项式的根结构决定 [36]。

与色散激波调制相关的稳定性，涉及这些周期波列的长波长扰动。下文通过平均 Whitham 方程的特征速度来评估这一稳定性，而非进行完整的 Floquet–Bloch 谱分析。具体而言，对于足够小但非零的振幅，两条在零振幅时重合的惠特汉特征速度的领阶分裂，由式 (2) 中引入的判别式 $\Delta(m,k)$ 控制。 Δ 为正时，领阶特征分支为实且互异； Δ 为负则表明小振幅调制处于椭圆型状态。边界 $\Delta = 0$ 需要进行更高阶分析。因此，后文推导的双曲性条件提供的是一种局部长波调制诊断，不应被解读为对任意扰动波长下谱稳定性的证明。

对于弱非线性周期波，我们引入斯托克斯展开

$$v_0 = m + a\cos\theta + c_4 a^2\cos(2\theta) + O(a^3), \tag{16}$$

以及

$$c = c_0 + a^2 c_2 + O(a^4). \tag{17}$$

这里， $m = m(\xi,\tau)$ 是局部平均值， $a = a(\xi,\tau)$ 是基频谐波振幅，而 $k = k(\xi,\tau)$ 是局部波数。

代入 将 (16)–(17) 代入 (13)，并令各阶谐波平衡，可得

$$c_0 = f(m) - k^2, \qquad c_4 = \frac{f'(m)}{12k^2}, \qquad c_2 = \frac{[f'(m)]^2}{24k^2} + \frac{f''(m)}{8}. \tag{18}$$

对于修正的 Gardner 非线性， $f'(m) = 1-2m+6m^2$ and $f''(m) = 12m-2$，因此$c_4 = (1-2m+6m^2)/(12k^2)$ 和 $c_2 = [(1-2m+6m^2)^2+6k^2(6m-1)]/(24k^2)$。由此，弱非线性色散关系可写为

$$\omega(m,a,k) = k\left[f(m) - k^2 + a^2 c_2(m,k)\right] + O(a^4). \tag{19}$$

其零振幅极限，

$$\omega_0(m,k) = kf(m) - k^3, \tag{20}$$

是小振幅波在缓变平均态 m上传播时的线性色散关系。

调制方程通过对（6）的独立守恒律在快速相位 $[2,\,32]$ 的一个周期内进行平均而得到。对于一个 2π-周期函数 $g(\theta)$，我们采用

记号

$$\langle g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \tag{21}$$

对质量守恒定律 (8) 取平均，并使用斯托克斯近似 (16)，可通过 $O(a^2)$ 得到，

$$m_\tau + \partial_\xi\left[F(m) + \frac{a^2}{4}f'(m)\right] = 0. \tag{22}$$

A se第二个守恒定律可通过将 (6) 乘以 v 得到。它可以写成 s

$$\partial_\tau\left(\frac{v^2}{2}\right) + \partial_\xi\left[H(v) + \varepsilon^2\left(vv_{\xi\xi} - \frac{1}{2}v_\xi^2\right)\right] = 0, \tag{23}$$

其中

$$H'(v) = vf(v), \qquad H(v) = \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{2}{5}v^5. \tag{24}$$

周期平均得到

$$\left(\frac{m^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)_\tau + \partial_\xi\left\{H(m) + \frac{a^2}{4}\left[f(m) + mf'(m) - 3k^2\right]\right\} = 0. \tag{25}$$

方程 (22) 和 (25)，连同波守恒

$$k_\tau + \partial_\xi\left\{k\left[f(m) - k^2 + a^2c_2(m,k)\right]\right\} = 0, \tag{26}$$

构成了守恒形式的弱非线性 Whitham 调制系统，其调制变量为 $\mathbf{q} = (m, a, k)^T$。

为了进行特征分析，将平均系统改写为拟线性形式很有用，

$$\mathbf{q}_\tau + A(\mathbf{q})\mathbf{q}_\xi = 0. \tag{27}$$

保留与 $O(a^2)$ 斯托克斯近似相一致的所有项，可得

$$A = \begin{pmatrix} f + \dfrac{a^2}{4}f'' & \dfrac{a}{2}f' & 0 \\ af' & f - 3k^2 & -3ak \\ kf' + a^2\left(\dfrac{f'f''}{12k} + \dfrac{3k}{2}\right) & \dfrac{a}{12k}\left((f')^2 + 3k^2f''\right) & f - 3k^2 + a^2\left(\dfrac{f''}{8} - \dfrac{(f')^2}{24k^2}\right) \end{pmatrix} + O(a^3), \tag{28}$$

其中，f、f' 和 f'' 均在 m 处取值。

守恒表示 (22)–(26) 与拟线性表示 (27) 各有不同用途。前者保留了平均平衡结构，并将在考虑

不连续调制态时使用；后者则为分析特征速度、双曲性和真正非线性特征场提供了自然框架。

C. 特征结构、双曲性与真正非线性

得到平均调制系统后，我们现在考察其特征结构、双曲性与真正非线性。由于调制矩阵是关于波幅的渐近展开，因此特征速度也需一致地按 a的幂次展开。在零振幅下，系数矩阵化为

$$A_0 = \begin{pmatrix} f(m) & 0 & 0 \\ 0 & f(m) - 3k^2 & 0 \\ kf'(m) & 0 & f(m) - 3k^2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

其特征多项式为

$$\det(A_0 - \lambda I) = \big(f(m) - \lambda\big)\big(f(m) - 3k^2 - \lambda\big)^2. \tag{30}$$

因此，零振幅下的特征速度由单分支和双分支组成，

$$\lambda_1^{(0)} = f(m), \qquad \lambda_2^{(0)} = \lambda_3^{(0)} = f(m) - 3k^2. \tag{31}$$

在引入有限振幅修正时，由于后一对特征速度在 $a = 0$ 处发生简并，因此需要进行简并微扰分析。

对于单特征分支，微扰计算得到

$$\lambda_1 = f(m) + \frac{a^2}{4} f''(m) + O(a^3). \tag{32}$$

利用 $f'(m) = 1 - 2m + 6m^2$和 $f''(m) = 12m - 2$，可得

$$\lambda_1 = m - m^2 + 2m^3 + a^2 \left(3m - \frac{1}{2}\right) + O(a^3). \tag{33}$$

为确定重特征曲线分支，令

$$\lambda_\pm = f(m) - 3k^2 + a s_\pm + a^2 t_\pm + O(a^3). \tag{34}$$

由 $\det(A - \lambda I) = 0$ 得到的第一个非平凡可解性条件为

$$4s_\pm^2 - [f'(m)]^2 + 3k^2 f''(m) = 0. \tag{35}$$

利用判别式 (2)，我们得到

$$s_{\pm} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\Delta(m,k)}, \qquad t_{\pm} = -\frac{\Delta(m,k)}{48k^2}. \tag{36}$$

因此，从双重零振幅分支分岔出的两个特征速度为

$$\lambda_{\pm} = f(m) - 3k^2 \pm \frac{a}{2}\sqrt{\Delta(m,k)} - \frac{a^2}{48k^2}\Delta(m,k) + O(a^3). \tag{37}$$

我们将 $\lambda_2 = \lambda_-$ 和 $\lambda_3 = \lambda_+$分别记为。

对于修正的 Gardner 非线性，判别式可明确写为

$$\Delta(m,k) = (1 - 2m + 6m^2)^2 + 6k^2(1 - 6m). \tag{38}$$

方程（38）给出了决定弱非线性调制系统局部特征类型的主要判据。特别地，当$\Delta > 0$时，λ_2 和 λ_3 互异且为实数；当 $\Delta = 0$时，二者重合；当 $\Delta < 0$时，二者构成共轭复数对。

特征几何也可以用相应的右特征向量来描述。对于第一个特征族，采用一种方便的首阶归一化可得

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{f'(m)}{3k} \end{pmatrix} + O(a). \tag{39}$$

对于从二重特征值分出的两个特征族，将振幅分量归一化为 1 很有用。令 $\sigma = \pm 1$，其中 $\lambda_\sigma = \lambda_\pm$，可得

$$\mathbf{r}_\sigma = \begin{pmatrix} -\dfrac{af'(m)}{6k^2} \\ 1 \\ -\sigma\dfrac{\sqrt{\Delta(m,k)}}{6k} \end{pmatrix} + O(a). \tag{40}$$

这些特征向量确定了 (m, a, k) 调制空间中的局部特征曲线方向。后续分析无需假设存在一组全局黎曼不变量。

特征判别式 (38) 对弱非线性 Whitham 系统进行了直接分类。正如第一节所指出的，由于 $f'(m) = 1 - 2m + 6m^2 > 0$ 对所有实数 m均成立，

Δ 中的符号变化完全与曲率 $f''(m) = 12m - 2$ 以及依赖波数的特征分裂贡献有关。

对于 $m < 1/6$，有 $f''(m) < 0$，因此

$$\Delta(m,k) = [f'(m)]^2 + 3k^2|f''(m)| > 0 \qquad (k > 0). \tag{41}$$

在 $m = 1/6$ 处，依赖波数的贡献消失，因此 $\Delta(1/6, k) = 25/36 > 0$。因此，在当前弱非线性描述下，$m \le 1/6$ 不会发生双曲性丧失。

然而，对于 $m > 1/6$，$f''(m) > 0$，且判别式随波数增加而减小。边界 $\Delta = 0$ 可明确写为

$$k = k_c(m) = \frac{1 - 2m + 6m^2}{\sqrt{6(6m-1)}}, \qquad m > \frac{1}{6}. \tag{42}$$

因此，对于 $m > 1/6$，当 $0 < k < k_c(m)$ 时，有 $\Delta(m,k) > 0$；当 $k > k_c(m)$ 时，有 $\Delta(m,k) < 0$。前一种情形对应于实特征速度，因此调制系统为双曲型；后一种情形则以一对共轭复数调制特征为特征。在 Whitham 描述中，这一转变确定了底层周期波列的小振幅双曲性边界。

条件 $\Delta < 0$ 是当前 Whitham 系统中与弱非线性波列 [24, 32]的调制不稳定性相关的 Lighthill 判据的对应形式。对于 Gardner 方程，相应的非线性 Schr¨odinger 约化表明，波包仅在三次非线性项的系数为正且载波波数足够高时才会不稳定 [37]；(42) 中 $f''(m)$ 的作用以及阈值 $k_c(m)$ 与这一结果一致。Whitham 调制理论中双曲–椭圆转变的几何结构及其与调制方程的符号特征之间的联系，已在参考文献 [21, 22] 中进行了分析。

