OU-HET 1333

四维 $\mathbf{Z}_N$ 晶格规范理论中的非可逆对偶缺陷

Satoshi Yamaguchi

日本大阪府丰中市大阪大学理学研究科物理系，邮编 *560-0043*

arXiv:2611.30489v1 [hep-th] 23 Nov 2026

摘要

我们研究具有广义格面作用量的四维 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论。这些理论已知具有对偶性。我们通过为每个构件赋予权重并证明拓扑不变性，构造实现这些对偶性的拓扑界面。在自对偶耦合下，这些界面成为代表非可逆对称性的对偶缺陷。我们还研究中心对称性缺陷及其与对偶界面的交汇点，并推导出若干交叉关系。

目录

1 引言 **2**

2 四维 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论 **3**

2.1 有限傅里叶变换 .3 2.2 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论 .5 2.3 规范化中心对称性 .6 2.4 对偶性 .7 2.5 自对偶理论空间 .8 2.6 对偶与自对偶的示例 .10

3 对偶缺陷 **12**

3.1 几何 .13 3.2 对偶缺陷的权重 .14 3.3 拓扑不变性的证明 .15 3.4 S^3 期望值与连通和 .18

4 对称　　缺陷与交汇点 21
4.1 中心对称性缺陷 .214.2 交汇点 .234.3 交叉关系 .25

5 半空间规范化 **28**
5.1 在具有狄利克雷边界条件的区域中进行规范化 .285.2 傅里叶变换与边界相位 .
295.3 四面体棱柱权重 .30

6　结论与讨论 **30**

A 上链记号的总结 **32**

B 高斯和的计算 **33**
B.1 奇数 N .34B.2 偶数 N .36B.3 结果总结 .36

1 引言

格点场论为非微扰地定义量子场论提供了一种概念上直接且成熟的框架。尤其是，晶格规范理论 [1]能够精确保留规范对称性，并取得了许多重要的数值和理论成果。要达到连续极限，需要二级相变或无能隙相。因此，探索晶格规范理论的相结构十分重要。关于这些相结构的早期研究，参见 [2, 3, 4, 5, 6, 7]。研究相结构时，考虑对称性也很重要。

$\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论在这一发展过程中发挥了重要作用。Creutz、Jacobs 和 Rebbi 早期开展的蒙特卡罗研究阐明了这些规范理论的相结构 [8, 9]。分析研究还表明，当 N [10, 11, 12] 足够大时，四维 $\mathbb{Z}_N$ 模型可以支撑无质量光子相。近年来，研究者从现代视角考察了 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论的相结构 [13]。这些结果表明，离散规范理论是理解禁闭以及连续规范场如何在长距离尺度上涌现的重要模型。

自克拉默斯–旺尼尔（KW）对偶性被发现以来 [14, 15], ，对偶性为理解相变提供了洞见。Wegner 将 KW 对偶性推广到一般的 $\mathbb{Z}_2$ 模型，包括四维 $\mathbb{Z}_2$ 晶格规范理论 [16]。四维 $\mathbb{Z}_N$ 规范

理论的进一步推广见参考文献 [17, 18, 19, 20]。另请参阅综述 [21]。

近年来，通过以拓扑缺陷的方式描述对称性 [22], ，对称性的概念得到了拓展，由此形成了“广义对称性”框架。特别是，不具有群结构的广义对称性如今称为“非可逆对称性”。从这一视角出发，许多论文发现并研究了自对偶点处二维 KW 对偶所产生的拓扑缺陷（即广义对称性），其中包括参考文献 [23, 24, 25, 26, 27]。基于四维 KW 型对偶的非可逆拓扑缺陷也已构造出来 [28, 29, 30, 31]。关于广义对称性最新进展的综述，可参见例如参考文献 [32, 33, 34]。

本文为具有广义格面作用量 [35, 36, 19, 20]的 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论构造对偶缺陷。我们采用 Aasen–Mong–Fendley（AMF）方法 [25], ；该方法已用于参考文献 [28]中四维 $\mathbb{Z}_2$ 晶格规范理论的对偶缺陷构造。换言之，我们将 [28] 的构造推广到具有广义格面作用量的 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论。我们还研究了半空间规范化方法 [29] ，并发现这两种方法给出的缺陷相同。

我们还构造了中心对称性缺陷及其交汇点。随后，我们推导出涉及这些缺陷的若干交叉关系。

本文的结构如下。在第2节中，我们建立了 $\mathbb{Z}_N$ 具有广义格面作用量的晶格规范理论。随后，我们回顾对偶性，并将其推广到任意非退化对称双特征。在第3节中，我们构造对偶缺陷。在此，我们在一对互为对偶的理论之间构造对偶界面。在自对偶理论中，这些对偶界面变为连接相同理论的对偶缺陷。我们还推导出独立于动力学细节的普适恒等式，它们类似于 Ward–Takahashi 恒等式。在第4节中，我们构造中心对称性缺陷及其交汇点。我们推导出涉及这些缺陷和交汇点的交叉关系。在第5节中，我们利用半空间规范化研究对偶界面。我们发现，此处得到的界面与第3节中得到的界面相同。第6 节给出我们的结论与讨论。

2 四维 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论中的对偶性

本节回顾并扩展具有广义作用量 [35, 36, 19, 20] 的四维 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论的对偶性。我们重点讨论规范群 $\mathbb{Z}_N$，但这一构造可以推广到任意有限阿贝尔群。

2.1 有限傅里叶变换

我们汇总了 $\mathbb{Z}_N$ 上有限傅里叶变换的记号与恒等式。

对于整数 $N > 1$，我们考虑群 $\mathbb{Z}_N$：

$$\mathbb{Z}_N = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}. \tag{2.1}$$

群运算为加法，所有运算均按模 N 进行。

对于满足 $\gcd(N, k) = 1$ 的 $k \in \mathbb{Z}$，定义非退化对称双特征 $\chi_k \colon \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \to \mathsf{U}(1)$，如下所示：

$$\chi_k(a, b) = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N} ab\right). \tag{2.2}$$

条件 $\gcd(N, k) = 1$ 确保了非退化性。对于 $a, b, c \in \mathbb{Z}_N$，我们有

$$\chi_k(a, b + c) = \chi_k(a, b)\chi_k(a, c), \quad \chi_k(a, b) = \chi_k(b, a). \tag{2.3}$$

直观地说，$\chi_k(a, b)$ 是一个指数化双线性型。对于 $b \in \mathbb{Z}_N$，由特征标正交性可得 es

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}_N} \chi_k(a, b) = N\delta_{b,0}. \tag{2.4}$$

函数 $w \colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ 可视为 $\mathbb{C}^N$ 中的一个向量。定义有限傅里叶变换 F_k，如下所示：

$$(\mathsf{F}_k w)(a) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b \in \mathbb{Z}_N} \chi_k(a, b) w(b). \tag{2.5}$$

等价地，F_k 是一个 $N \times N$ 矩阵，其元素为

$$(\mathsf{F}_k)_{ab} = \frac{1}{\sqrt{N}} \chi_k(a, b). \tag{2.6}$$

根据特征标正交性，F_k 是酉的。它的平方为

$$(\mathsf{F}_k^2 w)(a) = \frac{1}{N} \sum_{c \in \mathbb{Z}_N} w(c) \sum_{b \in \mathbb{Z}_N} \chi_k(b, a + c) = w(-a). \tag{2.7}$$

这里我们用到了方程（2.3）和（2.4）。定义荷共轭算子C 如下：

$$(\mathsf{C} w)(a) := w(-a). \tag{2.8}$$

那么，F_k 满足

$$\mathsf{F}_k^2 = \mathsf{C}, \qquad \mathsf{C}^2 = 1, \qquad \mathsf{F}_k^4 = 1, \qquad \mathsf{F}_k^{-1} = \mathsf{F}_k^\dagger = \mathsf{F}_k^3. \tag{2.9}$$

对于 $N > 2$，F_k 的阶为四，并生成一个与 $\mathbb{Z}_4$同构的群。对于 $N = 2$，$\mathsf{C} = 1$，且F_k的阶为二。

我们稍后将用到以下引理。

引理 1（傅里叶变换保持偶性）。 设 $w:\ \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ 满足 $w\ (-a)\ = w\ (a)$ 对所有 $a \in \mathbb{Z}_N$成立。那么 $\mathsf{F}_k w$也是偶函数:

$$(\mathsf{F}_k w)(-a) = (\mathsf{F}_k w)(a). \tag{2.10}$$

证明。 改变求和变量 $b \mapsto -b$ 得到

$$\begin{aligned}(\mathsf{F}_k w)(-a) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b\in\mathbb{Z}_N} \chi_k(-a,b) w(b) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b\in\mathbb{Z}_N} \chi_k(a,b) w(-b) = (\mathsf{F}_k w)(a).\end{aligned} \tag{2.11}$$

□

2.2 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论

We 现在定义本文所研究的四维 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论 .

考虑一个有限的四维超立方晶格 Λ，其具有周期性边界条件。为每条链路和每个格面选择一个参考取向。令 Λ_2 表示格面集合，其中每个格面均按其参考取向取一次。我们为每条有向链路 $a_\ell \in \mathbb{Z}_N$ l 赋予一个变量，其中 $a_{-\ell} = -a_\ell$ 表示取向相反的链路。在附录A的记号中， $a \in C^1(\Lambda)$。对于一条链路 l $=\langle ij\rangle$，其从格点 i定向至格点 j，规范变换作用为

$$a_\ell \longmapsto a_\ell + \lambda_j - \lambda_i, \tag{2.12}$$

其中，规范变换参数 $\lambda_i \in \mathbb{Z}_N$ 独立地赋予每个格点；等价地， $\lambda \in C^0(\Lambda)$。穿过有向格面的规范不变通量 p 为

$$f_p := \sum_{\ell\in\partial p} a_\ell, \tag{2.13}$$

其中 ∂p 由四条边界链路组成，其定向由 p所诱导。在附录A的记号中， $f = \mathrm{d}a$。

设 $w:\ \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ 是满足 $\mathsf{C}w = w$ 的格面权重，即:

$$w(-f) = w(f), \qquad f \in \mathbb{Z}_N. \tag{2.14}$$

由于 $f_{-p} = -f_p$，这一条件使权重与格面的参考取向无关。配分函数为

$$Z_w := \frac{1}{N^V} \sum_{a\in C^1(\Lambda)} \prod_{p\in\Lambda_2} w(f_p), \tag{2.15}$$

其中 V 是格点数。分母 N^V 表示规范体积。我们的分析大多适用于满足式（2.14）的一般复权重。若要作概率解释，权重必须为实数且非负。对于严格正权重，作用量可写为

$$S(a) = -\sum_{p\in\Lambda_2} \log w(f_p). \tag{2.16}$$

因此，配分函数为

$$Z_w = \frac{1}{N^V} \sum_{a\in C^1(\Lambda)} e^{-S(a)}. \tag{2.17}$$

2.3 规范化中心对称性

本文所研究的 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论具有一形式中心对称性 $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ 。我们将该对称性与背景规范场耦合如下。

$\mathbb{Z}_N^{[1]}$ 的背景规范场由 $B \in C^2(\Lambda)$给出，其中 $\mathrm{d}B = 0$。背景规范变换由 $\lambda^1 \in C^1(\Lambda)$参数化，在该变换下， a 和 B 变换为

$$a \longmapsto a + \lambda^1, \qquad B \longmapsto B + \mathrm{d}\lambda^1. \tag{2.18}$$

于是， $f - B$ 是规范不变的，其中 $f = \mathrm{d}a$。

存在背景场 B 时的配分函数为

$$Z_w(B) := \frac{1}{N^V} \sum_{a\in C^1(\Lambda)} \prod_{p\in\Lambda_2} w(f_p - B_p). \tag{2.19}$$

对这一对称性进行规范化，相当于对背景^规范场的所有平坦构型求和。规范化理论的配分函数 Z_w 为

$$\widehat{Z}_w = \frac{1}{N^{3V}} \sum_{b\in C^2(\Lambda),\mathrm{d}b=0} Z_w(b). \tag{2.20}$$

这里，分母 N^{3V} 是规范体积。一形式规范变换的参数属于 $C^1(\Lambda)$，并具有由 $C^0(\Lambda)$参数化的规范的规范冗余。因此，规范体积为

$$\frac{|C^1(\Lambda)|}{|C^0(\Lambda)|} = \frac{N^{4V}}{N^V} = N^{3V}. \tag{2.21}$$

这个规范化理论具有一种一形式全局对称性，称为对偶对称性或量子^对称性 [22]。对偶一形式对称群为 $\widehat{\mathbb{Z}}_N := \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_N, \mathrm{U}(1))$。尽管 $\mathbb{Z}_N \cong \widehat{\mathbb{Z}}_N$，我们仍必须在它们之间选择一个识别。我们采用由非退化对称双特征 χ_k指定的同构：

$$\mathbb{Z}_N \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_N, \qquad x \longmapsto \chi_k(x,\cdot).$$

将这种对偶一形式对称性的背景规范场置于对偶晶格 Λ^* 的格面上会比较方便。令 Λ_2^* 表示对偶晶格的格面集合。存在一个典范双射 $\Lambda_2 \longrightarrow \Lambda_2^*$，记作 $p \mapsto p^*$。利用上述识别，令 $B \in C^2(\Lambda^*)$，$\mathrm{d}B = 0$，表示对偶对称性的背景规范场。相应的配分函数为

$$\widehat{Z}_w(B) = \frac{1}{N^{3V}} \sum_{b \in C^2(\Lambda), \mathrm{d}b=0} Z_w(b) \prod_{p \in \Lambda_2} \chi_k(B_{p^*}, b_p). \tag{2.22}$$

2.4 对偶性

现在我们陈述任意 k 与 N互素时的对偶性。对于 $k = 1$，它化简为参考文献 [19, 20]中的对偶性。

令 T_w 表示权重为 w的晶格规范理论，令 $\widehat{\mathrm{T}}_w$ 表示通过对 T_w的中心对称性 $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ 进行规范化得到的理论。令 $\tilde{w}$ 为 w的傅里叶变换：

$$\tilde{w} := \mathsf{F}_k w. \tag{2.23}$$

根据引理1， $\tilde{w}$ 也是偶函数，因此它定义了一个晶格规范理论$\mathcal{T}_{\tilde{w}}$。以下等价关系成立：

$$\mathcal{T}_{\tilde{w}} \cong \widehat{\mathcal{T}}_w. \tag{2.24}$$

在配分函数层面上，这一等价关系具有以下形式。

定理 2（对偶性）。若 w 与 $\tilde{w}$ 满足方程(2.23)，则方程(2.19) 和(2.22)中定义的配分函数满足

$$Z_{\tilde{w}}(B) = \widehat{Z}_w(B). \tag{2.25}$$

证明。 在式（2.22）中，我们将对平坦 b 的求和替换为对所有 $b \in C^2(\Lambda)$的求和，并插入 $\delta_{\mathrm{d}b,\ 0}$。平坦性约束因子化为

$$\delta_{\mathrm{d}b,0} = \prod_{c \in \Lambda_3} \delta_{(\mathrm{d}b)_c,0}. \tag{2.26}$$

