arXiv:2611.30485v1 [quant-ph] 23 Nov 2026

混沌本征态中的普适稳定子关联

Zhi-Han Liu, [1] Hao-Yue Qi, [1,*] 和 Wei Zheng[1,2,3,†]

[1] *Hefei National Research Center for Physical Sciences at the Microscale and School of Physical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*

[2] *CAS Center for Excellence in Quantum Information and Quantum Physics,University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*[3] *Hefei National Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230088, China*

纠缠与非稳定子性为理解量子态结构提供了互补视角。在这项工作中，我们发现，稳定子关联（定义为 Rényi-2 互信息与互稳定子 Rényi 熵之差）在混沌本征态中趋近于一个普适常数。该常数仅由对称性决定，并量化了不对非稳定子性作出贡献的关联。我们通过随机态系综解析地确定了这一普适稳定子关联：在不存在额外对称性时，其值分别为 $\log_2 7$ (高斯正交系综) 和 $\log_2 4$(高斯酉系综)；在自旋反演宇称或半填充磁化强度条件下，其值则分别为 $\log_2 14$ 和 $\log_2 8$ 。施加反射对称性或平移对称性不会改变这些数值。对混沌混合场伊辛链的精确计算证实了所预测的平台及其有限尺寸趋近行为。可积自由费米子本征态和强无序本征态则表现出定性不同的行为。这种普适稳定子关联揭示了混沌本征态中超越纠缠或非稳定子性本身的特征结构。

量子纠缠在量子信息和多体物理中发挥着核心作用 [1, 2]。它是量子隐形传态、超密编码、基于纠缠的量子密钥分发以及基于测量的量子计算的基础 [3–6]。纠缠熵的标度揭示了临界性，而淬火后的纠缠增长则可探测信息扩散和热化过程 [2, 7, 8]。然而，仅凭纠缠无法充分刻画态的结构或计算复杂性。Clifford电路能够生成高度纠缠的稳定子态，但这些态仍可由经典计算高效模拟 [9–11]。非稳定子性量化了偏离稳定子态的程度 [12]。稳定子R´ényi熵（SRE）通过泡利期望值 [13] 衡量非稳定子性，并已被用于研究多体态和相变 [14–17]。然而，SRE无法解析与关联相关的非稳定子性，并可能掩盖临界性 [15, 18, 19]。互稳定子Rényi熵（mSRE）则刻画子系统之间共享的非稳定子性 [18, 20], ，揭示了基态临界性以及受监测动力学中的相变，而这些现象在SRE中并不明显 [15, 18, 19]。

纠缠和非稳定子性也为理解量子混沌提供了不同视角，而量子混沌与孤立系统中的热化密切相关 [21–23]。混沌本征态表现出体积律纠缠 [23–26], ，其熵趋近于随机态的基准值 [27]。本征态涨落揭示了平均熵之外的额外结构 [28, 29]。关于非稳定子性，混沌动力学可以产生显著的非稳定子性 [30–32], ，而混沌本征态趋近于随机态的 SRE [33, 34]。这些结果表明，非稳定子性是混沌量子态的重要组成部分。然而，无论是纠缠还是非稳定子性，都无法单独完整地刻画其结构：纠缠无法区分稳定子资源与非稳定子资源，而非稳定子性本身也无法说明这种资源如何分布于各种关联之中。这种互补性表明，纠缠与非稳定子性之间的相互作用是量子混沌的核心。

在本文中，我们揭示了混沌本征态的 Rényi-2 互信息与 mSRE 之间的普适关系。具体而言，我们将稳定子关联定义为 Rényi-2 互信息与 mSRE 之差。我们发现，在热力学极限下，混沌本征态的稳定子关联趋近于一个仅由系统对称性决定的常数。我们利用随机态系综解析地确定了这一常数。在不存在额外对称性的情况下，高斯正交系综和高斯酉系综分别给出 $\log_2 7$ 和 $\log_2 4$, 的稳定子关联。施加自旋反演宇称，或将磁化固定为半填充时，实态和复态分别得到 $\log_2 14$ 和 $\log_2 8$；而反射或平移对称性不会改变无约束情况下的数值。我们检验这些随机态预测是通过混合场混沌伊辛链得到的。相比之下，自由费米子可积链的稳定子关联呈现出显著的系统尺寸依赖性，而强无序链中的本征态则表现出弱得多的稳定子关联，远低于随机态预测。

稳定子关联。—考虑一个由 N 个量子比特构成的纯态 $\hat{\rho}_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ，将其划分为区域 A 和 B，其中 $N_A + N_B = N$。我们将子系统占比记为 $f = N_A/N$。相应的希尔伯特空间维数为 $d_A = 2^{fN}$、 $d_B = 2^{(1-f)N}$ 和 $d = 2^N = d_A d_B$。

* 通讯作者：qhaoyue@mail.ustc.edu.cn
† 通讯作者：zw8796@ustc.edu.cn

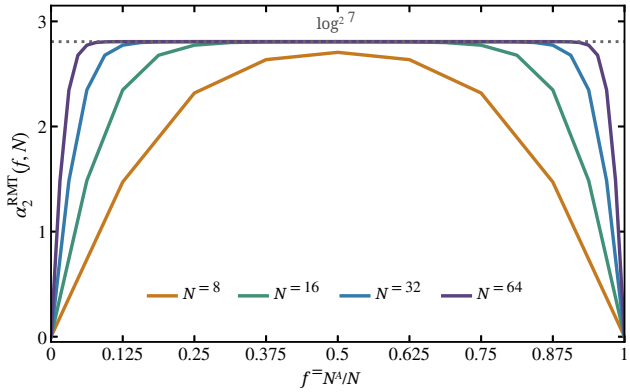

图1. 高斯正交系综中的随机态参照 $\alpha_2^{\mathrm{RMT}}(f,\ N)$，根据式(5)中的精确四阶矩求和计算。对于每个固定的 $0 < f < 1$，随着 $_2 7$ 增大，其值趋于 $\log\ N$；而空分割和完整分割的值均为零。

对于区域 $\Omega\ \in \{A, B, AB\}$，令 $\hat{}\rho_\Omega = \mathrm{Tr}_{\bar{\Omega}}\hat{}\rho_{AB}$ 表示 $\hat{}$ 约化态，并令 P_Ω 遍历无相位泡利串 $\mathcal{P}_{N_\Omega} = \{\hat{}I,\ \hat{}X,\ \hat{}Y,\ \hat{}Z\}^{\otimes N_\Omega}$。 $\bar{}\Omega$ 表示 $\Omega\ = A$ 或 B 时的互补子系统。$\hat{}\rho_\Omega$ 的非稳定性由稳定子 Rényi-2 熵 [13], $M_2(\hat{}\rho_\Omega)\ = -\log_2 \frac{\sum_{\hat{}P}|\ \rho_\Omega P_\Omega|^4{}_\Omega \mathrm{Tr}(\hat{}\hat{})\cdot{}_\Omega \mathrm{Tr}(\hat{}\hat{})|^2}{\sum_P|\ \rho_\Omega P_\Omega}$ 量化。这里，混合稳定子态定义为对纯稳定子态 [10, 13, 15, 18]进行部分迹运算后得到的混合态。

mSRE 定义为

$$\mathcal{L}_2 = M_2(\hat{\rho}_{AB}) - M_2(\hat{\rho}_A) - M_2(\hat{\rho}_B). \tag{1}$$

它比较整体态的非稳定子性与两个约化态中保留的非稳定子性，从而刻画其关联所具有的非稳定子性。特别是，对于乘积态，即使两个因子的 SRE 均非零，它也会消失。令 $S_2(\hat{}\rho)\ = -\log_2 \mathrm{Tr}\ \hat{}\rho^2$，Rényi-2 互信息定义为$I_2\ = S_2(\hat{}\rho_A) + S_2(\hat{}\rho_B) - S_2(\hat{}\rho)$，它量化子系统 A与 B之间的总关联。对于此处考察的纯态，它等于纠缠熵的两倍，$I_2\ = 2S_2(\hat{}\rho_A)$。我们将稳定子关联定义为 [15, 18]

$$\alpha_2 = I_2 - \mathcal{L}_2, \tag{2}$$

$$= -\log_2 \frac{\sum_{\hat{P}_A} |\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_A \hat{P}_A)|^4 \sum_{\hat{P}_B} |\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_B \hat{P}_B)|^4}{\sum_{\hat{P}} |\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_{AB} \hat{P})|^4}, \tag{3}$$

它在一定程度上反映了关联中不属于 mSRE 所描述的非稳定子性的那一部分。在总关联固定时，α_2越大，关联中的非稳定子性就越弱。稳定子态只有稳定子关联，$\alpha_2\ = I_2$，最大纠缠贝尔对便是一个例子。因此，mSRE $\mathcal{L}_2$ 和稳定子关联 α_2 描述了总关联的不同方面。接下来，