仅有严格双曲性并不能确定特征场的非线性几何结构。为此，我们定义

$$\mu_j = \nabla\lambda_j \cdot \mathbf{r}_j, \tag{43}$$

其中，梯度是关于调制变量 $\mathbf{q} = (m, a, k)^T$ 求取的。当 $\mu_j \neq 0$ 时，特征场是真正非线性的；当 $\mu_j = 0$ 时，特征场则在参数集上变为线性简并。调制系统的真正非线性丧失

会产生非经典波结构，例如 Gardner 方程中的扭结波和三角波涌 [9], ，并改变孤子–平均流相互作用 [38]；另请参阅参考文献 [16, 34]。

对于第一特征族，(32) 和 (39) 给出

$$\mu_1 = f'(m) + O(a^2). \tag{44}$$

由于 $f'(m) > 0$ 在整个区域内成立，第一特征场在整个弱非线性区域内始终保持真正非线性。

对于其余两个特征族，仍必须保留简并微扰结构。利用 (37) 及相应的特征向量可得

$$\mu_\sigma = \sigma\frac{3}{2}\sqrt{\Delta} + a\left[\frac{[f'(m)]^2}{12k^2} + \frac{f''(m)}{2}\right] + O(a^2), \qquad \sigma = \pm 1. \tag{45}$$

因此，

$$\mu_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{\Delta} + aB(m,k) + O(a^2), \tag{46}$$

$$\mu_3 = +\frac{3}{2}\sqrt{\Delta} + aB(m,k) + O(a^2), \tag{47}$$

其中

$$B(m,k) = \frac{(1-2m+6m^2)^2}{12k^2} + 6m - 1. \tag{48}$$

在零振幅极限下，第二和第三特征场的真正非线性丧失与合并条件 $\Delta = 0$ 相一致。然而，在有限但较小的振幅下，(46)–(47) 中的 $O(a)$ 修正项使形式线性退化条件能够与双曲性边界相分离。特别地，对于 $m \geq 1/6$，有 $B(m,k) > 0$，因此在所考虑的阶数下，$\mu_3 > 0$ 在整个严格双曲区域内成立。另一方面，第二特征场形式上满足退化条件

$$-\frac{3}{2}\sqrt{\Delta(m,k)} + aB(m,k) = 0. \tag{49}$$

弱非线性展开对公式 (49) 的解释施加了额外限制。事实上，式 (16) 中的二次谐波大小为 $c_4 a^2$，因此，其相对于基频谐波的大小可表示为

$$\chi(m,a,k) = \left|\frac{af'(m)}{12k^2}\right|. \tag{50}$$

要获得层次分明的斯托克斯层级，需要满足条件 $\chi \ll 1$ 。特别是，极限 $k \to 0$ 在当前展开中不是一致的，因而不能使用相同的固定振幅渐近分析来解释。

图1总结了三种代表性弱振幅下的特征结构。 $\Delta = 0$ 曲线将双曲区域与椭圆区域分隔开，而直线 $m = 1/6$标示出 $f''(m)$符号的变化。图中同时展示了形式上的 $\mu_2 = 0$ 轨迹以及诊断等值线 $\chi = 0.2$。在所示参数范围内，根据这一保守诊断，第二特征族真正非线性的预期丧失发生在斯托克斯层级已不再充分分离的区域。因此，应将 $\mu_2 = 0$ 曲线视为截断的弱非线性调制系统给出的形式预测，而非稳健的有限振幅退化边界。在所示双曲区域内，不存在相应的 $\mu_3 = 0$ 轨迹。

在严格双曲且真正非线性的区域内，特征特征向量定义了调制空间中的波曲线。若 s 表示满足 $s = \lambda_j$的自相似特征参数，则第 j特征波曲线满足

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds} = \frac{\mathbf{r}_j(\mathbf{q})}{\mu_j(\mathbf{q})}. \tag{51}$$

对于从双重零振幅特征值发出的两个特征族，振幅本身可作为一个方便的局部参数。利用 (40)，波曲线方程的首阶项可化简为

$$\frac{dm}{da} = -\frac{af'(m)}{6k^2}, \qquad \frac{dk}{da} = -\sigma\frac{\sqrt{\Delta(m,k)}}{6k}, \qquad \sigma = \pm 1. \tag{52}$$

对于一条从

$$(m, a, k) = (m_0, 0, k_0), \qquad \Delta(m_0, k_0) > 0, \tag{53}$$

发出的波曲线，局部展开为

$$m(a) = m_0 - \frac{f'(m_0)}{12k_0^2}a^2 + O(a^3), \tag{54}$$

$$k_\sigma(a) = k_0 - \sigma\frac{\sqrt{\Delta(m_0,k_0)}}{6k_0}a + O(a^2). \tag{55}$$

因此，这两个特征族在出现点处的平均值具有相同的二次变化，但在波数方向上呈线性分离。对于 $m_0 > 1/6$，与 $m_0 > 1/6$相关的分支

最初朝 k 增大的方向移动，因此趋向双曲性边界；而 $\sigma = +1$ 分支最初朝 k 减小的方向移动，并进入双曲区域。

第一特征族具有特别简单的领先阶描述。由 (39) 可得 $dk/dm = f'(m)/(3k)$ 和 $da/dm = 0$，因此

$$k^2 - \frac{2}{3} f(m) = \text{const.} \tag{56}$$

方程 (52) 和 (56) 给出了弱非线性调制动力学的特征描述，无需假设存在全局黎曼不变量坐标系。它们还为下一节讨论的自相似调制问题提供了自然的波曲线框架。

III. T　黎曼问题与色散激波拟合

现在我们研究修正 Gardner 方程中压缩性黎曼问题的色散分解。第 II 节的特征分析局部描述了弱非线性周期波列，包括其双曲性性质和特征几何。然而，构造色散激波还需要有关如何将调制振荡区域与两侧的非振荡态相匹配的额外信息。

对于可积方程，这种匹配可以在由适当黎曼不变量 [1, 3, 9] 表示的精确 Whitham 系统中进行表述。在当前情形下，我们不假设存在这样的精确对角表示。相反，我们采用色散激波拟合方法[15, 16], ，从无色散特征速度以及线性色散关系和共轭色散关系中提取谐波边缘和孤立波边缘的信息。随后，我们将得到的边缘预测与弱非线性调制系统的特征结构联系起来加以考察。该拟合方法也已应用于非局部、高阶和非凸色散模型，以及 Benjamin–Bona–Mahony 方程 [7, 18, 26, 29]。

A. 无色散动力学与黎曼问题

考虑如下阶跃初始条件

$$v(\xi,0)=\begin{cases} v_-, & \xi<0,\\ v_+, & \xi>0, \end{cases} \qquad v_->v_+. \tag{57}$$

这两个 常状态取为与色散参数 ε 无关。

在形式上的无色散极限下，控制方程化为标量守恒律

$$v_\tau + F(v)_\xi = 0, \tag{58}$$

其中

$$F(v)=\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{3}v^3+\frac{1}{2}v^4, \qquad F'(v)=f(v)=v-v^2+2v^3. \tag{59}$$

相应的特征速度为 $f(v)$。由于对每个 $v\in\mathbb{R}$， $F''(v) = f'(v) = 1-2v+6v^2 = 6(v-1/6)^2+5/6>0$，无色散通量是严格凸的。

因此，式 (57) 中的递减阶跃在无色散问题中产生一个熵容许压缩激波。其传播速度由拉克斯–休古尼条件确定，

$$s_{\mathrm{RH}}=\frac{F(v_-)-F(v_+)}{v_--v_+}=\frac{1}{v_--v_+}\int_{v_+}^{v_-} f(u)\,\mathrm{d}u. \tag{60}$$

严格凸性意味着拉克斯不等式 $f(v_+) < s_{\mathrm{RH}} < f(v_-)$。

对于小的非零色散，压缩跃变可能由一个扩展的振荡区域来调节。我们采用适用于正三阶色散项的单相 KdV 型色散激波拟合设定：小振幅谐波边缘邻接左状态 v_-，孤立波边缘邻接右状态 v_+。全局匹配的单相色散激波是否存在，是这一拟合构造所采用的假设，而非严格凸性 F 的必然结果。下文将考察其局部一致性及其局限性。

我们分别用 $\xi_h(\tau)$ 和 $\xi_s(\tau)$ 表示它们的轨迹。在自相似色散激波拟合描述中，前缘速度为常数，即 $\xi_h(\tau) \sim s_h\tau$ 和 $\xi_s(\tau) \sim s_s\tau$，其中 s_h 和 s_s 将在下文确定。

兰金–许贡纽速度提供了有用的无色散参照，但它并不等同于任一色散激波边缘速度。

B. DSW边缘拟合：谐波边缘与孤立波边缘

在谐波边缘，振荡振幅趋于零，而局部波数趋近于一个有限值。因此，第二节推导的非线性色散关系化简为

$$\omega_0(m,k) = kf(m) - k^3. \tag{61}$$

相应的群速度为 $\partial_k\omega_0 = f(m) - 3k^2$。

将无色散平均方程与波守恒 [15, 16] 结合，可得到调制方程的谐波边缘约化：

$$m_\tau + f(m)m_\xi = 0, \qquad k_\tau + \partial_\xi\omega_0(m,k) = 0. \tag{62}$$

与无色散分支相关的特征相容关系为

$$\frac{dk}{dm} = \frac{\partial_m\omega_0}{f(m) - \partial_k\omega_0}. \tag{63}$$

代入 (61) 得到 $dk/dm = f'(m)/(3k)$，因此有 $d(k^2)/dm = \frac{2}{3}f'(m)$，积分可得 $k^2 - \frac{2}{3}f(m) = \text{const}$. 该关系与第一特征族在第II节中得到的 (56) 一致。然而，在 DSW拟合中的使用方式不同于对有限振幅 Whitham 系统构造全局特征解。