利用式（2.4），我们可以将 $\delta_{(\mathrm{d}b)_c,\ 0}$ 改写为

$$\delta_{(\mathrm{d}b)_c,0} = \frac{1}{N} \sum_{g_{c^*} \in \mathbb{Z}_N} \chi_k(g_{c^*}, (\mathrm{d}b)_c), \tag{2.27}$$

其中，我们使用由 $c \mapsto c^*$ 给出的双射 $\Lambda_3 \to \Lambda_1^*$，并引入对偶一上链 $g \in C^1(\Lambda^*)$。然后，我们可以将 $\delta_{\mathrm{d}b,0}$ 改写为

$$\delta_{\mathrm{d}b,0} = \sum_{g \in C^1(\Lambda^*)} \prod_{c \in \Lambda_3} \frac{1}{N} \chi_k(g_{c^*}, (\mathrm{d}b)_c) = \frac{1}{N^{4V}} \sum_{g \in C^1(\Lambda^*)} \prod_{p \in \Lambda_2} \chi_k(-(\mathrm{d}g)_{p^*}, b_p). \tag{2.28}$$

这里，我们使用 $|\Lambda_3| = 4V$ 和引理 4。为了消去对 a 的求和，首先将式 (2.19) 代入式 (2.22)：

$$\widehat{Z}_w(B) = \frac{1}{N^{4V}} \sum_{a\in C^1(\Lambda)} \sum_{\substack{b\in C^2(\Lambda)\\ \mathrm{d}b=0}} \prod_{p\in\Lambda_2} w((\mathrm{d}a)_p - b_p)\chi_k(B_{p^*}, b_p).$$

对每个 a，进行变量替换 $b' = b - \mathrm{d}a$，该替换保持平坦性约束不变。这等价于通过参数为 $\lambda^1 = -a$的一形式规范变换，将 $a = 0$ 设为$\mathrm{d}B = 0$。由于a，引理 4给出

$$\prod_{p\in\Lambda_2} \chi_k(B_{p^*}, (\mathrm{d}a)_p) = 1.$$

由于 $w(-b'_p) = w(b'_p)$，被加项与 a 无关。因此，对 a 求和会得到$|C^1(\Lambda)| = N^{4V}$，从而抵消前因子。将 b' 重新标记为 b 后，我们得到

$$\widehat{Z}_w(B) = \sum_{\substack{b\in C^2(\Lambda)\\ \mathrm{d}b=0}} \prod_{p\in\Lambda_2} w(b_p)\chi_k(B_{p^*}, b_p).$$

代入公式 (2.28) 后得到

$$\begin{aligned}
\widehat{Z}_w(B) &= \frac{1}{N^{4V}} \sum_{g\in C^1(\Lambda^*)} \sum_{b\in C^2(\Lambda)} \prod_{p\in\Lambda_2} w(b_p)\chi_k(B_{p^*}, b_p)\chi_k(-(\mathrm{d}g)_{p^*}, b_p) \\
&= \frac{1}{N^{4V}} \sum_{g\in C^1(\Lambda^*)} \prod_{p\in\Lambda_2} \sum_{b_p\in\mathbb{Z}_N} w(b_p)\chi_k(B_{p^*} - (\mathrm{d}g)_{p^*}, b_p) \\
&= \frac{1}{N^{4V}} \sum_{g\in C^1(\Lambda^*)} \prod_{p\in\Lambda_2} \sqrt{N}\tilde{w}(B_{p^*} - (\mathrm{d}g)_{p^*}) \\
&= \frac{1}{N^{V}} \sum_{g\in C^1(\Lambda^*)} \prod_{p^*\in\Lambda_2^*} \tilde{w}((\mathrm{d}g)_{p^*} - B_{p^*}).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

这里，我们使用公式 (2.3)、$\tilde{w} = \mathrm{F}_k w$与公式 (2.5)、$|\Lambda_2| = 6V$，以及 $\tilde{w}(a) = \tilde{w}(-a)$。公式 (2.29) 的最终形式与 (2.19) 相同，只需将 w 替换为 $\tilde{w}$，并将 Λ 替换为 Λ^*。由于超立方晶格 Λ 与 Λ^* 彼此同构，公式 (2.29) 蕴含公式 (2.25)。□

这种对偶性将原始晶格 Λ与其对偶晶格 Λ^*互换。这种互换为我们在第3节构造对偶缺陷提供了指引。

2.5 自对偶理论空间

在本小节中，我们研究由 $\mathrm{F}_k w = w$ 定义的精确自对偶权重，并计算模去整体缩放后的独立参数个数。我们首先计算精确自对偶权重空间的复维数

。随后我们证明，其严格正实数子集在 $\mathbb{R}$ 上具有相同的维数。对于非零偶权重，允许通过整体缩放实现自对偶性，即 $\mathsf{F}_k w = cw$，这使得 $c = \pm 1$ 成立，因为 $\mathsf{F}_k^2 = \mathsf{C}$。下文将复权重和实权重限制在 $+1$ 特征子空间中。对于严格正权重，$(\mathsf{F}_k w)(0) = N^{-1/2} \sum_a w(a) > 0$ 且 $w(0) > 0$迫使 $c = 1$，因此这一限制不会排除任何自对偶正权重。

我们从空间 $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_N, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^N$开始。恰好自对偶的权重构成特征子空间$V_+$，其对应于 F_k 的特征值 1。注意，空间中的每个权重都自动满足条件（2.14）。为了计算 V_+ 的维数，方便起见，我们引入投影到 V_+上的投影算子：

$$\mathsf{P} := \frac{1}{4}(1 + \mathsf{F}_k + \mathsf{F}_k^2 + \mathsf{F}_k^3) = \frac{1}{4}(1 + \mathsf{C} + \mathsf{F}_k + \mathsf{F}_k^\dagger). \tag{2.30}$$

那么，$\dim_{\mathbb{C}} V_+ = \mathrm{tr}\, \mathsf{P}$。

显然，$\mathrm{tr}\ 1 = N$。由于 $(\mathsf{C}w)(a) = w(-a)$，$\mathrm{tr}\ \mathsf{C}$ 等于 $a = -a\ \mathrm{in} \mathbb{Z}_N$ 的解的个数。因此，

$$\mathrm{tr}\, \mathsf{F}_k^2 = \gcd(N, 2) = \begin{cases} 1 & (N:\ \text{odd}) \\ 2 & (N:\ \text{even}) \end{cases}. \tag{2.31}$$

其余部分的计算如下。

$$\mathrm{tr}(\mathsf{F}_k + \mathsf{F}_k^\dagger) = 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, \mathsf{F}_k = \frac{2}{\sqrt{N}}\,\mathrm{Re}\, G(k; N), \tag{2.32}$$

$$G(k; N) := \sum_{r=1}^{N} \exp\left(\frac{2\pi i k r^2}{N}\right). \tag{2.33}$$

量 $G(k;\ N)$ 是一个二次高斯和。

结合这些结果，我们得到

$$\dim_{\mathbb{C}} V_+ = \frac{1}{4}\left(N + \gcd(N, 2) + \frac{2}{\sqrt{N}}\,\mathrm{Re}\, G(k; N)\right). \tag{2.34}$$

对于 $c \in \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$，缩放权重会使配分函数发生如下变化：

$$Z_{cw} = c^{|\Lambda_2|} Z_w = c^{6V} Z_w,$$

其中 V 是格点数。我们忽略这一整体归一化，并将 V_+ 中仅相差一个整体缩放的非零权重视为相同。由此得到的参数空间为 $\mathbb{P}(V_+) = (V_+ \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$，其复维数为$d_{N,\ k} = \dim_{\mathbb{C}} V_+ - 1$。因此，

$$d_{N,k} = \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2\sqrt{N}}\,\mathrm{Re}\, G(k; N) - \frac{1}{2}. \tag{2.35}$$

为了计算这个数，我们需要计算高斯和 $G(k;\ N)$。关于$d_{N,\ k}$用雅可比符号表示的公式见式（B.20）。根据参考文献 [37] 中的公式推导这一结果的过程见附录B。当 $k = 1$, $d_{N,\ 1} = \lfloor \frac{N}{4} \rfloor$时，这与参考文献 [19, 20]一致。一般而言，$d_{N,\neg k} = \lfloor \frac{N}{4} \rfloor$或$d_{N,\ k} = \lfloor \frac{N}{4} \rfloor - 1$，具体取决于 N，k。 − −

现在我们考虑具有正权重的自对偶理论空间。由于 F_k 是对称酉矩阵，且 $\mathrm{F}_k^3 = \mathrm{F}_k^\dagger$，式（2.30）中的投影算子 P 是实的。因此，恰好自对偶的实权重空间为 $V_{+,\ \mathbb{R}}$: $= V_+ \cap \mathbb{R}^N = \mathrm{P}\mathbb{R}^N$。其实维数为 $\dim_{\mathbb{R}} V_{+,\ \mathbb{R}} = d_{N,\ k} + 1$。将相差非零实缩放的非零权重视为等价，可得到一个实维数为$d_{N,\ k}$的族。为了确定严格正权重的维数，考虑以下自对偶权重:

$$w_P(0) = 1 + \sqrt{N}, \qquad w_P(a) = 1, \quad a \neq 0. \tag{2.36}$$

其自对偶性可由如下表示得出

$$w_P = w_1 + \mathsf{F}_k w_1, \qquad w_1(a) := 1,\ \forall a \in \mathbb{Z}_N, \qquad \mathsf{F}_k^2 w_1 = w_1. \tag{2.37}$$

严格正性是 $V_{+,\ \mathbb{R}}$中的一个开条件。由于对每个 a，$w_P(a) > 0$，因此 w_P 在$V_{+,\ \mathbb{R}}$ 中的一个足够小的邻域完全由严格正权重组成。因此，严格正自对偶权重锥的实维数为 $d_{N,\ k} + 1$。对正缩放取商后，维数减少一，得到 $d_{N,\ k}$。

2.6 对偶性与自对偶性的示例

现在我们给出式（2.23）中的傅里叶对偶性，以及第 2.5 节中具有正格面权重的自对偶参数空间的一些示例。除非另有说明，我们使用 $k = 1$。由于对于偶权重，$\mathsf{F}_{-1} w = \mathsf{F}_1 w$，因此关于 $N = 2$、3、4 的结果适用于所有允许的 k。

对于 $N = 2$，3 的 Wilson 权重。 考虑 Wilson 格面权重 [1]

$$w_K(a) = \exp\left[K \cos\left(\frac{2\pi a}{N}\right)\right], \qquad K > 0. \tag{2.38}$$

对于 $N = 2$，其傅里叶变换为

$$\mathsf{F}_1 w_K = \sqrt{\sinh(2K)}\, w_{\widetilde{K}}, \qquad e^{-2\widetilde{K}} = \tanh K, \qquad \sinh(2K)\sinh(2\widetilde{K}) = 1. \tag{2.39}$$

这是 四维 Kramers–Wannier–Wegner 对偶性 [16]。正不动点 i s

$$K_{\mathrm{sd}}^{(2)} = \frac{1}{2}\log(1 + \sqrt{2}). \tag{2.40}$$

在该取值下，式（2.39）中的前置因子为 1，因此权重恰好是自对偶的。

对于 $N=3$，记 $r=e^{3K/2}$，使得 $w_K=e^{-K/2}(r,\ 1,\ 1)$，其各项按 $a=0,\ 1,\ 2$ 排序。直接傅里叶变换给出

$$\mathsf{F}_1 w_K=\frac{e^{-K/2}}{\sqrt{3}}(r+2,r-1,r-1). \tag{2.41}$$

除整体因子外，变换后的权重仍具有威尔逊形式，其中

$$e^{3\widetilde{K}/2}=\frac{r+2}{r-1},\qquad (e^{3K/2}-1)(e^{3\widetilde{K}/2}-1)=3. \tag{2.42}$$

因此，正不动点为

$$K_{\mathrm{sd}}^{(3)}=\frac{2}{3}\log(1+\sqrt{3}). \tag{2.43}$$

代入 $r=1+\sqrt{3}$ 式（2.41）可验证精确自对偶性，包括归一化。这些$N=2,\ 3$ 个自对偶权重与上文引入的权重 w_P 成正比；在缩放意义下，它们是唯一的严格正自对偶权重，与 $d_{2,\ 1}=d_{3,\ 1}=0$一致。

的单参数自对偶族。对于任意偶权重 $w=(u,\ x,\ t,\ x)$，傅里叶变换为

$$\mathsf{F}_1 w=\frac{1}{2}(u+2x+t,\ u-t,\ u-2x+t,\ u-t). \tag{2.44}$$

因此，精确自对偶性等价于 $u=t+2x$。采用归一化 $u=1$ 后，所有严格正解均具有以下形式

$$w=(1,x,1-2x,x),\qquad 0<x<\frac{1}{2}. \tag{2.45}$$

这明确体现了参数计数 $d_{4,\ 1}=1$。在参考文献 [19,20], 研究的广义作用量中，我们可以将权重（在缩放意义下）参数化为

$$w_{K_1,K_2}(a)=\exp\left[K_1\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)+K_2\cos(\pi a)\right]. \tag{2.46}$$

于是（$u,\ x,\ t$）$=$（$e^{K_1+K_2},\ e^{-K_2},\ e^{-K_1+K_2}$），而自对偶族是曲线

$$e^{2K_2}\sinh K_1=1,\qquad K_1>0. \tag{2.47}$$

它包含威尔逊点（$K_1,\ K_2$）$=$（log（1 + √2），0）和波茨型点（$K_1,\ K_2$）$=$（$\frac{1}{2}$log 3，$\frac{1}{4}$log 3），其中 w 与（3，1，1，1）成正比。

威尔逊族在对偶性下保持闭合，但允许整体缩放。令 $K_2=0$ 和$K_1=K>0$ 代入式（2.44）得到

$$\begin{aligned}\mathsf{F}_1 w_K&=(\cosh K+1,\sinh K,\cosh K-1,\sinh K)=\sinh K\, w_{\widetilde{K}},\\ \widetilde{K}&=\log\coth(K/2),\qquad \sinh K\sinh\widetilde{K}=1.\end{aligned} \tag{2.48}$$

