arXiv:2611.30520v1 [math.OA] 23 Nov 2026

非交换空间中的二维局部平滑及其应用

XUDONG LAI 和 SIYU LIU

Abstract. 我们证明了系数取值于半有限迹冯诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 的平面半波的局部平滑性。设 $U(t) = e^{it|D|}$ 对 $t \in \mathbb{R}$ 成立。对于 $N \geq 2$ 和 $P_N = \psi(|D|/N)$，其中 $\psi \in C_c^\infty((1/2,\ 2))$，我们得到如下估计

$$\|U(t)P_N f\|_{L^4([1,2]\times\mathbb{R}^2;L^4(\mathcal{M}))} \leq C_\psi \sqrt{\log(2+N)}\, \|f\|_{L^4(\mathbb{R}^2;L^4(\mathcal{M}))},$$

该估计关于 $\mathcal{M}$ 及其迹一致。对频率环域求和，可得对于 $p = 4$，任意 Sobole夫阶数 $s > 0$ 下的局部平滑性。能量比较中的困难在于，算子值波会产生一个符号不定的行列式项。我们通过配对 $\mathcal{M}$ 及其相反代数的狄利克雷能量将其抵消。求和之前进行插值，可得到 $2 \leq p \leq \infty$ 和 $s > \sigma(p) = \max\{0, 1/2 - 2/p\}$ 的时空 L^p 估计。对于 $2 < p < \infty$，我们还得到 $s = \sigma(p)$ 下的对数加权估计。有限-p 估计可推广到量子环面和广义莫亚尔平面，从而回答了 Hong、第一作者和 Wang 关于广义莫亚尔平面上 $2 < p < \infty$ 的 Sobole夫范围 $s > \sigma(p)$ 的问题。

对于 $1 < p < \infty$ 和复阶 α 且 Re $\alpha > \max\{2/p-1,\ 1/p-1/2,\ -1/p\}$，我们证明了平面、量子环面和广义莫亚尔平面上广义圆平均关于所有半径的极大不等式。对于一个由 β 在 $\mathcal{M}$ 上通过保迹的 $*$-自同构作用于 $\mathbb{R}^2$ 、且具有范数连续 L^p 轨道的作用，轨道平均 $A^\alpha_{t,\beta}x$ 双边几乎一致收敛于 $\pi x/\Gamma(1+\alpha)$，当 $t \downarrow 0$ 时，对每个 $x \in L^p(\mathcal{M})$ 都成立。我们还得到了三维欧几里得空间和量子欧几里得空间上截断圆锥乘子的估计，以及平面、量子环面和广义莫亚尔平面上 Stein 平方函数的全半径行与列估计。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：42B37，46L52；次要分类号：42B15，42B25，35S30。*Key words and phrases.* 非交换局部平滑、非交换 L^p 空间、圆极大算子、量子环面、莫亚尔平面、锥乘子、斯坦平方函数。

Contents

1. 引言 3 1.1. 主要结果及其应用 3 1.2. 局部平滑论证 8 2. 预备知识与局部化 9 2.1. 迹空间与逼近 9 2.2. 标量乘子与傅里叶局部化 10 2.3. 化归为周期性单帽估计 13 3. 守恒流与通过对代数的消去 17 3.1. 提升的标量流 17 3.2. 迹极化与行列式消去 24 4. 辅助狄利克雷能量：定理 1.1 的证明 29 4.1. 纤维上的狄利克雷问题及其能量 29 4.2. 配对能量的格林公式 35 4.3. 能量与边界通量的上界 39 4.4. 四阶矩的恢复 43 4.5. 径向比较与周期帽估计 46 5. 局部平滑与量子波估计 50 5.1. 环带局部平滑估计 50 5.2. Sobolev 估计与对数权重 52 5.3. 无权 Sobolev 估计的标量障碍 56 5.4. 量子傅里叶模型 58 5.5. 时空转移原理与量子波 60 6. 广义圆平均的极大不等式与收敛性 66 6.1. 有界半径区间上的一个频带 67 6.2. 所有半径与临界阶 70 6.3. 向保迹作用的转移原理 76 6.4. 双边几乎一致收敛 80 7. 截断圆锥乘子 83 7.1. 薄圆锥壳层估计 83 7.2. 锥阶的估计与必要条件 86 7.3. 三维量子欧几里得空间上的锥乘子 89 8. Stein 行列平方函数 93 8.1. Bochner–Riesz 均值的半径导数 93 8.2. 一个频率环带 95 8.3. 跨频率尺度的平方函数估计 97 8.4. 带光滑振幅的平方函数估计 101 8.5. 全半径平方函数估计 104 8.6. 量子环面与莫亚尔平面 107 参考文献 111

1. Introduction

平面上的高频波可以在预定时间聚焦于某一点附近。对于 $2 \le p < \infty$，标量半波在非零时间的尖锐固定时间 L^p 估计需要 $s_p = 1/2 - 1/p$ 阶导数 [21]。Sogge 的局部平滑问题所问的是，通过对时间进行积分可以恢复其中多少损失 [22]。我们对算子值波提出同样的问题，并要求上界关于系数代数一致。

设 $I = [1,2]$。对于 $t \in \mathbb{R}$，记 $U(t) = e^{it|D|}$ 为$L^2(\mathbb{R}^2)$上的酉半波群。乘子 $|D|$ 和 $J = (1-\Delta)^{1/2}$ 将 $H^1(\mathbb{R}^2)$映射到 $L^2(\mathbb{R}^2)$，并且对于 $\xi \in \mathbb{R}^2$，它们的符号分别为 $|\xi|$ 和 $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$。在标量情形下，Guth、Wang 和 Zhang 的锥形平方函数估计给出了平面局部平滑猜想 [8]。对于 $2 \le p < \infty$ 和每个实数 $s > \sigma(p)$，它给出

$$\|U(t)f\|_{L^p(I\times\mathbb{R}^2)} \lesssim_{p,s} \|J^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \qquad \big(J^s f \in L^p(\mathbb{R}^2)\big).$$

临界阶以及相对于定时估计的增益为

$$\sigma(p) = \max\{0, \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{p}\}, \qquad g(p) = s_p - \sigma(p) = \min\{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\}. \tag{1.1}$$

这里，$g(p)$是对可容许索博列夫阶数 s取上确界所得的增益 $s_p - s$。它在 $p = 4$处达到 $1/4$，此处 $\sigma(p)$的两个分支相交。

对于大小为 $d \in \mathbb{N}$的矩阵，我们尤其关注在 Schatten 空间 S^4_d 中，$p = 4$处的标量值域是否成立，且其常数与 d无关。更一般地，设 $\mathcal{M}$ 为带有正规忠实半有限迹 $\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}$的冯·诺依曼代数。对于测度空间 $(Y,\ dy)$，记 $\mathcal{N}_Y = L^\infty(Y)\bar{\otimes}\mathcal{M}$，并赋予乘积迹。在欧几里得区域上使用勒贝格测度，在环面上使用概率 Haar 测度。特别地，对于 $1 \le p < \infty$，时空范数定义为

$$\|u\|^p_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})} = \int_I \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(|u(t,x)|^p)\, dx\, dt.$$

Hong、第一作者和 Wang 获得了 $\mathbb{R}^2$ 上算子值波的时空估计，以及广义 Moyal 平面上波的时空估计。对于 $2 < p < \infty$，他们的估计要求初始位移具有索博列夫阶数 $s > s_p - g(p)/2$，初始速度具有索博列夫阶数 $s-1$ [10,（定理 1.2–1.3]）。他们提出，在广义 Moyal 平面上，任意 $s > \sigma(p) = s_p - g(p)$是否都足够（定理 1.2]之后的讨论）。我们证明答案是肯定的。证明从欧几里得半波入手。在频率环带 $|\xi| \asymp N$上，他们的L^4 估计带有因子 $C_\varepsilon N^{1/8+\varepsilon}$，每个 $\varepsilon > 0$ [10, 一个（命题 3.5]）。通过将 $\mathcal{M}$ 与其对代数的能量配对，我们得到$C\sqrt{\log(2+N)}$。这使我们在 $p = 4$处得到任意 $s > 0$。通过插值并对环带求和，可得 $2 < p < \infty$下任意 $s > \sigma(p)$；再由转移原理，量子环面和广义 Moyal 平面上也具有相同的索博列夫范围。

1.1. 主要结果及应用。

我们首先陈述 (A) 中的欧几里得局部平滑估计，并将其推广到 (B) 中的量子波。(C) 中的圆形极大估计给出 (D) 中的遍历界与收敛性。局部平滑还给出 (E) 中截断圆锥乘子的上界，以及 (F) 中的 Stein 平方函数估计。

(A) 欧几里得局部平滑。下面的乘子作用于初等张量 $f\otimes a$ 的标量因子上，其中 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$，且 $a\in\mathcal{M}$ 有界，$\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(s(|a|))<\infty$。这里，$s(|a|)=1_{(0,\infty)}(|a|)$ 是 a 的右支撑投影。这些估计确定了这些乘子的延拓。

定理 1.1。对于每个 $\psi\in C_c^\infty((1/2,2))$，存在 C_ψ，使得对于每个半有限迹系数代数以及每个实数 $N\geq 2$，空间截断 $P_N=\psi(|D|/N)$满足

$$\|U(t)P_NF\|_{L^4(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}\leq C_\psi\sqrt{\log(2+N)}\,\|F\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})} \tag{1.2}$$

对于所有 $F\in L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$。

我们将 (1.2) 与 $p=2$ 处的普朗歇尔恒等式以及 $p=\infty$处的 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中的空间核估计进行插值。在一个频率环带上，所得的 N 和 $\log(2+N)$ 的幂分别为 $\sigma(p)$ 和 $\beta(p)=2g(p)$，其中 $1/\infty=0$ 属于 (1.1)。对于 $s>\sigma(p)$，当 $U(t)J^{-s}$ 时，环带估计是可求和的。对于 $s=\sigma(p)$ 处的估计，在 $[0,\infty)$ 上定义正权函数如下：

$$\ell_1(r)=\log(2+r),\qquad \ell_2(r)=\log(2+\ell_1(r)),\qquad L_{B,C}(r)=\ell_1(r)^B\ell_2(r)^C\qquad (B,C\in\mathbb{R})\,.$$

对于 $p<\infty$，下文中的每个 Sobole夫空间都是针对所讨论的模型，在给定范数下对测试张量张成空间取完备化所得。

定理 1.2。对于任意半有限迹系数代数 $\mathcal{M}$，以下估计成立，且常数与 $\mathcal{M}$ 及其迹无关。

(i) 对于 $2\leq p\leq\infty$，$N\geq 2$，定理 P_N 的截断函数 1.1，以及 $F\in L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$，

$$\|U(t)P_NF\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}\leq C_{p,\psi}N^{\sigma(p)}[\log(2+N)]^{\beta(p)}\|F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}. \tag{1.3}$$

(ii)设 $2\leq p\leq\infty$ 和 $s>\sigma(p)$，或者设 $p=2$ 和 $s=0$。对于每个满足 $J^sF\in L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$的 F，

$$\|U(t)F\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}\leq C_{p,s}\|J^sF\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}. \tag{1.4}$$

对于 $p=\infty$、$G\in\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}$ 和 $t\in I$，我们定义

$$U(t)(J^{-s}G)=K_t^{(s)}*G,\qquad K_t^{(s)}=\left(e^{it|\xi|}\langle\xi\rangle^{-s}\right)^\vee.$$

卷积通过与第 5.2 节中构造的可积核作对偶来定义。

(iii) 设 $2<p<\infty$。假设 B、$C\in\mathbb{R}$ 满足

$$B>\beta(p)+s_p\qquad or\qquad B=\beta(p)+s_p\quad and\quad C>s_p. \tag{1.5}$$

Then

$$\|U(t)F\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}\leq C_{p,B,C}\|J^{\sigma(p)}L_{B,C}(J)F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}\,. \tag{1.6}$$

定理 1.1 和 1.2 中的估计 $U(-t)$ 在 I上也成立。由 (2.2)，取伴随算子将符号 $e^{it|\xi|}\psi(|\xi|/N)$ 变为 $e^{-it|\xi|}\psi(|\xi|/N)$，并保持空间的和时空 L^p 范数不变。

在一个环带上，函数类 $\psi\in C_c^\infty((1/2,2))$ 在 $p=4$ 的最优对数指数介于 $1/4$ 和 $1/2$之间。上界为 (1.2)。对于下界，取 $\psi=1$ 于 $[5/4,7/4]$。命题 8 中的标量 Schwartz 函数 [18, 。2] 具有

傅里叶支撑于 $5N/4 < |\xi| < 7N/4$，并给出至少为$c_p(\log\ N)^{1/2-1/p}$的环域算子范数，对应于 $2 < p \le 4$。

命题 5.2 表明，定理 1.2(ii) 中的索博列夫阶数对于$2 \le p \le 4$ 以及 $p = \infty$都是尖锐的。对于 $4 < p < \infty$， [18,命题 8.1] 中的标量聚焦例子迫使 $s \ge \sigma(p) = 1/2 - 2/p$。对于一般系数代数，无权估计 (1.4) 是否在等号处成立仍是一个悬而未决的问题。在 $p = 4$处，(1.4) 要求 $s > 0$，而加权估计 (1.6) 在 $s = 0$ 处成立，其中 $B = 3/4$ 且 $C > 1/4$。对于所有 $2 < p < \infty$，(1.5) 中的权函数都与 [18, 推论 7.1]中的标量估计一致。

（B）量子环面和广义莫亚尔平面上的波估计。对于有限的 p，命题 5.3通过量子环面上的规范作用 [3] 以及广义莫亚尔平面上的平移作用，将欧几里得时空估计传递过去 [10]。在 $p = \infty$ 处，环带估计由 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中的空间核估计推出。量子空间上相关的傅里叶估计包括第一作者的博赫纳–里斯界 [11] 以及 Hong、第一作者和 Wang 的限制估计 [9]。