在孤立波边缘，物理周期波数趋于零。谐波边缘拟合方程的边界条件 $k(v_+) = 0$ 给出

$$k^2(m) = \frac{2}{3}\left[f(m) - f(v_+)\right]. \tag{64}$$

在谐波边缘处（此时 $m = v_-$），对该表达式求值可得

$$k_h^2 = \frac{2}{3}\left[f(v_-) - f(v_+)\right]. \tag{65}$$

谐波边缘速度是在 (v_-, k_h) 处求得的线性群速度，因此

$$s_h = f(v_-) - 3k_h^2 = 2f(v_+) - f(v_-). \tag{66}$$

方程（65）和（66）构成了 DSW 拟合构造对谐波边缘的预测。其推导依赖于零振幅色散关系及相应的简单波匹配假设；无需显式的有限振幅周期波解。

无法利用固定波数斯托克斯展开，将谐波边缘构造直接延伸至孤立波极限。事实上，第二节中得到的二次谐波系数包含奇异因子 k^{-2}，且当 $k \to 0$ 时，弱非线性展开并非一致有效。

~为确定孤立波边缘，我们转而引入共轭波数 k。根据以下关系对线性色散关系进行解析延拓

$$\widetilde{\omega}(m, \widetilde{k}) = -i\omega_0(m, i\widetilde{k}) \tag{67}$$

得到

$$\widetilde{\omega}(m, \widetilde{k}) = \widetilde{k} f(m) + \widetilde{k}^3. \tag{68}$$

调制方程的类似谐波波和孤子极限已针对 Kadomtsev–Petviashvili–Whitham 系统 [39] 进行了分析；在这些极限下，线性波或孤子在无色散平均流上传播。

相应的拟合方程为

$$\frac{d\widetilde{k}}{dm} = \frac{\partial_m \widetilde{\omega}}{f(m) - \partial_{\widetilde{k}} \widetilde{\omega}} = -\frac{f'(m)}{3\widetilde{k}}, \tag{69}$$

~使得 $d(k^2)/dm = -\frac{2}{3} f'(m)$。

在谐波边缘处，共轭波数趋于零，而物理周期~波数保持有限。施加条件 $k(v_-) = 0$ 并积分可得

$$\widetilde{k}^2(m) = \frac{2}{3} \left[f(v_-) - f(m) \right]. \tag{70}$$

在孤立波边缘，

$$\widetilde{k}_s^2 = \frac{2}{3} \left[f(v_-) - f(v_+) \right]. \tag{71}$$

~孤立波边缘速度由（v_+, k_s）处的共轭相速度得到，因此

$$s_s = f(v_+) + \widetilde{k}_s^2 = \frac{2}{3} f(v_-) + \frac{1}{3} f(v_+). \tag{72}$$

由方程（66）和（72）立即可得

$$s_s - s_h = \frac{5}{3} \left[f(v_-) - f(v_+) \right] > 0, \tag{73}$$

由于 $f'(v) > 0$ 和 $v_- > v_+$。因此，拟合构造预测会出现一个扩张的振荡区域。

边缘排序也满足运动学不等式 $f(v_-) - s_h = 2[f(v_-) - f(v_+)] > 0$ 和 $s_s - f(v_+) = \frac{2}{3}[f(v_-) - f(v_+)] > 0$。结合式 (73)，这些就是所采用的色散激波取向下预期的边缘速度不等式。它们是必要的运动学一致性检验，但并非全局可接受的单相调制解的充分条件。

孤立波边缘可以通过原始色散偏微分方程的行波约化独立检验。令 $v(\xi,\tau) = b + w(z)$，其中 $z = (\xi - s\tau)/\varepsilon$ 且 $b = v_+$，其中 $w, w' \to 0$ 作为 $|z| \to \infty$，利用远场条件对行波方程积分一次，得到

$$w'' = (s - f(b))w - \big[F(b+w) - F(b) - f(b)w\big]. \tag{74}$$

再积分一次可得精确的第一积分

$$\frac{1}{2}(w')^2 = \frac{s - f(b)}{2}w^2 - \int_0^w \big[F(b+y) - F(b) - f(b)y\big]\,\mathrm{d}y. \tag{75}$$

对于四次通量 (59)，可得

$$(w')^2 = w^2\left[s - f(b) - \frac{f'(b)}{3}w - \frac{f''(b)}{12}w^2 - \frac{1}{5}w^3\right]. \tag{76}$$

在正孤立波波峰处，$w = A > 0$, $w' = 0$；因此，精确的振幅–速度关系为

$$s = f(b) + \frac{f'(b)}{3}A + \frac{f''(b)}{12}A^2 + \frac{1}{5}A^3. \tag{77}$$

对于当前的非线性，右端关于 A 的导数为

$$\frac{ds}{dA} = \frac{f'(b)}{3} + \frac{f''(b)}{6}A + \frac{3}{5}A^2 > 0 \qquad (A \geq 0). \tag{78}$$

事实上，对于任意实数 b，其二次判别式为 $[f''(b)]^2/36 - 4f'(b)/5 < 0$，而 $f'(b) > 0$。因此，对于每个 $s > f(b)$，都存在唯一的正波峰振幅 A。式 (76) 中的括号项在 $w \geq 0$ 时严格递减，在 $w = 0$ 处为正，并在 $w = A$ 处为零。因此，第一积分支持一个正的同宿孤立波剖面（相差平移）。这验证了存在一个具有拟合速度的孤立波解，但并不能证明全局色散激波在渐近意义上与该解匹配。

共轭波数提供了另一项一致性检验。对 (74) 在 $w = 0$ 处进行线性化，可得到坐标 z 中的指数衰减率 $\sqrt{s - f(b)}$。在拟合得到的~~速度下，根~~据 (72)，$s_s - f(v_+) = k_s^2$，这与共轭色散解释一致。

这类振幅–速度关系也决定了广义 KdV 孤子在缓变背景态 [31, 38]上的运动。

对于压缩型黎曼数据 (57)，孤立波背景为 $b = v_+$。将精确的振幅–速度关系 (77) 与 DSW拟合速度 (72) 结合，得到

$$\frac{f'(v_+)}{3}A_s + \frac{f''(v_+)}{12}A_s^2 + \frac{1}{5}A_s^3 = \frac{2}{3}\left[f(v_-) - f(v_+)\right]. \tag{79}$$

(78) 中确立的严格单调性保证，对于每个下降跃变 $v_- > v_+$，该方程都确定唯一的正振幅 A_s。

令 $d = v_- - v_+ > 0$，并将 (79) 展开为 $d \to 0^+$，得到 $A_s = 2d + O(d^2)$。因此，拟合得到的孤立波振幅恢复了 KdV 型小跃变标度的主阶形式。

C. 谐波边缘双曲性

第一节中推导的特征判别式为谐波边缘提供了另一项判据。在匹配态 (m, k) 处计算该判别式，$= (v_-, k_h)$ 得到

$$\Delta_h = [f'(v_-)]^2 - 3k_h^2 f''(v_-). \tag{80}$$

利用 (65)，得到

$$\Delta_h = [f'(v_-)]^2 - 2f''(v_-)\left[f(v_-) - f(v_+)\right]. \tag{81}$$

Δ_h 的符号决定了弱非线性 Whitham 系统在谐波边缘匹配态处所预测的主阶特征类型。具体而言，$\Delta_h > 0$对应双重零振幅特征分支的实分裂，而$\Delta_h < 0$ 则表明形式小振幅展开中出现复分裂。

对于 $v_- \le 1/6$，有 $f''(v_-) \le 0$，因此 $\Delta_h > 0$。对于 $v_- > 1/6$，谐波边缘判别式通过 $f(v_+)$ 依赖于跃变。

若可容许区间 $v_+ < v_-$ 内存在临界右态，则该态由下式隐式确定：

$$f(v_+^{\mathrm{crit}}) = f(v_-) - \frac{[f'(v_-)]^2}{2f''(v_-)}. \tag{82}$$

由于 f 严格递增，只要右侧在所选右侧状态区间上的 f 值域内，就存在唯一的临界状态。

对于固定的 $v_- > 1/6$，当 $v_+ > v_+^{\mathrm{crit}}$ 时，形式特征分类为 $\Delta_h > 0$；当 $v_+ < v_+^{\mathrm{crit}}$ 时，则为 $\Delta_h < 0$。

k_h^2 的正性以及式（73）中的边缘速度排序，对每个下降跃变都成立，与 Δ_h 的符号无关。因此，拟合运动学和局部弱非线性双曲性是彼此不同的要求。特别是，$\Delta_h > 0$ 本身并不足以构成全局色散激波可容许性判据，而 $\Delta_h < 0$ 也不能证明所有色散分解都不存在。事实上，在含量子液滴的凝聚体中，即使无色散流体力学方程跨越双曲—椭圆阈值，色散激波仍被发现能够持续存在，并伴有额外的波型 [40]，；此外，Gardner 型方程还允许三角波涌、孤子波涌和扭结波取代经典色散激波 [9, 10]。

在 $a = 0$，调制矩阵有一个重特征值，因此在精确匹配态处并非严格双曲。条件 $\Delta_h > 0$ 则确保该双分支在远离退化阈值处、振幅足够小且为正时，发生实且彼此不同的分裂。

等式 $\Delta_h = 0$ 标志着主阶特征分裂发生简并。仅凭这一点，不应将其解释为精确的有限振幅调制不稳定性阈值。在这一简并附近，特征值的常规微扰展开并非一致有效，因此需要单独进行局部分析，以解析这一转变。

为将前述分析与数值研究联系起来，考虑代表性的黎曼数据 $v_- = 0.4$ 和 $v_+ = 0.2$。对于这些状态，$f(v_-) = 0.368$ 和 $f(v_+) = 0.176$。谐波边缘波数为 $k_h = \sqrt{0.128} \simeq 0.3578$，而色散激波拟合得到的边缘速度为 $s_h = -0.016$ 和 $s_s = 0.304$。作为比较，无色散激波速度为 $s_{\mathrm{RH}} = 4/15 \simeq 0.2667$。因此，$s_h < s_{\mathrm{RH}} < s_s$。

谐波边缘判别式取值为 $\Delta_h = 0.2704 > 0$。所选匹配态满足正判别式条件，因此对于足够小的正振幅，允许出现实特征分裂。在精确的零振幅状态下，严格双曲性不成立。