对于每个 $K>0$，w_K 和 $\mathsf{F}_1 w_K$ 均严格为正。两个权重恰好在 $K=\log(1+\sqrt{2})$ 处相等，此时前因子 $\sinh K$ 为 1。

任意 N 的 Villain 权重。 对于每个 N，Villain 周期高斯 [38], 应用于四维 $\mathbb{Z}_N$规范理论（Casher 提出） [17]，可构造出一个在标准傅里叶对偶性作用下（允许重标度）封闭的族。使用参数 $\tau_2 > 0$并定义[1]

$$v_{\tau_2}(a) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\pi\tau_2}{N}(a+Nm)^2\right]. \tag{2.49}$$

该权重是偶函数且严格为正。将对 $a \in \mathbb{Z}_N$ 的求和与整数求和合并，并应用泊松重求和公式，对于任意与 N 互素的 k，可得：

$$\begin{aligned}(\mathsf{F}_k v_{\tau_2})(b) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a\in\mathbb{Z}_N}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\pi\tau_2}{N}(a+Nm)^2 + \frac{2\pi i k b a}{N}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\pi\tau_2 j^2}{N} + \frac{2\pi i k b j}{N}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau_2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\pi(kb-Nn)^2}{N\tau_2}\right] = \tau_2^{-1/2} v_{1/\tau_2}(kb).\end{aligned} \tag{2.50}$$

对于 $k = 1$，因此，对偶性将 τ_2 变为$1/\tau_2$，而 v_1 恰好是自对偶的。文献 [29]也讨论了这个自对偶格点模型的对偶缺陷。对于一般的 k，式（2.50）仍给出一个正的对偶对，但在 $\tau_2 = 1$处具有自对偶性还要求 $v_1(kb) = v_1(b)$；对于 $k = \pm 1$，该条件成立，而对于任意双特征则不能想当然地认为成立。

3 对偶缺陷

本节通过将文献 [28] 的格点构造推广到 $\mathbb{Z}_N$ 规范理论，来构造对偶界面。我们考虑由下式关联的两个偶格面权重：

$$\tilde{w} = \mathsf{F}_k w. \tag{3.1}$$

界面将由 w 和 $\tilde{w}$描述的区域分隔开来，原晶格和对偶晶格的角色在界面两侧互换。当 $w = \tilde{w}$时，它便成为单一理论中的对偶缺陷。第2.6节中的正对偶权重对和自对偶权重为这两种情形提供了具体示例。我们首先描述其几何结构，然后指定局部权重，并证明规范不变性以及对局部形变的不变性。最后，我们研究球形缺陷的期望值以及取连通和的影响。

[1] 这些权重由模参数为 $\tau = i\tau_2$ 的 theta 函数定义。

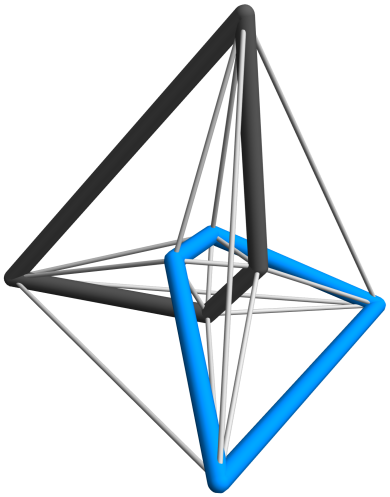


图1：16胞体是图中两个方格的凸包。黑色方格是活跃的，蓝色方格是非活跃的。

3.1 几何

我们采用参考文献 [28]中的晶格几何。将晶格间距设为二，并在覆盖空间 $\mathbb{R}^4$ 上将原晶格和对偶晶格的格点实现为

$$\Lambda = (2\mathbb{Z})^4, \qquad \Lambda^* = (2\mathbb{Z}+1)^4. \tag{3.2}$$

对于有限周期晶格，我们将坐标视为具有相容的偶数周期。在每个晶格中，最近邻格点由链路连接，基本方格即为格面。在给定体区域中承载规范变量的晶格称为活跃；另一个则称为非活跃。

对于每个格面 $p \in \Lambda_2$，其对偶格面 $p^* \in \Lambda_2^*$ 具有相同的中心，并位于正交二维平面内。 p 与 p^* 的凸包是一个正16胞体，即一种具有八个顶点和十六个四面体面的四维多胞体（见图1）。例如，考虑具有以下顶点的两个格面：

$$\begin{aligned} p &= (0,0,0,0),(2,0,0,0),(2,2,0,0),(0,2,0,0), \\ p^* &= (1,1,-1,-1),(1,1,1,-1),(1,1,1,1),(1,1,-1,1), \end{aligned} \tag{3.3}$$

它们的共同中心为 (1,1，0，0)。这些16-胞腔镶嵌四维空间，每一对 p， p^*对应一个16胞体。特别地，格面权重可以视为赋予相应16胞体的权重。

与这对 p, p^* 相关的16胞体面描述如下。设l_i, $i = \tilde{}1, \ldots, 4$为 p周围的链路，设li, $j = 1, \ldots, 4$ 为 p^* 周围的链路。每个四面体面都包含来自每个晶格的一条链路，它们构成一对对边。我们将包含$\tilde{l}_i$ 和li 的四面体记为（i, j）。

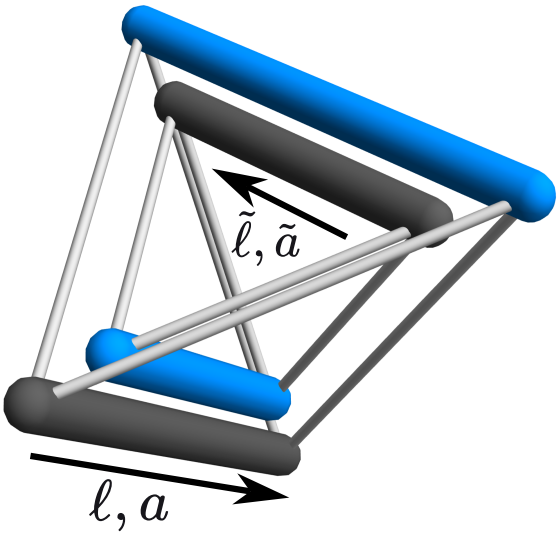


图 2：支撑对偶界面的四面体棱柱。外部四面体属于 w区域，内部四面体属于 $\tilde{w}$ 区域。粗黑链路为活跃链路，其上赋有自由度。箭头表示标准定向，它们决定界面权重中链路变量的符号约定。

我们将四维空间划分为两个区域，即 w 区域和 $\tilde{w}$ 区域，它们由一个闭曲面 M 分隔；该闭曲面由16胞体的四面体面构成。每个边界元素都被复制一份，分别置于两侧。换言之，边界由四面体棱柱构成。我们在 w 区域中将 Λ 设为活跃，将 Λ^* 设为非活跃；而在 $\tilde{w}$ 区域中，这些赋值则相反。因此，每个棱柱都携带两个活跃链路变量，分别来自两侧，如图2所示。

3.2 对偶缺陷的权重

我们通过为两个区域边界处的每个四面体棱柱赋予适当的权重来描述对偶界面，此外还需考虑体相玻尔兹曼权重。我们也为活跃和非活跃的格点及链路赋予常数权重。

玻尔兹曼权重赋予每个活跃格面，或者等价地，赋予每个 16胞体：$w(f_p)$ 对应 w 区域中的格面 p，而 $\tilde{w}(f_{\tilde{p}})$ 对应 $\tilde{w}$ 区域中的格面 $\tilde{p}$。

四面体棱柱的权重记为 $D(a,\tilde{a})$，其中链路变量 a，$\tilde{a}$ 的取向如图2所示。活跃点、活跃链、非活跃点和非活跃链路的权重分别记为 s，l，$\bar{s}$，$\bar{l}$。本文考虑以下权重：

$$D(a,\tilde{a}) = \chi_k(a,\tilde{a}), \quad s = l = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \bar{s} = \bar{l} = 1. \tag{3.4}$$

首先，考察界面的规范不变性。尽管构件的权重 $D(a,\tilde{a})$ 不是规范不变的，但闭曲面上界面的总权重是规范不变的。如图2所示，对于四面体中的一个活跃点 i，有一个三角形 t 包含该活跃点 i 和一条非活跃链路。三角形 t与点 i一起，由闭曲面中的两个四面体棱柱共享。在这两个四面体中，与 i 相连的两条活跃链路取向相反。因此，在 i 处进行规范变换所产生的因子会在这两条链路之间相互抵消。

3.3 拓扑不变性的证明

在此，我们证明由权重（3.4）描述的界面具有拓扑性质。

让我们说明如何跨越一个16胞体进行局部形变（见图 4）。将其四面体面标记为 by

$$U := \{(i,j) \mid i,j = 1,\dots,4\}. \tag{3.5}$$

˜(i,j)表示包含l$_i$和l$_j$的四面体。我们要求闭合的16胞体 P在周期晶格中是一个嵌入的四维球。对于一个斑块 $I \subset U$ 及其补集 $J := U \setminus I$，令$|I|$和 $|J|$分别表示由闭合四面体构成的并集。当 $M \cap P \ni |I|$作为集合相等，且 $|I|$和 $|J|$是沿其公共边界二维球面相交的非空分片线性三维球时，我们允许进行此操作。随后用 $|J|$替换 $|I|$，即沿着相同边界将一个三维球附接到 M中未改变的部分，并保持 M的拓扑不变。图3展示了一个例子。相对于由16胞体诱导的定向，这两个斑块的符号相反，因此它们的定向与 M未改变部分的定向一致。

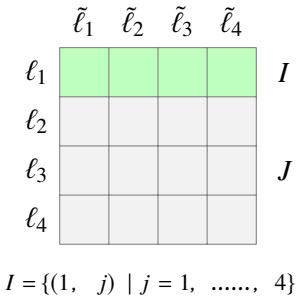


图3：为十六个面的编号数组，并以互补块 I 和J为例。每个条目表示一个四面体，而不是空间中的正方形；所显示的两个片区都是三维球。

当界面穿过16胞体时，其活跃格面与非活跃格面会互换，体权重 $w \leftrightarrow \tilde{w}$也随之互换。拓扑不变性要求，在所有外部活跃链路变量固定、任意内部活动链变量均求和的情况下，此变换前后对配分函数的局部贡献相等

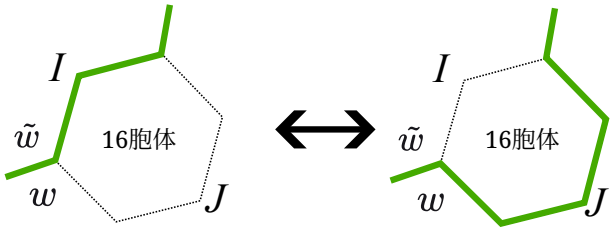


图4：局部形变示意图。

。缺陷交换关系；我们将在式（3.4）中验证这些关系所对应的权重和归一化。覆盖整个16胞体会形成一个闭合球面分量，这并非此类保拓扑变换。

傅里叶恒等式与定向约定。代数输入是这对恒等式

$$\sum_{u\in\mathbb{Z}_N} w(u+X)\chi_k(u,Y) = \sqrt{N}\,\tilde{w}(Y)\chi_k(-X,Y), \tag{3.6}$$

$$\sum_{v\in\mathbb{Z}_N} \tilde{w}(v+Y)\chi_k(-X,v) = \sqrt{N}\,w(X)\chi_k(X,Y). \tag{3.7}$$

第一个可通过将 $u+X$ 作为求和变量并应用式（2.5）得到。第二个同理可由 $w=\mathsf{F}_{-k}\tilde{w}$得到，因为特征标正交性给出$\mathsf{F}_{-k}=\mathsf{F}_k^{-1}$。

令 p 和 $\tilde{p}$ 表示 16胞体中两个格面的圈：

$$p=\langle \ell_1\ell_2\ell_3\ell_4\rangle, \quad \tilde{p}=\left\langle \tilde{\ell}_1\tilde{\ell}_2\tilde{\ell}_3\tilde{\ell}_4\right\rangle. \tag{3.8}$$

沿这些圈对链路定向，并分别将它们的变量记为 a_i和 $\tilde{a}_j$。选择圈的定向，使初始斑块 I 中的四面体具有图 2所示的标准定向。互补块 J 的符号则相反。根据偶性，反转圈的定向不会改变其体权重。

为后续使用，定义

$$X:=\sum_{i=1}^{4} a_i, \qquad Y:=\sum_{j=1}^{4}\tilde{a}_j, \qquad H_I:=\prod_{(i,j)\in I}\chi_k(a_i,\tilde{a}_j), \qquad H_J:=\prod_{(i,j)\in J}\chi_k(a_i,\tilde{a}_j). \tag{3.9}$$

根据性质（2.3），有以下恒等式成立：

$$H_IH_J=\chi_k(X,Y). \tag{3.10}$$

因此，除了常数点和链路权重之外，移动前后的局部贡献分别为 $w(X)H_I$和 $\tilde{w}(Y)H_J^{-1}$。H_J上的逆元至关重要：它考虑了互补块的相反取向。

内部链路与允许的移动的几何。设

$$R := \{i \mid (i,j) \in I \text{ for every } j\}, \qquad r := |R|,$$
$$C := \{j \mid (i,j) \in J \text{ for every } i\}, \qquad c := |C|. \tag{3.11}$$

因此， R 由 I的完整行组成，且 C 由其空列组成。例如，对于图 3中的构型， $R = \{1\}$ 和 $C = \emptyset$。移动前的内部活跃链接恰好是 a_i 中满足 $i \in R$的链路：与此类链路相邻的四个面都位于 I中，且该链路在移动后会从活跃格中消失。类似地，移动后的内部活跃链接是 $\tilde{a}_j$ 中满足 $j \in C$的链路。所有其他活跃链路变量均为外部变量，并保持不变。完整行与空列不能同时存在： $r > 0$ 蕴含 $c = 0$，而 $c > 0$ 蕴含 $r = 0$。

引理 3。 对于每个允许的移动，要么 $r > 0$ 要么 $c > 0$。

证明。 两个圈 p 和 $\tilde{p}$ 在（3.8）中构成了16胞体表面上的一个霍普夫链环，如图 1所示。霍普夫链环的链环数的绝对值为一。假设 $r = c = 0$。由于每一列都与 I相交，整个圈 $\tilde{p}$ 都位于 I中。由于每一行都与 J相交，整个圈 p都位于 J中。将每个圈略微推入其各自三维球的内部，同时保持两个圈不相交。这样，每个圈都在自己的球内围成一个曲面，且该曲面与另一个圈不相交，因此它们的链环数为零。这与两个圈的霍普夫链环性质矛盾。 □