表 I. 固定 $0 < f < 1$时的稳定子关联，每次分别施加一个约束。实数和复数分别表示高斯正交系综和高斯酉系综。实随机态仅在 $k = 0$且当 N 为偶数时的 $k\ = N/2$下才可能存在；复态可以占据任意动量扇区。

约束	Real	复数
None	$\log_2 7$	$\log_2 4$
自旋反演宇称 $\pm$	对数$_2$ 14	对数$_2$ 8
反射宇称 $\pm$	对数$_2$ 7	对数$_2$ 4
动量 k	对数$_2$ 7	对数$_2$ 4
磁化，半填充	对数$_2$ 14	对数$_2$ 8

我们将证明，对于 N，N_A，$N_B \gg 1$，混沌态中的稳定子关联趋近于一个普适常数；在可积示例中则有所不同，而在所研究的尺寸范围内，强无序链中的稳定子关联要小得多。

随机态的稳定子关联——考虑一个具有总希尔伯特空间维数 d 、可能具有对称性的通用混沌哈密顿量。在维数为 D的固定对称性扇区中，我们使用相同维数的随机态系综来近似典型本征态的统计性质。我们考虑高斯正交系综和高斯酉系综（GOE 和 GUE），其中随机态分别具有实数和复数组分量。将公式（3）中的泡利求和记为 $F_\Omega\ = \sum_{\hat{}P_\Omega \in \mathcal{P}_{N_\Omega}} x_{\hat{P}_\Omega}^4$，其中 $x_{\hat{}P_\Omega}\ = \mathrm{Tr}(\hat{}\rho_\Omega\ \hat{}P_\Omega)$。令$\mathbb{E}$ 表示系综平均。该比值定义了随机矩阵参照

$$\alpha_2^{\mathrm{RMT}} = \log_2 \frac{\mathbb{E}F_{AB}}{(\mathbb{E}F_A)(\mathbb{E}F_B)}. \tag{4}$$

在有限尺寸下，这个参考值不必等于 α_2 。泡利求和的涨落在大系统极限下趋于零，因此典型态的 α_2 趋近于 α_2^{RMT}。集中界和详细的矩推导见补充材料（SM） [35]。

在没有对称性限制的情况下，$D = d$。对于实态，包含奇数个 Y 因子的泡利串的期望值为零，因为$\hat{}P_\Omega^T\ = -\hat{}P_\Omega$。每个非恒等的偶数-$Y$ 字符串都是对称且无迹的，并满足$\hat{}P_\Omega^2\ = \hat{}I$。嵌入完整希尔伯特空间后，它具有$d/2$ 个正负号各半的特征值。对 d 个相互独立的实标准高斯振幅进行归一化并取平均，得到 $\mathbb{E}x_{\hat{P}_\Omega}^4\ = \frac{12}{d+2}\overline{(\ )(d+6)}\cdot$ 该方程对每个包含偶数个 Y 因子的$\hat{}$非恒等泡利串都成立。包含恒等算符在内，共有 $d_\Omega(d_\Omega + 1)/2$ 个偶数-Y 字符串。注意，恒等算符贡献 $x_{\hat{I}_\Omega} = 1$，我们得到 $\mathbb{E}F_\Omega = 1 + \frac{6}{(d^2\ \Omega + d_\Omega - 2)\ (d+2)(d+6)}$，$\Omega\ = A, B, AB$. 代入公式（4）得到有限尺寸随机矩阵

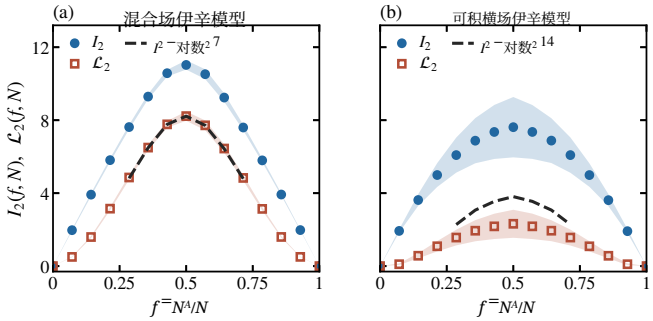

图 2. $N=14$处的互信息和 mSRE 随 f 的变化，取 100 个本征态的平均值。圆圈表示 I_2，方块表示 $\mathcal{L}_2$。蓝色和橙色带表示本征态间的标准差。虚线分别表示 (a) 中的 $I_2-\log_2 7$ 和 (b) 中的 $I_2-\log_2 14$，其中 $4/14\le f\le 10/14$。(a) 混合场伊辛链。(b) 具有偶自旋反演宇称的横场伊辛模型。

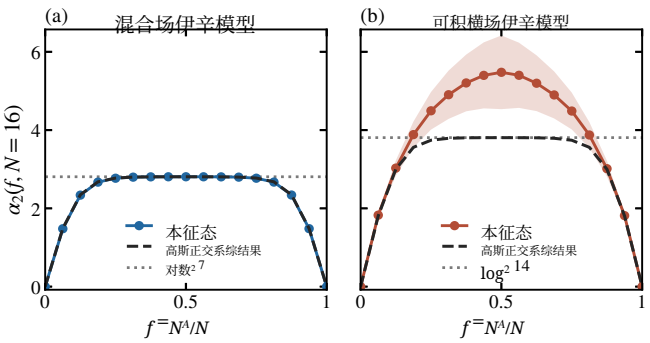

图 3. $N=16$处稳定子关联与子系统占比的关系：(a) 混合场伊辛链；(b) 偶宇称横场伊辛模型。各点对 100 个本征态取平均。阴影表示本征态间的标准差。所有泡利算符求和均精确计算。虚线表示有限尺寸随机矩阵参照。点线标出 $\log_2 7$ 和 $\log_2 14$。

参考

$$\alpha_2^{\mathrm{RMT}}(f,N)=\log_2\frac{7d/(d+6)}{\prod_{\Omega=A,B}\left[1+\frac{6(d_\Omega^2+d_\Omega-2)}{(d+2)(d+6)}\right]}. \quad (5)$$

在固定 $0<f<1$时，两个子系统都随 N增长，从而得到 $\mathbb{E}F_A$, $\mathbb{E}F_B\to 1$，而 $\mathbb{E}F_{AB}\to 7$。因此，我们有$\alpha_2^{\mathrm{RMT}}(f,N)\to$对数$_2$ 7. 图 1 展示了这一渐近行为。空分区和全集分区则具有$\alpha_2=0$。对于复随机态，所有 d^2-1非恒等字符串都贡献四阶矩 $3/[(d+1)(d+3)]$。它们的全系统求和趋近于 3，恒等算符则增加 1，而两个子系统求和同样趋近于 1。因此，极限稳定子关联为对数$_2$ 4。

对称性的影响——在一个对称性扇区内，泡利期望值由 $\Pi P\Pi$ 决定，其中 Π 为扇区投影算符。对于自旋反转，$\hat{}\,U=\prod_i\hat{}\,X_i$ 与 H对易，并且 $\Pi_s=(I+sU)/2$, $s=\pm1$投影到维数为 $D=d/2$ 的扇区上。含有奇数个 Y和 Z 因子的字符串与 $\hat{}\,U$反对易，因此期望值为零。实态还要求具有偶 $\hat{}\,Y$宇称，从而只剩下 $(d^2+2d)/4$ 个字符串。在这些字符串中，I 和 U 的期望值分别固定为 1 和 s，每个都对 F_{AB}贡献 1。所有其他允许的算符在该扇区内均为无迹算符，且平方等于恒等算符，其 $D/2$ 特征值取正负两种符号。对于高斯正交系综，其四阶矩为 $\mathbb{E}x^4_{\hat{P}_\Omega}=\frac{12}{D+2}\frac{}{()(D+6)}$。在子系统中，只有恒等算符 I 的期望值固定为 1；其他字符串 $\hat{}\,\hat{}$ 在同一个全系统扇区内按 $P_\Omega\otimes I_{\bar{\Omega}}$ 计算。求和得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}F_{AB}&=\frac{14d}{d+12},\\ \mathbb{E}F_\Omega&=1+\frac{12(d_\Omega^2+2d_\Omega-4)}{(d+4)(d+12)},\quad \Omega=A,B.\end{aligned} \quad (6)$$

将这些表达式代入式（4）可得有限尺寸随机矩阵参照。在固定的 $0<f<1$、$\mathbb{E}F_A$, $\mathbb{E}F_B\to 1$ 和 $\mathbb{E}F_{AB}\to 14$ 下，得到 $\alpha_2^{\mathrm{RMT}}\to\log_2 14$，且修正项呈指数级小。对于复数态，同样的步骤得到 $\log_2 8$。这些系综平均周围的涨落在大系统极限下消失。[35]

对于平移对称性、反射对称性和固定磁化强度，投影后的泡利算符可能具有不同于±1的特征值，因此需要使用一般的四阶矩公式 [35]。表I 列出了分别施加每种约束时的常数。反射对称性或相容的动量不会改变全空间中的数值，而半填充时，实态和复态对应的值分别为 $\log_2 14$ 和 $\log_2 8$。