设 $\mathcal{Q}_\Theta$ 为周期为 2π 的二维量子环面，或广义 Moyal 平面，其中 2×2 为实斜对称 Θ矩阵。对于任意半有限迹代数 $\mathcal{C}$，令 $\mathcal{D} = \mathcal{C}\bar{\otimes}\mathcal{Q}_\Theta$ 和 $\mathcal{D}_I = L^\infty(I)\bar{\otimes}\mathcal{D}$，并取乘积迹。量子乘子$|D_\Theta|$ 和 J_Θ 的符号分别为 $|\xi|$ 和 $\langle\xi\rangle$，其中在环面上为 $\xi \in \mathbb{Z}^2$，在平面上为 $\xi \in \mathbb{R}^2$。对于 $t \in \mathbb{R}$，写作 $U_\Theta(t) = e^{it|D_\Theta|}$。首先取 x、y 属于初等张量 $c\otimes q$的线性张成空间，其中 $c \in \mathcal{C}$ 有界，且其支撑投影具有有限迹。因子 q 在环面上是量子三角多项式，在平面上是量子施瓦茨元素（第 5.4 节）。具有初始位移 x 和初始速度 y 的解为

$$u_\Theta(t;x,y) = \cos(t|D_\Theta|)x + \frac{\sin(t|D_\Theta|)}{|D_\Theta|}y, \qquad t \in \mathbb{R},$$

其中正弦商在零频率处取值 t 。

定理1.3。 对于两个量子模型，以下上界在 Θ、 $\mathcal{C}$及其迹上一致成立。

（i）如果 $2 \le p < \infty$ 和 $s > \sigma(p)$，或者如果 $p = 2$、 $s = 0$，则

$$\|u_\Theta(t;x,y)\|_{L^p(\mathcal{D}_I)} \le C_{p,s}\big(\|J_\Theta^s x\|_{L^p(\mathcal{D})} + \|J_\Theta^{s-1} y\|_{L^p(\mathcal{D})}\big). \tag{1.7}$$

(ii)
F 或者 $2 \le p \le \infty$，任意实数 $N \ge 2$、任意 $\psi \in C_c^\infty$（(1/2、2)，以及任意 $x \in L^p(\mathcal{D})$，

$$\|U_\Theta(t)\psi(|D_\Theta|/N)x\|_{L^p(\mathcal{D}_I)} \le C_{p,\psi} N^{\sigma(p)}[\log(2+N)]^{\beta(p)}\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}\,.$$

（（iii）令 $2 < p < \infty$ 并令 B， $C \in \mathbb{R}$ 满足（1.5）。则半波满足

$$\|U_\Theta(t)x\|_{L^p(\mathcal{D}_I)} \le C_{p,B,C}\|J_\Theta^{\sigma(p)} L_{B,C}(J_\Theta)x\|_{L^p(\mathcal{D})}\,.$$

初始位移为 x、初始速度为 y 的波满足

$$\|u_\Theta(t;x,y)\|_{L^p(\mathcal{D}_I)} \le C_{p,B,C}\big(\|J_\Theta^{\sigma(p)} L_{B,C}(J_\Theta)x\|_{L^p(\mathcal{D})} + \|J_\Theta^{\sigma(p)-1} L_{B,C}(J_\Theta)y\|_{L^p(\mathcal{D})}\big)\,.$$

环带估计和加权半波估计也适用于 $U_\Theta(-t)$，在 I 上，这可由第5.5节中轨道乘子的伴随恒等式得到。

(C) 广义圆平均的极大上界。局部平滑与圆形极大估计之间的联系可追溯至 Mockenhaupt、Seeger 和 Sogge [15]。对于 $2 \le p < \infty$，局部平滑中 $g(p)$ 的增益，对任意满足 α 的复阶 $\Re\alpha > -g(p)$ 都给出一个极大估计。对于 $t > 0$和 $\alpha \in \mathbb{C}$，令 A_t^α： $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 的傅里叶符号为 $m_\alpha(t|\xi|)$，作用于测试张量的标量因子，其中

$$m_\alpha(r) = \pi 2^\alpha r^{-\alpha} J_\alpha(r) \quad (r > 0), \qquad m_\alpha(0) = \pi/\Gamma(1+\alpha).$$

这里 J_α是第一类贝塞尔函数，并且 $r^{-\alpha} = e^{-\alpha \log r}$。因此 A_t^0是 π圆上半径为 t的概率平均。我们用非交换极大范数 $L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}; \ell^\infty$来度量该族，其因子分解定义见（6.3）。令

$$a(p) = \begin{cases} 2/p - 1, & 1 < p \le 2, \\ 1/p - 1/2, & 2 < p \le 4, \\ -1/p, & 4 < p < \infty. \end{cases} \tag{1.8}$$

特别地，对于 $2 \le p < \infty$， $a(p) = -g(p)$。

定理 1.4。设 $1 < p < \infty$ 和 $\alpha \in \mathbb{C}$ 满足 实部$\alpha > a(p)$。

(i) 对于每个 $F \in L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$,

$$\|(A_t^\alpha F)_{t>0}\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2};\ell^\infty)} \le C_{p,\alpha} \|F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}, \tag{1.9}$$

关于 $\mathcal{M}$ 及其迹一致。

(ii) 对于定理 *1.3* 的任一量子模型 $\mathcal{D} = \mathcal{C} \bar{\otimes} \mathcal{Q}_\Theta$ 以及任意 $x \in L^p(\mathcal{D}$),

$$\left\|(m_\alpha(t|D_\Theta|)x)_{t>0}\right\|_{L^p(\mathcal{D};\ell^\infty)} \le C_{p,\alpha} \|x\|_{L^p(\mathcal{D})},$$

关于 Θ、 $\mathcal{C}$ 及其迹一致成立。

对于 $2 < p < \infty$，定理 1.4 将 Hong、第一作者和 Wang $\Re\alpha > -g(p)/2$ 定理 1 [10, 中的值域改进为4] $\Re\alpha > -g(p)$。这与 Liu、Shen、Song 和 Yan 给出的严格标量值域一致；他们还证明了必要条件 $\Re\alpha \ge -g(p)$[14, 定理 11]。定理 1.2 中的贝塞尔频率分解以及半径导数的一个上界，为每个频带给出了正主控函数。在改进后的值域内，频带范数可求和。与正球平均插值可得$1 < p < 2$。

对每个 $2 < p \le 4$ 以及任意固定的 $b \in \mathbb{R}$，在 $\alpha = 1/p - 1/2 + ib$处的标量极大算子都不能将 $L^p(\mathbb{R}^2$映射到弱 $L^p(\mathbb{R}^2)$，即使半径仅取自 $[1, 2]$(命题 6.4)。对于 $4 < p < \infty$，整个 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上的全半径端点 $\Re\alpha = -1/p$ 在此仍未解决。推论6.3 和 6.5给出了临界线附近极大范数增长的定量上界。

（D）遍历平均与双边几乎一致收敛。圆形极大界（1.9）也适用于 $\mathbb{R}^2$ 对半有限迹代数 $\mathcal{D}$的保法向迹 $*$-自同构作用。固定 $1 < p < \infty$，假设作用 β 具有范数连续的 L^p $(\mathcal{D})$ 轨道，并令 $\alpha \in \mathbb{C}$满足 $\Re\alpha > a(p)$。由 A_t^α在光滑轨道上定义的紧支撑核给出的轨道平均 $A_{t,\beta}^\alpha$，以及

在定理 $L^p(\mathcal{D}$中扩展到 6.7(和 上) 的一致相同极大界，满足 $\mathcal{D}$和 β。对于每个 $x \in L^p(\mathcal{D})$,

$$A^{\alpha}_{t,\beta}x \longrightarrow \frac{\pi}{\Gamma(1+\alpha)}x \qquad \text{bilaterally almost uniformly as } t \downarrow 0$$

根据推论6.8。轨道平均的分布定义，以及这一收敛的投影表述，分别见定理6.7 和第6.4节。

(E) 截断圆锥乘子。设 $(\xi,\rho) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$，令 $\chi \in C_c^{\infty}((0,\infty))$，并令$1 < p < \infty$。对于每个实数 $\lambda > \max\{0, 2|1/p-1/2|-1/2\}$，其符号为

$$\chi(\rho)(1-|\xi|^2/\rho^2)_+^{\lambda} \qquad (\rho > 0)$$

且在 $\rho \le 0$处取零的乘子在 $L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3}$上有界。在三维量子欧几里得空间上也有相同的上界，且关于变形和迹系数一致（定理7.2 和推论7.4）。为得到这一结果，我们将 $\rho = |\xi|$ 附近的符号分解为厚度为 $0 < \delta \le 1/2$的壳层。将半波与宽度为 δ^{-1} 的时间核进行平均，对命题7.1中的每个归一化光滑壳层，得到上界 $C[1+\log(1/\delta)]^{1/2}$。插值给出对壳层求和所需的上界。

（F）Stein 行与列平方函数。对于实数 $\nu > 1/2$ 和 $r > 0$，令B_r^{ν}： L^2（$\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}$）$\to L^2$（$\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}$）为符号为（$1-|\xi|^2/r^2$）$_+^{\nu}$的 Bochner–Riesz 乘子，并在测试张量上定义 $D_r^{\nu} = r\partial_r B_r^{\nu}$，其中导数按分布意义下解释，取值于 r （第 8节）。

局部平滑控制半径的一个二进区间上的单个边界壳层。在$p = 4$处，对所有此类区间上的平方积分求和，会引入来自不同频率尺度的乘积的迹。对于分离的尺度，引理8.2通过估计低频平方积分的空间增量来控制这些乘积。尺度间距带来的衰减使得由此产生的误差可求和。

定理 1.5。 设 $2 \le p < \infty$ 且令 $\nu > \max\{1/2, 1-2/p\}$ 为实数。对于每个$F \in L^p$（$\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}$），

$$\max\left\{ \left\| \left(\int_0^{\infty} (D_r^{\nu}F)^* D_r^{\nu}F \, \frac{dr}{r} \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}, \left\| \left(\int_0^{\infty} D_r^{\nu}F (D_r^{\nu}F)^* \, \frac{dr}{r} \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})} \right\} \le C_{p,\nu}\|F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}.$$

族 $(D_r^{\nu}F)_{r>0}$最初定义在 $L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}) \cap L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$ 如第 8节所述，通过两个所示平方函数范数下的完备化，可唯一延拓（定理 8.5）。常数与 $\mathcal{M}$ 及其迹无关。

这是 Carbery 平面标量值域中 Stein 平方函数的列版本和行版本 [2, 6]。推论8.7给出了量子环面和广义莫亚尔平面上的相同估计，且关于变形和迹系数代数一致。

1.2. **局部平滑论证**。 证明（1.2）的主要困难在于 [18, 第2节、附录 D 和引理 61]中的标量能量论证存在一个符号问题。对于一个支集位于单个频率帽中的波，扩展时空上守恒流的时间密度为辅助狄利克雷问题提供源项。其能量的格林公式中含有一个切平面行列式。在标量论证中，空间平均后的流具有非负行列式，因此得到了比较不同半径处能量所需的不等式。

系数取自 $\mathcal{M}$时，波 u 的点态范数的四次方为 $\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}((u^*u)^2)$。为保留这一乘法次序，我们对未取平均的流进行极化，并取傅里叶系数二次乘积的迹坐标。所得的流仍满足守恒定律。然而，它们的切平面行列式之和可能为负。为了解符号从何处产生，考虑一个支集位于单个帽中的有限傅里叶和。令 $X_0 \in L^4(\mathcal{M})$表示其高斯局部化和，而 $X_1 \in L^4(\mathcal{M})$表示将每个加数进一步乘以其实频率斜率所得的和，如第3节所述。根据命题3.2，迹坐标上的行列式贡献之和等于一个非负几何因子乘以

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{M}} := \|X_0X_1^*\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 - \|X_1^*X_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2.$$

在交换系数代数中，两个范数相等。对于 2×2 矩阵系数，即使只有两个频率的波也可能具有 $\mathfrak{D}_{\mathcal{M}} < 0$，如命题3.2 后面的例子所示。

对代数 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$，其乘法为 $a^{\mathrm{op}}b^{\mathrm{op}} = (ba)^{\mathrm{op}}$，会反转乘积，同时保留傅里叶相位和四阶矩。对于在 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$中观察的同一波，有

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} = -\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}.$$

我们先对每个代数中的迹坐标求和，再将两个狄利克雷能量相加。行列式贡献在提升时空上逐点抵消。剩余的内部正方形在能量拉普拉斯算子中以非正号出现，从而恢复比较不等式（引理 4.4）。

高斯局部化将配对能量与波联系起来。在辅助圆盘中心附近，局部化的时间密度控制四阶矩（引理 4.6）。在边界处，通量呈指数衰减。对于足够窄的频率帽，这种衰减可补偿恢复四阶矩时的损失。先向外比较能量至固定半径，再向内比较至靠近内边界的圆，每个方向都要付出一个 $\log N$ 因子。对所得的 $(\log N)^2$ 上界取四次方根，即得 (1.2)。

结构安排。第 2 节将（1.2）化归为命题 2.3中针对单个频率帽的周期估计。第 3 节证明行列式消去，第 4 节将其用于两种径向能量比较，从而完成定理 1.1的证明。第 5节推导 Sobolev 估计，并将其推广到量子波。第 6 节利用局部平滑性控制保迹作用下的圆周平均及其极限。第 5.1 节引理中的长时间波估计在第 7 节用于估计薄锥壳，并在第 8 节用于给出单个频率环带上斯坦因平方函数的上界。

2. Preliminaries and localization

我们记录定理 1.1证明中所用的迹恒等式、逼近论证和标量核估计。第 2.3 节陈述针对单个频率帽的周期四阶矩估计，并由此推出欧几里得估计（1.2）。

2.1. 迹 L^p 空间与逼近。下文中，$\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}:\ \mathcal{M}_+ \to [0,\infty]$ 表示 $\mathcal{M}$上的正规忠实半有限迹。对于通过谱积分将其延拓到与 $\mathcal{M}$相伴的正可测算子上所得的迹，以及由此得到的线性迹$\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}:\ L^1(\mathcal{M})\to\mathbb{C}$，我们也使用相同的记号。对于 $1\le p<\infty$，$L^p(\mathcal{M})$由与 a 相伴、满足$\|a\|_{L^p(\mathcal{M})}^p = \mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(|a|^p) < \infty$的可测算子构成。对于可测算子，我们取其乘积在自然定义域上的闭包。记 $|a|=(a^*a)^{1/2}$，并令 $L^\infty(\mathcal{M})=\mathcal{M}$，赋予其算子范数。迹希尔伯特空间 $L^2(\mathcal{M})$的内积为 $\langle a,b\rangle=\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(a^*b)$，对 b线性。在带通常迹的 $M_d(\mathbb{C})$上，$d\in\mathbb{N}$的 L^2 范数即为希尔伯特–施密特范数。波估计中出现的$L^4(\mathcal{M})$范数的四次方为$\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}((a^*a)^2)$。