对内部链路变量求和。首先假设 $r > 0$，因此 J侧没有内部变量。令 $X_{\text{ext}} := \sum_{i \notin R} a_i$ 以及 $H_{I,\text{ext}} := \prod_{(i,j)\in I,\, i\notin R} \chi_k(a_i, \tilde{a}_j)$。这 r个内部变量只通过它们的和 $u = \sum_{i\in R} a_i$参与，其中每个 u取值有 N^{r-1} 种赋值。定义$H_{I,\text{int}} := H_I H_I^{-1}{}_{,\text{ext}}$。利用公式 (2.3)，我们可以如下简化此表达式：

$$H_{I,\text{int}} = \prod_{i\in R} \prod_{j=1}^{4} \chi_k(a_i, \tilde{a}_j) = \prod_{i\in R} \chi_k(a_i, Y) = \chi_k(u, Y). \tag{3.12}$$

使用 $X = X_{\text{ext}} + u$ 和公式（3.6），我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{\{a_i \in \mathbb{Z}_N\}_{i\in R}} w(X) H_I &= N^{r-1} H_{I,\text{ext}} \sum_{u\in\mathbb{Z}_N} w(X_{\text{ext}} + u)\chi_k(u, Y) \\ &= N^{r-1/2} \tilde{w}(Y) H_{I,\text{ext}} \chi_k(-X_{\text{ext}}, Y) \\ &= N^{r-1/2} \tilde{w}(Y) H_J^{-1}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

在最后一步中，我们使用了 $H_{I,\ \text{ext}} H_J = \chi_k$（$X_{\text{ext}}$，$Y$），这是在移除完整行后由公式（3.10）得到的结果。

对于 $c>0$，反向使用相同论证时应用公式（3.7）。记 $Y_{\text{ext}}:=\sum_{j\notin C}\tilde{a}_j$和 $H_{J,\ \text{ext}}:=\prod_{(i,\ j)\in J,\ j\notin C}\chi_k\left(a_i,\ \tilde{a}_j\right)$，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\{\tilde{a}_j\in\mathbb{Z}_N\}_{j\in C}}\tilde{w}(Y)H_J^{-1}&=N^{c-1}H_{J,\text{ext}}^{-1}\sum_{v\in\mathbb{Z}_N}\tilde{w}(Y_{\text{ext}}+v)\chi_k(-X,v)\\&=N^{c-1/2}w(X)H_{J,\text{ext}}^{-1}\chi_k(X,Y_{\text{ext}})\\&=N^{c-1/2}w(X)H_I.\end{aligned}\tag{3.14}$$

引理 3 保证这两种情况涵盖了所有允许的移动。

匹配点和链路权重。令 N_I 和 N_J 分别表示移动前后常数点和链路权重的乘积，并略去该单元之外未改变的因子。对于 $r>0$，由于每一列都与 I相交，因此四条对偶链路及其四个格点在移动前后均为活跃。原始格面最初有四条活跃链路和四个活跃格点。移动后，其仍然活跃的链路恰好是与 J相交的 $4-r$行。三维球 J中的四面体通过三角形面相连。共享此类面的两个四面体要么位于同一行，要么位于 p中的相邻行；因此，与 J 相交的各行构成行循环中的一个连通子集。由于 $1\le r\le 3$，仍然活跃的原始链路构成一条非空路径，其中有 $4-r$ 条链路和 $5-r$ 个格点。因此，r 条活跃链路和 $r-1$ 个活跃格点消失，而非活跃权重均为 1。于是，

$$\frac{\mathcal{N}_I}{\mathcal{N}_J}=s^{r-1}l^r=N^{-r+1/2}.\tag{3.15}$$

这恰好抵消了因子 $N^{r-1/2}$（见公式（3.13）。对于 $c>0$，对逆向变换进行相同的计数，交换两个圈和两个片区。所得结果为$\mathcal{N}_J/\mathcal{N}_I=s^{c-1}l^c=N^{-c+1/2}$，这抵消了公式（3.14）中的因子。在上述任一情况下，我们都有缺陷交换关系

$$\mathcal{N}_I\sum_{\{a_i\in\mathbb{Z}_N\}_{i\in R}}w(X)H_I=\mathcal{N}_J\sum_{\{\tilde{a}_j\in\mathbb{Z}_N\}_{j\in C}}\tilde{w}(Y)H_J^{-1},\tag{3.16}$$

其中，对空变量集的求和不会改变被加项。对于外部活跃链变量的每一个固定赋值，该等式都成立。在晶胞外部未改变的权重上乘以该等式，并对这些变量求和，即可证明完整配分函数在允许的局部形变下保持不变，因而在任意一系列此类变换下也保持不变。这里没有使用任何正性或自对偶假设。当 $w=\tilde{w}$ 时，同样的证明表明，对偶缺陷在单个理论内部具有局部拓扑不变性。

3.4 S^3 期望值与连通和

现在考虑两种会改变界面拓扑的局部操作：移除一个球面分支，以及用一根管将两个分支连接起来。它们的系数不必为一，因为

这些操作不属于上一小节中的保拓扑变换。这些关系与动力学的具体细节无关，而完全由“对称性”的结构决定。从这个意义上说，它们类似于 Ward–Takahashi 恒等式。我们将定向闭三维流形 M 上的界面记为 $\mathcal{I}(M)$。 M的定向规定了哪一侧承载 w，以及哪一侧承载 $\tilde{w}$。我们用 $\langle\cdots\rangle$ 表示未归一化的期望值，这些期望值使用公式（3.4）中的格点权重和链路权重计算。特别地，$\langle 1\rangle$ 是不含算符插入的配分函数。

球面界面。在单个 16胞体的全部十六个面上放置一个界面，其内部区域的权重为 w，外部区域的权重为 $\tilde{w}$。该界面是一个三维球面，其四面体权重的乘积为

$$H_U = \prod_{i,j=1}^{4} \chi_k(a_i, \tilde{a}_j) = \chi_k(X, Y), \tag{3.17}$$

其中 X 和 Y 定义于公式（3.9）中。四个原始链路变量均为内部变量，而四个对偶链变量则固定不变。对于 X 的每个取值，都有 N^3 种 a_1，……， a_4的赋值。因此，

$$\begin{aligned}\sum_{a_1,\ldots,a_4\in\mathbb{Z}_N} w(X) H_U &= N^3 \sum_{X\in\mathbb{Z}_N} w(X)\chi_k(X,Y) \\ &= N^{7/2}\tilde{w}(Y).\end{aligned} \tag{3.18}$$

移除球面之前，两个格面环路合计有八个活跃位点和八条活跃链路。移除球面并用外部理论填充胞体后，仅剩四个对偶位点和四条对偶链路保持活跃。将它们的权重计入后，得到局部移除恒等式

$$N^{-8} \sum_{a_1,\ldots,a_4\in\mathbb{Z}_N} w(X) H_U = \frac{1}{\sqrt{N}}\, N^{-4}\tilde{w}(Y). \tag{3.19}$$

因此，任何可通过允许的局部形变约化为此构型的空球面界面，都满足

$$\left\langle \mathcal{I}(S^3)\cdots \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\langle\cdots\rangle, \tag{3.20}$$

其中 $\cdots$ 表示球面外部任意的算符插入项，并在该恒等式两侧保持不变。在右侧，球面的内部填充了外部理论。当交换两个理论并反转界面取向时，逆傅里叶变换给出相同的系数。该系数与 k 以及对偶对 $(w、\ \tilde{w})$ 的选择无关。对于 $N = 2$，这重现了文献 [28] 中得到的 S^3 上对偶缺陷的期望值。

连通和。 考虑图 5 所示的构型。 I 中的两个四面体没有公共顶点，构成两个不相交的三维球。它们在边界三维球面中的补集 J 是一个圆柱体 $S^2 \times [0,1]$。因此，用 I 替换 J，就会从界面中移除两个三维球的内部，并用一根管连接它们的边界二维球面。如果这些球位于不同的连通分支 M 和 M' 上，则所得界面支撑在连通和 $M\#M'$ 上。

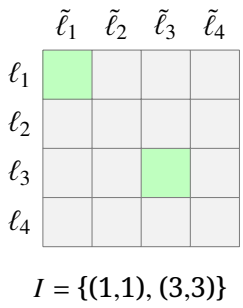


图 5：用于连通和的构型。 I 由两个不相交的四面体组成。

即使这一替换改变了拓扑，式（3.14）的傅里叶计算仍然适用。存在两条内部对偶链路， $\tilde{a}_2$ 和 $\tilde{a}_4$，因此

$$\sum_{\tilde{a}_2,\tilde{a}_4 \in \mathbb{Z}_N} \tilde{w}(Y) H_J^{-1} = N^{3/2} w(X) H_I, \qquad H_I = \chi_k(a_1, \tilde{a}_1)\chi_k(a_3, \tilde{a}_3). \tag{3.21}$$

这里，所有 a_i以及 $\tilde{a}_1$ 和 $\tilde{a}_3$都是固定的外部变量。在 I 一侧，原始圈有四条活跃链路和四个活跃点，而对偶晶格贡献了两条方向相反的活跃链路及其四个端点。在 J 一侧，两个圈均完全活跃。因此，相应的常数因子为

$$\mathcal{N}_I = s^8 l^6 = N^{-7}, \qquad \mathcal{N}_J = s^8 l^8 = N^{-8}. \tag{3.22}$$

将这些因子与式（3.21）结合，得到

$$\mathcal{N}_J \sum_{\tilde{a}_2,\tilde{a}_4 \in \mathbb{Z}_N} \tilde{w}(Y) H_J^{-1} = \sqrt{N}\, \mathcal{N}_I w(X) H_I. \tag{3.23}$$

交换两个理论并反转界面取向后，对于区域权重的相反分配，可得到相同的系数。

由于方程（3.23）对外部变量的每一种赋值都成立，因此在附加不变的外部区域并对这些变量求和后，它仍然成立。对于区域标签兼容且手术区域内没有其他算符插入的标准管，有

$$\langle \mathcal{I}(M\#M') \cdots \rangle = \sqrt{N}\, \langle \mathcal{I}(M)\mathcal{I}(M') \cdots \rangle, \tag{3.24}$$

其中，$\cdots$ 表示手术区域外任意额外的算符插入，在等式两边保持不变。作为检验，分别移除两个空球面，会使剩余关联函数乘以 N^{-1}。先将它们连接起来，则总因子为 $\sqrt{N}\,N^{-1} = N^{-1/2}$，这正是 $S^3\#S^3 \cong S^3$ 所要求的。

对同一连通分支上的两个球施加相同的局部操作会附加一个柄，将 M 替换为 $M\#(S^2 \times S^1)$。每个这样的柄都会使关联函数乘以 $\sqrt{N}$。从一个空的标准球面开始，附加 g 个标准柄，得到一个支撑于

$$M_g := \#_{j=1}^{g} (S^2 \times S^1), \qquad M_0 := S^3. \tag{3.25}$$

将柄的因子与公式（3.20）结合，我们得到

$$\left\langle \mathcal{I}(M_g) \cdots \right\rangle = N^{(g-1)/2} \langle \cdots \rangle, \tag{3.26}$$

其中，额外的插入项位于包含该界面以及用于移除它的整个局部变形序列的四维球之外。特别地，在这些条件下移除一个标准 $S^2 \times S^1$ 界面不会改变关联函数。这些恒等式适用于通过所述局部操作得到的嵌入。在自对偶性条件下，$w = \tilde{w}$，所有这些关系都变成单一理论内部关于对偶缺陷的关系。

4 对称性缺陷与交汇点

在本节中，我们构造中心对称性缺陷及其与对偶界面的交汇点。尽管我们已经使用背景规范场描述了中心对称性，但为了描述交汇点和交叉关系，按照 [25, 28], 中的方式通过局部权重定义缺陷更为方便。然后，我们从局部权重推导出交叉关系。在本节始终假设体权重构成一个偶对偶对 w，$\tilde{w} = \mathsf{F}_k w$，而格点权重和链路权重取公式（3.4）中的形式。当 $w = \tilde{w}$时，界面就成为单一理论中的缺陷。

4.1 中心对称性缺陷

几何。生成一形式中心对称性缺陷的支撑集是一个定向二维曲面 Σ，并由 $r \in \mathbb{Z}_N$ 标记。我们采用参考文献 [28] 中的三棱柱实现。一个三角形将一条非活跃链路与相邻活跃链路的中点连接起来。将这些三角形粘合起来便得到 Σ。沿着这个曲面，我们将非活跃链路及其端点加倍，并将中点位于曲面上的每条活跃链路加倍，同时保留其端点。因此，每个三角形都变成一个三棱柱，如图 6 所示。两个活跃副本分别携带变量 b、$c \in \mathbb{Z}_N$，且具有相同的参考取向。方格面采用切口各自一侧的副本。

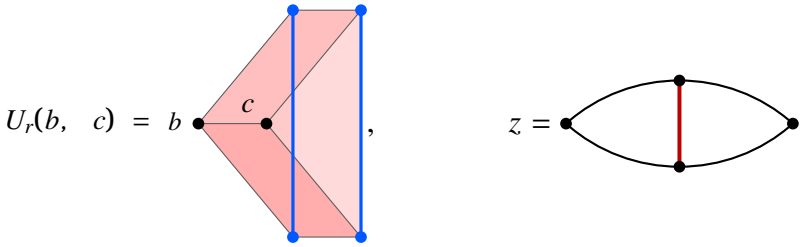


图 6：中心对称性缺陷的局部构件。左：一个三棱柱，其中黑点标记活跃链路中点，蓝点和蓝色边表示非活跃位点和链路。两个活跃链路副本携带同一参考取向下的变量 b 和 c；它们的公共端点未显示。右：双重活跃链路共享其端点，红色线段连接它们的中点。

权重。选择棱柱的定向，使得穿过它时，活跃链路变量从 b 变为 $c = b + r$。其权重以及每条双重活跃链路对应的补偿因子为

$$U_r(b, c) := \delta_{c,b+r}, \qquad z := \sqrt{N}. \tag{4.1}$$

反转定向会将 r 替换为 $-r$。如果多个棱柱共享同一对活跃链路，它们施加相同的约束，而 z 仅对该链路对赋值一次。由于 $zl = 1$，额外的活跃链路权重被抵消。双重非活跃元素的权重为 1，并且不会引入额外的活跃点。

拓扑不变性。考虑 16-单元中一个格面周围的两个连续活跃链路 1、2。将它们的中点分别与四条非活跃链路相连，得到八个三角形面，形成一个八面体，如参考文献 [28]所示。局部变换将一个面盘 H 替换为补盘H^c，二者具有相同的定向边界，同时保持八面体外部的曲面和链路变量不变。