数值验证——现在，我们通过数值计算验证这些解析结果。我们采用具有横向场和纵场的伊辛链，

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{N-1}\hat{Z}_i\hat{Z}_{i+1}+\sum_{i=1}^{N}g_i\hat{X}_i+h\sum_{i=1}^{N}\hat{Z}_i, \quad (7)$$

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$具有开放边界和格点泡利矩阵 X_i,Y_i,Z_i。伊辛耦合设定能量单位。我们选择 $g_1=-1$, $g_{i>1}=(5+\sqrt{5})/8$ 以破坏反射对称性，并选择$h=(1+\sqrt{5})/4$，从而得到一个没有额外幺正对称性的非可积哈密顿量。在 $h=0$处，我们得到可积的横场伊辛模型（TFIM），并选取偶自旋反转扇区 $\hat{}\,U|\psi\rangle=|\psi\rangle$。我们对谱中部附近的 $\min(100,D-1)$ 个本征态取平均，其中 D 是扇区维数。区域 A包含前 N_A 个格点。为了将混沌本征态与强无序态进行对比，我们还考虑 $\hat{}\,H_W=\hat{}\,H+\sum_{i=1}^{N}w_i\,\hat{}\,Z_i$，其中 $\hat{}\,H$ 是方程（7）中的开放混合场链。随机场 w_i 从 $[-6,6]$中独立抽取。我们对 100 个独立无序实现取平均，每个实现最多使用 50 个本征态。对于每个二分，我们计算全态和两个子系统的完整泡利求和，使用

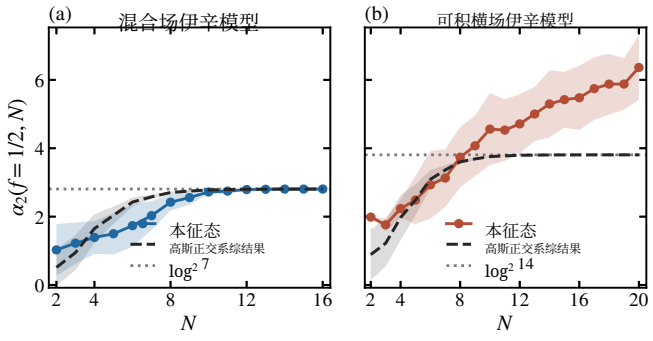

图 4. $N_A = \lfloor N/2 \rfloor$处 $\alpha_2(f,\ N)$的尺寸依赖关系。(a) 混合场伊辛链，最大至 $N = 16$。(b) 偶宇称横场伊辛模型，最大至 $N = 20$。数据点表示本征态平均值，阴影表示本征态间的标准差。所有泡利求和均精确计算。虚线表示有限尺寸随机矩阵参照，点线标示$\log_2 7$ 和$\log_2 14$。

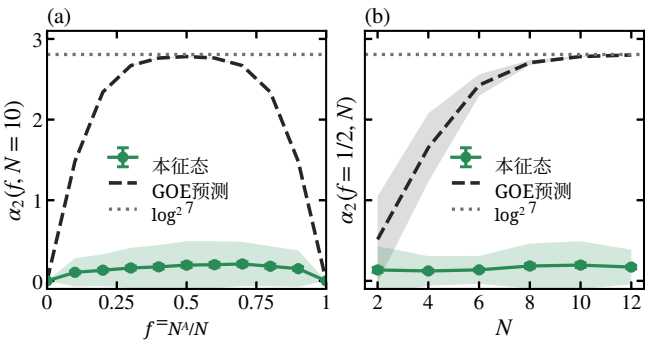

图 5. $w_i \in [-6,6]$时强无序伊辛链中的稳定子关联。(a) $\alpha_2(f,$ 10) 随 f 的变化。(b) $\alpha_2(1/2,\ N)$ 随系统尺寸 N 的变化。阴影表示本征态间的标准差；误差条表示无序平均值的标准误。虚线表示高斯正交系综的随机态计算结果，点线标示 $\log_2 7$。

沃尔什–哈达玛变换 [36, 37]。

mSRE 与互信息。—— 图 2 展示了$I_2(f,\ 14)$ 和 $\mathcal{L}_2$ $(f,$ 混沌与可积本征态的结果。乍看之下，两种量对 f 的依赖在混沌系统和可积系统中定性相似，最明显的差异是本征态间涨落的幅度，如蓝色和橙色带所示。然而，两种系统的区别在它们的差值中显而易见，即 $I_2 - \mathcal{L}_2$。在混沌链中，这一差值在$_2 7$, 范围内紧密遵循 GOE预测 $\log\ 5/14 \le f \le 9/14$。相比之下，对于可积链，该差值偏离随机矩阵预测，且并非常数。这表明稳定子关联是区分混沌系统与可积系统的关键量。下文将聚焦于稳定子关联，并更详细地研究其行为。

本征态的稳定子关联。—图3(a)展示了混合场链的 $\alpha_2(f, N = 16)$。当 $6/16 \le f \le 10/16$时，它几乎保持恒定，接近随机矩阵参照值 $\log_2 7$。在 $f = 1/2$时，其值约为 2.80。随着 f 趋近于 0 或 1，其中一个子系统变小，$\alpha_2(f, 16)$ 便降至中央平台以下。完整的随机态表达式（式 (5)）描述了这一下降；在所有 f上，它与数值均值的最大差异为 0.00989。因此，偏离 $f = 1/2$后的下降与解析结果一致。随着 N增大，我们预期在任意固定的 $0 < f < 1$下，$\alpha_2(f, N)$ 都会趋近于 $\log_2 7$ ，如图 1中的随机态曲线所示。图4(a)展示了在 $N_A = \lfloor N/2 \rfloor$时对 N 的依赖关系。稳定子关联随系统尺寸增大而上升，并趋于随机态预测值，达到 $\alpha_2(1/2, 16) \approx 2.80$。逐渐变窄的阴影带表明，随着 N增大，本征态间涨落受到抑制。

本征态间标准差的随机矩阵预测为 $\sigma_{\mathrm{GOE}} \approx 7.5/D$，其推导见补充材料 [35]。在 $N = 16$时，数值标准差为 4.48×10^{-4}，与随机矩阵预测处于同一数量级。在这些系统尺寸下，阴影带比符号还窄。当两个子系统都较大时，对 f 的依赖较弱；随着 N 增大，结果也逐渐趋近于上述混沌系统中得到的恒定关系。这两点均支持该关系。

对于可积横场伊辛模型，$\alpha_2(f, 16)$ 随着 f 趋近 $1/2$ [图 3(b)] 而增大。在接近等分二分时，它超过了点线所标示的随机态极限值。较宽的阴影带表明，其本征态之间的涨落大于混沌链中的涨落。在$f = 1/2$处，横场伊辛模型本征态间的标准差为 0.941，远大于随机矩阵预测值。在图 4(b) 中，横场伊辛模型的稳定子关联在所研究的系统尺寸范围内持续增大，与混沌链不同，它仍显著依赖于系统尺寸。因此，横场伊辛模型的本征态并非随机态系综中的典型态。图 5 展示了强无序链中的 $\alpha_2(f, N)$。在各种子系统比例下，稳定子关联都远小于混沌值 $\log_2 7$ 。这一行为可从乘积态极限来理解。当一个态趋近乘积态时，$\hat{\rho}_{AB} \approx \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$，式 (3) 中的全系统泡利算符求和便分解为两个子系统求和，得到 $\alpha_2 \approx 0$。在 $N = 12$ 和 $f = 1/2$处，我们还发现 $I_2 = 0.120$ 和 $\mathcal{L}_2 = 0.0266$。这些较小的数值表明二分两侧的关联较弱，与强无序下预期的局域化区域相符 [38]。

这些结果清晰地揭示了混沌本征态与可积本征态之间的物理差异。当两个子系统都足够大时，混沌链中互信息的变化几乎总伴随着幅度相等的

非稳定子性的变化。因此，随着系统尺寸增大，这两个量都呈现体积律标度，且斜率相同。相比之下，对于自由费米子可积本征态，非稳定子性随系统尺寸增大而增长的速度低于互信息。

对于相互作用可积 XXZ 链，我们的数值计算也表明稳定子关联趋于一个常数。然而，该常数的取值并不普适，且明显高于随机态预测，同时涨落也大得多，如补充材料所示 [35]。

总结与展望。— 随机态计算得出，在大子系统极限下，互信息与 mSRE 之间存在普适常数差，其数值见表 I。精确的混合场伊辛模型计算支持这些预测，而可积本征态和强无序本征态则呈现不同的轮廓和尺寸依赖性。因此，在混沌系统中，关联的增长完全反映在 mSRE 中，而稳定子关联则趋于一个常数。

W.Z. 感谢中国国家自然科学基金（项目编号：GG2030007011 和 GG2030040453）以及量子科学与技术创新计划（项目编号：2021ZD0302004）的支持。