如果 Y 是一个欧几里得区域或带有测度 dy 的平坦环面，记 $\mathcal{N}_Y=L^\infty(Y)\,\bar\otimes\,\mathcal{M}$，并赋予乘积迹。对于 $1\le p<\infty$，我们将 $F\in L^p(\mathcal{N}_Y)$ 与一个博赫纳可测函数 $F:\ Y\to L^p(\mathcal{M})$ 视为相同（除去几乎处处相等的情形），即

$$L^p(\mathcal{N}_Y)=L^p(Y;L^p(\mathcal{M})),\qquad \|F\|_{L^p(\mathcal{N}_Y)}^p=\int_Y \mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(|F(y)|^p)\,dy. \tag{2.1}$$

关于（2.1）的欧几里得情形和圆周情形，参见 [19, 引言] 以及 [20, 第 1483],页。于是，（1.2）左侧范数的四次方对‖（U（t）P_NF）（x）$\|_{L^4}^4$（$\mathcal{M}$）进行积分。$dx\,dt$在（1.9）中，半径则标记单个空间代数中的一个族。

设 $(\mathcal{A}_i,\ \tau_i)$、$i\in\{1,2\}$ 为半有限带迹冯·诺依曼代数，并设 $1\le p<\infty$。Le Merdy、Ricard 和 Roydor 给出了范数稠密性 [13, 第 5 节，第 864] 页

$$\overline{L^p(\mathcal{A}_1,\tau_1)\odot L^p(\mathcal{A}_2,\tau_2)}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathcal{A}_1\bar\otimes\mathcal{A}_2,\tau_1\bar\otimes\tau_2)}}=L^p(\mathcal{A}_1\bar\otimes\mathcal{A}_2,\tau_1\bar\otimes\tau_2)\,,$$

其中 $\odot$ 表示代数张量积。这适用于第 5.4 节中的张量积。

对于 $a\in L^p(\mathcal{M})$ 和 $n\in\mathbb{N}$，令 $a_n=a\,1_{[1/n,n]}(|a|)$。将迹的正规性应用于 $|a|^p$ 的谱积分，可得$\|a-a_n\|_{L^p(\mathcal{M})}\to 0$。此外，$\|a_n\|_{L^\infty(\mathcal{M})}\le n$，其右支集的迹至多为 $\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}($ $1_{[1/n,\infty)}(|a|))\le n^p\|a\|_{L^p(\mathcal{M})}^p$。由极分解可知，其左支集的迹相同。

乘积迹给出$\|x_1\otimes x_2\|_{L^p(\mathcal{A}_1\bar\otimes\mathcal{A}_2,\tau_1\bar\otimes\tau_2)} = \|x_1\|_{L^p(\mathcal{A}_1,\tau_1)}\|x_2\|_{L^p(\mathcal{A}_2,\tau_2)}$，其中$x_i\in L^p(\mathcal{A}_i,\tau_i)$、$i=1$、2，因此我们可以分别在相应的 L^p 范数中逼近每个有限张量和的各因子。在 $L^p($ $\mathcal{N}_Y)$ 中，我们因此使用由有限和 $\sum_{i=1}^m f_i\otimes a_i$, $m\in\mathbb{N}$ 构成的稠密子空间；对于欧几里得区域，取 $f_i\in C_c^\infty(Y)$，对于平坦环面，取 $f_i\in C^\infty(Y)$，且 $a_i\in\mathcal{M}$ 满足 $\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(1_{(0,\infty)}(|a_i|))$ $<\infty$。标量因子在 $L^p(Y)$ 中稠密，而系数因子根据上文的谱截断是稠密的。对于 $Y=\mathbb{R}^d$，$d\in\mathbb{N}$，我们也使用施瓦茨标量因子，因为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 包含 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$。

对于 $1\le q,\ r,\ s\le\infty$当 $1/q=1/r+1/s$时，乘法将 $L^r(\mathcal{M})\times L^s(\mathcal{M})$ 映射到 $L^q(\mathcal{M})$，其中$\|ab\|_{L^q(\mathcal{M})}\le\|a\|_{L^r(\mathcal{M})}\|b\|_{L^s(\mathcal{M})}$ 对于 $a\in L^r(\mathcal{M})$ 和 $b\in L^s(\mathcal{M})$ 成立，这是由迹的 H¨older 不等式得到的，当 $r,\ s<\infty$ [4, 定理 4.2]。当 $r=\infty$ 或

$s=\infty$ 时，所述不等式是有界算子的左乘法或右乘法的上界；如果二者都是无穷的，则它是算子范数的次乘法性。

对于乘积，我们还使用迹的循环性 $a_1\cdots a_m$，其中 $m\ge 2$ 是整数，$a_j\in L^{p_j}(\mathcal{M})$ 且 $1\le p_j<\infty$ 对于 $1\le j\le m$，并且 $\sum_{j=1}^m 1/p_j=1$。反复应用 Hölder 不等式，可得 ¨使得 $a_1(a_2\cdots a_m)$ 和 $(a_2\cdots a_m)a_1$ 均属于 $L^1(\mathcal{M})$。将 Brown 和 Kosaki 的迹恒等式 [1, 定理 17] 应用于 a_1 和 $a_2\cdots a_m$，得到

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(a_1\cdots a_m)=\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(a_2\cdots a_m a_1)\,.$$

反复应用该恒等式，可得其在任意循环置换下均保持不变。

2.2. 标量乘子与傅里叶局部化。 对于 $d\in\mathbb{N}$ 和标量 Schwartz 函数 f，$a:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$，我们使用

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-ix\cdot\xi}f(x)\,dx,\qquad \check{a}(x)=(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot\xi}a(\xi)\,d\xi\qquad (x,\xi\in\mathbb{R}^d).$$

我们也记作 $a^\vee=\check{a}$。傅里叶变换作用于有限张量的标量因子。对于 $1\le p\le\infty$，乘子 $a(D)$ 将 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\odot L^p(\mathcal{M})$ 映入其自身，映射为 $a(D)F=\check{a}*F$。对于多重指标 $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_d)\in\{0,1,\dots\}^d$，记作 $|\nu|=\nu_1+\cdots+\nu_d$ 和 $\partial^\nu=\partial_1^{\nu_1}\cdots\partial_d^{\nu_d}$。当 $A\le CB$ 且常数依赖关系由论证指定时，我们记作 $A\lesssim B$；当 $A\lesssim B$ 且 $B\lesssim A$时，我们记作 $A\asymp B$。

对于有界乘子符号 $m:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$，令 $m^\sharp(\xi)=m(-\xi)$，其中 $\xi\in\mathbb{R}^2$。$\widehat{\ }$取逐点伴随 $F^*(x)=F(x)^*$，在测试张量上得到 $\widehat{F^*}(\xi)=\widehat{F}(-\xi)^*$。因此，

$$[m(D)F]^*=m^\sharp(D)F^*\,. \tag{2.2}$$

对于线性无关的 v_1，$v_2\in\mathbb{R}^2$，相应的满秩周期格 Γ 和基本胞 P 为

$$\Gamma=\mathbb{Z}v_1+\mathbb{Z}v_2,\qquad P=\{t_1v_1+t_2v_2:0\le t_1,t_2<1\},$$

其中 t_1，t_2 为实数。由该坐标基下整数部分和小数部分的唯一性，平移集 $P+\gamma$、$\gamma\in\Gamma$ 两两不相交，并覆盖 $\mathbb{R}^2$。记$|P|$为 P 的勒贝格面积。$\mathbb{R}^2/\Gamma$ 上的概率 Haar 测度为 $dx/|P|$ 在 P 上。对偶格为

$$\Gamma^*=\{\xi\in\mathbb{R}^2:\xi\cdot\gamma\in 2\pi\mathbb{Z}\text{ for every }\gamma\in\Gamma\}.$$

对于标量符号 a: $\Gamma^*\to\mathbb{C}$，周期乘子 $a(D)$ 将系数取自 $L^p(\mathcal{M})$ 的有限三角多项式映射到其自身：对于每个 $\xi\in\Gamma^*$ 和 $1\le p\le\infty$，将 $e^{ix\cdot\xi}$ 的系数乘以 $a(\xi)$。

设 $Y=\mathbb{R}^d$、$d\in\mathbb{N}$ 配备勒贝格测度，或 $Y=\mathbb{R}^2/\Gamma$ 配备概率 Haar 测度，并将这两种测度均记为 $d\mu$。对于标量核 $K\in L^1(Y)$，在有限测试张量上定义卷积如下：

$$(K*F)(x)=\int_Y K(y)F(x-y)\,d\mu(y),\qquad \widetilde{K}(y)=\overline{K(-y)}\qquad (x,y\in Y).$$

对于 $L^1(\mathcal{N}_Y)$ 与 $\mathcal{N}_Y$ 之间的对偶，我们使用半双线性配对 $\langle H,\ F\rangle_Y=\mathrm{tr}^{\mathcal{N}_Y}(H^*F)$，其中 $H\in L^1(\mathcal{N}_Y)$、$F\in\mathcal{N}_Y$，而 $\mathrm{tr}^{\mathcal{N}_Y}$ 是乘积迹。

引理 2.1。 (i) 对于每个紧集 $B \subset \mathbb{R}^2$，存在一个常数 $C_B > 0$，使得每个支集在 B 中的 $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 都满足

$$\|\check{a}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \le C_B \sum_{|\nu|\le 4} \|\partial^\nu a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.3}$$

对于每个 $d \in \mathbb{N}$, $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$以及实数 $h > 0$,

$$\|(a(h\,\cdot))^\vee\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|\check{a}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(ii) 对于上述任意满秩格 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ 及其基本胞 P，以及每个 $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，符号为 $a|_{\Gamma^*}$ 的乘子具有卷积核 $K_{\mathrm{per}} : \mathbb{R}^2/\Gamma \to \mathbb{C}$，满足

$$K_{\mathrm{per}}(x) = |P| \sum_{\gamma\in\Gamma} \check{a}(x+\gamma), \qquad \|K_{\mathrm{per}}\|_{L^1(d\mu)} \le \|\check{a}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

(iii) 对于具有上述测度的 $Y = \mathbb{R}^d$ 或 $Y = \mathbb{R}^2/\Gamma$，每个标量 $K \in L^1(Y)$都定义了一个有界映射 $F \mapsto K * F$，它对 $L^p(\mathcal{N}_Y)$ 中的任意 $1 \le p \le \infty$均将其映射到自身，并且

$$\|K * F\|_{L^p(\mathcal{N}_Y)} \le \|K\|_{L^1(Y)} \|F\|_{L^p(\mathcal{N}_Y)}.$$

当 $p = \infty$时，该映射是在上述配对下 $L^1(\mathcal{N}_Y)$ 上 $H \mapsto \widetilde{K} * H$ 的伴随算子。所有上界均与 $\mathcal{M}$ 及其迹无关。

证明。 为证明（2.3），对 $(1-\Delta_\xi)^2$, 进行分部积分，其中 $\Delta_\xi = \partial_{\xi_1}^2 + \partial_{\xi_2}^2$。对于每个 $x \in \mathbb{R}^2$,

$$|\check{a}(x)| \le (2\pi)^{-2}(1+|x|^2)^{-2} \|(1-\Delta_\xi)^2 a\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \le C_B (1+|x|^2)^{-2} \sum_{|\nu|\le 4} \|\partial^\nu a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

在 x 中积分得到（2.3）。对于 $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 和 $h > 0$，将 $\eta = h\xi$ 代入傅里叶反演可得

$$(a(h\,\cdot))^\vee(x) = h^{-d}\check{a}(x/h) \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$

代变 ti换 $z = x/h$ in the kernel integral 证明 that its $L^1(\mathbb{R}^d)$ norm i是无 hanged 。由于 $\check{a}$ 是施瓦茨函数，其周期化在 P 上绝对且一致收敛。因子 $|P|$ 抵消了 $d\mu$ 中的因子 $|P|^{-1}$：对每个 $\xi \in \Gamma^*$,

$$\int_P K_{\mathrm{per}}(x) e^{-ix\cdot\xi} \frac{dx}{|P|} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{P+\gamma} \check{a}(z) e^{-iz\cdot\xi}\, dz = a(\xi).$$

这就确定了周期乘子，而由 $P+\gamma$ 构成的不交覆盖给出 s

$$\|K_{\mathrm{per}}\|_{L^1(d\mu)} \le \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_P |\check{a}(x+\gamma)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\check{a}(z)|\, dz.$$

对于 $1 \le p < \infty$，由 Bochner 三角不等式和平移不变性可得 e

$$\|K * F\|_{L^p(\mathcal{N}_Y)} \le \int_Y |K(y)|\, \|F(\cdot - y)\|_{L^p(\mathcal{N}_Y)}\, d\mu(y) = \|K\|_{L^1(Y)} \|F\|_{L^p(\mathcal{N}_Y)}.$$

稠密性将卷积从测试张量扩展到 $L^p(\mathcal{N}_Y)$。在 $p = \infty$， L^1 的上界~$H \mapsto K * H$ 通过下式定义其伴随算子：

$$\langle H, K * F\rangle_Y = \langle \widetilde{K} * H, F\rangle_Y \qquad (H \in L^1(\mathcal{N}_Y),\ F \in \mathcal{N}_Y).$$

~其范数至多为$\|K\|_{L^1(Y)} = \|K\|_{L^1(Y)}$，而富比尼定理表明，它在有限测试张量上与标量卷积一致。□

对于 $d \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le p < \infty$，元素 $F \in L^p(\mathbb{R}^d; L^p(\mathcal{M}))$ 具有一个取值于 $L^p(\mathcal{M})$ 的温和傅里叶变换，其定义为

$$\langle \widehat{F}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} F(x)\widehat{\varphi}(x)\,dx \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d));$$