首先令 H 为与链路 1 中点相交的四个面。操作前，曲面切分链路 1；操作后，则切分链路 2。将活跃链路沿格面边界定向，使链路 1 指向它们的公共顶点，链路 2 则从该顶点离开。选择曲面的定向，使副本 b_m 变为副本 c_m 时，链路 1 上为 $-r$，链路 2 上为 $+r$。外部副本为 c_1和 b_2。用 $A = a_3 + a_4$ 表示另外两条链路的贡献。于是局部权重满足

$$\underbrace{(zl) \sum_{b_1 \in \mathbb{Z}_N} U_{-r}(b_1, c_1)^4\, w(b_1 + b_2 + A)}_{\text{before (link 1 split)}} = \underbrace{(zl) \sum_{c_2 \in \mathbb{Z}_N} U_r(b_2, c_2)^4\, w(c_1 + c_2 + A)}_{\text{after (link 2 split)}}. \tag{4.2}$$

权重 U 中的克罗内克δ函数固定了左侧的 $b_1 = c_1 + r$ 和右侧的 $c_2 = b_2 + r$。因此，对于外部链路的任意选择，两侧都给出 $w(c_1 + b_2 + A + r)$。第四

次方计数的是共享分裂链路的四个棱柱。它们施加相同的狄拉克δ函数，而额外的单条链路贡献 $zl = 1$。

对于一般斑块，将一个面标记为 $(m,\ j)$，其中 $m = 1,\ 2$ 指定活动中点，而$j = 1$、.....、4 指定非活跃链路。该格面使用变形前的 b 个副本和变形后的 c 个副本，得到磁通 $f_b = b_1 + b_2 + A$ 和 $f_c = c_1 + c_2 + A$。结合 $\epsilon_1 = -1$ 和 $\epsilon_2 = +1$，对易关系的定向版本为

$$\underbrace{\sum_{\text{internal } b} w(f_b) \prod_{(m,j)\in H} U_{\epsilon_m r}(b_m, c_m)}_{\text{surface on } H} = \underbrace{\sum_{\text{internal } c} w(f_c) \prod_{(m,j)\in H^c} U_{\epsilon_m r}(b_m, c_m)}_{\text{surface on } H^c}. \tag{4.3}$$

如果中点 m 处的四个面都属于 H，则只有左侧对 b_m求和。如果它们都属于 H^c，则只有右侧对 c_m求和。无论哪种情况，求和都会唯一确定额外的副本。如果两个片区都与该中点相交，则两个副本都是外部的，且两侧施加相同的约束。因此，要么两个权重都为零，要么 $c_1 = b_1 - r$ 和 $c_2 = b_2 + r$成立，从而得到 $f_c = f_b$。令 H 为整个八面体表面，则右侧得到空构型，系数为一。因此，连续的变形会保持闭曲面的权重；当变形区域内没有其他插入项时，还可以移除可缩曲面。在式（2.19）的背景场描述中，同样的不变性可由局部形变使 B 变化 $\mathrm{d}\lambda^1$得到。随后对求和变量 $a \mapsto a + \lambda^1$ 作相应变换，会保持每个格面的磁通 $\mathrm{d}a - B$不变。

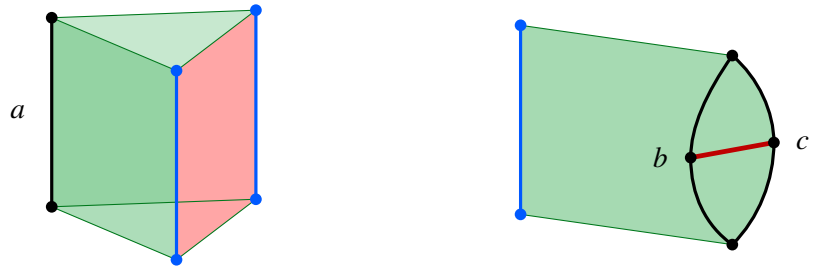
4.2 交汇点

几何与权重。 中心对称性缺陷可以终止于对偶界面 M。其边界 $\partial\Sigma \subset M$ 是一维结点。根据共享链路在包含对称性缺陷的一侧是非活跃还是活跃，可分为两种局部描述。如图 7所示。第一种情况下，界面另一侧对应的链路是活跃的，并带有一个变量 a。第二种情况下，对称性缺陷将活跃链路分裂为多个副本 $b,\ c$。对于标准定向，我们赋予

$$J_r(a) := \chi_k(r, a), \qquad \widetilde{J}_r(b, c) := \delta_{c,b+r}. \tag{4.4}$$

~交汇点处的狄拉克δ函数是对称性缺陷约束的延续。因子z 仍按每条双重活跃链路计数一次，包括交汇点处的链路。

~**规范不变性**。权重 J_r 在其两条平行链路同时进行规范变换时保持不变。在 $a \mapsto a + \lambda_j - \lambda_i$ 下，单个结点权重变换为 $J_r(a + \lambda_j - \lambda_i) = J_r(a)J_r(\lambda_j - \lambda_i)$。如果承载 J_r 的链路构成闭合有向链，这些相位会在相邻链路之间相互抵消。在这类链相交处，当入射标签之和等于出射标签之和时，这些相位便会抵消。对于同时包含 J_r 和 J_r 的闭合结点，



(a) $J_r(a)$ (b) $\widetilde{J}_r(b,\ c)$

图7：中心对称性缺陷与对偶界面的局部交汇点示意图。绿色和红色分别表示界面和对称性缺陷；黑色和蓝色边分别表示活跃链路和非活跃链路。(a) 共享链路在对称性缺陷一侧是非活跃的，而另一侧对应的活跃链路携带 a。(b) 共享的活跃链路分裂成携带 b、c 的副本，同时保留其端点。结点权重采用式（4.4）中的标准定向。

承载 J_r 的链路可以构成一条开路径。在这种情况下，对移位后的链路副本求值所得的相邻界面棱柱会补足缺失的端点相位，正如下文的式（4.5）所示。式（4.11）中支撑于圆盘上的中心对称性缺陷给出了一个具体示例。

拓扑不变性。 首先将对称性缺陷的边界穿过一个界面棱柱，同时保持外部链路变量 a 和 $\tilde{a}$ 固定不变。在移动之前，原始链按照图 7(b) 所示进行分裂，副本 b 进入界面权重 $D(b,\ \tilde{a})$。移动之后，棱柱携带$D(a,\ \tilde{a})$，且交汇点位于对偶链路 $\tilde{a}$上，如图 7(a) 所示。对于标准定向，两个局部权重满足

$$\underbrace{(zl)\sum_{b\in\mathbb{Z}_N}\widetilde{J}_r(a,b)\,D(b,\tilde{a})}_{\text{before}} = D(a+r,\tilde{a}) = \underbrace{D(a,\tilde{a})\,J_r(\tilde{a})}_{\text{after}}. \tag{4.5}$$

~第一个等式成立，是因为 $J_r(a,b)=\delta_{b,a+r}$ 选取了 b 的一个取值，而额外链路的净权重为 $zl = 1$。第二个等式则由 D 的乘法性以及式（J_r 4.4）中 的定义得出。因此，对偶链路上的因子 $J_r(\tilde{a})$ 恰好对应于原始链的平移。对于从对偶侧接入的曲面，交换 a 和 $\tilde{a}$，即可得到相同的恒等式，其中 $J_r(a)$ 位于原始链上。

现在，在没有其他插入项的区域内，沿固定的界面片 I 滑动交界处。滑动前，曲面分割原始链 i；滑动后，它分割相邻的链 h。使用式（3.9）的格面磁通 X 和界面权重 H_I。如果曲面分割链 s，则对其额外副本求和会使该副本取值为 $a_s + r$。此时格面的磁通为 $X + r$，而每个棱柱 $(s, j) \in I$根据式（4.5）贡献一个因子 $J_r(\tilde{a}_j)$。记 $a = (a_1, \ldots, a_4)$、$\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_4)$ 和 e_s为

第 s 个链路变量对应的单位向量，我们得到

$$H_I(a + re_s, \tilde{a}) = H_I(a, \tilde{a})\, J_r(Y_s), \qquad Y_s := \sum_{j:(s,j)\in I} \tilde{a}_j . \tag{4.6}$$

这里 $J_r(Y_s) = \prod_{j:\ (s,\ j)\in I} J_r(\tilde{a}_j)$ 是这些链路上结点权重的乘积。略去变换之外的因子，现在可以令两个局部权重相等，

$$\underbrace{w(X + r)\, H_I(a + re_i, \tilde{a})}_{\text{before (link } i \text{ split)}} = \underbrace{w(X + r)\, H_I(a + re_h, \tilde{a})\, J_r(Y_i) J_{-r}(Y_h)}_{\text{after (link } h \text{ split)}} . \tag{4.7}$$

移动分离出的链路 i会在第 $J_r(\tilde{a}_j)$行的每条对偶链路上留下因子 i。将其移到链路 h上，反向使用式（4.5），会在第 $J_{-r}(\tilde{a}_j)$行的每条对偶链路上产生 h。这两个因子在两行共有的每条对偶链路上相互抵消，因此它们的乘积正好是滑移所添加的定向结点线段的权重。于是两边对于外部链路变量的每一种取值都等于 $w(X+r)H_I(a,\ \tilde{a})J_r(Y_i)$。结合式（4.2）中的体相曲面变换，这就证明了界面上曲面及其边界的局部不变性。

最后，考虑一个支撑在圆盘上的对称性缺陷，其边界可在界面上收缩，而其余局部区域为空。令 u 为内部链路变量，X_{ext} 为来自其他原始链路的磁通，Y 为圆盘边界周围对偶链路的定向和。这一行中界面权重的乘积为 $\prod_j D(u,\ \tilde{a}_j) = D(u,\ Y)$。圆盘及其边界可通过以下局部恒等式移除

$$\underbrace{\sum_{u\in\mathbb{Z}_N} w(X_{\text{ext}} + u + r) D(u, Y) J_r(Y)}_{\text{with disk and junction}} = \underbrace{\sum_{v\in\mathbb{Z}_N} w(X_{\text{ext}} + v) D(v, Y)}_{\text{after removal}} . \tag{4.8}$$

边界权重的乘积为 $J_r(Y) = \prod_j J_r(\tilde{a}_j)$在所选定向下。对每个棱柱应用式（4.5）得到 $D(u,\ Y)J_r(Y) = D(u + r,\ Y)$，因此双射变量替换$v = u + r$ 给出系数为一的右端。

4.3 交叉关系

对偶界面上的编织。来自界面两侧的交汇点具有非平凡的相互交叉相位。对于这样一种交叉：将一个 J_r 因子从链路的 b~副本移至受 J_t约束的 c 副本，我们有

$$J_r(c)\widetilde{J}_t(b, c) = \chi_k(r, t)\widetilde{J}_t(b, c) J_r(b). \tag{4.9}$$

事实上，在狄拉克δ函数的支撑集上，$c = b + t$，因此 $J_r(c) = \chi_k(r,\ t)J_r(b)$。这里 $\chi_k(r,\ t)$~是标量编织系数：它仅取决于曲面标记 $r,\ t$，而 J_r 和 J_t 是局部结点权重。我们将此取为正交叉约定。在几何上，

这是如图所示，从三维界面的相对两侧附着而来的对称性缺陷的边界线的编织8。该编织相位与参考文献 [39] 中得到的结果一致。附着曲面在这一关系中予以保留。在任一族内，局部连接因子彼此对易：特征标相乘，平移相加，均在 $\mathbb{Z}_N$ 中进行。

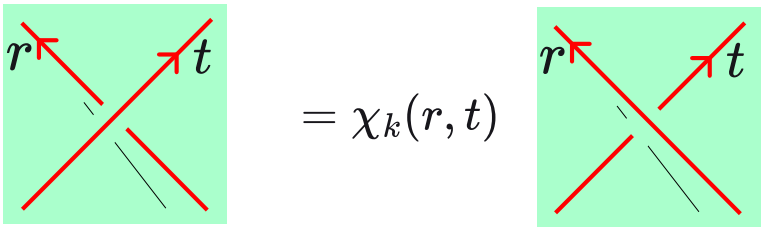


图 8：对偶界面的三维世界体中的编织。红线标示了从相对两侧与界面相交的中心对称性缺陷的边界。

实心环面关系。 接下来，我们将界面的一个实心环面块替换为 16-胞腔边界中的互补实心环面。不同于第 3.3 节中的三维球变换，这一操作交换它们公共边界环面的两个圈，并要求对称性缺陷插入项求和。一种具体选择是

$$I = \{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,3),(4,4)\}, \qquad J = U \setminus I. \tag{4.10}$$

图 9 展示了这两个片区。每个片区都是一个圈的正则邻域，因而是一个实心环面；它们的公共边界是一个二维环面。每一行和每一列都与两个片区相交，因此两侧都没有需要求和的内部活跃链接。

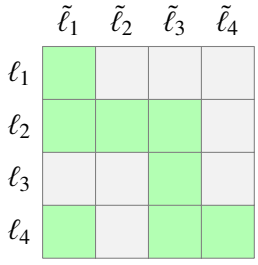


图 9：公式（4.11）的互补实心环面块。每个条目代表一个四面体：绿色四面体属于 I，灰色四面体属于 J。

使用 X、 Y、 H_I、 H_J（定义见公式（3.9））， 我们得到局部交叉关系

$$w(X)H_I(a,\tilde{a}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t\in\mathbb{Z}_N} \tilde{w}(Y+t)H_J(a,\tilde{a}+te_1)^{-1} \prod_{i\in\{1,2,4\}} J_{-t}(a_i). \tag{4.11}$$

这里， e_1 平移第一个对偶链变量。在标记为 t的项中，支撑在一个圆盘上的中心对称性缺陷将对偶链 $j=1$ 分裂，并将对偶通量平移 $+t$。在这一列中，构成该圆盘的三角形终止于原始链路1、2、4上，从而给出~公式（4.11）中所示的三个结点权重。 J_t 约束将平移后的副本设为 $\tilde{a}_1+t$。这一列中唯一的四面体J 是 (3,1)，因此平移后的界面权重为

$$H_J(a,\tilde{a}+te_1)^{-1}=H_J(a,\tilde{a})^{-1}\frac{D(a_3,\tilde{a}_1+t)^{-1}}{D(a_3,\tilde{a}_1)^{-1}}. \tag{4.12}$$

这些符号源于 J 斑块的相反取向。因此，移位后的界面权重与结点权重分别保留。它们相对于 $H_J(a,\ \tilde{a})^{-1}$ 的组合比值仅取决于原始格面的元胞通量 X，且是规范不变的。对 t 的求和遍历曲面标签。