[1] R. Horodecki、P. Horodecki、M. Horodecki 和 K. Horodecki，量子纠缠，《现代物理评论》81，865 2009( )。[2] L. Amico、R. Fazio、A. Osterloh 和 V. Vedral，多体系统中的纠缠，《现代物理评论》80，517 (2008)。[3] C. H. Bennett、G. Brassard、C. Cr´epeau、R. Jozsa、A. Peres 和 W. K. Wootters，通过双重经典与 Einstein-Podolsky-Rosen 通道传送未知量子态，《物理评论快报》70，1895 (1993)。[4] C. H. Bennett 和 S. J. Wiesner，通过 Einstein-Podolsky-Rosen 态上的单粒子和双粒子算符进行通信，《物理评论快报》69，2881 (1992)。[5] A. K. Ekert，基于贝尔定理的量子密码学，《物理评论快报》67，661 (1991)。[6] R. Raussendorf 和 H. J. Briegel，单向量子计算机，《物理评论快报》86，5188 (2001)。[7] J. Eisert、M. Cramer 和 M. B. Plenio，专题综述：纠缠熵的面积律，《现代物理评论》82，277 (2010)。[8] P. Calabrese 和 J. Cardy，一维系统中纠缠熵的演化，《统计力学杂志》(2005) P04010。[9] D. Gottesman，量子计算机的海森堡表象，载于 *Group22: Proceedings of the XXII International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*，S. P. Corney、R. Delbourgo 和 P. D. Jarvis 编（国际出版社，剑桥，马萨诸塞州，1999），第 32–43 页；arXiv:quant-ph/9807006。[10] S. Aaronson、D. Gottesman，稳定子电路的改进模拟，《物理评论 A》70，052328 (2004)。[11] S. Bravyi 和 D. Gosset，对由克利福德门主导的量子电路进行改进的经典模拟，《物理评论快报》116, 250501 (2016)。[12] S. Bravyi 和 A. Kitaev，利用理想克利福德门和含噪辅助量子比特实现通用量子计算，《物理评论 A》71, 022316 (2005)。[13] L. Leone、S. F. E. Oliviero 和 A. Hamma，稳定子 Rényi 熵，《物理评论快报》128, 050402 (2022)。[14] S. F. E. Oliviero、L. Leone 和 A. Hamma，横场伊辛模型基态的魔性态资源理论，《物理评论 A》106, 042426 (2022)。[15] P. S. Tarabunga 和 T. Haug，利用矩阵乘积态实现高效的互信息魔性和魔性容量，SciPost物理 19, 085 (2025)。[16] M. Collura、J. De Nardis、V. Alba 和 G. Lami，费米子高斯态的非稳定子性，Quantum 10, 2036 (2026)。[17] E. A. Ramirez Trino 和 M. A. Rajabpour，稳定子熵与 Shannon Rényi 熵的等价性：量子临界链的精确结果，《物理评论快报》137, 090403 (2026)。[18] P. S. Tarabunga、E. Tirrito、T. Chanda 和 M. Dalmonte，通过 Pauli–Markov 链研究多体魔性——从临界性到规范理论，PRX Quantum 4, 040317 (2023)。[19] C. Wang、Z.-C. Yang、T. Zhou 和 X. Chen，受监测的自由费米子动力学中的魔性转变，arXiv:2507.10688 (2025)。[20] M. Frau、P. S. Tarabunga、M. Collura、M. Dalmonte 和 E. Tirrito，矩阵乘积态中的非稳定子性与纠缠，《物理评论 B》110, 045101 (2024)。[21] J. M. Deutsch，封闭系统中的量子统计力学，《物理评论 A》43, 2046 (1991)。[22] M. Srednicki，混沌与量子热化，《物理评论E》50, 888 (1994)。[23] L. D' Alessio、Y. Kafri、A. Polkovnikov 和 M. Rigol，从量子混沌和本征态热化到统计力学与热力学，《物理进展》65, 239 (2016)。[24] H. Kim 和 D. A. Huse，扩散型非可积系统中的纠缠弹道扩展，《物理评论快报》111, 127205 (2013)。[25] L. Vidmar 和 M. Rigol，量子混沌哈密顿量本征态的纠缠熵，《物理评论快报》119, 220603 (2017)。[26] T. LeBlond、K. Mallayya、L. Vidmar 和 M. Rigol，相互作用可积系统中的纠缠与可观测量矩阵元，《物理评论E》100, 062134 (2019)。[27] D. N. Page，子系统的平均熵，《物理评论快报》71, 1291 (1993)。[28] S. D. Geraedts、R. Nandkishore 和 N. Regnault，多体局域化与热化：来自纠缠谱的洞见，《物理评论 B》93, 174202 (2016)。[29] J. F. Rodriguez-Nieva、C. Jonay 和 V. Khemani，通过纠缠的微正则分布量化量子混沌，物理评论X辑 14, 031014 (2024)。[30] L. Leone、S. F. E. Oliviero、Y. Zhou 和 A. Hamma，量子混沌即量子，Quantum 5, 453 (2021)。[31] K. Goto、T. Nosaka 和 M. Nozaki，利用魔性单调量探测混沌，物理评论D辑 106, 126009 (2022)。[32] J. Odavi´c、M. Viscardi 和 A. Ha mma，非可积量子演化中的稳定子熵，《物理评论 B》112, 104301 (2025)。[33] X. Turkeshi、A. Dymarsky 和 P. Sierant，典型量子多体系统的泡利谱与非稳定子性，

多体态，《物理评论 B》**111**，054301 (2025)。[34] D. Iannotti、A. Russotto、B. Jasser、J. Odavi´c 和 A. Hamma，混沌多体量子系统中的非稳定子性与 $U(1)$ 对称性，arXiv:2603.28870 (2026)。[35] 详见补充材料： [网址将由出版商插入] 其中包含完整的随机态推导、有限尺寸公式、集中界和 XXZ结果。

[36] X. Huang、H.-Z. Li、C. H. Lee 和 J.-X. Zhong，《一种基于 XOR-FWHT 算法快速精确计算稳定子 Rényi 熵的方法》，´arXiv:2512.24685 （ 2025 ）。[37] P. Sierant 、 J.Vall`es-Muns 和 A.Garcia-Saez，《计算态矢量的量子魔性》，Quantum **10**，2059（2026）。[38] M. Serbyn、Z. Papi´c 和 D. A. Abanin，《局域守恒定律与多体局域化态的结构》，《物理评论快报》**111**，127201（2013）。

《混沌本征态中的普适稳定子关联》的补充材料

Zhi-Han Liu, [1] Hao-Yue Qi, [1,*] 和 Wei Zheng[1,2,3,†]

[1] *Hefei National Research Center for Physical Sciences at the Microscale and School of Physical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*

[2] *CAS Center for Excellence in Quantum Information and Quantum Physics,University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*[3] *Hefei National Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230088, China*

S.I. 符号与随机态参照

考虑一个纯 N 量子态 $\hat{\rho}_{AB}=|\psi\rangle\langle\psi|$，其中有 $N_A+N_B=N$ 和 $f=N_A/N$。对于 $\Omega=A,\ B,\ AB$，令 $\hat{\rho}_\Omega$ 表示其约化态，$N_{AB}=N$，且 $d_\Omega=2^{N_\Omega}$，因此 $d=d_Ad_B=2^N$。无相位泡利串为 $\hat{P}_\Omega\in\mathcal{P}_{N_\Omega}=\{\hat{I},\hat{X},\hat{Y},\hat{Z}\}^{\otimes N_\Omega}$。定义

$$F_\Omega=\sum_{\hat{P}_\Omega\in\mathcal{P}_{N_\Omega}}x_{\hat{P}_\Omega}^4,\qquad x_{\hat{P}_\Omega}=\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_\Omega\hat{P}_\Omega),\tag{S1}$$

从而稳定子关联为

$$\alpha_2=\log_2\frac{F_{AB}}{F_AF_B}.\tag{S2}$$

$\hat{}$ 对于投影算符为 Π 且维数为 D 的对称性扇区，我们考虑分别对应于高斯正交系综和高斯酉系综（GOE 和 GUE）的实数和复数随机态。记 $\mathbb{E}$ 为系综平均，定义随机态参照

$$\alpha_2^{\mathrm{RMT}}=\log_2\frac{\mathbb{E}F_{AB}}{(\mathbb{E}F_A)(\mathbb{E}F_B)}.\tag{S3}$$

在固定 $0<f<1$时，第 S.IIS.II.G 节中的集中性分析表明，典型随机态的α_2 与系综平均值 $\mathbb{E}\alpha_2$ 在大系统极限下趋于与 α_2^{RMT}相同的极限。

S.II. 随机态公式与集中性

我们推导出由归一化高斯振幅得到的泡利期望值的四阶矩，并将其对泡利串求和，从而得到系综平均的泡利求和。最后一小节对这些求和的涨落给出界，从而得到典型随机态的稳定子关联。

