PROCEEDINGS OF SCIENCE

有限温度下含物质场的 Sp(4) 格点规范理论进展

Alexis Verney-Provatas,[a,b,c,*] **Chris Allton,**[a,b] **Ed Bennett,**[a,d] **Luigi Del Debbio,**[c] **Ryan C. Hill,**[c] **Deog Ki Hong,**[e,f] **Jong-Wan Lee,**[g] **C.-J. David Lin,**[h,i,j] **Biagio Lucini,**[k] **Maurizio Piai**[a,b] **和 Davide Vadacchino**[l]

[a]斯旺西大学理学院与工程学院量子场与引力中心，Singleton Park，SA2 8PP，斯旺西，英国[b]斯旺西大学理学院与工程学院物理系，Singleton Park，SA2 8PP，斯旺西，英国[c]爱丁堡大学希格斯理论物理中心、物理与天文学学院，Peter Guthrie Tait Road，爱丁堡，EH9 3FD，英国[d]斯旺西大学斯旺西高级计算学院（Bay Campus），Fabian Way，斯旺西 SA1 8EN，英国[e]釜山国立大学物理系，釜山 46241，韩国[f]釜山国立大学极端物理研究所，釜山 46241，韩国[g]基础科学研究院（IBS）宇宙理论物理中心粒子理论与宇宙学组，大田 34126，韩国[h]国立阳明交通大学物理研究所，台湾新竹 Ta-Hsueh Road 1001号，30010[i]中原大学高能物理中心，台湾中坊，32023[j]国家理论科学研究中心物理部，台湾台北 106319[k]伦敦玛丽女王大学数学科学学院，Mile End Road，伦敦，E1 4NS，英国[l]普利茅斯大学数学科学中心，普利茅斯，PL4 8AA，英国
电子邮箱：2414441@swansea.ac.uk, c.r.allton@swansea.ac.uk, e.j.bennett@swansea.ac.uk, luigi.del.debbio@ed.ac.uk, ryan.hill@ed.ac.uk, dkhong@pusan.ac.kr, j.w.lee@ibs.re.kr, dlin@nycu.edu.tw, b.lucini@qmul.ac.uk, m.piai@swansea.ac.uk, davide.vadacchino@plymouth.ac.uk

arXiv:2611.30493v1 [hep-lat] 23 Nov 2026

*报告人© 作者根据《知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议》（CC BY-NC-ND 4.0）的条款保留版权。对于文本与数据挖掘、人工智能训练及类似技术用于商业目的，保留所有权利。ISSN 1824-8039。由 SISSA Medialab 出版。



（代表 TELOS合作组）

我们研究了与两个处于基本表示的动力学Wilson费米子耦合的Sp(4)格点规范理论的有限温度行为。其连续理论在强相互作用大质量粒子（SIMP）范式下实现了复合暗物质。早期宇宙中的热相变可能产生了可观测的遗留随机引力波信号。要评估未来引力波实验对该信号的灵敏度，需要了解相变的强度。我们研究由裸费米子质量和规范耦合倒数定义的该理论二维参数空间。在这项探索性研究中，我们聚焦于时间维度格点数较少的格点。我们分析波利亚科夫环观测量的有限体积标度行为。具体而言，我们利用多直方图重加权得到磁化率峰值的标度行为，据此判别存在的是相变还是交叉。在轻费米子质量区域，我们发现了交叉的强烈迹象；而对于重费米子，我们发现了一级相变的初步证据。这些发现促使我们进一步研究该理论及其他Sp(2N)规范理论的连续极限。

第*43*届国际晶格场论研讨会（*Lattice 2026*）*2026*年*7*月*26*日至*8*月*1*日 马里兰大学，美国科利奇帕克

1. 引言

人们对Sp(2N) 规范理论热相变的兴趣，可以追溯到参考文献 [1], 中的开创性研究。该研究最初受到参考文献 [2, 3], 中这一观点的启发：群的中心与相变的阶数之间可能存在关联。目前普遍认为，SU(2) ~ Sp(2) 杨-米尔斯理论呈现二级相变 [4], ；而对于 SU(N_c)（其中心为 $\mathbb{Z}_{N_c}$）以及 Sp(2N)（中心为 $\mathbb{Z}_2$），相变则为一级，这一点也通过对数线性松弛（LLR）算法得到证实 [7–9]。相变的强度似乎由群的生成元数量决定，而非中心对称性，因为潜热会随生成元数量增加而增大 [10]。例如，Sp(4) 杨-米尔斯理论的行为介于 SU(3) 和 SU(4) 之间 [11]。