H¨older 不等式使其成为从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^p(\mathcal{M})$ 的连续映射。对于闭集 $K \subset \mathbb{R}^d$，条件 supp $\widehat{F} \subset K$ 意味着 $\langle \widehat{F},\ \varphi\rangle = 0$ 对于每个 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus K)$ 都成立。

引理 2.2。设 $d \in \mathbb{N}$、$1 \le p < \infty$ 和 $F \in L^p(\mathbb{R}^d;\ L^p(\mathcal{M}))$。假设对于某个紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$，有 supp $\widehat{F} \subset K$，并且 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 K 的某个邻域上等于一。则 $\chi(D)F = F$。存在一个有限和序列

$$G_n = \sum_{j=1}^{m_n} f_{n,j} \otimes b_{n,j}, \qquad m_n \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N},$$

收敛到 F 在 $L^p(\mathbb{R}^d; L^p(\mathcal{M}))$，其中 $f_{n,j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，$b_{n,j} \in \mathcal{M}$，以及 $\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(1_{(0,\infty)}(|b_{n,j}|)) < \infty$ 对 $1 \le j \le m_n$成立。每个 $\chi(D)G_n$ 都是同类型的有限和，具有相同的系数$b_{n,j}$，并且

(2.4)

$$\operatorname{supp} \widehat{\chi(D)G_n} \subset \operatorname{supp} \chi,$$
$$\|\chi(D)G_n - F\|_{L^p(\mathbb{R}^d;L^p(\mathcal{M}))} \le \|\check{\chi}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|G_n - F\|_{L^p(\mathbb{R}^d;L^p(\mathcal{M}))} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

证明。我们首先证明 $\chi(D)F = F$，然后将引理 2.1应用于 $\check{\chi} * (G_n - F)$。对于 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，取 $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$使其等于零点附近的一个值。对于每个实数 $R \ge 1$，测试函数$\theta(\cdot/R)(1-\chi)\varphi$ 的支集都避开 K。因此，它与 F的配对为零。由于 $R \to \infty$，这些测试函数在施瓦茨拓扑中收敛到 $(1-\chi)\varphi$，所以连续性$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$给出 $\chi F = F$。用 Schwartz 函数测试卷积并应用富比尼定理可得

$$\widehat{\chi(D)F} = \widehat{\check{\chi} * F} = \chi\widehat{F} = \widehat{F}.$$

温和分布上的傅里叶变换具有单射性，因此 $\chi(D)F = F$ in$L^p(\mathbb{R}^d;\ L^p(\mathcal{M}))$.

Choo因此 $G_n \to F$ 来自第 2.1 节中的稠密张量类。由于 χ $\widehat{f}_{n,\ j} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\chi(D)G_n = \sum_{j=1}^{m_n} (\chi \widehat{f}_{n,j})^\vee \otimes b_{n,j}$$

仍是一个有限和，具有施瓦茨标量因子和相同的系数。其傅里叶支集包含于 supp χ 中。最后，

$$\chi(D)G_n - F = \check{\chi} * (G_n - F),$$

并且引理 2.1(iii) 给出了范数估计以及式（2.4）中的收敛性。 □

若 K 是一个远离原点的紧环域，χ 的支集可以位于包含 K的任意稍大的开环域中，并且函数 $\chi_k(\xi) = \chi(2^{-k}\xi)$，$k \in \mathbb{Z}$在 $2^k K$附近等于一，且满足 $\|\check{\ }\chi_k\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|\check{\ }\chi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$, 由引理2.1(i)可得。

2.3. **化归为周期性单帽估计**。为提取将通过能量论证证明的估计，设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ 是一个满秩周期格，并令 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$。我们沿用第 Γ^* 2.2节中的对偶格和概率 Haar 测度，dX 用 dX 表示该测度。对于有限集 $\Lambda \subset \Gamma^*$ 及系数$A_\xi \in L^4(\mathcal{M})$，$\xi \in \Lambda$定义周期半波 $u\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{T}^2 \to L^4(\mathcal{M})$及其四阶矩 $q_u\colon\ \mathbb{R}\to[0,\infty)$如下：

$$u(T,X) = \sum_{\xi\in\Lambda} A_\xi e^{i(X\cdot\xi - T|\xi|)}, \qquad T\in\mathbb{R}, \quad X\in\mathbb{T}^2, \tag{2.5}$$

$$q_u(T) = \|u(T,\cdot)\|^4_{L^4(\mathbb{T}^2;L^4(\mathcal{M}))} = \int_{\mathbb{T}^2} \|u(T,X)\|^4_{L^4(\mathcal{M})}\, dX\,. \tag{2.6}$$

要指定一个帽，选择向量 e_x、$e_{b_0}\in\mathbb{R}^2$，使得 $|e_x| = |e_{b_0}| = 1$ 且 $e_x\cdot e_{b_0} = 0$。向量 e_{b_0} 给出帽轴。对于空间覆盖 $\mathbb{R}^2$ 上的点 X 和频率 $\xi\in\mathbb{R}^2$，定义它们的实坐标如下：

$$x = X\cdot e_x, \qquad b_0 = X\cdot e_{b_0}, \qquad \xi_x = \xi\cdot e_x, \qquad \xi_{b_0} = \xi\cdot e_{b_0}\,.$$

因此 $X = xe_x + b_0 e_{b_0}$ 且 $\xi = \xi_x e_x + \xi_{b_0} e_{b_0}$。我们用 $X = (x,\ b_0)$ 和 $\xi = (\xi_x,\ \xi_{b_0})$ 表示这些坐标。对于 $\xi_{b_0} > 0$，令

$$\kappa_\xi = \frac{|\xi| + \xi_{b_0}}{\sqrt{2}} > 0, \qquad v_\xi = \frac{\xi_x}{\kappa_\xi} \in \mathbb{R}\,. \tag{2.7}$$

条件 $|v_\xi| \le \gamma$ 指定了正 e_{b_0} 方向周围的帽口径。标准正交标架 $(e_x,\ e_{b_0})$ 可以独立于 Γ 选取。改变该标架会得到 Γ 和 Γ^* 的正交坐标描述。

命题 2.3。固定实数 $0 < c_0 < C_0$。存在孔径 $\gamma > 0$ 和常数 $C > 0$，使得对于每个实数 $N \ge 2$、每个满秩周期格 $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$、$\mathbb{R}^2$ 的每个标准正交标架 $(e_x,\ e_{b_0})$，以及每个半有限迹系数代数 $\mathcal{M}$，以下结论成立。设 $\Lambda\subset\Gamma^*$ 是一个有限集，满足

$$c_0 \le |\xi|/N \le C_0, \qquad \xi_{b_0} > 0, \qquad |v_\xi| \le \gamma \qquad (\xi\in\Lambda)\,.$$

对于系数 $A_\xi \in L^4(\mathcal{M})$，$\xi\in\Lambda$定义 u 和 q_u 使其满足 (2.5) 和 (2.6。于是

$$\int_1^2 q_u(T)\, dT \le C[\log(2+N)]^2 q_u(0)\,. \tag{2.8}$$

假设命题2.3成立时定理1.1的证明。固定 $\psi\in C_c^\infty((1/2,2))$，一个实数 $N\ge 2$，以及 $h = N^{-1}$。回忆 $I = [1,2]$。我们先估计 $U(-T)P_N F$在 I上的取值。然后取逐点伴随，即可得到 (1.2)。

有限帽划分给出环面上的环带估计。为了将其应用于每个欧几里得单位正方形，我们将 F 限制在边长为十的同心正方形上，并将此限制周期延拓。欧几里得核在传播区域之外的衰减，控制了来自较大正方形之外以及额外周期副本的贡献。

对于周期估计，取 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/(100\mathbb{Z}^2)$，因此其对偶格为 $(2\pi/100)\,\mathbb{Z}^2$。应用命题 2.3，令 $c_0 = 1/2$ 且 $C_0 = 2$，并选取一个光滑的有限划分

将环带划分为孔径为 γ的帽。在缩放频率变量 $\eta \in \mathbb{R}^2$ 中，这给出

$$\psi(|\eta|) = \sum_{d=1}^{d_{\max}} \psi_d(\eta), \qquad d_{\max} \in \mathbb{N}, \quad \psi_d \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)\,.$$

对于每个 $1 \le d \le d_{\max}$，符号 ψ_d 支集包含于 $1/2 \le |\eta| \le 2$ 中，并且包含于一个满足命题 2.3 的斜率条件、相对于标准正交标架（$e_x^{(d)}$，$e_{b_0}^{(d)}$）的帽中，其中 $e_{b_0}^{(d)}$ 沿该帽指向。标架（$e_x^{(d)}$，$e_{b_0}^{(d)}$）和符号 ψ_d 均独立于 N 和 $\mathcal{M}$ 固定。在每个标架中，我们都用新的坐标表示空间变量和周期格；归一化 Haar 积分保持不变。因此，对于每个 $F \in L^4$（$\mathcal{N}_{\mathbb{T}^2}$），命题适用于 $U(-T)\,\psi_d(hD)\,F$。频率支集是有限的，因为对偶格与紧集 $\operatorname{supp}(\psi_d(h\,\cdot))$ 的交集只有有限个点。根据 Bochner 三角不等式，其傅里叶系数属于 $L^4(\mathcal{M})$。

由引理 2.1，$\|\psi_d(hD)F\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{T}^2})}$ 对 (2.8) 取四次方根会将对数因子变为 $([\log(2+N)]^2)^{1/4} = [\log(2+N)]^{1/2}$。在 $L^4(I\times\mathbb{T}^2;\ L^4(\mathcal{M}))$ 中应用三角不等式即可得到

$$\begin{aligned}\|U(-T)P_N F\|_{L^4(I\times\mathbb{T}^2;L^4(\mathcal{M}))} &\le \sum_{d=1}^{d_{\max}} \|U(-T)\psi_d(hD)F\|_{L^4(I\times\mathbb{T}^2;L^4(\mathcal{M}))} \\ &\le C_\psi[\log(2+N)]^{1/2}\|F\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{T}^2})}\,.\end{aligned} \tag{2.9}$$

将概率 Haar 测度改为基本方形上的勒贝格测度，会使两个四次方乘以其面积，因此（2.9）对于该测度同样成立。

为了从（2.9）推广到平面，我们将欧氏卷积分解为局部部分和由核衰减控制的部分。令 $F \in L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$。对于每个 $T \in I$，空间卷积核 $K_{h,\,T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 的 $U(-T)P_N$ 为

$$K_{h,T}(x) = (2\pi h)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\cdot\eta - T|\eta|)/h}\psi(|\eta|)\,d\eta, \qquad x \in \mathbb{R}^2\,.$$

固定分割 $\mathcal{D} = \{k + [0,1)^2 :\ k \in \mathbb{Z}^2\}$ of $\mathbb{R}^2$. 对于 $D \in \mathcal{D}$，令 $10D$ 表示边长为十的同心正方形。定义 F_{near}，$F_{\text{far}}\colon I\times\mathbb{R}^2 \to L^4(\mathcal{M})$ 如下：

$$\begin{aligned}F_{\text{near}}(T,x) &= \sum_{D\in\mathcal{D}} 1_D(x)\,[K_{h,T} * (F1_{10D})](x), \\ F_{\text{far}}(T,x) &= \sum_{D\in\mathcal{D}} 1_D(x)\,[K_{h,T} * (F1_{(10D)^c})](x)\,.\end{aligned}$$

在任意一个 $x \in \mathbb{R}^2$，每个求和至多有一项非零。因此 $U(-T)P_N F = F_{\text{near}} + F_{\text{far}}$，由三角不等式可得

$$\|U(-T)P_N F\|_{L^4(I\times\mathbb{R}^2;L^4(\mathcal{M}))} \le \|F_{\text{far}}\|_{L^4(I\times\mathbb{R}^2;L^4(\mathcal{M}))} + \|F_{\text{near}}\|_{L^4(I\times\mathbb{R}^2;L^4(\mathcal{M}))}\,. \tag{2.10}$$

我们首先利用核衰减给出 F_{far} 的上界。然后，在每个正方形上，将 F_{near} 与一个适用（2.9）的周期波进行比较。

对于衰减估计，固定一个整数 $m > 2$。当 $|x| \ge 3$ 和 $1 \le T \le 2$时，相位$\phi(\eta) = x\cdot\eta - T|\eta|$ 在支撑$\psi(|\eta|)$的固定环域上满足 $|\nabla_\eta\phi| \ge |x| - 2 \ge |x|/3$。对振幅 $m+2$ 应用 $h\nabla\phi\cdot\nabla_\eta/(i|\nabla\phi|^2)$的形式伴随算子 $m+2$ 次。

$\nabla\phi/|\nabla\phi|^2$ 在此环域上的每个导数都是 $O_m(|x|^{-1})$。因此，进行 $m+2$ 次分部积分，再乘以前因子 h^{-2}，可得

$$|K_{h,T}(x)| \le C_{m,\psi} h^m (1+|x|)^{-m} \qquad (|x|\ge 3,\ T\in I)\,. \tag{2.11}$$

对于 $x\in D$ 和 $y\notin 10D$，我们有 $|x-y|\ge 9/2$。因此，Bochner 三角不等式给出 $\|F_{\mathrm{far}}(T,x)\|_{L^4(\mathcal{M})}$ 的上界，即 $y\mapsto \|F(y)\|_{L^4(\mathcal{M})}$ 与 $C_{m,\psi}h^m(1+|\cdot|)^{-m}$ 的卷积。这个标量主控函数与 D 和 T 无关。由于 $m>2$，它在 $\mathbb{R}^2$ 上可积。由 Young 不等式和 $|I|=1$，可得

$$\|F_{\mathrm{far}}\|_{L^4(I\times\mathbb{R}^2;L^4(\mathcal{M}))} \le C_{m,\psi} h^m \|F\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}\,. \tag{2.12}$$

为了利用 F_{near} 估计 (2.9)，固定 $D\in\mathfrak{D}$。取与 D 同心、边长为 100 的正方形作为基本方形，并将 $g_D = F1_{10D}$ 在每个坐标方向上以 100 为周期延拓。将此延拓记为 $g_D^{\mathrm{per}}:\mathbb{T}^2\to L^4(\mathcal{M})$。在基本方形上取勒贝格测度，其四次方范数恰为 $\|F\|^4_{L^4(10D;\,L^4(\mathcal{M}))}$。对核进行周期化后，对于 $(T,x)\in I\times D$，

$$(U(-T)P_N g_D^{\mathrm{per}})(x) = K_{h,T} * g_D(x) + R_D(T,x),$$
$$R_D(T,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \int_{10D} K_{h,T}(x-y+100k)F(y)\,dy\,.$$