* 通讯作者：qhaoyue@mail.ustc.edu.cn † 通讯作者：zw8796@ustc.edu.cn

S.II.A. 随机态的精确矩

在一个一般的正交归一基 $\{|i\rangle\}_{i=1}^D$ 中，对于一个 D维的对称性扇区，随机态可以写为 $|\psi\rangle=\sum_{i=1}^D z_i|i\rangle$。这里，$z_i=g_i/\sqrt{r}$，其中$g_i$ 是均值为零、方差为一的相互独立的高斯随机变量（$\mathbb{E}|g_i|^2=1$），并且 $r=\sum_i|g_i|^2$。对于高斯正交系综，g_i 为实数；对于高斯酉系综，g_i 为复数。为统一处理高斯正交系综和高斯酉系综两种情形，我们定义$c=3-\beta$，其中高斯正交系综的戴森指标为 $\beta=1$，高斯酉系综的戴森指标为 $\beta=2$。因此，对于实态有 $c=2$，对于复态有 $\hat{c}=1$。令 A 表示受限泡利算符：在高斯正交系综的实正交归一基 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 扇区基中，$A=\mathrm{Re}(\hat{\Pi}\hat{P}\hat{\Pi})$；对于高斯酉系综，则为 $A=\Pi P\Pi$。$\hat{}\,\hat{}$ 对于实投影算符，奇数-Y 泡利串具有 $A=0$。在高斯正交系综情形下，A 的本征基可以选为实数。在该本征基中，

$$\begin{aligned}x_{\hat{P}}&=\sum_{i=1}^D\lambda_i|z_i|^2=\frac{U}{r},\\U&=\sum_i\lambda_i|g_i|^2,\end{aligned}\tag{S4}$$

$\hat{}$ 其中 λ_i 是 A的特征值。由于 r 与 z_i相互独立，我们有 $\mathbb{E}U^4=(\mathbb{E}r^4)(\mathbb{E}x_{\hat{P}}^4)$。因此可以得到 $\mathbb{E}x_{\hat{P}}^4=\mathbb{E}U^4/(\mathbb{E}r^4)$。我们通过矩母函数 $\mathbb{E}e^{sU}$得到 $\mathbb{E}U^4$。g_i 的独立性给出

$$\mathbb{E}e^{sU}=\prod_i(1-cs\lambda_i)^{-1/c}.\tag{S5}$$

将所有 $\lambda_i=1$ 设为

$$\mathbb{E}r^4=D(D+c)(D+2c)(D+3c).$$

对于全空间和自旋反演计算，系综中各态之间期望值有所不同的每个 $\hat{}$operator A 都具有 $D/2$ 特征值 $+1$ 以及 $D/2$ 特征值 -1。将这些因子在乘积中配对可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{sU}&=(1-c^2s^2)^{-D/(2c)},\\\mathbb{E}U^4&=3c^2D(D+2c).\end{aligned}$$

因此，除以 $\mathbb{E}r^4$ 后得到

$$\mathbb{E}x_{\hat{P}}^4=\frac{3c^2}{(D+c)(D+3c)}.\tag{S6}$$

对于高斯正交系综，令 $c=2$；对于高斯酉系综，令 1，则分别得到 $12/[(D+2)(D+6)]$ 和 $3/[(D+1)(D+3)]$。

限制在平移对称性、反射对称性或磁化对称扇区中的泡利串可能具有其他特征值。为了计算 $\mathbb{E}x_{\hat{P}}^4$ 在这些对称性扇区中的值，我们对 $\mathbb{E}e^{sU}$ 仍使用上面的乘积公式，即公式（S5），但现在保留任意特征值。展开乘积并收集 s^4 项得到 $\mathbb{E}U^4/4!$ 将 $\mathbb{E}U^4$ 除以 $\mathbb{E}r^4=D(D+c)(D+2c)(D+3c)$ 后得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x_{\hat{P}}^4 = &\frac{1}{D(D+c)(D+2c)(D+3c)}\\ &\times\Big[(\operatorname{Tr}\hat{A})^4+6c(\operatorname{Tr}\hat{A})^2\operatorname{Tr}(\hat{A}^2)\\ &\quad+3c^2[\operatorname{Tr}(\hat{A}^2)]^2+8c^2(\operatorname{Tr}\hat{A})\operatorname{Tr}(\hat{A}^3)\\ &\quad+6c^3\operatorname{Tr}(\hat{A}^4)\Big].\end{aligned} \tag{S7}$$

这里，我们将特征值和 $\sum_i\lambda_i^j$ 写成在该扇区上取的迹。

S.II.B. 计算全空间中的泡利串数量

$\hat{}$ 每个非恒等算符的偶数-Y 泡利串都是对称且无迹的，并且平方后等于恒等算符。将其嵌入全希尔伯特空间后，它具有 $d/2$ 个正负号各半的特征值。因此，公式（S6）给出

$$\mathbb{E}x_{\hat{P}_\Omega}^4=\frac{12}{(d+2)(d+6)}. \tag{S8}$$

$\hat{}$奇数-Y 泡利串在转置下是反对称的，并且在实态中的期望值为零。对于全希尔伯特空间中的实随机态，只有具有偶数 Y 字称的泡利串会对 $\mathbb{E}F_\Omega$作出贡献。每个格点有三个非-Y选择和一个 Y 选择，因此包括恒等算符在内的偶数-Y 泡利串数量为

$$\frac{(3+1)^{N_\Omega}+(3-1)^{N_\Omega}}{2}=\frac{d_\Omega^2+d_\Omega}{2}.$$

恒等算符贡献 1，而其余每个泡利串都贡献式（S6）中的四阶矩。对于完整希尔伯特空间中的实态，$D=d$ 且 $c=2$，因此有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}F_\Omega &= 1+\left(\frac{d_\Omega^2+d_\Omega}{2}-1\right)\frac{12}{(d+2)(d+6)}\\ &= 1+\frac{6(d_\Omega^2+d_\Omega-2)}{(d+2)(d+6)}.\end{aligned} \tag{S9}$$

对于复随机态，所有 d_Ω^2-1 非恒等字符串都具有相同的四阶矩，$3/[(d+1)(d+3)]$。将它们的贡献加到恒等项上，得到

$$\mathbb{E}F_\Omega=1+\frac{3(d_\Omega^2-1)}{(d+1)(d+3)}.$$

全系统的非恒等求和趋于 3，恒等项贡献 1，而两个子系统求和都趋于 1。因此，复随机态的极限稳定子关联为 $\log_2 4$。

代入 $d_{AB}=d$后，将其代入式（S3）可得

$$\alpha_2^{\mathrm{RMT}}(f,N)=\log_2\frac{7d/(d+6)}{\prod_{\Omega=A,B}\left[1+\frac{6(d_\Omega^2+d_\Omega-2)}{(d+2)(d+6)}\right]}. \tag{S10}$$

在固定 $0<f<1$ 时，两个子系统都随 N 增大，因此有 $\mathbb{E}F_A$，$\mathbb{E}F_B\to 1$，而 $\mathbb{E}F_{AB}\to 7$。因此我们有

$$\alpha_2^{\mathrm{RMT}}(f,N)=\log_2 7-O\big(2^{-N}+2^{-2N_A}+2^{-2N_B}\big). \tag{S11}$$

S.II.C. 自旋反演扇区中泡利串的计数

我们考虑满足以下条件的哈密顿量的固定自旋反演扇区中的随机态

$$\begin{aligned}\hat{U}&=\prod_{i=1}^N\hat{X}_i, \qquad [\hat{H},\hat{U}]=0,\\ \hat{\Pi}_s&=\frac{\hat{I}+s\hat{U}}{2}, \qquad s=\pm1.\end{aligned} \tag{S12}$$

该扇区由 $\hat{}\,U|\psi\rangle=s|\psi\rangle$ 定义，维数为$D=d/2$。在本小节中，两个子系统均非空，N_A，$N_B\geq 1$。

关系 $\hat{}_U\hat{}_P\hat{U}=(-1)^{\#Y+\#Z}\hat{}P$ 表明，若泡利字符串中 Y和 Z 因子的总数为奇数，则它与 U反对易。它会将态映射到相反扇区，因此其期望值为零。对于实态，含有奇数个 Y 因子的字符串也具有零期望值，因此 Y 和 Z 因子的数量必须各自为偶数。

对于全系统，I 和 U 的期望值分别固定为 1 和 s，且各自为 F_{AB}贡献一项。真子系统 $\Omega=A$，B 中，只有恒等算符是固定的非零贡献。其他所有允许的字符串，作为子系统可观测量嵌入为 $\hat{}\,\hat{}\,P_\Omega\otimes I_{\bar{\Omega}}$ 后，在该扇区内的迹均为零，且在该扇区内平方为恒等算符。因此，其限制谱包含 $D/2$ 个正负号各异的特征值。方程（S6）对全系统和子系统字符串均适用，且使用相同的扇区维数 $D=d/2$。

对于实态，这两个奇偶条件允许 $(d_\Omega^2+2d_\Omega)/4$ 个字符串，其中包括固定贡献。每个非固定允许字符串的四阶矩为 $48/[(d+4)(d+12)]$。对于全系统减去两个固定字符串，