对于固定左状态 $v_- = 0.4$，由 (82) 得到的临界右态约为 $v_+^{\mathrm{crit}} \simeq 0.1422$。参考跃变 $v_- = 0.4$, $v_+ = 0.2$ 位于该阈值的正判别式一侧。对于同一跃变，拟合孤波速度 $s_s = 0.304$ 和背景态 $b = 0.2$ 代入 (77) 得到 $A_s \simeq 0.3947$，对应于一个

波峰值 $v_{\mathrm{crest}} = v_+ + A_s \simeq 0.5947$。这是一次行波一致性检验，并非对偏微分方程模拟中前导波峰的独立测量。

这些解析值将作为数值研究的基准。特别是，孤立波边缘速度提供了可直接测量的传播特征，而谐波边缘位置则需要对小振幅振荡尾部作更细致的解释。

上述构造结合了两种互补的渐近描述。弱非线性 Whitham 系统刻画局部周期波调制，包括双曲性和真正非线性；而 DSW拟合则通过色散关系和匹配条件确定极限边缘速度。

不应将这些描述视为调制问题的精确全局解。

特别是，斯托克斯展开受第二谐波相对大小的控制，该大小由式（50）中引入的指标 $\chi(m, a, k)$ 衡量。要求$\chi \ll 1$ 限制了可定量使用截断Whitham系统的有限振幅区域。当 $k \to 0$ 时，该指标的奇异行为使固定振幅斯托克斯展开无法一致地延伸至孤立波边缘。

此外，近似系统的特征积分曲线描述的是局部调制方向，而不是一个经过独立确立的全局自相似DSW解。因此，从谐波边缘态出发的特征波曲线的存在性，本身并不能确立其与孤立波边缘之间的完整匹配。同样，式（76）中同宿行波的存在性证实了一个相容的孤立波族，但并未提供缺失的全局调制连接。

在解释数值谐波边缘位置时，这一区分尤为重要。在精确的可积Whitham描述中，边缘可以通过适当调制不变量的合并来确定。对于当前的近似系统，尚未建立相应的精确全局合并条件。因此，从直接数值解中提取的基于阈值的谐波边缘位置，不一定与通过DSW拟合预测的形式边缘轨迹完全一致。必须结合数值分辨率、边缘检测判据以及基础渐近假设的有效性，对这种差异进行评估。

因此，下一节中的数值研究将区分三个

信息层次：解析 DSW 拟合预测、弱非线性 Whitham 系统的局部特征曲线性质，以及直接从色散偏微分方程的解中测得的传播特征。

IV. 调制动力学的数值研究

前面的分析已经建立了对色散动力学的两种互补描述。弱非线性 Whitham 系统给出了调制周期波的局部特征结构，而 DSW 拟合构造则为谐波边缘和孤立波边缘的速度提供了渐近预测。现在，我们考察这些结果在定量上的影响，并评估其与修正 Gardner 方程直接数值解的一致性。

数值研究围绕三个相关问题展开。首先，我们确定从给定谐波边缘态进行特征延拓时，在斯托克斯展开不再具有渐近可靠性之前，是否会遇到双曲性丧失或真正非线性丧失。其次，我们考察谐波边缘特征结构如何依赖于黎曼数据。第三，我们利用直接数值模拟评估 DSW 拟合对前缘速度的预测，并通过行波约化评估前导孤立波的振幅和空间剖面。

我们有意区分这些比较。对截断特征方程进行数值积分，用于检验近似调制模型的内部行为；而直接积分控制偏微分方程，则为预测的色散激波传播提供独立评估。

A. 特征曲线延拓与黎曼数据依赖性

我们从压缩型黎曼数据 $v_- = 0.4$, $v_+ = 0.2$ 开始。谐波边匹配条件 (65) 给出 $k_h = \sqrt{0.128} \simeq 0.3578$，相应的判别式为 $\Delta_h = 0.2704 > 0$，因此初始状态位于主阶特征分类的严格双曲区域内。

我们将 λ_3 波曲线方程（52）与 $\sigma = +1$结合进行积分，从 $m(0) = v_-$ 和$k(0) = k_h$开始，并将其限制在满足 $\Delta > 0$ 和 $k > 0$的状态上。除了判别式之外，

我们监测 tr　　由（47）得到的截断真正非线性系数记为 μ_3^{tr}。

通过式（50）中引入的指标$\chi(m,a,k)$监测斯托克斯近似的适用性。当 χ 达到规定值 $\chi_* = 0.2$时，终止延拓；若此前发生双曲性丧失或真正非线性失效，则提前终止。该阈值是数值一致性准则，并非旨在界定严格的数学有效性边界。

图 2 展示了沿计算得到的特征曲线， Δ、 μ_3^{tr}和 χ 的演化情况。判别式始终严格为正，并沿轨迹增大。截断的真正非线性系数也始终为正。因此，在达到规定的斯托克斯阈值之前，未检测到特征合并，也未检测到真正非线性系数变为零。

终端状态约为 $a_{\mathrm{end}} = 0.1948$、 $m_{\mathrm{end}} = 0.3650$、 $k_{\mathrm{end}} = 0.2946$，其中$\Delta_{\mathrm{end}} = 0.5238$ 且$\mu_{3,\ \mathrm{end}}^{\mathrm{tr}} = 1.5313$。

这项计算的意义不在于截断后的特征曲线到达了孤立波边缘，而在于它确定了沿选定的局部延拓前进时，几个相互竞争的限制条件中哪一个最先起作用。对于当前数据，首先遇到的是斯托克斯一致性条件，而非所考虑的两个特征退化中的任一个。这一观察与波数趋近于零时弱非线性展开呈现的非一致性相符。

接下来固定 $v_- = 0.4$ ，并改变右状态 v_+。由 (81) 可得 $\Delta_h(v_+) = 5.6 f(v_+) - 0.7152$。由于 $f'(v) > 0$，该函数严格递增；它在所考虑区间内的唯一零点即为临界状态 (82)， $v_+^{\mathrm{crit}} \simeq 0.1422$。

条件 $\Delta_h > 0$ 对于 $v_+ > v_+^{\mathrm{crit}}$ 成立，而 $\Delta_h < 0$ 对于 $v_+ < v_+^{\mathrm{crit}}$ 成立。后一范围对应于截断的小振幅惠特汉系统中非实的特征分裂。此分类针对的是近似调制方程，不应将其解读为底层无色散通量 F 凸性的丧失。

图3展示了谐波边缘判别式和波数对v_+的依赖关系，以及相应λ_3 特征延拓终点处的判别式和振幅。

参数研究包含 180 个具有正判别式 Δ_h 的零振幅匹配状态。在每次计算得到的延拓中，均达到预设的斯托克斯阈值，且此前未检测到双曲性丧失或真正非线性丧失。终端判别式

保持为正，而当右状态趋近左状态时，终端振幅逐渐减小。

代表性数值列于表 I 中。谐波边缘速度和孤立波边缘速度分别根据 DSW 拟合表达式（66）和（72）计算。列出这些速度是为了将特征分类与振荡区域的宏观传播预测联系起来。

这些结果带来两点观察。首先，正判别式边界限制了能够启动所选实特征分裂的黎曼数据。它并非形成色散激波的普适阈值。其次，在规定的斯托克斯判据下，不同允许状态所能达到的振幅范围差异显著。

这些发现刻画了截断调制模型的内部结构及其局限性，但并未确立谐波边缘与孤立波边缘之间的全局匹配。

B. 直接数值模拟与前沿比较

现在我们转而研究完整的色散方程（8），其参考状态为 $v_- = 0.4$ 和 $v_+ = 0.2$。

通过平滑过渡来近似不连续的黎曼数据。引入一个相距较远的补偿过渡，以构造与傅里叶伪谱离散相容的周期初始数据。采用四阶指数时间差分龙格–库塔方法（四阶指数时间差分龙格–库塔方法）推进数值解，其中线性色散算子在傅里叶空间中表示，非线性通量则通过伪谱方法计算[41–43]。同一伪谱 ETDRK4 方法已应用于柱面和球面几何下的 Gardner 型方程 [13, 14]

模拟采用 $\varepsilon = 0.020$、0.010 和 0.005 这几个参数值；前两种情况下使用 $N = 2^{15}$ 个空间网格点，色散参数最小时使用 $N = 2^{16}$ 个空间网格点。后一种情况下提高分辨率，是因为振荡尺度更短，而且初步计算中观察到了分辨率敏感性。

图 4 显示了 $\tau = 100$ 处的数值剖面。解呈现出一个延展的振荡区域，其局部波长随色散参数增大而减小。同时，前导振荡结构的宏观位置仍接近

DSW 拟合预测。

剖面对比主要是定性的：前沿位置一致并不意味着快速振荡解逐点收敛。即使大尺度包络仍然相近，微小的相位偏差也可能导致显著的逐点差值。

对于参考跃变，由 (72) 预测的孤立波边缘速度为 $s_s^{\mathrm{th}} = 0.304$。为估算直接数值模拟中的对应速度，我们跟踪前沿振荡极大值的位置 $\xi_{\mathrm{peak}}(\tau)$。在 $50 \le \tau \le 100$ 内，其轨迹可用最小二乘拟合 $\xi_{\mathrm{peak}}(\tau) = s_s^{\mathrm{num}}\tau + b$近似。

图 5(a) 将所得轨迹与理论参考线 $\xi = s_s^{\mathrm{th}}\tau$ 进行了比较。相应的位置残差 $R(\tau) = \xi_{\mathrm{peak}}(\tau) - s_s^{\mathrm{th}}\tau$ 见图 5(b)。

拟合得到的传播速度及其相对于理论预测的偏差列于表 II。

在所有三种情况下，测得的速度与理论预测的差异均小于百分之一。此外，相较于传播速度的大小，这些速度随所选色散参数的变化幅度很小。

这一吻合支持关于前缘速度的 DSW 拟合预测。不过，速度吻合必须与边缘绝对位置的吻合区分开来：残差分解为 $R(\tau) = (s_s^{\mathrm{num}} - s_s^{\mathrm{th}})\tau + b$，因此既包含有限位置偏移，也包含速度差异带来的贡献。