这里 $R_D:\ I\times D\to L^4(\mathcal{M})$ 是额外周期副本的贡献。对于 $x\in D$，$y\in 10D$ 以及 $k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}$，上界 $|x-y|\le 11\sqrt{2}/2$ 给出 $|x-y+100k|\gtrsim 1+|k|$。特别是，这些距离都大于 3，因此由（2.11）和 Bochner 三角不等式可得

$$\|R_D(T,x)\|_{L^4(\mathcal{M})} \le C_{m,\psi}h^m \sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} (1+|k|)^{-m} \int_{10D}\|F(y)\|_{L^4(\mathcal{M})}\,dy$$
$$\le C'_{m,\psi}h^m \|F\|_{L^4(10D;L^4(\mathcal{M}))}\,.$$

格点和 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}(1+|k|)^{-m}$ 收敛，因为 $m>2$，而最后一个不等式由面积为 100 的正方形上的 H¨older 不等式得到。同一个主控函数保证定义 $R_D(T,x)$ 的级数在 $L^4(\mathcal{M})$ 中绝对收敛。由于 $|I\times D|=1$，同样的上界在 $L^4(I\times D;L^4(\mathcal{M}))$ 中成立。

由于 D 位于基本方形内，$U(-T)P_N g_D^{\mathrm{per}}$ 的 $L^4(I\times D;\,L^4(\mathcal{M}))$ 范数不超过其在 I 乘以整个基本方形上的范数。我们用（2.9）对 g_D^{per} 进行估计。将 $K_{h,\,T}*g_D = U(-T)P_N g_D^{\mathrm{per}} - R_D$ 代入 D，并使用 $h\le 1/2$，现在得到

$$\|K_{h,T}*(F1_{10D})\|_{L^4(I\times D;L^4(\mathcal{M}))} \le C_\psi[\log(2+N)]^{1/2}\|F\|_{L^4(10D;L^4(\mathcal{M}))}\,. \tag{2.13}$$

集合 $I\times D$、$D\in\mathfrak{D}$ 构成分割，$I\times\mathbb{R}^2$。对（2.13）取四次方并对 $D\in\mathfrak{D}$ 求和，因而得到

$$\|F_{\mathrm{near}}\|^4_{L^4(I\times\mathbb{R}^2;L^4(\mathcal{M}))} \le C_\psi[\log(2+N)]^2 \sum_D \|F\|^4_{L^4(10D;L^4(\mathcal{M}))},$$

$$\sum_D \|F\|^4_{L^4(10D;L^4(\mathcal{M}))} = \int_{\mathbb{R}^2}\|F(y)\|^4_{L^4(\mathcal{M})}\sum_D 1_{10D}(y)\,dy \le 11^2\|F\|^4_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}\,.$$

每个坐标至多有十一个可容许正方形中心，这给出了最后一个不等式。由于每个被加项都是非负的，因此可以应用 Tonelli定理。取四次方根，并将所得估计与（2.12）结合，代入（2.10），即可得到 $U(-T)P_N F$的所需上界。

对于每个 $T \in I$，将（2.2）应用于符号 $m_T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 由 $m_T(\xi) = e^{-iT|\xi|}\overline{\psi}(|\xi|/N)$。由于 m_T是偶函数， $m_T^\sharp(\xi) = e^{iT|\xi|}\psi(|\xi|/N)$，因此

$$[U(-T)\overline{\psi}(|D|/N)(F^*)]^* = U(T)\psi(|D|/N)F\,.$$

取伴随算子保持 $L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$ 和 $L^4(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})$ 范数。将 $U(-T)\psi(|D|/N)$ 的上界应用于 F^*，即可证明（1.2），其常数为 C_ψ。C_ψ 和 C_ψ 中的较大者可同时用于 $U(T)P_N$ 和 $U(-T)P_N$，且与 N、 $\mathcal{M}$ 及其迹无关。□

现在还需证明命题 2.3。第3 节将 u 的局部化二次密度编码到守恒流中，并将 $\mathcal{M}$ 及其对代数的守恒流配对，以抵消它们的行列式贡献。第 4 节将时间分量作为辅助狄利克雷能量的源项。对该能量进行两次径向比较：一次向外比较至固定半径，另一次返回频率尺度，从而得到（2.8）中的两个对数。

3. Conserved currents and cancellation via the opposite algebra

现在开始证明命题2.3。首要任务是将周期波的局部化二次密度编码到守恒流中。它们的时间分量将作为第 4 节中狄利克雷方程的源项，而它们的守恒律将给出能量恒等式（4.11）。 [18, 引理 2.1 和命题 2。2]的标量构造产生了这样的流：其各实列的散度为零，且值域位于一个四元数平面内。在标量能量论证中，该平面上的行列式为非负。经过带算子系数的极化后，这些行列式之和可能具有任意符号。命题3.2 将表明，从 $\mathcal{M}$ 转到对代数 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 会逐点反转这一和。因此，将两个代数的能量恒等式相加，就会抵消行列式贡献。

3.1. 提升的标量流。辅助变量使我们能够在频率斜率上对波进行局部化，同时保留精确的守恒律。为每个物理坐标 (T, x, b_0) 附加一个复变量，并将这些变量记为 (τ, P, Z)。我们取它们位于四元数代数 $\mathbb{H}$ 中的平面 $\mathbb{C}_k = \mathbb{R} + k\mathbb{R}$ 内，其中 $k^2 = -1$。固定 $(T, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}_k$ 时，纤维上剩余的变量是物理位置 $X = (x, b_0) \in \mathbb{T}^2$ 和辅助变量对 $(P, Z) \in \mathbb{C}_k^2$。第 4 节中的狄利克雷方程将在该纤维的有界部分上求解；其积分域和测度将在那里说明。

回顾一下， $X = (x,\ b_0)$ 表示标准正交标架 $(e_x,\ e_{b_0})$ 中的坐标，该标架见第 2.3 节。取实数 $0 < c_0 < C_0$ 和 $N \geq 2$。令 Λ 为对偶周期格的有限子集 Γ^* ，使得

$$\xi_{b_0} > 0, \qquad c_0 \leq |\xi|/N \leq C_0 \qquad (\xi \in \Lambda)\,.$$

对于 $\xi = (\xi_x,\ \xi_{b_0}) \in \Lambda$，回顾频率参数$\kappa_\xi$，$v_\xi$ 由（2.7）给出，并定义相位 θ_ξ 为：

$$\kappa_\xi = (|\xi| + \xi_{b_0})/\sqrt{2}, \qquad v_\xi = \xi_x/\kappa_\xi, \qquad \theta_\xi = X \cdot \xi - T|\xi|\,.$$

固定圆盘半径 $R = 1/10$。目前，孔径 $0 < \gamma < R/8$ 在 $|v_\xi| \leq \gamma$ 中是任意的；第4 节将独立于 N、 Λ、帽轴和系数代数来选择它。对（e_x、 e_{b_0}）进行正交变换会改变用于描述对偶格的分量。

我们将辅助平面 $\mathbb{C}_k$ 与包含标量傅里叶振幅和相位 $e^{i\theta_\xi}$的平面 $\mathbb{C}_i = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ 区分开来。四元数单位满足 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$、 $ij = k$和 $ki = j$。我们使用四元数共轭 $q \mapsto \bar{q}$、共轭转置 $A^* = (A_{bd})_{d,\ b}$以及右四元数列空间。

为将相位表示为斜率 v_ξ 的二次多项式，我们在物理变量和辅助变量中施加相同的正交变换，引入零坐标：

	物理坐标系	零坐标系
实空时	(T, x, b_0)	(t, x, s_0)
辅助变量	$(\tau,\ P,\ Z)$	$(Y,\ P,\ S)$

(3.1)

$$t = (T + b_0)/\sqrt{2}, \quad s_0 = (b_0 - T)/\sqrt{2},$$
$$Y = (\tau + Z)/\sqrt{2}, \quad S = (Z - \tau)/\sqrt{2}\,.$$

事实上，

$$|\xi| - \xi_{b_0} = \frac{\xi_x^2}{|\xi| + \xi_{b_0}} = \frac{\kappa_\xi v_\xi^2}{\sqrt{2}}, \qquad |\xi| = \frac{\kappa_\xi}{\sqrt{2}}(1 + v_\xi^2/2)\,,$$

因此

$$\theta_\xi = \kappa_\xi(s_0 + v_\xi x - v_\xi^2 t/2)\,.$$

特别地， κ_ξ/N 具有仅取决于固定环域的正上界和下界。对v_ξ 的二次依赖正是下文进行高斯局部化的关键。

在辅助坐标图 $Y \neq 0$上，令 $W = P/Y \in \mathbb{C}_k$和 $e = Y/|Y|$。我们用 W来区分实斜率v_ξ：因子 $\exp(-\kappa_\xi|Y|\,|W - v_\xi|^2/2)$ 集中在$W = v_\xi$附近，其宽度为$(\kappa_\xi|Y|)^{-1/2}$。为将此高斯函数与复傅里叶振幅结合，定义 $\rho_e\colon\ \mathbb{C}_i \to \mathbb{H}$，使得 $\rho_e(\alpha + i\beta) = \alpha - ei\beta$，其中 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$。由于 $ic = \bar{c}i$对 $c \in \mathbb{C}_k$成立，单位元 ei 的平方为 -1；因此 ρ_e 是保持共轭的实代数嵌入。

固定标量傅里叶系数 $c = (c_\xi)_{\xi\in\Lambda} \in \mathbb{C}_i^\Lambda$。对于每个 $v \in \mathbb{R}$，令 $V^v \in \mathbb{C}_k^3$ 为下列列向量，并以零标架表示。定义实高斯权重 m_ξ 和取值于 $\mathbb{H}^3$的提升波 $\chi(c)$，如下：

$$m_\xi = (\kappa_\xi/|Y|)^{1/2}\exp\{-\kappa_\xi|Y|\,|W - v_\xi|^2/2\}, \qquad V^v = (1, (v + W)/2, -Wv/2)^{\mathrm{t}},$$

(3.2)

$$\chi(c) = \sum_{\xi\in\Lambda} V^{v_\xi} m_\xi \rho_e(c_\xi e^{i\theta_\xi})\,.$$

这些场定义在提升时空坐标图 $Y \neq 0$上。列向量 V^{v_ξ} 在左侧乘以内嵌的傅里叶振幅。标量构造中的共轭 [18, (2.14)] 决定了极化后迹乘积的顺序。

我们还需要限制另一个辅助方向。为了使所得的流保持守恒，该限制必须在 $\chi(c)$ 的方向上保持常数。适当的全纯函数是 $\Phi = S + P^2/(2Y)$。引理 3.1 将证明每个列向量 V^v 都与其等值面相切。

固定一个实数 $K \geq 1$ 并令 $a = K/N$。对于固定的 $\tau \in \mathbb{C}_k$，回顾来自 $Y = (\tau + Z)/\sqrt{2}$ 和 $S = (Z - \tau)/\sqrt{2}$ 的零坐标（3.1）。正向映射将带有 $\tau + Z \neq 0$ 的（P, Z）映射为（W, Q），$\in \mathbb{C}_k^2$ 具体为

$$W = \frac{P}{Y} = \frac{\sqrt{2}\,P}{\tau + Z},$$
$$Q = \frac{\Phi}{a} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\left(Z - \tau + \frac{P^2}{\tau + Z}\right). \tag{3.3a}$$

对于 $|\tau| > a$、$|W| < R = 1/10$ 和 $|Q| < 1/10$，逆映射通过以下方式从 (W, Q) 还原出 (P, Z)

$$Y = \frac{\sqrt{2}\,\tau + aQ}{1 + W^2/2}, \qquad P = WY, \qquad Z = \sqrt{2}\,Y - \tau\,. \tag{3.3b}$$

在这些值域上，3.3b中的分子和分母均非零，并且 $|Y| \asymp |\tau|$其常数仅取决于固定的坐标值域。这两个映射都保持

物理位置 X 不变。我们利用这些值域构造流；完整的纤维域、其体积雅可比以及边界记号见第4节。

选取一个标量函数 $\chi_{\mathrm{fib}} \in C_c^\infty(\mathbb{C}_k;\,[0,1])$，使其在 $|Q| \le 1/100$ 上等于 1，在 $|Q| \ge 1/20$ 上等于 0。定义四元数厄米流如下：

$$A(c) = \chi_{\mathrm{fib}}(Q)\chi(c)\chi(c)^{*}\,. \tag{3.4}$$

下一个引理证明，乘以这个关于 Q 的函数会保持守恒律。我们先说明陈述该守恒律以及构造能量恒等式中的海森矩阵所用的微分约定。

将三个坐标 $d=0$、1、2 按照（3.1）中数组里的任一标架的顺序编号。记 z_{d0} 为实空时坐标，$\omega_d = z_{d1} + k z_{d2}$ 为附加的辅助坐标，而 $\partial_{d\lambda} = \partial/\partial z_{d\lambda}$ 为 $\lambda \in \{0,1,2\}$。在 $\mathbb{C}_k$ 中，我们的 Wirtinger 约定为

$$\partial_{\omega_d} = \tfrac{1}{2}(\partial_{d1} - k\partial_{d2}), \qquad \partial_{\bar\omega_d} = \tfrac{1}{2}(\partial_{d1} + k\partial_{d2}). \tag{3.5}$$

对于从 $\mathbb{C}_k^3$ 的开子集到 $\mathbb{C}_k$ 的全纯函数 F，$\partial F = (\partial_{\omega_d} F)_{d=0}^{2}$ 是一个行向量。特别地，此约定适用于（3.3a）中的 Φ、W 和 Q。令 $e_0 = 1$、$e_1 = i$、$e_2 = j$。对于 $\mathbb{R}^9$ 中开坐标图上的光滑实函数 f，在该坐标图上定义 $G(f)$ 和 $\mathsf{H}(f)$，其取值分别属于 $\mathbb{H}^3$ 和四元数 Hermitian 矩阵空间：

$$G_d(f) = \sum_{\lambda=0}^{2} e_\lambda \partial_{d\lambda} f, \qquad \mathsf{H}_{db}(f) = \sum_{\lambda,\mu=0}^{2} e_\lambda \bar e_\mu \partial_{d\lambda}\partial_{b\mu} f, \qquad d,b \in \{0,1,2\}. \tag{3.6}$$