非阿贝尔规范理论与物质场（在规范群作用下进行非平凡变换的费米子）耦合时，其性质取决于规范耦合和费米子质量。即使对于量子色动力学（QCD），此类理论的相结构仍是当前积极研究的课题 [12]。在 SU(2) 的情形下，已知费米子的存在会使相变转变为平滑交叉——参见文献 [13, 14] 及其中的参考文献。对于 SU(3) 杨-米尔斯理论，在物理点附近存在费米子（夸克）时，其热相变会转变为解析交叉 [15, 16]。然而，由于在费米子质量趋于无穷大的极限（淬火情形）下，预计杨-米尔斯理论的行为会重新出现，因此预测相图中存在一个临界点 [17, 18]。

新一代引力波实验有望为早期宇宙的物理提供一个窗口 [19–21]。一级相变可能产生可探测的信号，其形式为遗迹随机引力波背景（SGWB） [22, 23]。人们有兴趣预测此类信号的功率谱 [24–28]。针对 SU(N_c) 杨-米尔斯理论 [29–31], 、Sp(4)杨-米尔斯理论 [11],, 以及存在费米子的 SU(4) 理论 [32, 33], 已有专门的格点研究。这些研究提供了有关决定相变强度及随机引力波背景功率谱的参数的信息。

Sp(4)规范理论与有质量费米子耦合时，相变的命运尚不明确。最简单的情形是 $N_{\mathrm{f}} = 2$ Wilson-Dirac费米子按基本表示变换；这一情形不仅与复合希格斯有关，也可作为强相互作用大质量粒子（SIMP）暗物质 [34, 35]的最简实现。TELOS合作组 [36–40]正在格点上研究该理论的零温行为。在本文中，我们介绍了对该理论有限温行为的首项研究成果。关于可观测量、数值方法和分析工作流程的更完整讨论，见相应的完整论文 [41], 以及完整数据发布 [42] 和分析工作流程 [43]。

2. 数值方法

我们研究质量简并的情形， am_0，其中 $N_{\mathrm{f}} = 2$ Wilson-Dirac费米子在 Sp(4) 的基本表示下变换。对于规范场，我们采用 Wilson plaquette作用量；对于费米子，则采用（未改进的）Wilson作用量。我们使用 Grid [44], 中适配于辛规范群 [45]的混合蒙特卡罗（HMC）实现对该理论进行抽样。鉴于本研究需要大量系综（超过 800 个），我们中的一些人开发了 h mcdj [46–48],