后期轨迹近似呈线性，表明在拟合区间内传播速度近似恒定。然而，随着 ε 减小，相对误差并未单调下降。因此，现有数据无法确定 ε中的渐近收敛速率。

接下来讨论分辨率敏感性。傅里叶伪谱模拟色散激波的精度取决于对动力学上最具显著性的最短波长的分辨能力。随着 ε减小，这一要求变得越来越严格。

针对 $\varepsilon = 0.005$进行了单独的分辨率比较。在 $N = 2^{15}$ 和$\Delta\tau = 0.005$条件下，测得的前沿极大值速度约为 0.3771，而采用 $N = 2^{16}$ 和 $\Delta\tau = 0.0025$ 的计算结果为 0.3057。

相对于 DSW 拟合预测，相应的相对误差分别约为 24.0% 和 0.565%。较低分辨率的解还表现出

振荡区域内明显的不规则性。

对比结果表明，前缘测量可能对数值分辨率敏感。由于空间和时间分辨率是同时提高的，这些实验无法分别量化空间和时间离散化误差。此外，这些实验也不构成完整的收敛性研究。

两次计算中二次不变量的相对漂移均较小，最大值分别约为 1.91×10^{-6} 和 7.23×10^{-7}。这些诊断指标虽有用，但仅凭它们不足以确定所解析振荡剖面的精度。尤其是，两个数值剖面之间的显著差异表明，积分量近似守恒并不能保证逐点精度。

因此，在前缘对比中保留高分辨率的 $\varepsilon = 0.005$结果，而将低分辨率计算视为数值敏感性测试，而非物理调制区域。

最后，式（66）预测的谐波边缘速度尚未像孤立波边缘速度那样得到同等程度的独立验证。在谐波边缘附近，振荡振幅连续趋于零，因此数值边界的位置取决于检测判据和可用分辨率。更重要的是，截断的弱非线性 Whitham 系统并未给出精确的全局自相似解，因而无法通过调制不变量的合并来确定其谐波边界。因此，现有结果尚不能证明谐波边缘轨迹在定量上吻合。

C. 孤立波振幅与剖面验证

前述比较证实了 DSW 拟合预测前导振荡结构传播速度的准确性。更严格的评估方法是考察同一构造是否也能预测前导孤立波的振幅和空间剖面。这提供了互补的验证，因为孤立波振幅和剖面是通过原始色散方程的行波约化确定的，而非直接拟合数值解得到的。

对于压缩跃变 $v_- > v_+$，将 DSW拟合速度 s_s 与精确的

振幅–速度关系 (77) 结合起来。等价地，预测的正振幅 A_s 是方程 (79) 的唯一解。相应的剖面由 (74) 得出，并满足 $w(0) = A_s$、$w'(0) = 0$，且 $w(z) \to 0$ 当 $|z| \to \infty$，无需对偏微分方程解的振幅或宽度进行调整。

我们固定 $v_- = 0.4$ 并取 $v_+ \in \{0.15, 0.20, 0.25, 0.30\}$。模拟采用 $\varepsilon = 0.01$，直至 $\tau = 100$，使用傅里叶伪谱ETDRK4格式、 $N = 2^{16}$ 个点，以及$\Delta\tau = 0.0025$。

主导数值振幅测得为 $A_{\mathrm{PDE}} = v_{\mathrm{crest}}^{\mathrm{PDE}} - v_+$，相对误差为$E_A = 100|A_{\mathrm{PDE}} - A_s|/A_s$。通过以下方式比较波峰对齐剖面 v_{PDE} 和 v_{sol}：

$$E_2 = 100\frac{\|v_{\mathrm{PDE}} - v_{\mathrm{sol}}\|_2}{\|v_{\mathrm{sol}} - v_+\|_2}, \qquad E_\infty = 100\frac{\|v_{\mathrm{PDE}} - v_{\mathrm{sol}}\|_\infty}{A_s},$$

在以波峰为中心的共同窗口内。

结果汇总于表 III和图6。随着右状态从 0.15 增至 0.30，预测振幅由约 0.4898 降至 0.1993。相应的数值振幅也紧密遵循相同的变化趋势，相对误差介于 0.33% 至 2.02% 之间。吻合不仅体现在波峰振幅上：对于所有四种情况， L^2 度量下的相对轮廓误差均低于 1.54%， L^∞ 度量下均低于 2.06%。

随着跃变幅度减小，所考察的右侧状态中的误差呈现系统性下降。对于同一序列，谐波边缘判别式 Δ_h 从 0.0366 增至 0.7632。特别是，情形 $v_+ = 0.15$接近式 (82) 中确定的正判别式边界，且差异最大。这种相关性与接近退化特征极限时预期会不断增强的敏感性相一致。尽管如此，跃变幅度与 Δ_h 同时变化，因此目前的比较尚不能确定近似误差是否单独依赖于判别式。

图 7 展示了对参考跃变 $v_- = 0.4, v_+ = 0.2$的更详细比较。拟合速度 $s_s = 0.304$ 通过式 (77) 确定理论振幅 $A_s \simeq 0.3947$，对应的预测波峰值约为 0.5947。数值振幅约为 0.3999；在整列波的尺度下，对齐波峰后的理论与数值剖面几乎无法区分。

图 7(b) 中的逐点差值主要集中在波峰附近，并且在整个比较窗口内保持为 10^{-3} 量级。对于这一参考情形，相对

轮廓误差在 L^2 和 L^∞ 度量下分别约为 1.01% 和 1.38%。波峰附近的小幅残余振荡可能反映了数值分辨率效应，也可能是因为前导波嵌入在调制色散波列中，而非作为孤立波存在。

这些比较为色散激波拟合与行波构造的结合提供了定量一致性检验。前缘速度决定了孤立波振幅和剖面；对于所研究的黎曼数据族，两者均与直接色散模拟高度吻合。用于剖面对比的波峰对齐消除了绝对位置差异，因此不应将这些轮廓误差解读为传播速度的额外测量。后者在第四节 B 中独立评估。此外，这种吻合并不能证明存在全局有效的有限振幅 Whitham 解，也不能为完整色散激波建立严格的匹配定理。

综合分析支持一个有限的结论。对于选定的压缩型黎曼数据，正振幅特征延拓在达到施加的 Stokes 一致性阈值 $\chi_* = 0.2$ 之前，始终保有实且互异的分支，并且截断的真正非线性系数始终非零；与此同时，直接色散模拟得到的前缘速度接近 DSW 拟合预测。独立预测的孤波振幅和波峰对齐剖面同样与所研究跳跃族的偏微分方程解定量吻合。该构造并未证明在整个振荡区域内存在一致有效的有限振幅 Whitham 解。

五、结论

我们研究了含有二次、三次和四次非线性通量项的修正 Gardner 方程中的弱非线性 Whitham 调制，以及压缩型黎曼数据的色散分解。通过斯托克斯展开和平均守恒律，我们推导出一个三分量 Whitham 系统，并分析了其特征速度的微扰分裂，从而区分了周期行波的存在性与其慢调制的双曲性和真正非线性。

一个主要结果是依赖波数的特征类型变化，其主阶由判别式 (2) 决定。由于 $f'(m) > 0$ 对所有实数 m 均成立，相关的无色散通量 F 严格凸；因此，特征类型变化并非源于

F的凸性丧失，而是源于曲率 $f''(m)$ 与载波波数之间的相互作用。对于 $m \le 1/6$，对所有正波数，领阶分裂始终为实数。对于 $m > 1/6$，曲线 $k = k_c(m)$ 在弱非线性近似下将双曲区域 $\Delta > 0$ 与椭圆区域 $\Delta < 0$ 分隔开来。在谐波边缘匹配态处，同一判别式给出依赖于跃变的局部诊断量，但不应将其与判断色散激波是否存在或是否可接受的全局判据混为一谈：在振幅为零时，相关特征值是重根，且在 $\Delta = 0$ 附近展开是非一致的。

对于压缩型黎曼数据，DSW拟合无需求得全局有限振幅 Whitham 解，即可得到显式的谐波边缘和孤立波边缘速度。孤立波边缘还受到精确行波能量关系的约束。对于本文考察的已充分分辨情形，傅里叶伪谱模拟支持所预测的前缘速度，速度相对偏差低于百分之一。针对四种右状态 $v_- = 0.4$，对前导孤立波振幅和波峰对齐剖面进行的独立比较表明，振幅相对误差约为 0.33% 至 2.02%，波峰对齐后的相对 L^2 误差低于 1.54%，相对 L^∞ 误差低于 2.06%。波峰对齐不能独立验证波速，而分辨率不足可能导致显著的边缘跟踪误差。因此，数值结果支持的是前缘拟合预测，而非对振荡内部区域的 Whitham 描述具有均匀精度。具体而言，目前尚未建立定量的谐波边缘轨迹，也未建立全局解析DSW包络。

未来的研究方向包括在 $\Delta = 0$ 附近进行特异极限分析，借鉴在扩展 KdV 方程 [37] 的不稳定性边界处推导出的修正非线性薛定谔约化 ¨，以及参考文献 [21, 22], 中将振幅与距转变曲线的距离相联系的双曲–椭圆跃迁分析，以确定表观的类型变化在高阶下是持续、偏移还是得到正则化，并阐明它与长波谱稳定性 [19, 20, 25] 的关系，而不预设这两个边界在有限振幅下重合。第二个方向是构建并验证完整的有限振幅 Whitham 系统。对于 gKdV 型方程，该系统可通过行波势 [19, 32], 的周期积分表示，并纳入其谐波和孤立波退化情形，以检验两个色散激波边缘能否由可容许的自相似调制连接起来。最后，研究临界谐波边缘判别式附近的黎曼数据，并进行独立的空间与时间收敛性测试，将有助于阐明变化如何

影响局部调制类型的变化如何影响可观测波型。这些问题是对当前边缘拟合分析的延伸，而非取而代之。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在可能影响本文所报告研究的已知经济利益冲突或个人关系。

致谢

本研究获得伊斯坦布尔技术大学科研项目办公室（ITU BAPSIS）资助，资助编号为 TGA-2025-46559。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

[1] A. V. Gurevich 和 L. P. Pitaevskii，《无碰撞激波的非定常结构》，《苏联物理学报》38，291（1974）。

[2] G. B. Whitham，《非线性色散波》，《伦敦皇家学会会刊：A辑》283，238（1965）。

[3] H. Flaschka、M. G. Forest 和 D. W. McLaughlin，《科尔特韦格–德弗里斯方程的多相平均与逆谱解》，《纯粹与应用数学通讯》33，739（1980）。