对于仅依赖于 f 辅助坐标的情形，$ki = j$ 给出 $G_d(f) = 2(\partial_{\bar\omega_d} f)\, i$。在海森矩阵中，两个混合系数分别为 $ij = -k$ 和 $ji = k$，因此

$$\mathsf{H}_{db}(f) = (\partial_{d1} + k\partial_{d2})(\partial_{b1} - k\partial_{b2}) f = 4\partial_{\bar\omega_d}\partial_{\omega_b} f.$$

特别地，在单个辅助坐标下，二维欧几里得拉普拉斯算子为 $4\partial_{\bar\omega}\partial_{\omega}$。

对于 $\mathbb{H}$ 上的方阵 A，记 $\mathrm{tr}_{\mathbb{H}} A = \sum_d A_{dd}$。四元数乘积的实部满足 $\mathrm{Re}(uv) = \mathrm{Re}(vu)$，因此 $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{H}}$ 在矩阵乘积中具有循环性。对于 3×3 四元数厄米矩阵 A，定义其实 9×9 张量为 $A^{\mathbb{R}}_{d\lambda,\,b\mu} = \mathrm{Re}(\bar e_\lambda A_{db} e_\mu)$。对后一个标量取共轭表明 $A^{\mathbb{R}}$ 是对称的。对于 $m \in \mathbb{N}$ 和实矩阵 $B,\ C \in \mathbb{R}^{m\times m}$，将它们的 Frobenius 内积定义为

$$B : C = \sum_{r,s=1}^{m} B_{rs} C_{rs} = \mathrm{tr}(B^{\mathsf{t}} C)\,.$$

这里，t 表示转置，tr 表示普通矩阵迹。展开四元数迹的实部可得

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{H}}(A\mathsf{H}(f)) = \sum_{d,b,\lambda,\mu} \mathrm{Re}(A_{db} e_\mu \bar e_\lambda)\partial_{b\mu}\partial_{d\lambda} f = A^{\mathbb{R}} : D^2 f.$$

对于 $A = \chi\chi^{*}$，$A^{\mathbb{R}}_{d\lambda,\,b\mu}$ 是 $\bar e_\lambda \chi_d$ 与 $\bar e_\mu \chi_b$ 的实内积，其中 $(u,\ v)_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}(u\bar v)$。

引理 3.1. 对于每个 $c \in \mathbb{C}_i^{\Lambda}$， $A(c)^{\mathbb{R}}$ 的每个实列在九个实坐标中散度为零。 $A(c)$ 的值域包含于 $E = \ker(\partial\Phi : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H})$ 中，其中 $\partial\Phi = (-W^2/2, W, 1)$ 是辅助零标架中的全纯导数。在物理坐标系 $V_T^v = (1 + Wv/2)/\sqrt{2}$ 中。

证明。为了证明 $A(c)^{\mathbb{R}}$ 的实列守恒，我们首先构造一个张量 B_0 ，其列在波满足对称一阶系统的坐标中散度为零。转换到变量 (Y, P, S) 后，会引入 B_0 与坐标映射每个实分量的海森矩阵之间的 Frobenius 内积。 B_0 在下面引入的辅助状态变量 $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ 中的两个对角块相同，而混合的 w_1, w_2 块为零。于是，柯西–黎曼方程表明这些内积均为零。我们将变换后的张量识别为 $(\chi(c)\chi(c)^*)^{\mathbb{R}}$，然后利用 $\partial\Phi\, V^v = 0$ 来证明可以乘以 $\chi_{\mathrm{fib}}(Q)$。

为构造 B_0，令 $\mathsf{X} = (t, x, s_0) \in \mathbb{R}^3$。使用实对称矩阵 $C^t = 2E_{00}$、$C^x = E_{01} + E_{10}$ 和 $C^{s_0} = -E_{11}$，其矩阵单位以 0,1 为索引。对每个频率 $\xi \in \Lambda$，令 $(\kappa, v) = (\kappa_\xi, v_\xi)$，并令 $p = d\theta_\xi$。在坐标 (t, x, s_0) 中， p 的分量为

$$(p_t, p_x, p_{s_0}) = (\partial_t\theta_\xi, \partial_x\theta_\xi, \partial_{s_0}\theta_\xi) = \kappa(-v^2/2, v, 1).$$

一阶系统的符号 $C(p)$ 满足

$$C(p) = \sum_{\nu=t,x,s_0} p_\nu C^\nu = \kappa \begin{pmatrix} -v^2 & v \\ v & -1 \end{pmatrix}, \qquad C(p)(1, v)^{\mathsf{t}} = 0.$$

由于 $\partial_\nu e^{i\theta_\xi} = ip_\nu e^{i\theta_\xi}$ 对 $\nu \in \{t, x, s_0\}$ 成立，傅里叶和 $\mathbf{f} = \sum_{\xi\in\Lambda} \sqrt{\kappa_\xi}(1, v_\xi)^{\mathsf{t}} c_\xi e^{i\theta_\xi}$ 是 $\sum_\nu C^\nu \partial_{\mathsf{X}^\nu}\mathbf{f} = 0$ 的解。有限傅里叶和可延拓为整函数 $\mathbf{f}\colon\ \mathbb{C}_i^3 \to \mathbb{C}_i^2$，并满足相同的恒等式。

对于两个实状态向量 $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ ，定义位移 $q = q(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^3$ 和场 G_0 : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}_i^2$，其定义为

$$q^\nu = \tfrac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{2} w_\ell^{\mathsf{t}} C^\nu w_\ell, \qquad G_0 = \overline{\mathbf{f}(\mathsf{X} - iq)}.$$

此位移将产生 m_ξ 中的高斯函数。在 $\mathbb{R}^3_{\mathsf{X}} \times \mathbb{R}^2_{w_1} \times \mathbb{R}^2_{w_2}$ 上定义，对 $\ell = 1,2$ 和 $b = 0,1$，

$$V_{\ell b} = \sum_\nu (C^\nu w_\ell)_b \partial_{\mathsf{X}^\nu}, \qquad D_{\ell b} = \partial_{w_{\ell b}} + iV_{\ell b}, \qquad Z_\ell = \sum_b (G_0)_b D_{\ell b}.$$

由于 $\partial_{w_{\ell b}} q^\nu = (C^\nu w_\ell)_b$，场 $D_{\ell b}$ 湮灭了 $\mathsf{X} - iq$ 的每个分量。 $\mathbf{f}$ 的全纯性给出 $D_{\ell b} G_0 = 0$ ，并且根据共轭关系， $D_{\ell b} G_0 = 0$。每个 $D_{\ell b}$ 的散度都为零，且 $D_{\ell b} - \bar{D}_{\ell b} = 2iV_{\ell b}$。因此，对于 $\ell = 1, 2$，

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Z_\ell &= \sum_{b=0}^{1} D_{\ell b}(G_0)_b = \sum_{b=0}^{1} (D_{\ell b} - \bar{D}_{\ell b})(G_0)_b \\ &= 2i\sum_{b=0}^{1} V_{\ell b}(G_0)_b = 2iw_\ell^{\mathsf{t}} \sum_{\nu\in\{t,x,s_0\}} C^\nu \partial_{\mathsf{X}^\nu} G_0 = 0, \end{aligned}$$

其中最后一个等式使用了该系统的实系数。当 Z_ℓ 对 Z_ℓ求导时，它湮灭了系数 G_0。$D_{\ell b}$ 沿 $D_{\ell a}$ 方向的导数为$-i\sum_\nu C^\nu_{ba}\partial_{\mathsf{X}^\nu}$。因此

$$\nabla_{Z_\ell}\bar{Z}_\ell = -i\sum_\nu (G_0^{\mathsf{t}} C^\nu \bar{G}_0)\partial_{\mathsf{X}^\nu}.$$

括号中的每个标量都因 C^ν 的对称性而为实数。因此，对于 $B_0 = \mathrm{Re}\,\sum_{\ell=1}^{2} Z_\ell \otimes \bar{Z}_\ell$，我们有

$$\operatorname{div} B_0 = \mathrm{Re}\sum_{\ell=1}^{2}\big((\operatorname{div} Z_\ell)\bar{Z}_\ell + \nabla_{Z_\ell}\bar{Z}_\ell\big) = 0.$$

这里，散度是对第一个张量指标取的，因此这个恒等式对每个实列都成立。

我们将 B_0 变换到变量 (Y,P,S)，并检查变换后的张量密度的实列仍然散度为零。对于 $b\in\{0,1\}$，令 $\zeta_b = w_{1b}+kw_{2b}$。再添入两个实坐标 ϕ_1,ϕ_2，并令 $\Phi = \phi_1 + k\phi_2$。将 Z_ℓ、$\ell\in\{1,2\}$ 在 ϕ_1,ϕ_2 方向上扩展为零，因此 B_0 中对应的行和列均为零。定义 Ψ： $\mathbb{R}^3\times\mathbb{C}^3_k \to \mathbb{R}^3\times\mathbb{C}^3_k$，使得

$$(\mathsf{X},\zeta_0,\zeta_1,\Phi)\longmapsto(\mathsf{X},Y,P,S),\qquad (Y,P,S) = (\zeta_0^2,\zeta_0\zeta_1,\Phi-\zeta_1^2/2).$$

将 $Y = Y_1+kY_2$、$P = P_1+kP_2$ 和 $S = S_1+kS_2$ 写成实分量。$\mathsf{z}=\Psi(\mathsf{y})$ 的实坐标列表为

$$\mathsf{y} = (t,x,s_0,w_{10},w_{11},w_{20},w_{21},\phi_1,\phi_2),$$
$$\mathsf{z} = (t,Y_1,Y_2,\ x,P_1,P_2,\ s_0,S_1,S_2).$$

对于 $\nu\in\{t,x,s_0\}$，记作 $\omega_\nu = \omega_{\nu,1}+k\omega_{\nu,2}$，其中 $(\omega_t,\omega_x,\omega_{s_0}) = (Y,P,S)$。因此，$\mathsf{z}$ 按三元组 $(\mathsf{X}^\nu,\omega_{\nu,1},\omega_{\nu,2})$ 排序，顺序为 t,x,s_0，如 (3.6) 所示。用 $A,B\in\{1,\dots,9\}$ 为 y 编号，用 $I,J\in\{1,\dots,9\}$ 为 z 编号。特别地，

$$\Psi^I = \mathsf{z}^I\circ\Psi,\qquad (D\Psi)_{IA} = \partial_{\mathsf{y}^A}\Psi^I.$$

将 Ψ 限制在开集

$$\big\{(\mathsf{X},\zeta_0,\zeta_1,\Phi)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{C}^3_k : \zeta_0\neq 0\big\}.$$

在此集合上 $Y\circ\Psi = \zeta_0^2\neq 0$。令 $W = P/Y$ 表示 $Y\neq 0$，坐标公式给出

$$\left(S+\frac{P^2}{2Y}\right)\circ\Psi = \Phi,\qquad W\circ\Psi = \frac{\zeta_1}{\zeta_0}.$$

辅助坐标上的复微分为

$$\frac{\partial(Y,P,S)}{\partial(\zeta_0,\zeta_1,\Phi)} = \begin{pmatrix} 2\zeta_0 & 0 & 0\\ \zeta_1 & \zeta_0 & 0\\ 0 & -\zeta_1 & 1\end{pmatrix}.$$

其行列式为 $2\zeta_0^2$，因此在满足 $\zeta_0\neq 0$ 的每一点，Ψ 都是局部可逆的。实体积雅可比为 $J_\Psi = |\det D\Psi| = 4|\zeta_0|^4$。取开集 $\mathcal{O}\subset\{\mathsf{y}:\ \zeta_0\neq 0\}$ on$\widetilde{\ }$，使得 Ψ是到 $\Psi(\mathcal{O})$上的微分同胚。在 $\Psi(\mathcal{O})$ 上定义 B，如下:

$$\widetilde{B}\circ\Psi = J_\Psi^{-1} D\Psi\, B_0\, D\Psi^{\mathsf{t}}.$$

因子 J_Ψ^{-1} 计入了在 $\mathsf{z}=\Psi(\mathsf{y})$ 下 $d\mathsf{z} = J_\Psi\, d\mathsf{y}$ 的体积变换。

固定 $J \in \{1,\dots,9\}$ 和 $\varphi \in C_c^\infty(\Psi(\mathcal{O});\mathbb{R})$。为计算坐标 z 中列 $(\widetilde{B}_{IJ})_{I=1}^9$ 的散度，我们进行变量替换，并利用坐标 y 中的 $\operatorname{div} B_0 = 0$，得到

$$\begin{aligned}\int_{\Psi(\mathcal{O})} \sum_{I=1}^{9} \widetilde{B}_{IJ}\partial_{\mathsf{z}^I}\varphi \, d\mathsf{z} &= \int_{\mathcal{O}} \sum_{A,B=1}^{9} (B_0)_{AB}\, \partial_{\mathsf{y}^A}(\varphi\circ\Psi)\, \partial_{\mathsf{y}^B}\Psi^J \, d\mathsf{y} \\ &= -\int_{\mathcal{O}} (\varphi\circ\Psi) \sum_{A,B=1}^{9} (B_0)_{AB}\, \partial_{\mathsf{y}^A}\partial_{\mathsf{y}^B}\Psi^J \, d\mathsf{y}.\end{aligned}$$

只有 w_1, w_2 中的二阶导数可能有贡献，因为 Ψ 关于 X Φ 是线性的，其非线性部分仅依赖于 ζ_0, ζ_1。对于 $a,b\in\{0,1\}$，B_0 的 w_1和 w_2 对角块的 (a,b) 项均为 $\mathrm{Re}((G_0)_a(G_0)_b)$。混合的 w_1, w_2 块为零。如果 Ψ^J 是 t, x, s_0 之一，那么它关于 w_1, w_2 的二阶导数为零。对于 $(Y,P,S)\circ\Psi$ 的实部和虚部，我们将柯西–黎曼方程应用两次。在这两种情况下，

$$\partial_{w_{1a}}\partial_{w_{1b}}\Psi^J + \partial_{w_{2a}}\partial_{w_{2b}}\Psi^J = 0, \qquad a,b\in\{0,1\}, \quad J\in\{1,\dots,9\}.$$