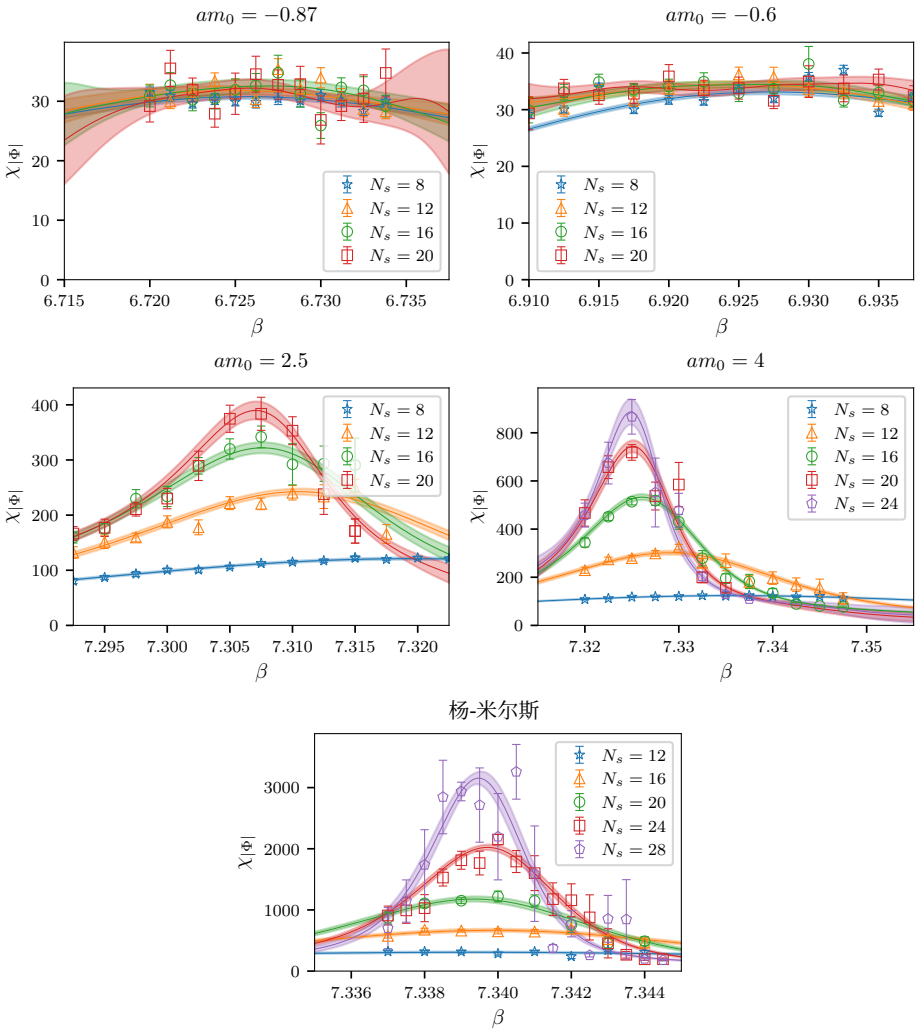

图 1： 波利亚科夫环磁化率，$\chi_{|\Phi|}$，对应于时间延展为 $N_t = 4$ 、质量取四个不同值 am_0的系综，以及杨-米尔斯理论（下图）。我们改变空间延展， N_s，以及格点耦合， β。连续曲线和误差带通过多直方图重加权得到。最轻的系综（上图）与交叉的预期相符。较重的系综（中图）和杨-米尔斯系综（下图）则显示出磁化率随空间体积的标度关系，这正是一级相变的预期。图片取自参考文献 [41]。

这是 Grid 中 HMC 的一个轻量封装，可简化大规模参数扫描的执行与管理。

在格点场论中，温度 T 是时间维度长度的倒数 ：

$$T \equiv \frac{1}{aN_t} . \tag{1}$$

通过调节时间维度中的格点数 N_t 或格距 a 来控制它；格距会随着 β 的增加而减小。为了在高温区域研究该理论并避免有限体积效应，我们采用时间方向长度小于空间方向长度的格点体积，即 $N_t \ll N_s$。

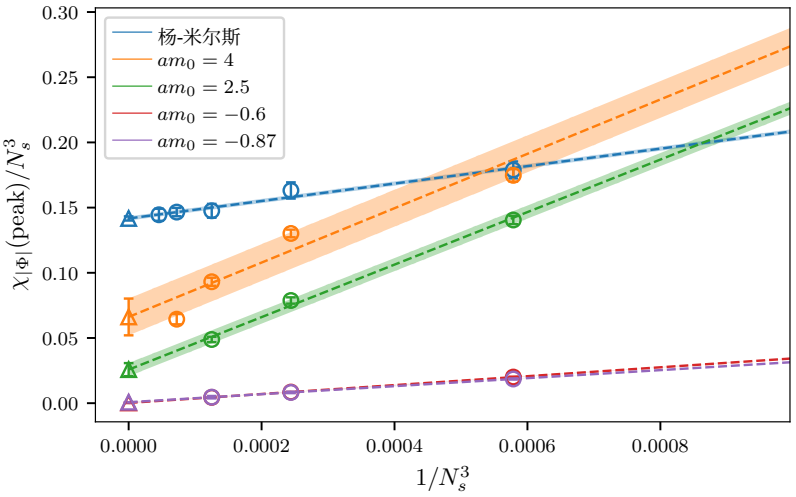

图 2： 对于图中所示的相同系综，波利亚科夫环绝对值的磁化率峰值除以格点空间点数后的比值进行线性拟合，$\chi^{\text{peak}}_{|\Phi|}/N_s^3$。在无限体积极限下，对于一级相变，该比值预计趋于非零常数；对于交叉，则预计趋于零。与图 1一致，杨-米尔斯系综和费米子质量最大的两个系综符合一级相变，而费米子质量最小的两个系综则显示出交叉的迹象。图引自参考文献 [41]。