[4] G. A. El，《Whitham–KdV 层级的生成函数及柯西问题的有效解》，《物理快报A》222，393（1996）。

[5] T. R. Marchant 和 N. F. Smyth，《高阶科尔特韦格–德弗里斯方程的波纹激波解》，《物理学杂志A：数学与一般物理》39，L563（2006）。

[6] B. Martin, D. Tseluiko, 和 K. Khusnutdinova，《Serre 方程中中等振幅孤立波及其色散辐射：扩展 KdV–Whitham 近似》，《应用数学研究》157，e70283（2026）。

[7] S. Baqer、T. P. Horikis 和 D. J. Frantzeskakis，《浅水非凸色散流体动力学：扩展 KdV 模型》，Water Waves 7，225（2025）。[8] A. M. Norevik 和 H. Kalisch，《eeKdV 方程中能量守恒的表述》，Applied Numerical Mathematics 199，153（2024）。[9] A. M. Kamchatnov、Y.-H. Kuo、T.-C. Lin、T.-L. Horng、S.-C. Gou、R. Clift、G. A. El 和 R. H. J. Grimshaw，《Gardner 方程的波状涌潮理论》，Physical Review E 86，036605（2012）。[10] A. M. Kamchatnov、Y.-H. Kuo、T.-C. Lin、T.-L. Horng、S.-C. Gou、R. Clift、G. A. El 和 R. H. J. Grimshaw，《地形上分层流体的跨临界流：受迫 Gardner 方程分析》，Journal of Fluid Mechanics 736，495（2013）。[11] J. Tamang 和 A. Saha，《三组分电子-离子等离子体中 mKdV 方程和修正 Gardner 方程的小振幅超非线性波的分岔》，Physics of Plasmas 27，012105（2020）。[12] A. M. Kamchatnov、Y. V. Kartashov、P.-´E. Larr´e 和 N. Pavloff，《双组分玻色–爱因斯坦凝聚体中的非线性极化波》，Physical Review A 89，033618（2014）。[13] G. Aslanova、S. Ahmetolan 和 A. Demirci，《柱面 Gardner 方程中周期波的非线性调制》，Physical Review E 102，052215（2020）。[14] G. Aslanova、A. Demirci 和 S. Ahmetolan，《球面 Gardner 方程中的调制周期波列》，Wave Motion 109，102844（2022）。[15] G. A. El，《弱色散修正的双曲型系统中的激波消解》，Chaos 15，037103（2005）。[16] G. A. El 和 M. A. Hoefer，《色散激波与调制理论》，Physica D: Non-线性现象 333，11（2016）。[17] A. M. Kamchatnov，《非可积方程的色散激波理论》，Physical Review E 99，012203（2019）。[18] G. A. El、L. T. K. Nguyen 和 N. F. Smyth，《Benjamin–Ono 型非局域色散系统中的色散激波》，《非线性》31，1392（2018）。[19] M. A. Johnson、K. Zumbrun 和 J. C. Bronski，《通过 Bloch 分解研究周期广义 Korteweg–de Vries 波的调制方程与稳定性》，《物理学D辑》239，2057（2010）。

[20] M. A. Johnson 和 K. Zumbrun，广义 Korteweg–de Vries 方程的 Whitham 调制方程的严格论证，《应用数学研究》125，69（2010）。[21] T. J. Bridges 和 D. J. Ratliff，Whitham 调制理论中的椭圆—双曲转变，《SIAM 应用数学杂志》77，1989（2017）。[22] T. J. Bridges 和 D. J. Ratliff，Krein 签名与 Whitham 调制理论：特征速度的符号及“符号特征”，《应用数学研究》142，314（2019）。[23] A. L. Binswanger、M. A. Hoefer、B. Ilan 和 P. Sprenger，广义 Whitham 方程的 Whitham 调制理论及调制不稳定性的一般判据，《应用数学研究》147，724（2021）。[24] M. J. Lighthill，非线性色散系统中的波动理论研究，《IMA 应用数学杂志》1，269（1965）。[25] J. Jin、S. Liao 和 Z. Lin，色散偏微分方程模型的非线性调制不稳定性，《理性力学与分析档案》231，1487（2019）。[26] P. Sprenger 和 M. A. Hoefer，非凸色散色散流体力学中的激波，《SIAM 应用数学杂志》77，26（2017）。[27] M. A. Hoefer、N. F. Smyth 和 P. Sprenger，非线性共振五阶 Korteweg–de Vries 方程的非经典行进色散激波的调制理论解，《应用数学研究》142，219（2019）。[28] P. Sprenger 和 M. A. Hoefer，Whitham 调制方程的间断激波解作为行进波的零色散极限，《非线性》33，3268（2020）。[29] T. Congy、G. A. El、M. A. Hoefer 和 M. Shearer，Benjamin–Bona–Mahony 方程的色散黎曼问题，《应用数学研究》147，1089（2021）。[30] S. Baqer 和 N. F. Smyth，高阶 Korteweg–de Vries 方程所描述的 Whitham 激波与共振色散激波，《英国皇家学会会刊 A 辑》479，20220580（2023）。[31] A. M. Kamchatnov 和 D. V. Shaykin，广义 Korteweg–de Vries 孤子沿大尺度波的传播，Physical Review E 108，054205（2023）。[32] G. B. Whitham，《线性波与非线性波》（Wiley，纽约，1974）。[33] A. M. Kamchatnov，《非线性周期波及其调制：入门课程》（世界科学出版社，新加坡，2000）。

[34] M. A. Hoefer 和 A. Vainchtein，具有三次非线性的正则化 Boussinesq 方程的 Whitham 调制方程，《非线性波杂志》2，1（2026）。[35] T. B. Benjamin 和 M. J. Lighthill，关于椭圆余弦波与涌波，《伦敦皇家学会会刊：A辑》224，448（1954）。[36] C. F. Driscoll 和 T. M. O'Neil，修正 Korteweg–de Vries 方程椭圆余弦波解的调制不稳定性，《数学物理杂志》17，1196（1976）。[37] R. Grimshaw、D. Pelinovsky、E. Pelinovsky 和 T. Talipova，弱非线性长波模型中的波群动力学，《物理学D辑》159，35（2001）。[38] K. van der Sande、G. A. El 和 M. A. Hoefer，非凸通量下的动态孤子—平均流相互作用，Journal of Fluid Mechanics 928，A21（2021）。[39] G. Biondini、M. A. Hoefer 和 A. Moro，KP–Whitham 方程的可积性、精确约化与特殊解，《非线性》33，4114（2020）。[40] S. Chandramouli、S. I. Mistakidis、G. C. Katsimiga 和 P. G. Kevrekidis，一维含液滴环境中的色散激波，Physical Review A 110，023304（2024）。[41] L. N. Trefethen，《MATLAB中的谱方法》（工业与应用数学学会，费城，2000）。[42] S. M. Cox 和 P. C. Matthews，刚性系统的指数时间差分，《计算物理学杂志》176，430（2002）。[43] A.-K. Kassam 和 L. N. Trefethen，刚性偏微分方程的四阶时间步进，《SIAM科学计算杂志》26，1214（2005）。

表格

表 I. 所选右侧状态 v_+（$v_- = 0.4$）对应的谐波边缘量、DSW拟合边缘速度和终端特征曲线振幅。终端振幅对应于 $\chi = 0.2$。边缘速度是解析拟合预测，而非通过直接偏微分方程解测得的量。

v_+	k_h	Δ_h	s_h	s_s	a_{end}
0.15	0.394757	0.0366	-0.0995	0.290083	0.284161
0.20	0.357771	0.2704	-0.0160	0.304000	0.194808
0.30	0.263312	0.7632	0.1600	0.333333	0.089512

表 II. 数值测得的 $v_- = 0.4$ 和 $v_+ = 0.2$的前缘传播速度。回归区间为 $50 \le \tau \le 100$，理论参考速度为 $s_s^{\mathrm{th}} = 0.304$。百分比误差为 $100|s_s^{\mathrm{num}} - s_s^{\mathrm{th}}|/|s_s^{\mathrm{th}}|$。

ε	N	s_s^{num}	b	误差（%）
0.020	2^{15}	0.30526	-0.46911	0.413
0.010	2^{15}	0.30584	-0.27081	0.607
0.005	2^{16}	0.30572	-0.15210	0.565

表 III. 对于 $v_- = 0.4$、 $\varepsilon = 0.01$ 和 $\tau = 100$，DSW 拟合孤立波预测与直接偏微分方程模拟的比较。这里， s_s 是理论前缘速度， A_s 由式 (79) 得到， A_{PDE}、 E_A、 E_2 和 E_∞ 在正文中定义。量 Δ_h 是谐波边缘特征判别式。

v_+	s_s	A_s	A_{PDE}	E_A (%)	E_2 (%)	E_∞ (%)	Δ_h
0.15	0.290083	0.489808	0.499689	2.0175	1.5339	2.0531	0.03660
0.20	0.304000	0.394683	0.399851	1.3094	1.0082	1.3802	0.27040
0.25	0.318250	0.297722	0.299167	0.4855	0.3797	0.5839	0.50980
0.30	0.333333	0.199317	0.198658	0.3308	0.2743	0.3827	0.76320