因此，对每个 $J\in\{1,\dots,9\}$，

$$B_0 : D^2_{\mathsf{y}}\Psi^J = \sum_{a,b=0}^{1} \mathrm{Re}\big((G_0)_a\overline{(G_0)_b}\big)\big(\partial_{w_{1a}}\partial_{w_{1b}} + \partial_{w_{2a}}\partial_{w_{2b}}\big)\Psi^J = 0.$$

因此，与 φ 的积分为零，所以对每个 $J\in\{1,\dots,9\}$，在 $\Psi(\mathcal{O})$ 上有 $\sum_{I=1}^9 \partial_{\mathsf{z}^I}\widetilde{B}_{IJ} = 0$。

接下来需要确定 $\widetilde{B}$ 与 $(\chi(c)\chi(c)^*)^{\mathbb{R}}$的关系。在坐标 y 中，将 Z_ℓ 对于 $\ell\in\{1,2\}$ 的分量写作

$$Z_\ell = \sum_{A=1}^{9} Z_\ell^A \partial_{\mathsf{y}^A}, \qquad Z_\ell^A = Z_\ell(\mathsf{y}^A)\in\mathbb{C}_i \quad (A\in\{1,\dots,9\}).$$

对于 $A\in\{1,\dots,9\}$，令 $h_A = Z_1^A + kZ_2^A \in \mathbb{H}$。实平面 $\mathbb{C}_i$和 $k\mathbb{C}_i$彼此正交，且左乘法 k 保持实内积不变。因此，对于所有A，$B\in\{1,\dots,9\}$，

$$\mathrm{Re}(h_A\overline{h_B}) = \mathrm{Re}\big(Z_1^A\overline{Z_1^B} + Z_2^A\overline{Z_2^B}\big) = (B_0)_{AB}.$$

对于 $I\in\{1,\dots,9\}$，令

$$g_I = J_\Psi^{-1/2}\sum_{A=1}^{9}(\partial_{\mathsf{y}^A}\Psi^I)h_A.$$

代入 $\widetilde{B}\circ\Psi = J_\Psi^{-1} D\Psi\, B_0\, D\Psi^{\mathsf{t}}$，对于所有 $I,J\in\{1,\dots,9\}$，得到 $(\widetilde{B}_{IJ})\circ\Psi = \mathrm{Re}(g_I g_J)$。对于 $\nu\in\{t,x,s_0\}$ 和 $b\in\{0,1\}$，对 ζ_b 求 $\omega_\nu\circ\Psi$ 的导数可得

$$L_{\nu b} = \frac{\partial(\omega_\nu\circ\Psi)}{\partial\zeta_b} = \big(C^\nu(w_1+kw_2)\big)_b.$$

在 y 坐标中，$\mathsf{y}^A = w_{1b}, w_{2b}$ 时 h_A 的值分别为 $(G_0)_b$ 和 $k(G_0)_b$。对于坐标 $\mathsf{y}^A = \mathsf{X}^\nu$，展开 Z_1 和 Z_2 可得

$$U_\nu = Z_1(\mathsf{X}^\nu) + kZ_2(\mathsf{X}^\nu) = \sum_{b=0}^{1} L_{\nu b}\, i(G_0)_b, \qquad U = (U_t, U_x, U_{s_0})^{\mathsf{t}} \in \mathbb{H}^3.$$

将 $L_{\nu b} = \ell_1 + k\ell_2$ 与 ℓ_1，$\ell_2 \in \mathbb{R}$ 写出。具有列 w_{1b}，w_{2b}、行 $\omega_{\nu,\,1}$，$\omega_{\nu,\,2}$ 的 $D\Psi$ 块作用于相应的 h_A，其作用方式为

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & -\ell_2 \\ \ell_2 & \ell_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (G_0)_b \\ k(G_0)_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{L}_{\nu b}(G_0)_b \\ k\bar{L}_{\nu b}(G_0)_b \end{pmatrix}.$$

对于每个 $\nu \in \{t, x, s_0\}$，用 $\mathsf{X} \circ \Psi = \mathsf{X}$ 表示 X^ν 坐标，用 $L_{\nu b} = -iL_{\nu b}i$、$ki = j$ 表示两个 ω_ν 分量。于是得到

$$\begin{array}{c|ccc} \partial_{\mathsf{z}^I} & \partial_{\mathsf{X}^\nu} & \partial_{\omega_{\nu,1}} & \partial_{\omega_{\nu,2}} \\ g_I & J_\Psi^{-1/2}U_\nu & -iJ_\Psi^{-1/2}U_\nu & -jJ_\Psi^{-1/2}U_\nu \end{array}.$$

根据（3.6）之后的实表示，这些值给出

$$\widetilde{B} \circ \Psi = \left(J_\Psi^{-1} U U^*\right)^{\mathbb{R}}.$$

为计算 $J_\Psi^{-1/2}U$，固定 $\xi \in \Lambda$，并回忆 $(\kappa,\ v) = (\kappa\xi,\ v\xi)$ 以及 $p = d\theta_\xi$。微分 L 和位移 $\mathsf{X} \mapsto \mathsf{X} - iq$ 给出

$$L(1, v)^{\mathsf{t}} = (2\zeta_0, \zeta_1 + \zeta_0 v, -\zeta_1 v)^{\mathsf{t}} = 2\zeta_0 (V^v \circ \Psi),$$

$$p \cdot q = \tfrac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{2} w_\ell^{\mathsf{t}} C(p) w_\ell = -\tfrac{\kappa}{2} |\zeta_1 - v\zeta_0|^2 = -\tfrac{\kappa |\zeta_0|^2}{2} |W \circ \Psi - v|^2.$$

在 $\mathsf{X} - iq$ 处，ξ 的指数函数为 $e^{i\theta_\xi(\mathsf{X} - iq)} = e^{i\theta_\xi(\mathsf{X})} e^{p \cdot q}$。$G_0$ 中的共轭保持实因子 $e^{p \cdot q}$，并将 $c_\xi e^{i\theta_\xi(\mathsf{X})}$ 共轭。令 $d = \zeta_0 / |\zeta_0|$。由于 $2\zeta_0 / \sqrt{J_\Psi} = d / \sqrt{|Y \circ \Psi|}$，对 $\xi \in \overline{\Lambda}$ 求和可得

$$J_\Psi^{-1/2} U = \sum_{\xi \in \Lambda} \left((V^{v_\xi} m_\xi) \circ \Psi \right) di\, \overline{c_\xi e^{i\theta_\xi(\mathsf{X})}}.$$

将每个 g_I 右乘单位元（di）$^{-1}$ 会保持 $\mathrm{Re}(g_I g_J)$。由于 $Y \circ \Psi = \zeta_0^2$，我们有 $d^2 = e \circ \Psi$。此外，$did^{-1} = d^2 i$，因为 $d \in \mathbb{C}_k$。对于满足 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 的 $u = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}_i$，

$$(di)\bar{u}(di)^{-1} = \alpha - (did^{-1})\beta = \alpha - (e \circ \Psi) i\beta = \rho_{e \circ \Psi}(u).$$

根据（3.2），$J_\Psi^{-1/2} U (di)^{-1} = \chi(c) \circ \Psi$。因此 $\widetilde{B} = (\chi(c)\chi(c)^*)^{\mathbb{R}}$ 在 $\Psi(\mathcal{O}$ 上。对每个满足 z 的 $Y \neq 0$，两个原像共有 X，并且分别为

$$\zeta_0^2 = Y, \qquad \zeta_1 = P/\zeta_0, \qquad \Phi = S + P^2/(2Y).$$

ζ_0 的两种取法给出相同的张量（$\chi(c)\chi(c)^*$）$^{\mathbb{R}}$，位于 z 处。因此（$\chi(c)\chi(c)^*$）$^{\mathbb{R}}$ 的实列在整个 $\{\mathsf{z} : Y \neq 0\}$ 上散度为零。

最后，在 $\{\mathsf{z}\colon\ Y \neq 0\}$ 上，回顾 $\Phi = S + P^2/(2Y)$ 和 $Q = \Phi / a$。由于 $\partial_\Phi V^v = -W^2/2 + W(v + W)/2 - Wv/2 = 0$，列 $\chi(c)$ 属于 $\ker \partial_\Phi$。对于仅关于 $(Y,\ P,\ S)$ 的实函数，$G_d(f) = 2(\partial_{\bar{\omega}_d} f) i$。应用这一恒等式和链式法则可得

$$G(\chi_{\mathrm{fib}}(Q)) = (\partial\Phi)^* \tfrac{2}{a} (\partial_{\bar{Q}} \chi_{\mathrm{fib}})(Q) i.$$

因此 $\chi(c)^*G(\chi_{\mathrm{fib}}(Q))=0$。为说明这为何足以得到实守恒律，令$f=\chi_{\mathrm{fib}}(Q)$，且 $A=\chi(c)\chi(c)^*$。使用坐标 z，其中三组的索引依次为 $d=0$、1、2，排列顺序为 t、x、s_0，如（3.6）所示。于是

$$(A^{\mathbb{R}}\nabla f)_{d\lambda}=\sum_{b,\mu}\mathrm{Re}(\bar{e}_\lambda A_{db}e_\mu)\partial_{b\mu}f=\mathrm{Re}\left(\bar{e}_\lambda\chi_d(c)\,\chi(c)^*G(f)\right)=0.$$

乘积法则证明了乘以 $\chi_{\mathrm{fib}}(Q)$后仍满足守恒，且值域仍在 E 中。从 $(t,x,s_0;\,Y,P,S)$ 到 $(T,x,b_0;\,\tau,P,Z)$ 的常正交变换（见 (3.1)）保持列散度不变。特别地，$V_T^v=($ $V_t^v-V_{s_0}^v)/\sqrt{2}=(1+Wv/2)/\sqrt{2}$。□

3.2. **迹极化与行列式消去**。为证明命题 3.2，我们对引理 3.1 中的标量流进行极化，并证明 $\mathcal{M}$和 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 的行列式和在每个点上消去。

为对这些流进行极化，回到第 $A_\xi\in L^4$（$\mathcal{M}$）节的帽局部化波中的系数 $\xi\in\Lambda$，2.3。我们对每一种选择 $\mathcal{A}\in\{\mathcal{M},\mathcal{M}^{\mathrm{op}}\}$分别进行构造。定义系数 $a_\xi\in L^4$（$\mathcal{A}$）以及波 $\xi\in\Lambda$ 和 $u_{\mathcal{A}}$ 如下:

$$a_\xi=\begin{cases}A_\xi, & \mathcal{A}=\mathcal{M},\\ A_\xi^{\mathrm{op}}, & \mathcal{A}=\mathcal{M}^{\mathrm{op}},\end{cases}\qquad u_{\mathcal{A}}=\sum_{\xi\in\Lambda}e^{i\theta_\xi}a_\xi\,.$$

我们根据乘积 $a_\eta^*a_\xi$, $\xi,\eta\in\Lambda$ 的迹坐标构造标量流。

对代数与$\mathcal{M}$具有相同的底层复向量空间和伴随算子，并且 $a^{\mathrm{op}}b^{\mathrm{op}}=(ba)^{\mathrm{op}}$。因此，对每个 $\xi\in\Lambda$，有 $(e^{i\theta_\xi}A_\xi)^{\mathrm{op}}=e^{i\theta_\xi}A_\xi^{\mathrm{op}}$。为 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$赋予输运迹 $\mathrm{tr}_{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}}(a^{\mathrm{op}})=\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(a)$，其中 $a\geq 0$，并用 $\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}$ 表示任一代数中的迹。

极分解给出 $\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(|a^*|^p)=\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(|a|^p)$，因此对于 $1\leq p<\infty$，映射$a\mapsto a^{\mathrm{op}}$ 是从 $L^p(\mathcal{M})$ 到 $L^p(\mathcal{M}^{\mathrm{op}})$ 的等距映射，因为 $|a^{\mathrm{op}}|=|a^*|^{\mathrm{op}}$。同一恒等式也保持 $p=\infty$ 的算子范数。可以先将这些恒等式应用于有限迹角中的有界元素，然后使用第2节的 L^p 截断。根据 H¨older 不等式和 L^4 等距映射， L^4 截断的乘积在两个代数中都收敛于 L^2。利用 L^2 等距映射取极限可得，对每个 $a,b\in L^4(\mathcal{M})$,

$$(ab)^{\mathrm{op}}=b^{\mathrm{op}}a^{\mathrm{op}}\qquad\text{in } L^2(\mathcal{M}^{\mathrm{op}}).$$

由于 $u_{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}}=(u_{\mathcal{M}})^{\mathrm{op}}$，在每个时空点处， $p=4$ 的等距映射给出$\|u_{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}}\|_{L^4(\mathcal{M}^{\mathrm{op}})}=\|u_{\mathcal{M}}\|_{L^4(\mathcal{M})}$。

对于 ξ, $\eta\in\Lambda$，迹的 H¨older 不等式给出 $a_\eta^*a_\xi\in L^2(\mathcal{A})$。对于每个 $H\in L^2(\mathcal{A})$， $Ha_\eta^*a_\xi$ 和 $a_\eta^*a_\xi H$都属于 $L^1(\mathcal{A})$。由于 a_η^*, $a_\xi\in L^4(\mathcal{A})$ 且 $1/2+1/4+1/4=1$，第 2.1 节中的循环迹恒等式给出

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(Ha_\eta^*a_\xi)=\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(a_\eta^*a_\xi H).$$

对于 $\mathcal{A}$的每种选择，所有所需的迹坐标都属于希尔伯特空间 e

$$Z_{\mathcal{A}}=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a_\eta^*a_\xi:\xi,\eta\in\Lambda\}\subset L^2(\mathcal{A}),\qquad\langle B,C\rangle=\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(B^*C).$$

空间 $Z_{\mathcal{A}}$ 是有限维的，并且在伴随算子下封闭，因为 $(a_\eta^*a_\xi)^*=a_\xi^*a_\eta$。我们利用其希尔伯特空间结构来取坐标。两个元素的乘法