用于研究该理论相结构的可观测量是波利亚科夫环

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{N_c}\text{Tr}\Big[\prod_{t=0}^{N_t-1} U_0(t,\vec{x})\Big], \qquad \text{and} \qquad |\Phi| = \frac{1}{N_s^3}\left|\sum_{\vec{x}}\Phi(\vec{x})\right|, \tag{2}$$

及其对应的磁化率：

$$\chi_{|\Phi|} \equiv \frac{V}{a^3}\Big(\langle|\Phi|^2\rangle - \langle|\Phi|\rangle^2\Big). \tag{3}$$

在杨-米尔斯理论中，波利亚科夫环是禁闭/去禁闭相变的精确序参量，用于测量中心对称性的自发破缺。虽然变换于基本表示的费米子会显式破坏中心对称性，但我们仍预期波利亚科夫环能够指示热相变及其阶数，尤其是在费米子质量较大的极限下。对于一级相变，我们预期波利亚科夫环绝对值的磁化率 $\chi_{|\Phi|}$ 会随格点空间尺度按 $\chi_{|\Phi|} \propto N_s^3$ 标度变化。对于平滑交叉，不同空间体积下的曲线预计会彼此重合。在可能的情况下，我们使用多直方图重加权 [49, 50]，在 β 的密集取值网格上测量可观测量。关于可观测量和方法的更完整讨论，请参阅我们的相关论文 [41]。

3. 结果

3.1 尺度设定：介子谱和梯度流

我们首先讨论在零温下进行的一些相关测量。我们计划通过测量基态，确定尺度，以便将来向连续极限进行外推

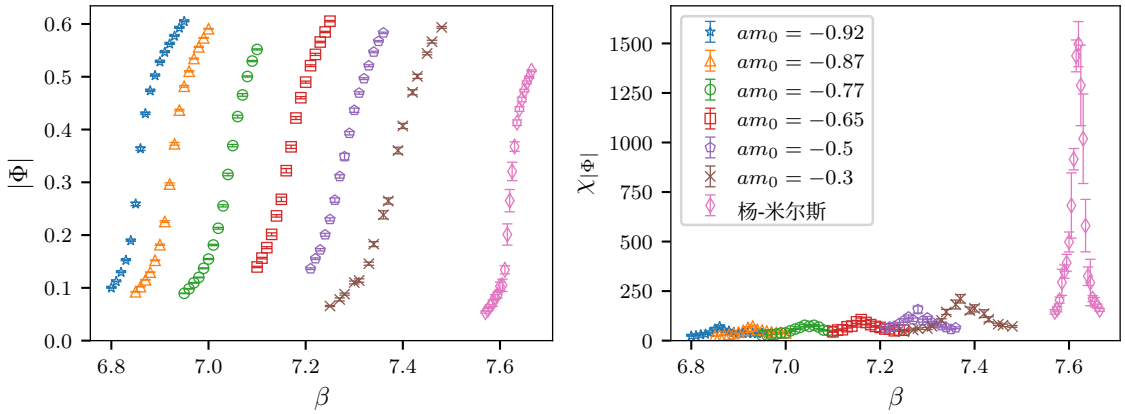

图 3： 在固定时间和空间范围 $N_t = 6$ 及 $N_s = 24$ 的情况下，对格点参数空间进行扫描。我们展示了系综中波利亚科夫环绝对值的平均值（左图）及其磁化率（右图）随耦合常数 β 变化的情况。不同颜色对应于费米子质量 $am_0 = -0。92$，$-0。87$，$-0。77$，$-0。65$，$-0。5$，$-0。3$ 的不同选择（从左至右）。最右侧的序列对应杨-米尔斯理论。