或者对于真子系统减去唯一的恒等算符，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}F_{AB} &= 2+\left(\frac{d^2+2d}{4}-2\right)\frac{48}{(d+4)(d+12)}\\ &= \frac{14d}{d+12},\\ \mathbb{E}F_{\Omega} &= 1+\left(\frac{d_\Omega^2+2d_\Omega}{4}-1\right)\frac{48}{(d+4)(d+12)}\\ &= 1+\frac{12(d_\Omega^2+2d_\Omega-4)}{(d+4)(d+12)}, \qquad \Omega=A,B.\end{aligned} \tag{S13}$$

对于复态，仅限制总（$Y+Z$）宇称，因此留下 $d_\Omega^2/2$ 个允许的字符串。每个非不变字符串的四阶矩为 $12/[(d+2)(d+6)]$。相应的求和为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}F_{AB} &= 2+\left(\frac{d^2}{2}-2\right)\frac{12}{(d+2)(d+6)}\\ &= \frac{8d}{d+6},\\ \mathbb{E}F_{\Omega} &= 1+\left(\frac{d_\Omega^2}{2}-1\right)\frac{12}{(d+2)(d+6)}\\ &= 1+\frac{6(d_\Omega^2-2)}{(d+2)(d+6)}, \qquad \Omega=A,B.\end{aligned} \tag{S14}$$

将实数态求和代入公式（S3）得到精确的有限尺寸高斯正交系综基准，

$$\alpha_2^{\mathrm{RMT}}(f,N)=\log_2\frac{14d/(d+12)}{\prod_{\Omega=A,B}\left[1+\frac{12(d_\Omega^2+2d_\Omega-4)}{(d+4)(d+12)}\right]}. \tag{S15}$$

复数态基准可由使用上述复数态求和的相同对数比得到。高斯正交系综表达式给出了横场伊辛模型随机态基准曲线。

在固定 $0<f<1$ 时，两个子系统都随 N 增大。子系统均值趋近于 1，而全系统均值对于实态趋近于 14，对于复态趋近于 8。因此，高斯正交系综基准满足

$$\alpha_2^{\mathrm{RMT}}(f,N)=\log_2 14-O\big(2^{-N}+2^{-2N_A}+2^{-2N_B}\big). \tag{S16}$$

有限尺寸修正呈指数级微小，而高斯酉系综基准趋近于 $\log_2 8$。S.II S.II.G 节表明，在大系统极限下，泡利求和围绕其系综平均的涨落消失。因此，典型随机态的 α_2 以及均值 $\mathbb{E}\alpha_2$ 都趋近于这些相同的常数。

S.II.D. 平移对称性

我们计算固定动量随机态的泡利求和。平移算符作用于自旋乘积态时为 $\hat{T}|s_1\cdots s_N\rangle = |s_N s_1\cdots s_{N-1}\rangle$。量子数为 $e^{i2\pi k/N}$ 的扇区具有投影算符

$$\hat{\Pi}_k=\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}e^{-i2\pi kr/N}\hat{T}^r, \qquad k=0,\dots,N-1. \tag{S17}$$

实随机态仅可能存在于 $k=0$，而对于偶数 N，$k=N/2$；复随机态可以占据任意扇区。平移 r 具有 $\gcd(N,r)$ 个循环。每个循环允许两种不变自旋构型，因此 $\mathrm{Tr}\,\hat{T}^r = 2^{\gcd(N,r)}$。插入一个泡利串后，每个因子 2 都被单格点泡利矩阵乘积的迹所替代，其绝对值至多为 2。由于对于 $r\neq 0$，$\gcd(N,r)\le N/2$，我们得到

$$\begin{aligned}D=\mathrm{Tr}\,\hat{\Pi}_k &= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}e^{-i2\pi kr/N}2^{\gcd(N,r)}\\ &= \frac{d}{N}\left[1+O\left(\frac{N}{\sqrt{d}}\right)\right],\\ |\,\mathrm{Tr}(\hat{\Pi}_k\hat{P})| &\le \sqrt{d}, \qquad \hat{P}\neq\hat{I}.\end{aligned} \tag{S18}$$

为了计算 $\mathbb{E}F_{AB}$，我们将方程（S7）中的精确四阶矩对所有泡利串求和。我们不分别计算每个投影算符，而是利用泡利正交性对分子中的迹项求和：

$$\begin{aligned}&\sum_{\hat{P}}(\mathrm{Tr}\,\hat{A})^2 = dD,\\ &\sum_{\hat{P}}\mathrm{Tr}(\hat{A}^2)\le dD^2,\\ &\sum_{\hat{P}}[\mathrm{Tr}(\hat{A}^2)]^2=\frac{1}{c}\sum_{\hat{P}}(\mathrm{Tr}\,\hat{A})^4+O(dD^2).\end{aligned} \tag{S19}$$

$\hat{}$ 所有求和均遍历 $\mathcal{P}_N$，并且 A 的迹均在该扇区上取；对于实态，奇数-Y 泡利串按定义贡献为零。第一个恒等式源自 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\sum_{\hat{P}} P\Pi_k P = dDI$。对于第三个关系，定义 $a_{\hat{P}}=\mathrm{Tr}(\hat{\Pi}_k\hat{P})$ 和 $b_{\hat{P}}=\mathrm{Tr}[(\hat{\Pi}_k\hat{P}\hat{\Pi}_k)^2]$。泡利正交性给出 $\sum_{\hat{P}} b_{\hat{P}}^2 = \sum_{\hat{P}} a_{\hat{P}}^4$。对于实投影算符，仅保留实对称部分则得到

$$\sum_{\hat{P}}[\mathrm{Tr}(\hat{A}^2)]^2=\frac{1}{2}\sum_{\hat{P}}a_{\hat{P}}^4+\frac{1}{2}\sum_{\hat{P}}a_{\hat{P}}^2 b_{\hat{P}}.$$

最后一项由 $dD^2/2$ 控制，因为 $0\le b_{\hat{P}}\le D$ 和 $\sum_{\hat{P}} a_{\hat{P}}^2 = dD$。这证明了 $c=1$ 和 $c=2$ 的第三个关系。它将两个分子项 $(\mathrm{Tr}\,\hat{A})^4$ 和 $3c^2[\mathrm{Tr}(\hat{A}^2)]^2$ 合并为 $(1+3c)\sum_{\hat{P}}(\mathrm{Tr}\,\hat{A})^4$，，误差为 $O(dD^2)$。前两个恒等式，连同 $\|\hat{A}\|\le 1$ 和柯西–施瓦茨不等式，将其余三项之和限制在 $O(dD^2)$ 以内。因此

$$\mathbb{E}F_{AB}=\frac{(1+3c)\sum_{\hat{P}}(\mathrm{Tr}\,\hat{A})^4+O(dD^2)}{D(D+c)(D+2c)(D+3c)}.$$

ˆ 对于子系统 Ω，我们则只对 $P = \hat{P}_\Omega \otimes \hat{I}_{\bar{\Omega}}$ 求和。$\sum_{\hat{P}}[\mathrm{Tr}(\hat{A}^2)]^2$ 的完备基恒等式不再适用。由于有 d_Ω^2 个子系统泡利串，且 $\mathrm{Tr}(\hat{A}^2) \le D$，我们采用以下界

$$\sum_{\hat{P}_\Omega}[\mathrm{Tr}(\hat{A}^2)]^2 \le d_\Omega^2 D^2.$$

另外三项满足与全系统计算中相同的总界。利用 $\mathbb{E}x_{\hat{P}} = \mathrm{Tr}\, A/D$，因此得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}F_{AB} &= (1+3c)\sum_{\hat{P}\in\mathcal{P}_N}(\mathbb{E}x_{\hat{P}})^4 + O\left(\frac{d}{D^2}\right),\\ \mathbb{E}F_\Omega &= \sum_{\hat{P}_\Omega\in\mathcal{P}_{N_\Omega}}(\mathbb{E}x_{\hat{P}_\Omega})^4 + O\left(\frac{d}{D^2}+\frac{d_\Omega^2}{D^2}\right).\end{aligned} \tag{S20}$$

将归一化分母替换为 D^4 引入的误差至多为 $O(d/D^2)$，因为 $\sum_{\hat{P}}(\mathrm{Tr}\,\hat{A})^4 \le dD^3$。由于推导仅用到泡利正交性和扇区投影算符的性质，而未用到平移对称性，式（S20）也适用于其他对称性扇区。

接下来需要计算动量扇区中 $\mathbb{E}x_{\hat{P}}$ 的四次方和。恒等算符贡献为一。对于每个非恒等字符串，式（S18）给出 $|\mathrm{Tr}\,\hat{A}| \le \sqrt{d}$，因此

$$\begin{aligned}\sum_{\hat{P}\neq\hat{I}}(\mathbb{E}x_{\hat{P}})^4 &= \frac{1}{D^4}\sum_{\hat{P}\neq\hat{I}}(\mathrm{Tr}\,\hat{A})^4\\ &\le \frac{d}{D^4}\sum_{\hat{P}}(\mathrm{Tr}\,\hat{A})^2 = \frac{d^2}{D^3}.\end{aligned}$$