图

为便于审阅，所有图均置于参考文献之后。它们属于正文的一部分，并按在文中引用的先后顺序连续编号。

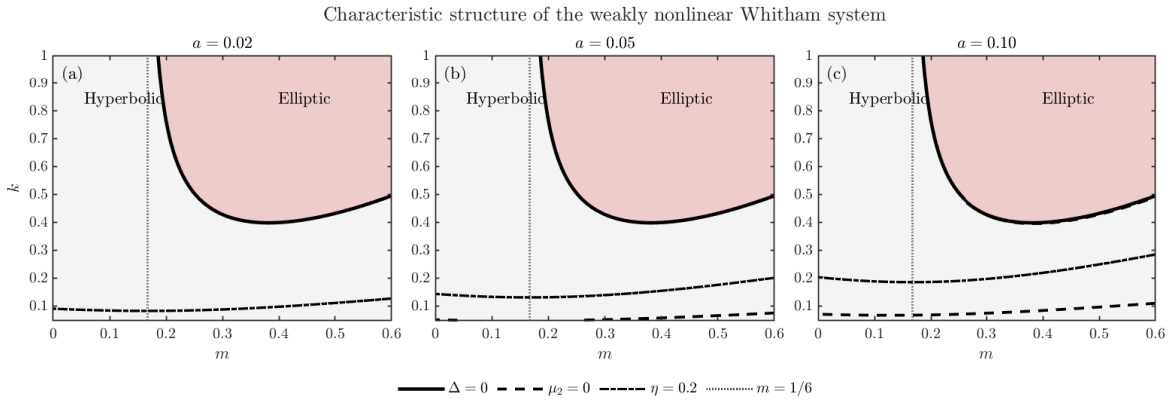


图 1. 代表性振幅 $a = 0.02$、0.05 和 0.10 对应的弱非线性 Whitham 调制系统的特征结构。实线 $\Delta(m, k) = 0$ 将严格双曲区域 $\Delta > 0$ 与椭圆区域 $\Delta < 0$ 分隔开。竖直点线表示 $m = 1/6$，此处 $f''(m) = 0$。虚线表示形式线性退化条件 $\mu_2 = 0$，而点划线表示 Stokes一致性指标 $\chi = 0.2$。形式上的 $\mu_2 = 0$轨迹位于图中所示的保守 Stokes一致性区域之外，且所示双曲域中不存在 $\mu_3 = 0$轨迹。

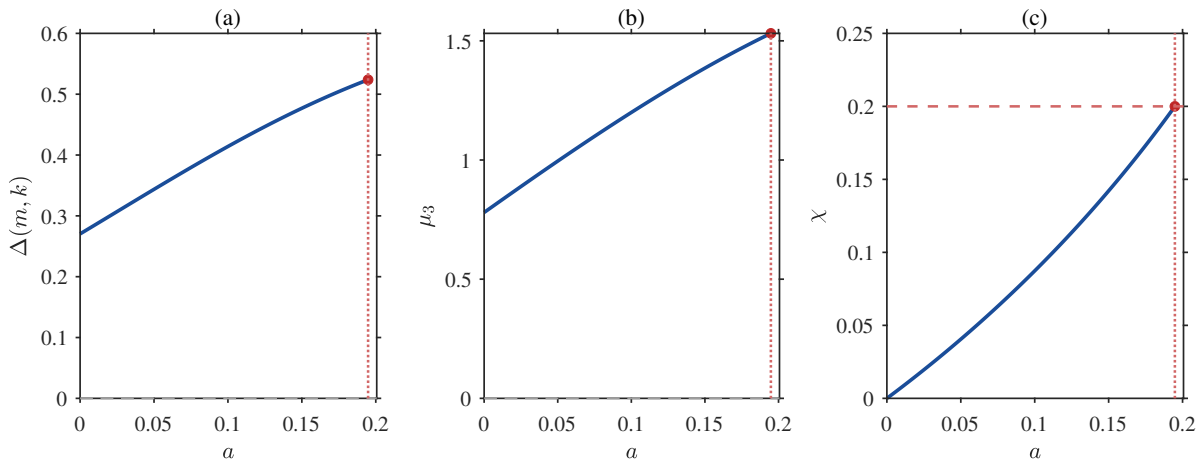


图 2. 从对应于$v_- = 0.4$ 和 $v_+ = 0.2$的谐波边缘态出发，对 λ_3 特征曲线进行延拓。(a) 双曲性判别式 $\Delta(m,k)$。(b) 截断的真正非线性系数 μ_3^{tr}。(c) Stokes一致性指标 $\chi = |af'(m)/(12k^2)|$。竖直点线标示出 $\chi = 0.2$时的终端振幅；(c)图中的水平虚线标示该阈值。在所计算的区段内未检测到双曲性或真正非线性的丧失。

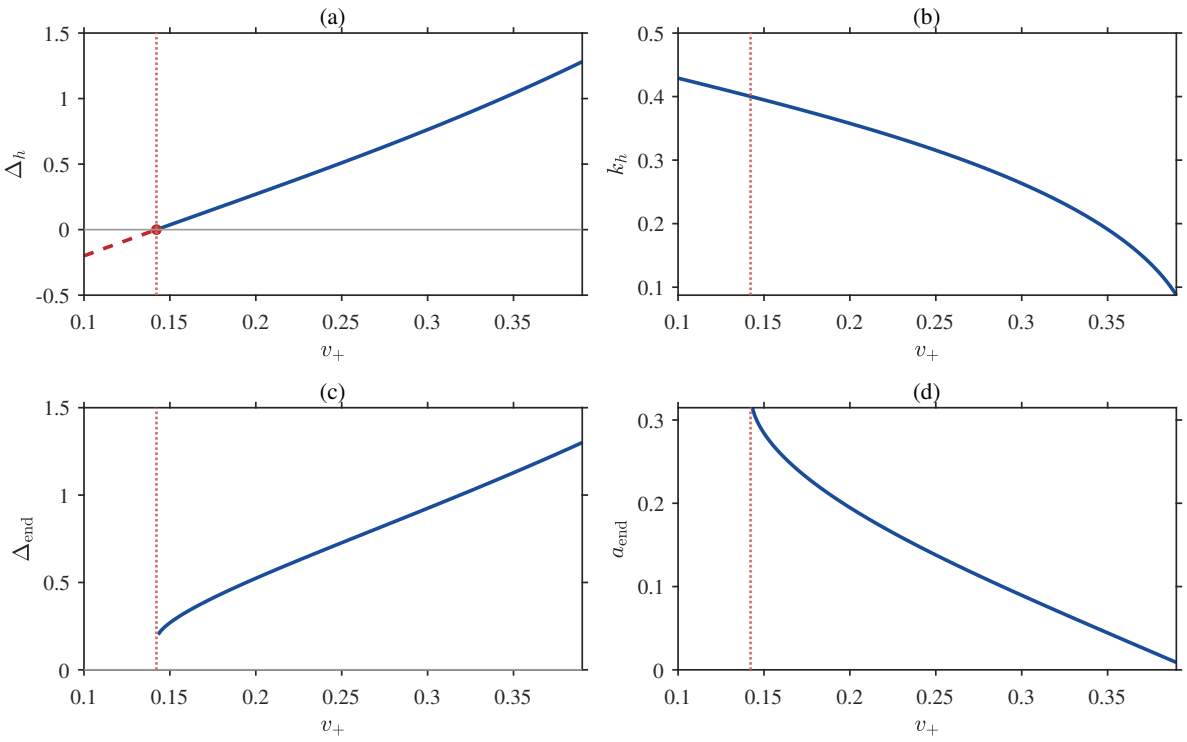


图 3. 谐波边缘与特征延拓诊断量随右侧黎曼状态的变化 v_+，其中 $v_- = 0.4$。（a）谐波边缘判别式 Δ_h。（b）谐波边缘波数 k_h。（c）终端判别式 Δ_{end}。（d）终端振幅 a_{end}。点状竖线标示 $v_+^{\mathrm{crit}} \simeq 0.1422$。仅当初始状态满足 $\Delta_h > 0$ 时，才计算面板（c）和（d）中的终端量；它们对应的停止准则为 $\chi = 0.2$。

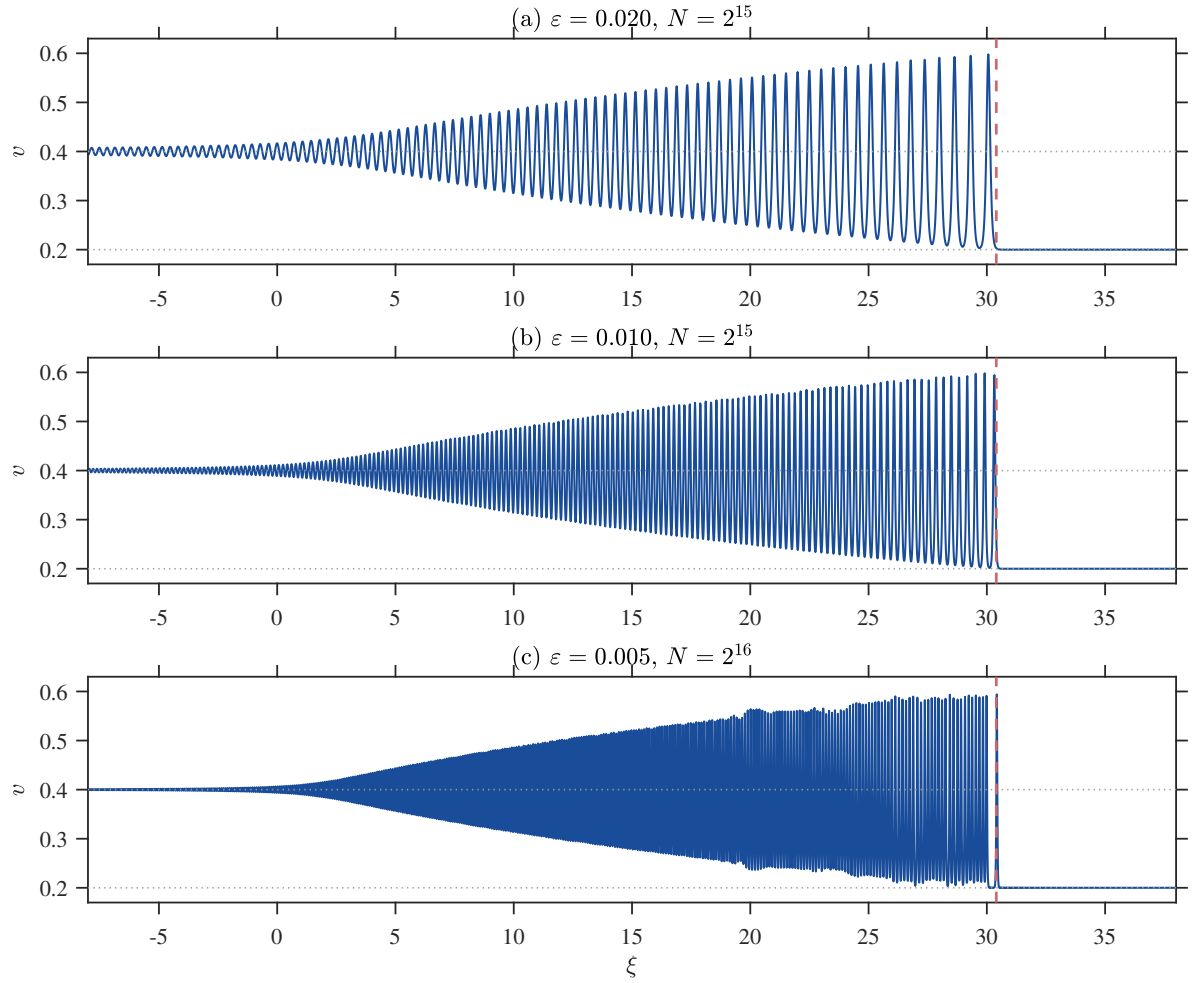


图 4. 在 $\tau = 100$处，对具有 $v_- = 0.4$ 和 $v_+ = 0.2$ 的平滑黎曼数据求解修正 Gardner 方程得到的直接数值解。(a) $\varepsilon = 0.020$、$N = 2^{15}$；(b) $\varepsilon = 0.010$、$N = 2^{15}$；(c) $\varepsilon = 0.005$、$N = 2^{16}$。竖直虚线表示色散激波拟合参考位置 $\xi = s_s\tau$，其中 $s_s = 0.304$。该图展示了随着 ε 减小，振荡密度不断增加，而前沿传播尺度近似保持不变。