赝标量 PS 和矢量 V 通道中带味介子的质量。我们针对裸格点参数 am_0 和 β 的取值进行测量，这些取值对应于波利亚科夫环易感率的峰值。我们使用以下插值算符：

$$O_{\text{PS}} \equiv \overline{Q^1}\gamma_5 Q^2\,, \qquad \text{and} \qquad O_{\text{V},\mu} \equiv \overline{Q^1}\gamma_\mu Q^2 \tag{4}$$

对于 PS 和 V 介子，分别为。这里 Q^J 表示 $N_f = 2$ 狄拉克味。自旋和规范指标已省略。我们的测量结果见完整出版物 [41]。这些结果同时以格点单位和梯度流 [51] 单位呈现，使用参考值 $\mathcal{W}_0 = 0。28125$ [52],以获得梯度流尺度 w_0 [53]。

3.2 格点 Nt = 4 的重加权分析

我们设置 $N_t = 4$，并对 β 进行密集扫描，考察裸费米子质量的四种代表性取值 $am_0 = -0。87$，$-0。6$，$2。5$，以及 $4。$图 1展示了波利亚科夫环绝对值的磁化率结果 $\chi_{|\Phi|}$，其定义见式（3）。我们仅关注格点耦合常数 β接近（伪）临界值 β的情形，并考察不同空间格点尺寸 N_s。由于采样的 β取值十分密集，我们可以采用多直方图重加权。为此，我们中的一些人开发了 pyRw [54], ，这是一个轻量级、即时编译的 Python 库，可实现多直方图重加权。

对于可用的两个最轻质量，我们观察到不同空间格点尺寸 $\chi_{|\Phi|}$ 下得到的 N_s曲线发生重合，这与交叉的预期信号一致。相反，对于两个最重质量，磁化率呈现出随格点空间体积变化的标度行为，这符合一级相变的预期。这一点也得到与杨-米尔斯理论的定性一致性的支持——见图 1的最后一个面板。

在图 2中，我们以线性拟合的形式展示了相同的数值数据：比值 $\chi_{|\Phi|}/N_s^3$与每个时间片的空间格点数的倒数 $1/N_s^3$之间的关系。峰值的高度