将 $D \sim d/N$ 和 $d = d_\Omega d_{\bar{\Omega}}$ 代入式（S20）得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}F_{AB} &= 1+3c+O\left(\frac{N^3}{d}\right),\\ \mathbb{E}F_\Omega &= 1+O\left(\frac{N^3}{d}+\frac{N^2}{d_\Omega^2}\right), \qquad \Omega = A, B.\end{aligned} \tag{S21}$$

在 $0 < f < 1$固定时，所有这些误差都会消失：全系统均值趋近于 $1+3c$，而两个子系统均值都趋近于一。因此，式（S3）给出$\alpha_2^{\mathrm{RMT}} \to \log_2(1+3c)$，即实态对应 $\log_2 7$，复态对应 $\log_2 4$。

S.II.E. 反射对称性

反射的作用为 $\hat{R}|s_1\cdots s_N\rangle = |s_N\cdots s_1\rangle$。扇区投影算符和维数为

$$\hat{\Pi}_s = \frac{\hat{I}+s\hat{R}}{2}, \qquad D = \frac{d+s2^{\lceil N/2\rceil}}{2} \sim \frac{d}{2}, \qquad s = \pm 1. \tag{S22}$$

每个镜像对对 $\mathrm{Tr}(\hat{R}\hat{P})$ 的贡献至多为 2；当 N 为奇数时，中心格点的贡献也至多为 2。对于非恒等算符串，

$$|\mathrm{Tr}(\hat{\Pi}_s\hat{P})| = \frac{1}{2}|\mathrm{Tr}(\hat{R}\hat{P})| \le 2^{\lceil N/2\rceil-1} = O(\sqrt{d}).$$

连同 $\sum_{\hat{P}}(\mathrm{Tr}\,\hat{A})^2 = dD$，这给出了非恒等项求和 $(\mathbb{E}x_{\hat{P}})^4$ 的上界 $O(d^{-1})$。方程 (S20) 适用于一般扇区投影算符。我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}F_{AB} &= 1+3c+O(d^{-1}),\\ \mathbb{E}F_\Omega &= 1+O\left(d^{-1}+d_\Omega^{-2}\right), \qquad \Omega = A, B.\end{aligned} \tag{S23}$$

对于任一宇称及固定的 $0 < f < 1$，极限 α_2^{RMT} 对实态仍为 $\log_2 7$，对复态则为 $\log_2 4$。

S.II.F. 半填充磁化

固定 $U(1)$ 电荷对全系统 SRE 统计的影响，也已在受约束的 Haar 随机态 [8] 中得到研究。这里我们将上自旋的数目固定为 $N/2$，其中 N 为偶数。扇区维数为

$$D = \binom{N}{N/2} = d\sqrt{\frac{2}{\pi N}}\,[1+O(N^{-1})]. \tag{S24}$$

方程 (S20) 将计算化简为系综平均。包含 X 或 Y 的字符串，其对角元为零，因此平均值也为零。对于含有 ℓ 个 Z因子的对角字符串，通过计算自旋构型的数目可得

$$\mathbb{E}x_{\hat{P}} = \begin{cases}(-1)^j\dfrac{\binom{N/2}{j}}{\binom{N}{2j}}, & \ell = 2j,\\ 0, & \ell \text{ odd}.\end{cases} \tag{S25}$$

有 $\binom{N}{\ell}$ 个这样的全系统字符串，区域 Ω 中有 $\binom{N_\Omega}{\ell}$ 个。具有 $\ell = 0,\ N$ 的字符串，其期望值的大小固定为 1。主要修正项来自 $\ell = 2,\ N-2$，其平均大小为 $1/(N-1)$。子系统仅包含 $\ell = 0$ 固定项和$\ell = 2$ 主要修正项。在 $0 < f < 1$ 固定时，对其余权重求和得到 $O(N^{-4})$，因此

$$\begin{aligned}\sum_{\hat{P}\in\mathcal{P}_N}(\mathbb{E}x_{\hat{P}})^4 &= 2+\frac{2\binom{N}{2}}{(N-1)^4}+O(N^{-4}),\\ \sum_{\hat{P}_\Omega\in\mathcal{P}_{N_\Omega}}(\mathbb{E}x_{\hat{P}_\Omega})^4 &= 1+\frac{\binom{N_\Omega}{2}}{(N-1)^4}+O(N^{-4}).\end{aligned} \tag{S26}$$

代入公式（S20）得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}F_{AB} &= (1+3c)\left[2+\frac{2\binom{N}{2}}{(N-1)^4}\right]+O\left(N^{-4}+\frac{N}{d}\right),\\ \mathbb{E}F_\Omega &= 1+\frac{\binom{N_\Omega}{2}}{(N-1)^4}+O\left(N^{-4}+\frac{N}{d}+\frac{N}{d_\Omega^2}\right).\end{aligned} \tag{S27}$$

取它们的对数比可得

$$\alpha_2^{\mathrm{RMT}}(f,N)=\log_2[2(1+3c)]+\frac{f(1-f)}{N^2\ln 2}+O(N^{-3}). \tag{S28}$$

对于实态，极限为 $\log_2 14$；对于复态，极限为 $\log_2 8$。N^{-2} 修正项源于 $i\neq j$ 的非零双自旋均值 $\mathbb{E}x_{\hat{Z}_i\hat{Z}_j}=-1/(N-1)$。

S.II.G. 集中性与平均稳定子关联

我们现在证明，平均和决定了典型随机态的极限 α_2。期望值与态无关的字符串不会产生方差，因此在下文带撇号的求和中省略。在态振幅的单位球面上，微分与泡利正交性将切向梯度限制为 $\|\nabla_{\tan}F_\Omega\|^2\le 64d\sum'_{\hat{P}_\Omega}x^6_{\hat{P}_\Omega}$。因此，球面庞加莱不等式给出

$$\operatorname{Var}F_\Omega\le\frac{64d}{D-1}\sum_{\hat{P}_\Omega}{}'\mathbb{E}x^6_{\hat{P}_\Omega},\qquad D>1,\quad \Omega=A,B,AB. \tag{S29}$$

对于复态，单位球面位于 $\mathbb{R}^{2D}$ 中，分母为 $2D-1$，因此上述界限同样成立。

六阶的归一化高斯计算结合 $\|\hat{A}\|\le 1$，对所有字符串一致地给出$\mathbb{E}|x_{\hat{P}}-\mathbb{E}x_{\hat{P}}|^6=O(D^{-3})$。由于字符串至多有 d^2个，

$$\operatorname{Var}F_\Omega=O\left[\frac{d^3}{D^4}+\frac{d}{D}\sum_{\hat{P}_\Omega}{}'(\mathbb{E}x_{\hat{P}_\Omega})^6\right].$$

在全空间系综和自旋反演系综中，带撇号的均值为零。上述迹界以及$\sum_{\hat{P}}(\mathbb{E}x_{\hat{P}})^2=d/D$将其六次幂之和限制为$O(N^5/d^2)$，适用于动量扇区；而反射扇区中则为 $O(d^{-2})$。在半填充时，式（S25）则给出$O(N^{-4})$，其主要贡献来自 $\ell=2$，$N-2$。因此，对于 $\Omega=A$，B，AB，

$$\operatorname{Var}F_\Omega=\begin{cases}O(d^{-1}), & \text{full space, spin inversion, or reflection},\\ O(N^4/d), & \text{momentum},\\ O(N^{-7/2}+N^2/d), & \text{half filling}.\end{cases} \tag{S30}$$

由于 $F_\Omega\ge 1$，对数函数是利普希茨连续的，其常数为 $1/\ln 2$。因此

$$\mathbb{E}\left|\alpha_2-\alpha_2^{\mathrm{RMT}}\right|\le\frac{1}{\ln 2}\sum_{\Omega\in\{A,B,AB\}}\sqrt{\operatorname{Var}F_\Omega}\longrightarrow 0. \tag{S31}$$

在固定的 $0<f<1$、$\mathbb{E}\alpha_2$ 下，典型随机态的 α_2 趋近于与 α_2^{RMT} 相同的常数。

S.II.H. 有限尺寸标准差的GOE预测

我们计算 α_2 的高斯正交系综标准差。对于混合场伊辛链，参照系综是全空间高斯正交系综（$D=d$）；对于横场伊辛模型，参照系综是偶自旋反演高斯正交系综（$D=d/2$）。对于任一扇区，式（S9）和（S13）中的子系统均值可以写为

$$\mu_\Omega\equiv\mathbb{E}F_\Omega=1+\frac{6[(D/d)d_\Omega^2+d_\Omega-2]}{(D+2)(D+6)},\qquad \Omega=A,B.$$