为完整起见，该关系可直接由逆傅里叶变换得出。乘法性给出

$$H_I(a,\tilde{a}+te_1)\prod_{i\in\{1,2,4\}}J_{-t}(a_i)=H_I(a,\tilde{a}). \tag{4.13}$$

结合公式 (3.10)，可将式（4.11）右侧的界面因子和结点因子改写为 $H_I(a,\tilde{a})D(\ X,Y+t)^{-1}$。这里， $D(\ X,Y+t)\ =H_I(a,\tilde{a}+te_1)H_J(a,\tilde{a}+te_1)$是与移位后的对偶链路对应的全部十六个界面权重的乘积。令 $\mathrm{h}\ =Y+t$，则右侧变为

$$\begin{aligned}\frac{H_I(a,\tilde{a})}{\sqrt{N}}\sum_{h\in\mathbb{Z}_N}\tilde{w}(h)D(X,h)^{-1}&=H_I(a,\tilde{a})\sum_{h\in\mathbb{Z}_N}(\mathsf{F}_{-k})_{Xh}\tilde{w}(h)\\&=H_I(a,\tilde{a})w(X),\end{aligned} \tag{4.14}$$

其中 $(\mathsf{F}_{-k})_{Xh}$ 是逆傅里叶矩阵系数，而 $\mathsf{F}_{-k}\tilde{w}=w$。两种构型都有八个活跃点和八条活跃链路，因此共有因子为 $s^8l^8=N^{-8}$。圆盘上的任何双重链路都由 z补偿。因此，公式 (4.11)中的系数也是完整配分函数恒等式中的系数。

带电版本使其对双特征的依赖关系更加明确。定义局部振幅

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_r&:=w(X-r)H_I(a-re_1,\tilde{a})\prod_{j\in\{2,3,4\}}J_{-r}(\tilde{a}_j),\\\mathcal{B}_t&:=\tilde{w}(Y+t)H_J(a,\tilde{a}+te_1)^{-1}\prod_{i\in\{1,2,4\}}J_{-t}(a_i).\end{aligned} \tag{4.15}$$

对于 $\mathcal{A}_r$，圆盘将原始链拆分为 $i=1$：界面棱柱 $(1,1)\in I$使用 a_1-r，而圆盘边界在对偶链路 2,3,4上贡献结点权重。振幅 $\mathcal{B}_t$就是公式（4.11）中已经描述的项。缺陷将格面磁通在 $-r$ 侧 I 的偏移量改为 $+t$，并在J 侧改为。这两个相反的符号规定了两种填充的取向约定。对其应用

相同的逆傅里叶变换，在磁通 $X-r$ 处并计入所显示的界面权重和结点权重，得到

$$\mathcal{A}_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t\in\mathbb{Z}_N} \chi_k(r,t)\mathcal{B}_t, \qquad \mathcal{B}_t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r\in\mathbb{Z}_N} \chi_k(-r,t)\mathcal{A}_r. \tag{4.16}$$

这些因子 $\chi_k(r,\ t)$ 和 $\chi_k(-r,\ t)$ 是仅依赖于曲面标签的标量交叉系数；所有界面权重和结点权重都包含在 $\mathcal{A}_r$ 和 $\mathcal{B}_t$中。因此，交叉矩阵恰好是 F_k，其元素包含与式（4.9）中的编织相位相同的双特征。逆关系由特征标正交性推出。所有这些局部等式对固定的外部变量均成立，因此在附加相同的外部构型并执行其余链路求和后仍然成立。

5 半空间规范化

在第3节中，我们使用 AMF 方法 [25, 28]构造对偶缺陷。在这里，我们使用半空间规范化方法 [29]构造对偶缺陷。计算采用与全空间对偶相同的有限傅里叶变换，但原始链路变量保留在边界处，并与对偶链变量耦合。我们将证明，这种耦合会重现第 3节中引入的四面体棱柱权重。我们着重考察其对场的依赖性，而将规范化求和的整体归一化因子略去不表。

5.1 狄利克雷边界条件区域中的规范化

选取一个子复形 $\Omega\subset\Lambda^*$：只要某个胞腔属于 Ω，它的所有边界胞腔也都属于 Ω。记 $\Omega_j=\Omega\cap\Lambda^*_j$。令 R_Ω为与 Ω_2中的对偶格面相关联的闭 16-胞腔之并。以下的上链计算适用于任意此类子复形 Ω。为了使 ∂R_Ω 与第 3.1节的界面相对应，我们要求它是周期晶格中的一个嵌入的闭分段线性三维流形。在原始晶格上，定义具有相应支撑集的上链如下：

$$C^r_\Omega(\Lambda) := \{u\in C^r(\Lambda)\mid u_\sigma = 0 \text{ if } \sigma^*\notin\Omega_{4-r}\}. \tag{5.1}$$

子复形条件意味着 $\mathrm{d}C^r_\Omega(\Lambda)\ \subset C^{r+1}_\Omega(\Lambda)$。我们引入一个动力学二形式场$b\in C^2_\Omega(\Lambda)$，并将其一形式规范变换限制为

$$a\longmapsto a+\lambda^1, \qquad b\longmapsto b+\mathrm{d}\lambda^1, \qquad \lambda^1\in C^1_\Omega(\Lambda).$$

这些支撑条件为新规范场及其规范变换实施了参考文献 [29] 中的狄利克雷边界条件。

半空间规范化求和为

$$Z_\Omega[w] = \mathcal{N}_\Omega \sum_{a\in C^1(\Lambda)} \sum_{b\in C^2_\Omega(\Lambda)} \prod_{p\in\Lambda_2} w((\mathrm{d}a)_p - b_p) \prod_{\substack{c\in\Lambda_3\\ c^*\in\Omega_1}} \delta_{(\mathrm{d}b)_c,0}, \tag{5.2}$$

其中 N_Ω 与场无关。在计算上边界时，将场在其指定支撑集之外延拓为零。特别地，对于 $c^* \notin \Omega_1$，$\mathrm{d}b$ 会自动消失。

将 $a = a_{\mathrm{in}} + a_{\mathrm{out}}$ 拆分，其中 a_{in} 支撑在满足 $l^* \in \Omega_3$ 的链路上。变量替换$b' = b - \mathrm{d}a_{\mathrm{in}}$ 保留了支撑条件以及 b 上的平坦性约束，并得到

$$\mathrm{d}a - b = \mathrm{d}a_{\mathrm{out}} - b'.$$

因此，被加项与 a_{in} 无关。等价地，允许的 1-形式规范变换恰好将这些原始链路置为零。下文记 a_{out} 为 a，并保留所有满足$l^* \notin \Omega_3$的原始链路，包括界面上的链路。

5.2 傅里叶变换与边界相

引入辅助对偶链路场 $\tilde{a} \in C^1(\Omega)$，以施加平坦性约束：

$$\delta_{(\mathrm{d}b)_c,0} = \frac{1}{N} \sum_{\tilde{a}_{c^*}\in\mathbb{Z}_N} \chi_k(\tilde{a}_{c^*}, (\mathrm{d}b)_c), \qquad c^* \in \Omega_1.$$

这个恒等式适用于每个约束，无论这些约束是否相互独立。使用引理4 与 $q = 2$，我们得到

$$\prod_{c^*\in\Omega_1} \chi_k(\tilde{a}_{c^*}, (\mathrm{d}b)_c) = \prod_{p^*\in\Omega_2} \chi_k(-(\mathrm{d}\tilde{a})_{p^*}, b_p).$$

对于每个 $p^* \in \Omega_2$，置入 $f = (\mathrm{d}a)_p$ 以及 $h = (\mathrm{d}\,\tilde{a})_{p^*}$。随后对 b_p 求和得到

$$\begin{aligned}
\sum_{b\in\mathbb{Z}_N} w(f-b)\chi_k(-h,b) &= \sum_{u\in\mathbb{Z}_N} w(u)\chi_k(-h, f-u) \\
&= \chi_k(-f,h) \sum_{u\in\mathbb{Z}_N} w(u)\chi_k(h,u) \\
&= \sqrt{N}\,\tilde{w}(h)\chi_k(-f,h),
\end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $u = f - b$ 以及 $\tilde{w} = \mathsf{F}_k w$。这与式（3.6）中的平移傅里叶恒等式相同。在全空间计算中，所有原始链路都可以消去，因此 $f = 0$；而在这里，残留的边界链路产生了额外的相位。

对 b 求和后，我们可以将配分函数写为

$$Z_\Omega[w] = \widetilde{\mathcal{N}}_\Omega \sum_{a_{\mathrm{out}}} \sum_{\tilde{a}\in C^1(\Omega)} \left[\prod_{p^*\notin\Omega_2} w((\mathrm{d}a)_p)\right] \left[\prod_{p^*\in\Omega_2} \tilde{w}((\mathrm{d}\tilde{a})_{p^*})\right] \Phi_\Omega(a,\tilde{a}),$$

$$\Phi_\Omega(a,\tilde{a}) := \prod_{p^*\in\Omega_2} \chi_k(-(\mathrm{d}a)_p, (\mathrm{d}\tilde{a})_{p^*}),$$

~其中 $\mathcal{N}_\Omega$ 是一个与场构型无关的常数。因此，体权重分别为 w外部和 $\tilde{w}$ 内部，如第3节所示。

5.3 四面体棱柱权重

为确定 Φ_Ω 的支撑集，我们利用附录 A 中的关联系数展开这两个上边界。

$$\Phi_\Omega(a,\tilde{a}) = \prod_{\ell,c^*} \chi_k(a_\ell, \tilde{a}_{c^*})^{m_{\ell c^*}(\Omega)},$$
$$m_{\ell c^*}(\Omega) := -\sum_{p^*\in\Omega_2} [p:\ell][p^*:c^*] = -\sum_{p^*\in\Omega_2} [\ell^*:p^*][p^*:c^*]. \tag{5.4}$$

这里，l 是一条原始链，c^* 是一条对偶链路，最后一个等号使用了含有 $q=1$ 的公式 (A.6)。若 $\mathrm{l}^*\in\Omega_3$，则 l^* 的每个面都属于 Ω_2，且该系数由 $\partial^2\mathrm{l}^*=0$ 而消失。若 $c^*\notin\Omega_1$，则根据子复形条件，该系数也消失。在覆盖格中，由 l 和 c^* 张成的每个四面体面上，c^* 是对偶立方体 l^* 的一条边。这个立方体中包含 c^* 的两个面对应于共享该面的两个 16- 胞腔。它们在公式 (5.4) 中的关联系数乘积符号相反。对于 R_Ω 的每个内部面，相邻两个 16-胞腔的贡献相互抵消。每个分隔已选 16-胞腔与未选 16-胞腔的面都会贡献一个指数为 $+1$ 或 -1 的因子。在周期商空间中，这些指数按每对链路变量求和。

即使边界是奇异的，这种抵消仍然成立。例如，在足够大的周期晶格中，取 Ω由两个仅在一个顶点处相交的共面对偶面及其各个面组成。它们的 16-胞腔也仅在该顶点处相交，因此 ∂R_Ω 由两个在一点处连接的三维球面组成。当 ∂R_Ω 是嵌入的闭分段线性三维流形时，它便充当第 3.1节中的界面 。将其每个四面体面加倍，便得到图 2 所示的棱柱。方程（5.4）中的符号对应于上链固定的参考定向。按照该图中标准箭头所指的方向读取两个活跃链路变量，可得局部权重

$$D(a,\tilde{a}) = \chi_k(a,\tilde{a}). \tag{5.5}$$

方程（5.5）恰好就是方程（3.4）中已给出的界面权重。因此，半空间规范化会重现先前 16 胞体构造中的相同局部耦合。通过适当选择归一化 $\mathcal{N}_\Omega$，并加入适当的欧拉反项 [40, 41], ，我们还可以重现方程（~中的因子 s，l，$\bar{s}$，l。3.4）

6 结论与讨论

本文构造了具有广义格面作用量的四维 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论中的拓扑对偶界面。对于任意偶数傅里叶对偶对 w 和 $\tilde{w}=\mathrm{F}_k w$，我们

给出了局域界面权重，并证明它们在晶格允许的局部变形下保持不变。在自对偶性条件下，这些界面成为代表单个理论的非可逆对称性的缺陷。

局域构造给出了一些与体动力学的具体细节无关的恒等式。特别是，我们计算了 S^3 上的对偶界面期望值，推导出连通求和关系，并构造了中心对称性缺陷及其与对偶界面的交汇点。我们还推导了涉及这些中心对称性缺陷及交汇点的交叉关系。此外，我们证明，按照 [29], 采用狄利克雷边界条件进行半空间规范化，会得到相同的界面。

一个重要方向是利用这些非可逆对称性研究相结构。对偶缺陷可以对红外行为施加限制。特别是，非可逆对偶对称性可能阻碍平庸有能隙相，而更一般的、针对保持对称性的有能隙相的阻碍已在参考文献 [29, 42] 中推导出来。 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论拥有广阔的参数空间，利用非可逆对称性探索这一空间将十分有趣。

此类分析可以补充对广义格面作用量 [19, 20] 的数值研究，以及近期对离散规范理论中涌现光子的数值研究 [13]。本文发现的自对偶参数空间提供了具体的理论族，可用于探究红外理论是无能隙还是有能隙，以及对偶对称性是否得到保持或自发破缺。将精确的缺陷与交汇点关系同线算符和缺陷可观测量的测量相结合，或有助于区分这些可能性并约束相边界。哪些自对偶理论存在连续极限，仍是一个动力学问题。

另一个重要方向是将目前的缺陷构造推广到含有动力学物质的理论。四维U(1)晶格规范理论的修正维兰表述同时允许电物质和磁物质，并存在交换这两个扇区的精确对偶性 [43]。此外，也已有纳入 θ 项和电磁荷物质的推广形式 [44]。特别是，Anosova、Gattringer、Iqbal 和 Sulejmanpasic 使用世界线表述和蒙特卡罗模拟，研究了电、磁玻色物质含量匹配的自对偶模型的相结构，并发现了自对偶性自发破缺的证据 [45]。这些模型实现了动力学物质存在时的可逆电磁对偶，并为选择与自对偶性相容的物质组分和耦合提供了有益参考。

对于此处考虑的 $\mathbb{Z}_N$ 理论，带电物质会使电一形式对称性缩减为中心中对所有物质场 [22]均作用平凡的子群。对于单一物质荷q，该子群为 $\mathbb{Z}_{\gcd(N,q)}$；特别是，基本物质会完全破坏电中心对称性。因此，要通过半空间规范化扩展我们的构造，就需要找出可供规范化的剩余一形式对称性，并确定物质耦合在对偶性变换下如何变化。这个问题也与晶格规范理论中禁闭区间和希格斯区间之间的关系有关 [46, 47]。一个有用的相关例子是 Cardy–Rabinovici 模型 [48, 49], a