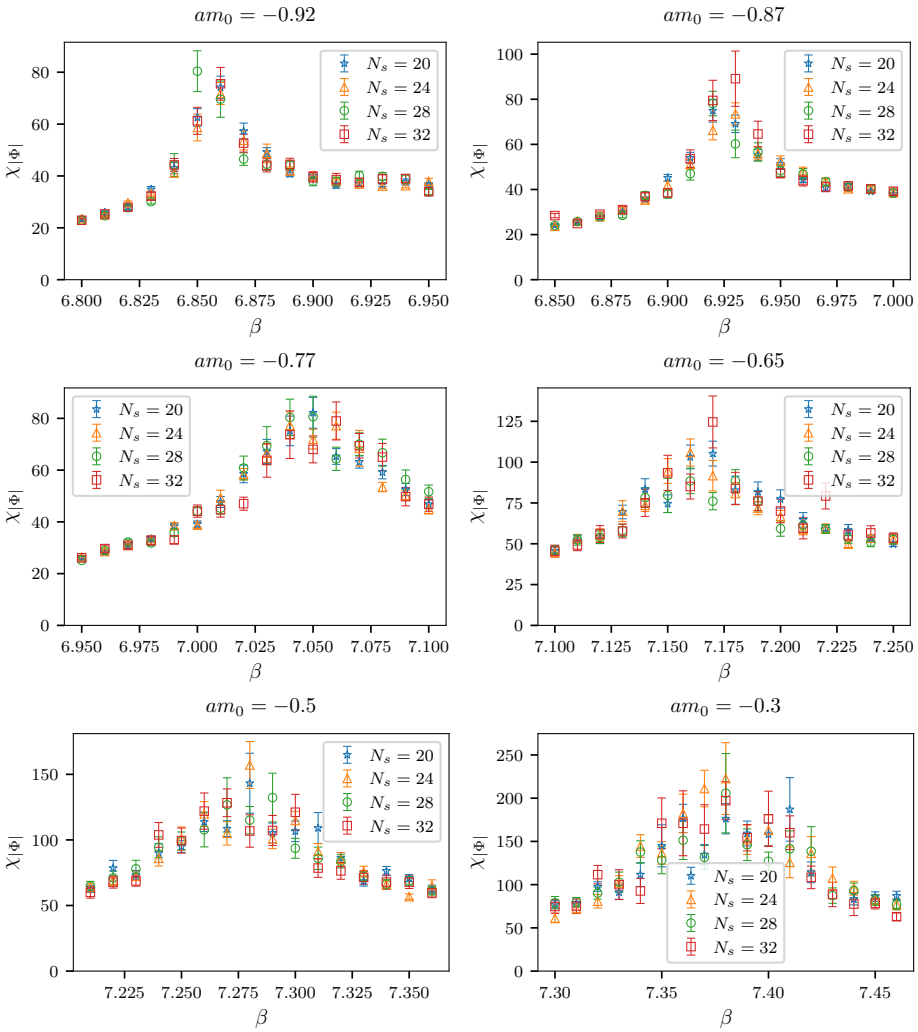

图 4： 波利亚科夫环绝对值的磁化率，$\chi_{|\Phi|}$，对于具有 $N_t = 6$ 的系综，以及费米子质量 am_0 的代表值。不同空间格点体积 N_s 下得到的曲线重合，正是交叉情况下的预期结果。图取自参考文献 [41]。

通过多直方图重加权提取；对重加权后的数值进行自助抽样，以估计不确定性。在 $N_s \to \infty$ 极限下，对于一级相变，该比值预期趋于一个非零常数；对于平滑交叉，则预期趋于零。这与我们在图1中的观察结果一致：杨-米尔斯情形以及两个最重的裸费米子质量 $am_0 = 4$、2.5均显示出一级相变的证据。对于两个可用的最轻质量 $am_0 = -0.6$，-0.87，信号则与平滑交叉相符。

3.3 格点上 $N_t = 6$ 的稀疏扫描

为了为未来旨在趋近连续极限的大规模计算奠定基础，我们给出了该理论相结构的初步结果。这些结果来自一次稀疏扫描，计算在具有更大时间尺度的格点上进行，$N_t = 6$。我们选择了裸质量的六个代表性取值，$am_0 = -0.92$、-0.87、-0.77、-0.65、-0.5，以及-0.3。在图3中，我们展示了系综

波利亚科夫环绝对值的系综平均值 $|\Phi|$及其相应的磁化率$\chi_{|\Phi|}$，作为格点耦合常数 β的函数；计算在空间格点尺寸固定的格点上进行 $N_s = 24$。图 N_s 展示了对不同4选取所得磁化率的比较结果。对于所扫描的所有质量，我们都观察到，使用不同格点空间尺度得到的$\chi_{|\Phi|}$ 曲线发生重合，这与平滑交叉的预期一致。所选裸质量范围似乎过轻，无法重现图1中所示的表观一级相变。我们注意到，在这种情况下，系综数量不足，无法进行重加权分析，因为由每个 β 得到的直方图没有良好的重叠——我们将在参考文献 [41]中更详细地讨论这一点。

4. 总结与展望

我们展示了关于与费米子耦合的 Sp(4)格点规范理论有限温行为的首批数值结果。我们在费米子质量较大的区域发现了该理论存在一级相变的首个证据，而在质量较轻时则出现平滑交叉。

在具有 $N_t = 4$ 的格点上进一步扫描裸质量的取值，将有助于估算热相变线终止于二级相变时的裸质量临界值。也可以在 $N_t = 6$ 下进行这项研究，通过更密集地扫描参数空间中的 β 取值网格，从而实现多重直方图重加权。进一步增大格点在时间维度上的范围 N_t，也有助于研究其趋近连续极限的过程。

对热相变附近以及连续极限下热力学性质的表征，将为后续计算随机引力波背景的功率谱提供所需信息。这些信息对于下一代引力波实验中计划开展的未来搜寻十分有用，因为该理论为暗物质起源提供了一个很有希望的候选解释。