通过将式（S5）应用于两个扇区限制算符，并对所有有序对的连通四阶矩求和，可得到泡利和协方差。利用这些协方差，对式（S2）中的对数作一阶展开，可得有限尺寸标准差

$$\begin{aligned}&\sigma_{\mathrm{GOE}}(N,N_A)\\ &\simeq\frac{4}{\ln 2\sqrt{(D+4)(D+10)(D+12)(D+14)}}\\ &\times\Bigg[\frac{12(D-1)(D+4)}{7}-4D(D+4)(2-\mu_A^{-1}-\mu_B^{-1})\\ &\quad+D(D^2+24D+104)(2-\mu_A^{-1}-\mu_B^{-1})^2\\ &\quad+8D(D+13)\sum_{\Omega=A,B}\frac{\mu_\Omega-1}{\mu_\Omega^2}\\ &\quad+\frac{192(d-D)(D+13)}{(D+2)(D+6)\mu_A\mu_B}\\ &\quad-\frac{6D(D+16)}{d}\sum_{\Omega=A,B}\frac{d_\Omega^2}{\mu_\Omega^2}(\mu_\Omega-1)\\ &\quad+\frac{72(D+16)(d-D)}{d(D+2)(D+6)}\sum_{\Omega=A,B}\frac{d_\Omega^2}{\mu_\Omega^2}\Bigg]^{1/2}.\end{aligned} \tag{S32}$$

标准差的首阶为 $\sigma_{\mathrm{GOE}}\approx 7.5/D$。例如，在 $N=16$ 和 $N_A=8$处，公式（S32）给出 1.1532×10^{-4} 对于全空间高斯正交系综，以及 2.3070×10^{-4} 对于偶宇称高斯正交系综。

S.III. XXZ 链中的稳定子关联

我们比较同一对称性扇区中的相互作用可积 XXZ 链、其混沌扩展以及实随机态。周期性哈密顿量为 [9]

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathrm{XXZ}}=&\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{S}_i^x\hat{S}_{i+1}^x+\hat{S}_i^y\hat{S}_{i+1}^y+\Delta\hat{S}_i^z\hat{S}_{i+1}^z\right)\\ &+\lambda\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{S}_i^x\hat{S}_{i+2}^x+\hat{S}_i^y\hat{S}_{i+2}^y+\Delta'\hat{S}_i^z\hat{S}_{i+2}^z\right),\end{aligned} \tag{S33}$$

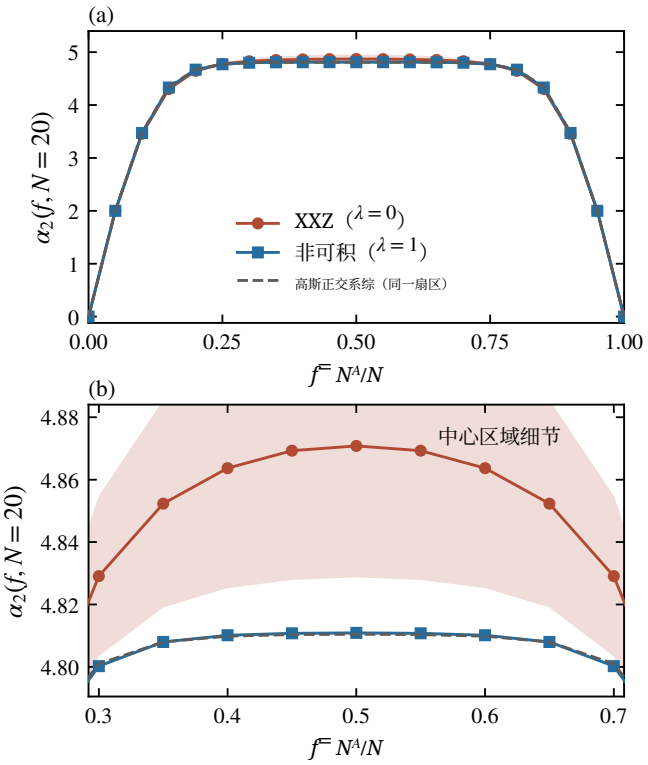

图 S1. $N = 20$处的稳定子关联：(a) 随子系统占比 f 的变化；(b) $f = 1/2$附近的放大图。实线表示可积模型和混沌模型在谱中心附近 192 个本征态上的平均值。虚线表示同一联合对称性扇区中 192 个实随机态的平均值。阴影表示本征态之间的标准差。所有泡利求和均精确计算。

其中 $(\hat{S}_i^x, \hat{S}_i^y, \hat{S}_i^z) = (\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i)/2$，格点指标按 N取模，最近邻交换设定能量单位。我们使用 $\Delta = 1.1$ 和 $\Delta' = 0.5$。该模型在 $\lambda = 0$ 时是可积的，在 $\lambda = 1$时是非可积的。两者均限制在总磁化为零、动量为 $k = 0$以及反射和自旋反演宇称均为偶数的条件下。

随机态参照通过对同一联合对称性扇区的实正交归一基中、系数相互独立且服从标准高斯分布的向量进行归一化得到。我们对每个随机态数值计算 α_2，并对所得数值取平均。该参照同时纳入了全部四个对称性约束。对于 $N = 22, 24$，子系统泡利求和可精确计算，而全系统求和则结合精确的部分求和与分层重要性采样（每个态使用 1024 个正式采样）。误差条表示均值的近似 95% 区间，其中包含本征态选择和泡利采样不确定性。

图 S1显示，两种模型在 $f = 1/2$ 附近都形成了平台，这与自由费米子横场伊辛模型中显著的中心峰不同。在 $f = 1/2$处，可积、混沌和随机态情形的平均值分别约为 4。87、4。81 和 4。81。

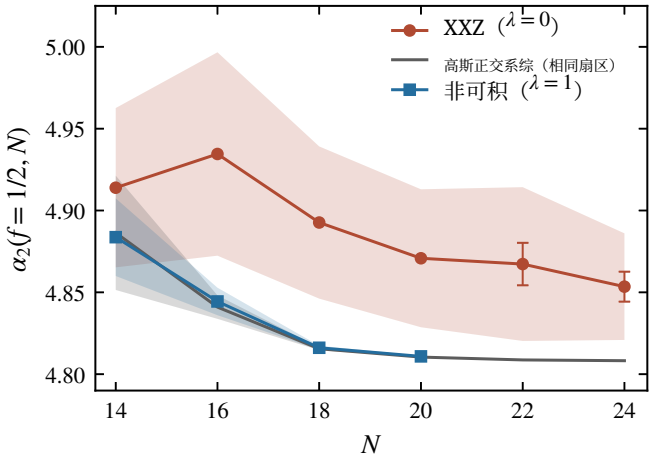

图 S2. 半链稳定子关联与 N 的关系。曲线表示均值，阴影表示本征态间的标准差，误差条表示 $N \geq 22$ 蒙特卡洛采样的近似 95% 统计区间。

它们的标准差为 0。0843，7.46×10^{-4}，以及 3.28×10^{-4}。混沌情形的数值与随机态参照高度吻合，而可积链的数值较高，且本征态间涨落大得多。在 $f = 1/2$处，可积情形的平均值在 $N = 24$[图 S2]。

对于相互作用可积 XXZ 链，我们的数值结果还表明，在等分二分附近，稳定子关联随 f 的变化很小，尽管其数值不同于随机态预测，且其本征态间涨落要大得多。这一行为与文献 [4] 中的观察结果相一致，即 XXZ 链中稳定子熵的长时间行为类似于非可积系统中的情况。对这一行为的更详细研究留待未来开展。

[1] L. Leone、S. F. E. Oliviero 和 A. Hamma，《稳定子 Rényi 熵》，《物理评论快报》128，050402（2022）。[2] P. S. Tarabunga 和 T. Haug，《利用矩阵乘积态高效计算互信息魔性和魔性容量》，SciPost物理 19，085（2025）。[3] P. S. Tarabunga、E. Tirrito、T. Chanda 和 M. Dalmonte，《通过泡利–Markov 链研究多体魔性——从临界性到规范理论》，PRX Quantum 4，040317（2023）。[4] J. Odavi´c、M. Viscardi 和 A. Hamma，《非可积量子演化中的稳定子熵》，《物理评论 B》112，104301（2025）。[5] X. Huang、H.-Z. Li、C. H. Lee 和 J.-X. Zhong，《通过 XOR-FWHT 算法快速精确地计算稳定子 Rényi 熵》，arXiv:2512.24685（2025）。[6] P. Sierant、J. Vall`es-Muns 和 A. Garcia-Saez，《计算态矢量的量子魔性》，Quantum 10，2059（2026）。

[7] M. Serbyn、Z. Papi´c 和 D. A. Abanin，《局域守恒定律与多体局域化态的结构》，《物理评论快报》**111**，127201（2013）。[8] D. Iannotti、A. Russotto、B. Jasser、J. Odavi´c 和 A. Hamma，《非稳定子性与 U（1）对称性在混沌多体量子系统，arXiv:2603.28870（2026）。[9] T. LeBlond、K. Mallayya、L. Vidmar 和 M. Rigol，《相互作用可积系统中的纠缠与可观测量的矩阵元》，《物理评论E》**100**，062134（2019）。