四维 U(1) 含电荷和磁荷物质的规范理论。该模型中的非可逆自对偶缺陷已在参考文献 [40] 中构造。基于这些例子，我们可以找出与自对偶性相容的物质耦合，并将我们对非可逆对偶缺陷及其交汇点的局域构造推广到这些 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论中。

未来工作的一项重要方向是发展对本文构造的非可逆对偶对称性的哈密顿量描述。关于离散规范群的（3+1）维晶格规范理论的早期哈密顿量研究见参考文献 [50, 51, 29, 52, 53, 54, 55, 56, 57]。

致谢

作者谨此感谢 Hidenori Fukaya、Naoto Kan、Kimyeong Lee、Tetsuya Onogi、Qiaoyin Pan 和 Hossein Yavartanoo 所给予的有益讨论和意见。作者在访问清华大学丘成桐数学科学中心和北京数学与应用数学研究院期间完成了这项工作。作者感谢这两家机构的热情接待。本研究部分得到 JSPS KAKENHI 项目编号 26K07086 的资助。

上链记号总结

此处，我们总结用于描述 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论的上链记号。所有上链的系数均取自 $\mathbb{Z}_N$，但记号中省略不写；所有求和均按模 N 计算。

设 Λ 是一个带周期性边界条件的有限四维超立方晶格。对于$q = 0, \ldots\ldots, 4$，令 Λ_q 表示带有选定参考定向的 q- 胞腔集合。一个 q- 上链 c 为每个 $\sigma \in \Lambda_q$ 赋一个值 $c_\sigma \in \mathbb{Z}_N$，并通过 $c_{-\sigma} = -c_\sigma$ 将其延拓到相反取向。上链在逐点加法下构成一个阿贝尔群，记为

$$C^q(\Lambda) := \{c : \Lambda_q \to \mathbb{Z}_N\}. \tag{A.1}$$

特别 是，0-、1-和2-上链分别为格点、链路和方格赋予变量。

对于 $q = 0, \ldots\ldots, 3$，余边界同态 $\mathrm{d} : C^q(\Lambda) \to C^{q+1}(\Lambda)$ 定义为

$$(\mathrm{d}c)_\sigma := \sum_{\tau \in \partial\sigma} c_\tau, \qquad \sigma \in \Lambda_{q+1}, \tag{A.2}$$

其中边界面按其诱导定向和重数计数。例如，对于 $\lambda \in C^0(\Lambda)$ 和 $a \in C^1(\Lambda)$，

$$(\mathrm{d}\lambda)_{\langle ij\rangle} = \lambda_j - \lambda_i, \qquad (\mathrm{d}a)_p = \sum_{\ell \in \partial p} a_\ell = f_p. \tag{A.3}$$

因此，规范变换（2.12）可写为 $a \mapsto a + \mathrm{d}\lambda$。由于边界的定向边界为零，$\mathrm{d}^2 = 0$，这些群构成上链复形

$$0 \longrightarrow C^0(\Lambda) \xrightarrow{\mathrm{d}} C^1(\Lambda) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} C^4(\Lambda) \longrightarrow 0. \tag{A.4}$$

令 Λ^* 为 Λ的对偶晶格。底层的 r-胞腔与 Λ 的 $(4-r)$-胞腔之间存在一个典范双射，记为 Λ^*，表示为 $\sigma \mapsto \sigma^*$。固定四维环面的标准定向，并为每个对偶胞腔确定定向，使得 σ 的定向切基后接 σ^* 的一个定向切基时，与环境定向一致。因此，对偶晶格上的参考定向由 Λ上的参考定向确定。对于式（ χ_k 2.2）中定义的双特征 ，我们有如下离散分部积分恒等式。

引理 4 （离散分部积分）。 对于 $q = 0,\dots,3$, $b \in C^q(\Lambda)$和 $g \in C^{3-q}(\Lambda^*)$，有

$$\prod_{\sigma\in\Lambda_{q+1}} \chi_k\big((\mathrm{d}b)_\sigma, g_{\sigma^*}\big) = \prod_{\tau\in\Lambda_q} \chi_k\big(b_\tau, (-1)^{q+1}(\mathrm{d}g)_{\tau^*}\big). \tag{A.5}$$

证明。 令 $[\sigma:\ \tau]$ 表示 $\partial\sigma$ 中定向 q-胞腔 τ 的系数。对偶定向约定给出

$$[\tau^* : \sigma^*] = (-1)^{q+1}[\sigma : \tau]. \tag{A.6}$$

σ 在 τ 处的外法向与 τ^* 在 σ^* 处的外法向方向相反，因此会产生一个负号；而将法向量移过 τ 的 q 个切向方向，则会产生 $(-1)^q$。该关系对每个局部关联数都成立，因此对周期性识别所产生的重数求和后也成立。

展开余边界并利用双特征性质，可得

$$\begin{aligned}\prod_{\sigma\in\Lambda_{q+1}} \chi_k\big((\mathrm{d}b)_\sigma, g_{\sigma^*}\big) &= \prod_{\sigma\in\Lambda_{q+1}}\prod_{\tau\in\Lambda_q} \chi_k(b_\tau, g_{\sigma^*})^{[\sigma:\tau]} \\ &= \prod_{\tau\in\Lambda_q} \chi_k\left(b_\tau, \sum_{\sigma\in\Lambda_{q+1}} [\sigma:\tau] g_{\sigma^*}\right) \\ &= \prod_{\tau\in\Lambda_q} \chi_k\big(b_\tau, (-1)^{q+1}(\mathrm{d}g)_{\tau^*}\big),\end{aligned}$$

其中，最后一个等号用到了式（A.6）以及对偶余边界的定义。由于晶格具有周期性，因此没有边界项。 □

式（A.5）中的符号在 $q = 1,3$ 时为正，在 $q = 0,2$时为负。对于 $N = 2$，符号无关紧要。

B 高斯和的计算

对于每一对互素整数 $N > 1$ 和 k，我们可以确定 $d_{N,\ k}$。为此，我们计算高斯和：

$$G(k;N) := \sum_{r=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k r^2}{N}}. \tag{B.1}$$

由于 $G(k;\ N)$ 只取决于 k 模 N，我们取 $1 \le k < N$。对于奇正整数 m，令 $\left(\frac{a}{m}\right)$ 表示雅可比符号，约定 $\left(\frac{a}{1}\right) = 1$。我们使用参考文献第9.7节（定理9.9–9.11）中关于雅可比符号的性质，以及同一参考文献第9.10节中的二次高斯和求值和互反关系（式（29）、（30）及定理9.16）。

B.1 奇数 N

首先，考虑 N 为奇数的情况。我们从 $N = p$开始，其中 p 是奇素数，且$p \nmid k$。参考文献 [37] 的式（29）指出：

$$G(k;p) = \left(\frac{k}{p}\right) G(1;p). \tag{B.2}$$

接下来，考虑 $\alpha \ge 2$和奇素数 p时的 $N = p^{\alpha}$。模p^{α}的每个剩余类都可以唯一地写成 $r = s + tp^{\alpha-1}$，其中 $0 \le s < p^{\alpha-1}$且 $0 \le t < p$。 kr^2/p^{α}中的项 $kt^2p^{\alpha-2}$是一个整数，因此

$$G(k;p^{\alpha}) = \sum_{s=0}^{p^{\alpha-1}-1} \sum_{t=0}^{p-1} e^{2\pi i k(s+tp^{\alpha-1})^2/p^{\alpha}} = \sum_{s=0}^{p^{\alpha-1}-1} e^{2\pi i k s^2/p^{\alpha}} \sum_{t=0}^{p-1} e^{2\pi i (2ks)t/p},$$

$$\sum_{t=0}^{p-1} e^{2\pi i (2ks)t/p} = \begin{cases} p, & p \mid s, \\ 0, & p \nmid s. \end{cases}$$

第二个等号由有限等比级数以及最大公约数 $\gcd(2k,p) = 1$得出。因此，只有 $0 \le u < p^{\alpha-2}$时的 $s = pu$有贡献，得到

$$G(k;p^{\alpha}) = p \sum_{u=0}^{p^{\alpha-2}-1} e^{2\pi i k u^2/p^{\alpha-2}}.$$

这证明了参考文献 [37, 第8章，练习16(b)]中的递推关系：

$$G(k;p^{\alpha}) = p\, G(k;p^{\alpha-2}), \qquad G(k;1) := 1, \tag{B.3}$$

其中，模数为1时的约定也涵盖了 $\alpha = 2$。反复应用这一递推关系可得

$$G(k;p^{\alpha}) = \begin{cases} p^{\alpha/2}, & \alpha \text{ even}, \\ p^{(\alpha-1)/2} G(k;p), & \alpha \text{ odd}. \end{cases}$$

将同一公式应用于 $k = 1$并使用公式（B.2），结合 $\left(\frac{k}{p}\right) = \pm 1$，我们得到

$$G(k;p^{\alpha}) = \left(\frac{k}{p}\right)^{\alpha} G(1;p^{\alpha}). \tag{B.4}$$

为组合不同的素数幂，令 m, n 为互素正整数。中国剩余定理表明， $r = nx + my$（其中 $0 \le x < m$ 且 $0 \le y < n$）恰好遍历模 mn 的每个剩余类一次：模 m 乘以 n 以及模 n 乘以 m 均为可逆映射。由于

$$\frac{k(nx+my)^2}{mn} = \frac{knx^2}{m} + 2kxy + \frac{kmy^2}{n}, \tag{B.5}$$

整数交叉项 $2kxy$ 贡献的相位为 1。因此

$$G(k;mn) = \sum_{x=0}^{m-1}\sum_{y=0}^{n-1} e^{2\pi i k n x^2/m} e^{2\pi i k m y^2/n} \tag{B.6}$$

$$= \left(\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i k n x^2/m}\right)\left(\sum_{y=0}^{n-1} e^{2\pi i k m y^2/n}\right). \tag{B.7}$$

我们有 由此推导出参考文献 [37, 第8章，练习 16(a)]中给出的分解公式。 ，

$$G(k;mn) = G(kn;m)\,G(km;n). \tag{B.8}$$

这个恒等式对任意整数 k 都成立；只需满足最大公约数$(m,n) = 1$ 即可。

最后，将奇模数写作 $N = \prod_j q_j$，其中 $q_j = p_j^{\alpha_j}$是互不相同的奇素数的幂，并令 $M_j = N/q_j$。迭代应用式（B.8）可得

$$G(k;N) = \prod_j G(kM_j;q_j). \tag{B.9}$$

由于 $p_j \nmid kM_j$，式（B.4）以及勒让德符号的乘法性意味着

$$G(kM_j;q_j) = \left(\frac{kM_j}{p_j}\right)^{\alpha_j} G(1;q_j) \tag{B.10}$$

$$= \left(\frac{k}{p_j}\right)^{\alpha_j}\left(\frac{M_j}{p_j}\right)^{\alpha_j} G(1;q_j) = \left(\frac{k}{p_j}\right)^{\alpha_j} G(M_j;q_j). \tag{B.11}$$

根据雅可比符号的定义，$\left(\frac{k}{p_j}\right)^{\alpha_j}$的乘积为 $\left(\frac{k}{N}\right)$；而由相同的因式分解可得，$\prod_j G(M_j;q_j) = G(1;N)$，其中 $k = 1$。因此，对于每个奇数 N，若 $\gcd(k, N) = 1$，

$$G(k;N) = \left(\frac{k}{N}\right) G(1;N). \tag{B.12}$$

利用文献 [37], 中公式 (30) 对 $G(1;N)$ 的经典求值，我们得到

$$\frac{G(k;N)}{\sqrt{N}} = \varepsilon_N \left(\frac{k}{N}\right), \qquad \varepsilon_m := \begin{cases} 1, & m \equiv 1 \pmod 4, \\ i, & m \equiv 3 \pmod 4, \end{cases} \quad (N \text{ 为奇数})。 \tag{B.13}$$

B.2 偶数

接下来令 $N \equiv 2 \pmod 4$。将 $N = 2m$ 写成 m 为奇数的形式，我们注意到 k 必然为奇数。高斯和中满足 r 和 $r+m$ 的项相互抵消，因为

$$\exp\left(\frac{2\pi i k (r+m)^2}{2m}\right) = -\exp\left(\frac{2\pi i k r^2}{2m}\right). \tag{B.14}$$

因此，在这种情况下，$G(k;\, N) = 0$。

最后，考虑 $4 \mid N$，使得 k 再次为奇数。我们使用参考文献 [37], 第9.10节定理9.16中的二次互反公式。在其记号下，定义

$$S(a,m) := \sum_{r=0}^{m-1} \exp\left(\frac{\pi i a r^2}{m}\right). \tag{B.15}$$

对于正整数 a 和 m，当 am 为偶数时，该定理给出

$$S(a,m) = e^{\pi i/4}\sqrt{\frac{m}{a}}\, S(m,a)^*. \tag{B.16}$$

对于奇数 k，模 $2k$ 的剩余类 $r = 2s$ 和 $r = 2s+k$（其中 $0 \le s < k$）分别覆盖偶数类和奇数类。利用被加项的 $2k$ 周期性，我们因此得到

$$\begin{aligned} S(N, 2k) &= \sum_{s=0}^{k-1} \left[e^{2\pi i N s^2/k} + e^{\pi i N (2s+k)^2/(2k)} \right] \\ &= \left(1 + e^{\pi i N k/2}\right) G(N;k) = 2G(N;k) \qquad (4 \mid N). \end{aligned} \tag{B.17}$$

这里，$(2s+k)^2$ 中的混合项贡献了 $e^{2\pi i N s} = 1$，并且由于 $4 \mid N$，$e^{\pi i N k/2} = 1$。将此与 $S(2k,\ N) = G(k;\, N)$ 以及互反公式结合起来，我们得到

$$\begin{aligned} G(k;N) &= (1+i)\sqrt{\frac{N}{k}}\, G(N;k)^* \\ &= (1+i)\sqrt{N}\, \varepsilon_k^{-1} \left(\frac{N}{k}\right). \end{aligned} \tag{B.18}$$

在第二行中，应用了公式（B.13）于奇模数 k，包括约定 $k = 1$。特别是，尽管虚部取决于 k（模 4），但对于每个奇数 $k \mathrm{Re}[\,(1+i)\,\varepsilon_k^{-1}] = 1$ 成立。