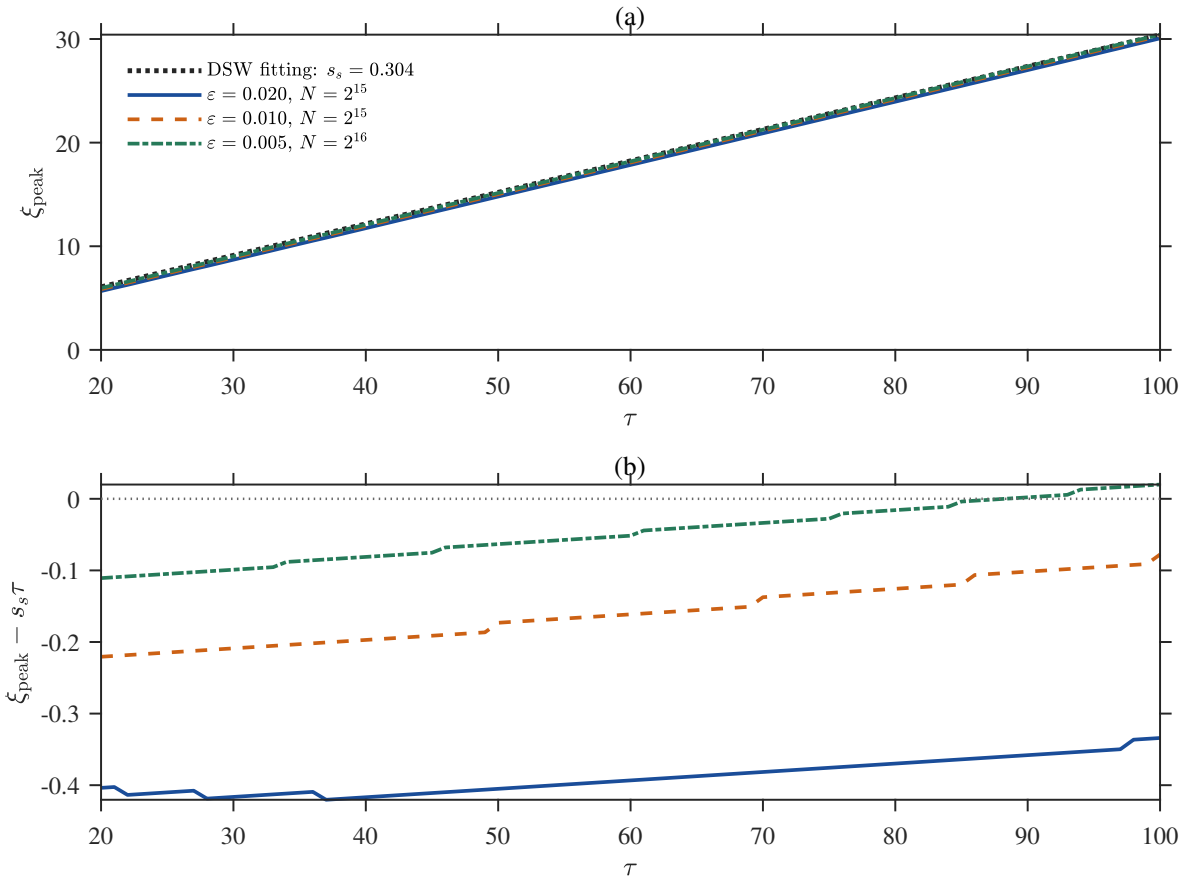


图 5. 黎曼态 $v_- = 0.4$ 和 $v_+ = 0.2$的前沿传播。(a) 对三个色散参数进行数值追踪得到的前沿极大值轨迹，并与理论色散激波拟合参考 $\xi = 0.304\tau$进行比较。(b) 位置残差 $\xi_{\mathrm{peak}} - 0.304\tau$。测得的传播速度通过在 $50 \le \tau \le 100$上进行最小二乘拟合得到。

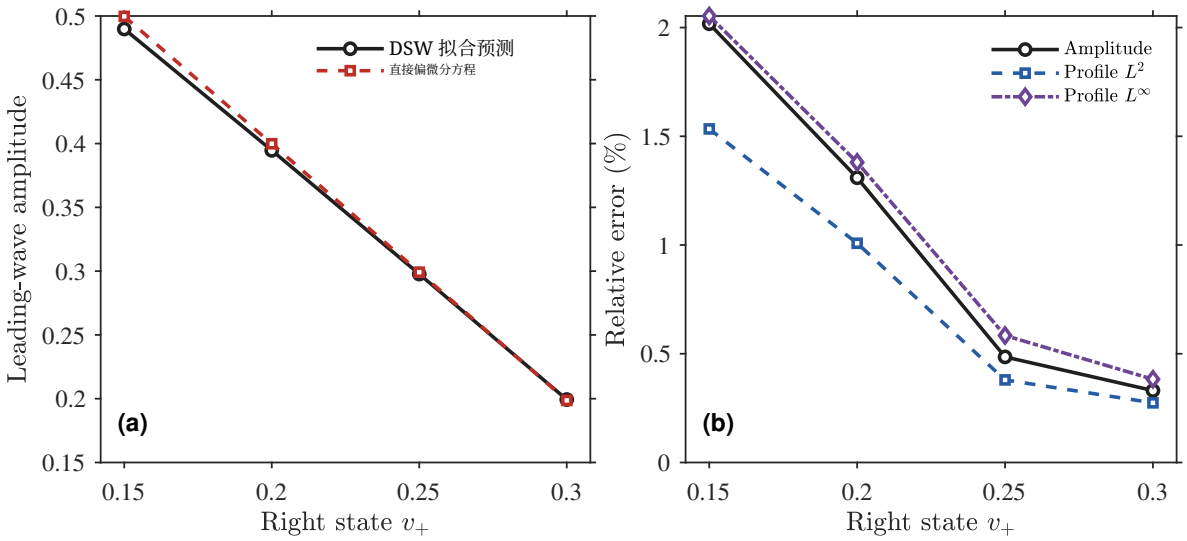


图6. 固定左状态 $v_- = 0.4$ 和四个右侧状态 v_+下，领先孤立波预测的验证。(a) 比较通过 DSW 拟合和行波振幅–速度关系得到的理论振幅与直接偏微分方程模拟测得的振幅。(b) 相对振幅误差以及波峰对齐后的 L^2 和 L^∞ 剖面误差。所有模拟均在 $\tau = 100$ 下、采用 $\varepsilon = 0.01$进行评估。

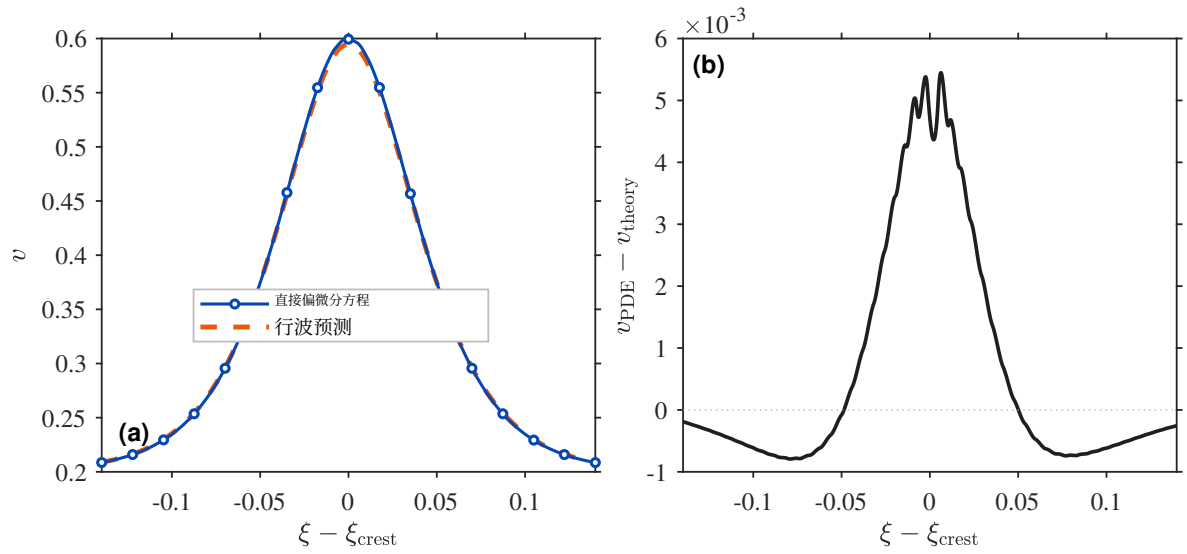


图 7. $v_- = 0.4$、 $v_+ = 0.2$、 $\varepsilon = 0.01$ 和 $\tau = 100$ 的领先孤立波剖面验证。

(a) 从直接偏微分方程模拟中提取的波峰对齐剖面，以及使用 DSW 拟合速度通过行波方程预测的孤立波剖面。未进行振幅或宽度调整。(b) 在波峰中心坐标下，数值剖面与理论剖面之间的逐点差值。