致谢

A. V.-P.、B. L.、C. A.、E. B. 和 M. P. 的研究工作由 STFC 综合资助项目（编号：ST/X000648/1）支持。C. A.、E. B. 和 M. P. 获得 STFC [UKRI4243] 的支持。E. B. 的研究工作获得 STFC研究软件工程奖学金 EP/V052489/1 的支持，并部分获得 UKRI 通过科研社区计算科学中心（CoSeC）提供的资助，资助编号为 UKRI497。B. L.、L. D. D. 和 M. P. 获得欧盟地平线2020研究与创新计划下欧洲研究委员会（ERC）的资助，资助协议编号为 813942。L. D. D. 和 R. H. 的研究工作由 STFC 综合资助项目（编号：ST/X000494/1）支持。R. H. 的研究工作由 DiRAC 3 运营资助项目 ST/X000079/1 支持。D. K. H. 获得由教育部资助的 NRF 基础科学研究计划支持（NRF-2017R1D1A1B06033701）。J.-W. L. 获得 IBS 支持，项目代码为 IBS-R018-D1。C.-J. D. L. 感谢台湾NSTC 的支持，资助编号为 112-2112-M-A49-021-MY3。C.-J. D. L. 还获得台湾MoST 资助（编号：109-2112-M-009-006-MY3）。C.-J. D. L. 还获得编号为 112-2639-M-002-006-ASP 和 113-2119-M-007-013- 的资助。B. L. 的研究工作部分获得 STFC 综合资助项目（编号：ST/X00063X/1 和 UKRI4238）的支持。D. V. 的研究工作由

STFC 综合资助项目（编号：ST/X000680/1）和 UKRI/ST/C004237/1 支持。A. V.-P. 的研究工作获得由斯旺西大学理学院与工程学院以及爱丁堡大学物理与天文学学院资助的学生奖学金支持。C. A. 的研究工作获得英国皇家学会—莱弗休姆信托高级研究奖学金 SRF/R1/261059 的支持。本研究使用了爱丁堡大学的 Extreme Scaling 服务（Tursa），该服务由 EPC 代表 STFC DiRAC 高性能计算设施管理（www.dirac.ac.uk）。爱丁堡的 DiRAC 服务由 BEIS、UKRI 和 STFC 的资本资金以及 STFC 运营资助提供经费。DiRAC 是 UKRI 数字研究基础设施的一部分。数值计算使用了斯旺西大学的威尔士超级计算 SUNBIRD 和 AccelerateAI。威尔士超级计算和 AccelerateAI 通过威尔士政府获得欧洲区域发展基金的支持。

研究软件可用性声明—原始数据使用 Grid 生成 [44, 55, 56]提交 `e809c66f`，位于分支 `nt6`，该分支来自分叉仓库 [57], hmcdj [46–48] 提交 `a06264f` 以及 Hadrons [58, 59] 提交 `f3fb3f9e`。分析中使用的工作流程见参考文献 [43]。

研究数据可用性声明—本研究生成的原始数据及由此处理得到的数据，均以机器可读格式收录于参考文献 [42]。另请参阅参考文献 [60]，其中介绍了我们对可重复性和开放科学的实践方法。

开放获取声明—为实现开放获取，作者已将由此产生的任何作者接受稿版本置于知识共享署名（CC BY）许可协议之下。

参考文献

[1] K. Holland 等，《核物理学B》694（2004） 35 [hep-lat/0312022].[2] B. Svetitsky 等，《核物理学B》210（1982）423.[3] B. Svetitsky，《物理报告》132（1986）1–53.[4] J. Fingberg 等，《核物理学B》392（1993） 493 [hep-lat/9208012].[5] B. Beinlich 等，《欧洲物理学杂志C》6（1999） 133 [hep-lat/9707023].[6] B. Lucini 等，《高能物理学杂志》01（2004） 061 [hep-lat/0307017].[7] B. Lucini 等，《物理评论D》108（2023） 074517 [2305.07463].[8] E. Bennett 等，《物理评论D》111（2025） 114511 [2409.19426].[9] TELOS合作组，《物理评论D》113（2026） 074519 [2509.19009].[10] M. Panero，《物理评论快报》103（2009） 232001 [0907.3719].[11] M. Bruno 等，2410.17122.[12] G. Aarts 等，《粒子与原子核物理进展》133（2023） 104070 [2301.04382].[13] K. Iida 等，《PTEP》2021（2021）013B05 [2008.06322].[14] J.-W. Lee 等，《高能物理学杂志》04（2017） 036 [1701.03228].[15] F. R. Brown 等，《物理评论快报》65（1990）2491.[16] Y. Aoki 等，《自然》443（2006） 675 [hep-lat/0611014].[17] F. Cuteri 等，《物理评论D》103（2021） 014513 [2009.14033].[18] WHOT-QCD 合作组，《物理评论D》101（2020） 054505 [1912.10500].[19] M. Maggiore 等，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》03（2020） 050 [1912.02622].[20] S. Kawamura 等，《经典与量子引力》23（2006）S125.[21] C. Caprini 等，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》03（2020） 024 [1910.13125]。