B.3 结果总结

总而言之，与维数公式相关的实部为

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{Re} G(k;N) = \begin{cases} \left(\dfrac{k}{N}\right), & N \equiv 1 \pmod 4, \\ \left(\dfrac{N}{k}\right), & N \equiv 0 \pmod 4, \\ 0, & N \equiv 2,3 \pmod 4. \end{cases} \tag{B.19}$$

代入表达式$d_{N,\,k}$可得精确结果

$$d_{N,k} = \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[1 - \left(\dfrac{k}{N}\right)\right], & N \equiv 1 \pmod 4, \\ \dfrac{1}{2}\left[1 - \left(\dfrac{N}{k}\right)\right], & N \equiv 0 \pmod 4, \\ 0, & N \equiv 2, 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{B.20}$$

特别地，对于所有 $N > 1$，$d_{N,\,1} = \lfloor N/4 \rfloor$。当 $N \equiv 2$，3（模 4）时，以及 N 为完全平方数时，该结果不再依赖于 k。对于 $N \equiv 0$，1（模 4）且 N 不是完全平方数的情形，雅可比因子在 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$ 上定义了一个非平凡的二次特征。因此，k 的 $\varphi(N)$ 个可取值中，恰有一半给出 $d_{N,\,k} = \lfloor N/4 \rfloor$，而另一半给出 $d_{N,\,k} = \lfloor N/4 \rfloor - 1$。

方程（B.20）中的雅可比符号可以利用以下标准恒等式进行计算 [37,第 9 节。7]。这里 m 为正奇数；最后一个恒等式还额外假设 a 为正奇数，且与 m互素。

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{m}\right) &= (-1)^{(m-1)/2}, \qquad \left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{(m^2-1)/8}, \\ \left(\frac{a}{m}\right) &= (-1)^{(a-1)(m-1)/4} \left(\frac{m}{a}\right). \end{aligned} \tag{B.21}$$

雅可比符号对两个自变量均具有乘法性，并且只取决于其分子的模分母的剩余类。因此，对于奇正整数 m，n 以及任意整数 a，b，有

$$\left(\frac{ab}{m}\right) = \left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{b}{m}\right), \qquad \left(\frac{a}{mn}\right) = \left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{a}{n}\right), \qquad \left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{a + bm}{m}\right). \tag{B.22}$$

结合上述互反律和补充定律，这些恒等式使得无需进行素因数分解即可高效计算雅可比符号。例如，$d_{5,\,2} = 0$而 $d_{5,\,1} = 1$；且$d_{8,\,3} = 1$而 $d_{8,\,1} = 2$。

为完整起见，表 1 列出了所有满足 $d_{N,\,k} = \lfloor N/4 \rfloor - 1$ 且满足 $2 \le N \le 30$ 的例外值。对于此范围内其余所有互素数对，$d_{N,\,k} = \lfloor N/4 \rfloor$。

参考文献

[1] K. G. Wilson，《夸克禁闭》《物理评论*D*》**10**（1974）2445–2459。

[2] R. Balian、J. M. Drouffe 和 C. Itzykson，《晶格上的规范场。1. 总体概述》《物理评论*D*》**10**（1974）3376。

[3] R. Balian、J. M. Drouffe 和 C. Itzykson，《晶格上的规范场。2. 规范不变伊辛模型》《物理评论*D*》 **11** (1975) 2098。

N	k 使得 $d_{N,\,k} = \lfloor N/4 \rfloor - 1$
5	2, 3
8	3, 5
12	5, 7
13	2, 5, 6, 7, 8, 11
17	3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14
20	3, 7, 13, 17
21	2, 8, 10, 11, 13, 19
24	7, 11, 13, 17
28	5, 11, 13, 15, 17, 23
29	2, 3, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 26, 27

表1：所有满足 $2 \le N \le 30$ 和 $1 \le k < N$ 的例外对，最大公约数$(N,\ k) = 1$。对于未列出的任何可容许对，$d_{N,\,k} = \lfloor N/4 \rfloor$。

[4] R. Balian、J. M. Drouffe 和 C. Itzykson，“晶格上的规范场。3. 强耦合展开与转变点”，《物理评论*D*》**11** (1975) 2104。 [勘误：Phys.Rev.D 19, 2514 (1979)]。

[5] T. Banks、R. Myerson 和 J. B. Kogut，“阿贝尔晶格规范理论中的相变”，《核物理*B*》**129** (1977) 493–510。

[6] G. ’t Hooft，“论趋向永久夸克禁闭的相变”，《核物理*B*》**138** (1978) 1–25。

[7] J. B. Kogut，“晶格规范理论与自旋系统引言”，《现代物理评论》**51** (1979)659。

[8] M. Creutz、L. Jacobs 和 C. Rebbi，《规范不变伊辛系统的实验》《物理评论快报》**42**（1979年）1390。

[9] M. Creutz、L. Jacobs 和 C. Rebbi，《阿贝尔晶格规范理论的蒙特卡洛研究》《物理评论*D*》**20**（1979年）1915。

[10] S. Elitzur、R. B. Pearson 和 J. Shigemitsu，《离散阿贝尔自旋与规范系统的相结构》《物理评论*D*》**19**（1979年）3698。

[11] A. Ukawa、P. Windey 和 A. H. Guth，《晶格规范理论的对偶变量与 Z(N) 系统的相结构》《物理评论*D*》**21**（1980年）1013。

[12] J. Frohlich 和 T. Spencer，《阿贝尔规范理论和自旋系统中的无质量相与对称性恢复》，数学物理通讯 **83** (1982年) 411–454。

[13] J. Giansiracusa、D. Lanners 和 T. Sulejmanpasic，《涌现光子与禁闭：ZNLatticeGauge 理论的数值研究》，《物理评论快报》**135** 第 22 期，(2025年) 221901，arXiv:2505.00079 [hep-lat]。

[14] H. A. Kramers 和 G. H. Wannier，《二维铁磁体的统计学。第一部分，》《物理评论》**60** (1941年) 252–262。[15] H. A. Kramers 和 G. H. Wannier，《二维铁磁体的统计学。第二部分》，《物理评论》**60** (1941年)263–276。[16] F. J. Wegner，《广义伊辛模型中的对偶性与无局域序参数的相变》，《数学物理杂志》**12** (1971年) 2259–2272。[17] A. Casher，《自对偶 Z(N) 规范理论》，《核物理*B*》**151** (1979年) 353–356。

[18] T. Yoneya，《$Z(N)$ 杨-米尔斯理论中的拓扑激发：对偶性与禁闭》，《核物理*B*》**144** (1978年) 195–218。

[19] M. Fukugita、T. Kaneko 和 M. Kobayashi，“四维时空中带有广义作用量的 $\mathbb{Z}_N$ 晶格规范理论的相结构与对偶性”，《核物理*B*》**215** (1983年) 289–306。[20] M. Creutz 和 M. Okawa，“ Z_p 晶格规范理论中的广义作用量”，《核物理*B*》**220** (1983年) 149–166。[21] R. Savit，“场论与统计系统中的对偶性”，《现代物理评论》**52** (1980年) 453。[22] D. Gaiotto、A. Kapustin、N. Seiberg 和 B. Willett，“广义全局对称性”，*JHEP* **02** (2015年) 172，arXiv:1412.5148 [高能物理理论]。

[23] E. P. Verlinde，“二维共形场论中的融合规则与模变换”，《核物理*B*》**300** (1988年) 360–376。

[24] J. Frohlich、J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert，《源自共形缺陷的 Kramers-Wannier 对偶性》，《物理评论快报》**93** (2004年) 070601，arXiv:cond-mat/0404051。

[25] D. Aasen、R. S. K. Mong 和 P. Fendley，《格点上的拓扑缺陷 I：伊辛模型》，*J. Phys. A* **49**第 35 期，(2016年) 354001，arXiv:1601.07185[cond-mat.stat-mech]。

[26] L. Bhardwaj 和 Y. Tachikawa，《关于二维有限对称性及其规范化》*JHEP* **03** (2018)189，arXiv:1704.02330 [高能物理理论]。

[27] C.-M. Chang、Y.-H. Lin、S.-H. Shao、Y. Wang 和 X. Yin，《二维中的拓扑缺陷线与重整化群流》*JHEP* **01** (2019年) 026，arXiv:1802.04445 [高能物理理论]。

[28] M. Koide、Y. Nagoya 和 S. Yamaguchi，《四维 $\mathbb{Z}_2$ 纯晶格规范理论中的非可逆拓扑缺陷》，*PTEP***2022年**第1期，(2022) 013B03，arXiv:2109.05992 [高能物理理论]。

[29] Y. Choi、C. Cordova、P.-S. Hsin、H. T. Lam 和 S.-H. Shao，《3+1 维中的非可逆对偶缺陷》，《物理评论*D*》**105** 第12期，(2022) 125016，arXiv:2111.01139[高能物理理论]。

[30] J. Kaidi、K. Ohmori 和 Y. Zheng，《(3+1)维规范理论中的克拉默斯-瓦尼尔型对偶缺陷》，《物理评论快报》**128** 第11期，(2022) 111601，arXiv:2111.01141[高能物理理论]。

[31] Y. Choi、C. Cordova、P.-S. Hsin、H. T. Lam 和 S.-H. Shao，“四维 3+1中的非可逆凝聚、对偶性与三重对偶缺陷”，数学物理通讯 **402** 第 1 期，（2023年）489–542，arXiv:2204.09025 [高能物理理论]。

[32] S.-H. Shao，“覆水难收：理论高级研究所非可逆对称性讲座”，载于 *2023*年基本粒子物理理论高级研究所：对称性的各个方面。2023年8月。arXiv:2308.00747 [高能物理理论]。

[33] S. Schafer-Nameki，“（非）可逆广义对称性讲座”，物理学报告**1063** （2024年）1–55，arXiv:2305.18296 [高能物理理论]。

[34] J. Kaidi，《广义对称性引言》，arXiv:2603.08798 [高能物理理论]。

[35] J. M. Drouffe，《规范晶格系统中的相变与对偶性》，《物理评论*D*》 **18** (1978年 1174)。

[36] C. P. Korthals Altes，《 $Z(N)$规范理论中的对偶性》，《核物理*B*》 **142** (1978年 315–326)。[37] T. M. Apostol，《解析数论引言》。数学本科教材。施普林格出版社，纽约，1976年。

[38] J. Villain，《具有易磁化平面的单维和二维磁体理论。2. 平面经典二维磁体》，《法国物理学杂志》**36** (1975 581–590)。

[39] A. Antinucci、F. Benini、C. Copetti、G. Galati 和 G. Rizi，《不可逆自对偶对称性的反常：分数化与规范化》，arXiv:2308.11707[高能物理理论]。

[40] Y. Hayashi 和 Y. Tanizaki，《Cardy-Rabinovici模型的非可逆自对偶缺陷与混合引力反常》，*JHEP* **08**(2022年) 036，arXiv:2204.07440[高能物理理论]。

[41] J. Kaidi、K. Ohmori 和 Y. Zheng，《不可逆缺陷的对称性拓扑场论》，数学物理通讯 **404**第 2 期，（2023年）1021–1124，arXiv:2209.11062 [高能物理理论]。

[42] A. Apte、C. Cordova 和 H. T. Lam，《不可逆对称性导致有能隙相的障碍》，*Phys. Rev. B* **108**第 4 期，（2023年）045134，arXiv:2212.14605 [高能物理理论]。

[43] T. Sulejmanpasic 和 C. Gattringer，《晶格上的阿贝尔规范理论：θ-项与无（有）磁单极子的紧致规范理论》，《核物理*B*》**943**（2019年）114616，arXiv:1901.02637 [hep-lat]。

[44] M. Anosova、C. Gattringer 和 T. Sulejmanpasic，“带有θ-项的自对偶 U(1) 晶格场论”，*JHEP* **04** (2022年) 120，arXiv:2201.09468 [hep-lat]。

[45] M. Anosova、C. Gattringer、N. Iqbal 和 T. Sulejmanpasic，“四维自对偶晶格规范理论的相结构”，*JHEP***06**(2022年) 149，arXiv:2203.14774 [高能物理理论]。

[46] K. Osterwalder 和 E. Seiler，“晶格上的规范场论”，物理学年鉴 **110** 第 2 期，（1978年）440–471。

[47] E. H. Fradkin 和 S. H. Shenker，“含希格斯场的晶格规范理论相图”，《物理评论*D*》**19**（1979年）3682–3697。

[48] J. L. Cardy 和 E. Rabinovici，《存在 θ 参数时 Zp 模型的相结构》，《核物理*B*》**205**（1982年）1–16。

[49] J. L. Cardy，《阿贝尔晶格模型中的对偶性与 θ 参数》，《核物理*B*》**205**（1982年）17–26。

[50] D. Horn、M. Weinstein 和 S. Yankielowicz，《Z(N)晶格规范理论的哈密顿方法》，《物理评论*D*》**19**（1979年）3715。

[51] D. Harlow 和 H. Ooguri，《量子场论与量子引力中的对称性》，《数学物理通讯》**383** 第3期，（2021年）1669–1804，arXiv:1810.05338 [高能物理理论]。

[52] C. Delcamp，《（3+1）维拓扑规范模型中的电磁对偶性张量网络方法》，*JHEP* **08** (2022年) 149，arXiv:2112.08324 [凝聚态物理·强关联电子]。

[53] A. Mariani、S. Pradhan 和 E. Ercolessi，《具有有限规范群的晶格杨-米尔斯类理论的哈密顿量和规范不变希尔伯特空间》，*Phys.Rev. D* **107**第 11 期，（2023年）114513，arXiv:2301.12224 [量子物理]。

.[54] H. Moradi、O. M. Aksoy、J. H. Bardarson 和 A. Tiwari，《具有广义对称性的量子自旋模型中的对称性分数化、混合反常与对偶性》，*SciPost Phys.* **18** 第 3 期，（2025年）097，arXiv:2307.01266 [凝聚态物理·强关联电子]。

[55] P. Gorantla、S.-H. Shao 和 N. Tantivasadakarn，《3+1D 及更高维中的不可逆对称性张量网络》，*Phys.Rev.X***15**第 4 期，(2025) 041006，arXiv:2406.12978 [量子物理]。

[56] P. Gorantla 和 T.-C. Huang，《保持对偶性的变形：具有 3+1精确有隙基态的 d 维晶格 Z2 规范理论》，*Phys.Rev.B***111** 第 24 期，(2025) 245110，arXiv:2409.10612 [凝聚态物理·强关联电子]。

[57] D. Hofmeier、G. Pimenta 和 W. Cao，《高维晶格规范化界面与不可逆缺陷》，arXiv:2605.12601 [凝聚态物理·强关联电子]。