[22] E. Witten, 《物理评论D》30（1984）272.[23] M. Kamionkowski 等, 《物理评论D》49（1994） 2837 [astro-ph/9310044].[24] W.-C. Huang 等, 《物理评论D》104（2021） 035005 [2012.11614].[25] J. Halverson 等, 《高能物理学杂志》05（2021） 154 [2012.04071].[26] M. Reichert 等, 《高能物理学杂志》01（2022） 003 [2109.11552].[27] R. Pasechnik 等, 《高能物理学杂志》02（2024） 159 [2309.16755].[28] J. Correia 等, 《物理评论D》112（2025） 123546 [2505.17824].[29] K. Rummukainen 等, 《物理评论D》114（2026） 014515 [2603.22088].[30] T. Rindlisbacher 等, 2506.15509.[31] S. Huber 等, 《高能物理学杂志》07（2026） 058 [2512.14530].[32] LSD合作组, PoS LATTICE2024（2025） 148 [2502.00331].[33] V. Ayyar 等, 《物理评论D》97（2018） 114502 [1802.09644].[34] Y. Hochberg 等, 《物理评论快报》115（2015） 021301 [1411.3727].[35] Y. Dengler 等, 《物理评论D》110（2024） 054513 [2405.06506].[36] E. Bennett 等, 《高能物理学杂志》03（2018） 185 [1712.04220].[37] E. Bennett 等, 《高能物理学杂志》12（2019） 053 [1909.12662].[38] E. Bennett 等, 《宇宙》9（2023） 236 [2304.01070].[39] E. Bennett 等, 《物理评论D》109（2024） 034504 [2304.07191].[40] TELOS合作组, 2606.14546.[41] C. Allton 等, 2611.21493.[42] TELOS合作组、C. Allton 等, 2026年。10.5281/zenodo.23185569.[43] TELOS合作组、C. Allton 等, 2026年。10.5281/zenodo.23186084.[44] Grid贡献者 https://github.com/paboyle/Grid.[45] E. Bennett 等, 《物理评论D》108（2023） 094508 [2306.11649].[46] TELOS合作组 https://telos-collaboration.github.io/hmcdj/.[47] E. Bennett 等 https://github.com/telos-collaboration/hmcdj.[48] A. Verney-Provatas 等, 2610.37120.[49] A. M. Ferrenberg 等, 《物理评论快报》61（1988）2635.[50] A. M. Ferrenberg 等, 《物理评论快报》63（1989）1195.[51] M. Lüscher, PoS LATTICE2013（2014） 016 [1308.5598].[52] E. Bennett 等, 《物理评论D》106（2022） 094503 [2205.09364].[53] BMW合作组, 《高能物理学杂志》09（2012） 010 [1203.4469].[54] A. Verney-Provatas https://github.com/vataspro/pyRw.[55] P. Boyle 等, PoS LATTICE2015（2016） 023 [1512.03487].[56] A. Yamaguchi 等, PoS LATTICE2021（2022） 035 [2203.06777].[57] Grid贡献者 https://github.com/vataspro/Grid/tree/nt6.[58] A. Portelli 等, 2023年6月。10.5281/zenodo.8023716.[59] Hadrons贡献者 https://github.com/aportelli/Hadrons.[60] E. Bennett, 2504.01876。