$Z_{\mathcal{A}}$ 在可测算子的环境代数中进行，并得到一个 L^1 迹配对。

选取 $Z_{\mathcal{A}}$ 自伴部分关于实内积 $\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(HP)$的实正交归一基 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$。$Z_{\mathcal{A}}$ 中的每个元素都可表示为其自伴实部和虚部之和，系数分别为 1 和 i。因此，$\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ 也构成$Z_{\mathcal{A}}$的复正交归一基。对于每个 $H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$，构造矩阵 k_H：$\mathbb{C}^{\Lambda}\to\mathbb{C}^{\Lambda}$ 其元素为

$$k_H(\xi,\eta)=\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(Ha_\eta^*a_\xi),\qquad \xi,\eta\in\Lambda.$$

由于 $H=H^*$，对于 $\xi,\ \eta\in\Lambda$,

$$\overline{k_H(\xi,\eta)}=\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(a_\xi^*a_\eta H)=\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(Ha_\xi^*a_\eta)=k_H(\eta,\xi).$$

取谱分解 $k_H=\sum_l\lambda_l c_l c_l^*$，其中 $\lambda_l\in\mathbb{R}$ 以及 $c_l\in\mathbb{C}^{\Lambda}$ 对于 $1\le l\le|\Lambda|$。定义四元数厄米场 $A_H=\sum_l\lambda_l A(c_l)$于坐标图（3.3）上。向量 H、c_l 以及数 λ_l 均与提升时空变量无关，因此引理3.1 给出

$$\mathrm{div}(A_H^{\mathbb{R}})=0,\qquad (\partial\Phi)A_H=0.$$

这里的散度按列计算，而 $(\partial\Phi)A_H=0$ 表示 A_H的值域包含于 $E=\ker\partial\Phi$。第 4 节对每个 $H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$求解一个标量狄利克雷方程，其源项为 $(A_H)_{TT}$。由于基与时空无关，这些标量方程的解 v_H可以组合成 $\sum_{H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}v_H H$。

我们给出 A_H 的各项，以确定其时间分量以及它在 E 上的行列式。在坐标图的每个点处，定义一列 $D\in\mathbb{C}^3_k$、一个 3×2 矩阵 J_0 以及两个元素 $X_0,\ X_1\in L^4(\mathcal{A})$，如下所示

$$D=(0,1/2,-W/2)^{\mathsf{t}},\quad J_0=[\,V^0\ D\,],\qquad X_m=\sum_{\xi\in\Lambda}v_\xi^m m_\xi e^{i\theta_\xi}a_\xi\quad(m=0,1)\,.$$

由于 $V^v=V^0+vD$，展开 (3.4) 中的外积可得

$$A_H=\chi_{\mathrm{fib}}(Q)J_0\rho_e\Big(\big(\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(HX_n^*X_m)\big)_{m,n=0,1}\Big)\,J_0^*\,. \tag{3.7}$$

为验证因子的顺序，将谱和中标量流的展开代入 A_H 可得

$$A_H=\chi_{\mathrm{fib}}(Q)\sum_{\xi,\eta\in\Lambda}m_\xi m_\eta V^{v_\xi}\rho_e\big(e^{i(\theta_\xi-\theta_\eta)}k_H(\xi,\eta)\big)(V^{v_\eta})^*.$$

只有标量振幅在 ρ_e 内组合。代入 $V^{v_\xi}=V^0+v_\xi D$ 可得 (3.7)，因为

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(HX_n^*X_m)=\sum_{\xi,\eta\in\Lambda}v_\xi^m v_\eta^n m_\xi m_\eta e^{i(\theta_\xi-\theta_\eta)}k_H(\xi,\eta)\,.$$

这里，ρ_e 逐项作用于 2×2 数值矩阵。特别地，A_H 仅取决于 k_H，因此它的任意一种谱分解都会给出相同的流。

对于实数 c,d，记 $\mathrm{Re}_k(c+kd)=c$和 $\mathrm{Im}_k(c+kd)=d$。固定辅助变量。在频率属于 Λ 且系数为标量或 $L^4(\mathcal{A})$ 的空间三角多项式上，令 S_0,S_1 通过相应的标量符号作用于同一多项式空间

$$m_\xi\mathrm{Re}_k V_T^{v_\xi}=m_\xi(1+v_\xi\mathrm{Re}_k W/2)/\sqrt{2},\qquad m_\xi\mathrm{Im}_k V_T^{v_\xi}=m_\xi v_\xi\mathrm{Im}_k W/(2\sqrt{2})\,.$$

时间分量 $\mu_H \in \mathbb{R}$ 和稠密性 $\mu_{\mathcal{A}} \in L^2(\mathcal{A})_+$ 满足

$$\mu_H = (A_H)_{TT} = \operatorname{tr}_{\mathcal{A}}(H\mu_{\mathcal{A}}), \qquad \mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathrm{fib}}(Q)\sum_{j=0}^{1}(S_j u_{\mathcal{A}})^* S_j u_{\mathcal{A}}\,. \tag{3.8}$$

对于标量振幅 $c \in \mathbb{C}_i^{\Lambda}$，令 $u_c = \sum_{\xi\in\Lambda} c_\xi e^{i\theta_\xi}$。时间分量为 $\chi(c)_T = \rho_e(S_0 u_c) + k\rho_e(S_1 u_c)$。这两个加项位于正交实平面中，这些平面由$\mathbb{C}_i, k\mathbb{C}_i$ 通过在 $\mathbb{C}_k$ 中用 e 的平方根进行共轭得到。由于 ρ_e 保持模不变，

$$|\chi(c)_T|^2 = |S_0 u_c|^2 + |S_1 u_c|^2.$$

要计算 μ_H，取 $A_H = \sum_l \lambda_l A(c_l)$ 的 TT项。在频率对 $\xi, \eta \in \Lambda$ 中展开 $|S_j u_{c_l}|^2$，并代入 $k_H(\xi,\eta) = \sum_l \lambda_l(c_l)\xi(c_l)\eta$，得到

$$\mu_H = \chi_{\mathrm{fib}}(Q)\sum_{j=0}^{1}\sum_{l=1}^{|\Lambda|}\lambda_l |S_j u_{c_l}|^2 = \chi_{\mathrm{fib}}(Q)\sum_{j=0}^{1}\operatorname{tr}_{\mathcal{A}}\big(H(S_j u_{\mathcal{A}})^* S_j u_{\mathcal{A}}\big).$$

这就证明了（3.8）。

既然（3.8）已经得到证明，我们使用（3.7）来计算 A_H在 $E = \ker\partial\Phi$上的行列式之和。该和中的几何权重来自 $|\Phi|^2$的海森矩阵。由全纯性，$\partial_{\omega_b}|\Phi|^2 = \bar{\Phi}\,\partial_{\omega_b}\Phi$ 和 $\partial_{\bar{\omega}_d}\partial_{\omega_b}\Phi = 0$。因此（3.5）–（3.6）给出

$$B = \mathsf{H}(|\Phi|^2) = 4(\partial\Phi)^*\partial\Phi, \qquad \beta = \operatorname{tr}_{\mathbb{H}} B = 4\big(1 + |W|^2 + |W|^4/4\big) = 4(1+|W|^2/2)^2.$$

的核是 B 右四元数平面 $E = \ker\partial\Phi$。在本节以及第4节中，β 若未特别说明，表示 B 在所考虑点处的数值迹。我们约定用 $\beta(p)$表示（1.3）中的对数指数。记 $\alpha_H = A_H|_E$为在正交归一四元数基下对 E 的压缩。一般而言，$L|_E$ 表示 $P_E L P_E$ 在 E 上的矩阵，其中 $P_E\colon\ \mathbb{H}^3 \to E$ 是正交投影。

对于对角元素为 r、$s \in \mathbb{R}$ 且非对角元素为 $q \in \mathbb{H}$的二阶四元数厄米矩阵，其 Moore 行列式为 $rs - |q|^2$。对于四元数厄米 $n\times n$ 矩阵 L，$n \in \mathbb{N}$，我们用 $\det_{\mathbb{H}} L$ 表示其各个实特征值的乘积。为证明 L 具有正交归一特征基，考虑在 $\mathbb{H}^n$的单位球面上最大化实瑞利商 v^*Lv 。设最大值点为 v，对应值为 $\lambda \in \mathbb{R}$，则对任意 $w \in \mathbb{H}^n$，实微分给出 $\mathrm{Re}(w^*(Lv - v\lambda)) = 0$，因此 $Lv = v\lambda$。由自伴性，右四元数正交补 $v^\perp$ 具有不变性，归纳法将L对角化。在二维情形，特征值乘积与 $rs - |q|^2$ 相等也可由 $((\mathrm{tr}_{\mathbb{H}}L)^2 - \mathrm{tr}_{\mathbb{H}}(L^2))/2$得到。

命题 3.2。在纤维图表（3.3）的每个点处，波 $u_{\mathcal{A}}$ 在$\mathcal{A} = \mathcal{M}$ 和 $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 都满足

$$\sum_{H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}} \frac{\det_{\mathbb{H}}\alpha_H}{\beta} = \frac{\chi_{\mathrm{fib}}(Q)^2}{16}\left(\|X_0X_1^*\|^2_{L^2(\mathcal{A})} - \|X_1^*X_0\|^2_{L^2(\mathcal{A})}\right). \tag{3.9}$$

将（3.9）对 $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ 求和，$\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 结果为零。

证明。为证明（3.9），我们将 E 的几何性质与对傅里叶系数的依赖分开。在（3.7）中，J_0 贡献了一个对所有 H 和两个代数都相同的格拉姆行列式。剩下的二阶行列式仅涉及迹坐标

$X_n^* X_m$ 的，我们利用帕塞瓦尔恒等式对其求和。随后，我们反转乘积，以比较这两个代数。

列 V^0、D 和 J_0 是线性无关的，并且位于二维平面 E中。在 E的一个标准正交标架中，将它们的方形坐标矩阵记为 J_E，并将（3.7）中的中间矩阵记为 $L_H = \rho_e((\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(HX_n^* X_m))_{m,\,n})$。于是 $\alpha_H = \chi_{\mathrm{fib}}(Q) J_E L_H J_E^*$。我们将使用合同公式

$$\det_{\mathbb{H}}(J_E L_H J_E^*) = \det_{\mathbb{H}}(J_E^* J_E) \det_{\mathbb{H}} L_H.$$

由于 $J_E^* J_E = J_0^* J_0$和 $(V^0)^* D = \bar{W}/4$，V^0、D的格拉姆行列式为

$$\det_{\mathbb{H}}(J_E^* J_E) = |V^0|^2 |D|^2 - |(V^0)^* D|^2 = \left(1 + \frac{|W|^2}{4}\right) \frac{1 + |W|^2}{4} - \frac{|W|^2}{16} = \frac{\beta}{16}\,.$$

为验证合同公式即使对不定的 L_H 也成立，将 L_H 通过四元数酉矩阵对角化，并在右侧乘以该酉矩阵。设 λ_1、$\lambda_2 \in \mathbb{R}$ 为此次对角化中的特征值。对于变换后的列 l_1、$l_2 \in \mathbb{H}^2$，选择其张成空间中的第一个基向量，使其沿着 l_1。在此基下写出 $l_2 = (c,\ d)^{\mathrm{t}}$，则 $\lambda_1 l_1 l_1^* + \lambda_2 l_2 l_2^*$的行列式为 $(\lambda_1 |l_1|^2 + \lambda_2 |c|^2)\ \lambda_2 |d|^2 - |\lambda_2 c \bar{d}|^2 = \lambda_1 \lambda_2 |l_1|^2 |d|^2$。量$|l_1|^2 |d|^2$ 是列格拉姆矩阵的行列式，在前述酉共轭下保持不变。

Subs将 $\alpha_H = \chi_{\mathrm{fib}}(Q) J_E L_H J_E^*$代入合同公式，对于 $H \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$，得到 ，

$$\frac{\det_{\mathbb{H}} \alpha_H}{\beta} = \frac{\chi_{\mathrm{fib}}(Q)^2}{16} \det_{\mathbb{H}} L_H.$$

因子 $\chi_{\mathrm{fib}}(Q)^2$ 来自对一个 2×2 矩阵进行缩放。接下来需要在基 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$下对 $\det_{\mathbb{H}} L_H$ 求和。嵌入 ρ_e 保持实部、共轭和模不变。该固定基在自伴部分上是实正交的，在整个 $Z_{\mathcal{A}}$上是复正交的。对 $X_m^* X_m$, $m = 0$，1 以及 $X_1^* X_0$ 应用帕塞瓦尔恒等式，得到

$$\sum_{H \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}} \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(HX_0^* X_0)\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(HX_1^* X_1) = \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(X_0^* X_0 X_1^* X_1)\,,$$

$$\sum_{H \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}} |\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(HX_1^* X_0)|^2 = \|X_1^* X_0\|^2_{L^2(\mathcal{A})}\,.$$

对 $H \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ 上的 $\det_{\mathbb{H}} \alpha_H/\beta$ 恒等式求和，并使用两个帕塞瓦尔恒等式，得到

$$\frac{16}{\beta} \sum_{H \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}} \det_{\mathbb{H}} \alpha_H = \chi_{\mathrm{fib}}(Q)^2 \left(\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(X_0^* X_0 X_1^* X_1) - \|X_1^* X_0\|^2_{L^2(\mathcal{A})}\right).$$

这里 $X_n^* X_m \in Z_{\mathcal{A}}$，因此帕塞瓦尔恒等式中的求和包含了所有迹坐标。由迹的循环性，

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(X_0^* X_0 X_1^* X_1) = \mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(X_1 X_0^* X_0 X_1^*) = \|X_0 X_1^*\|^2_{L^2(\mathcal{A})}.$$

对于 $m \in \{0, 1\}$，用 $X_m \in L^4(\mathcal{M})$ 表示使用 $a_\xi = A_\xi$ 得到的值。对于 $a_\xi = A_\xi^{\mathrm{op}}$，$L^4(\mathcal{M}^{\mathrm{op}})$ 中的对应值为 X_m^{op}，因为 $a \mapsto a^{\mathrm{op}}$ 是复线性的，而且

标量系数 $v_\xi^m m_\xi e^{i\theta_\xi}$ 在两个代数中相同。将 $(ab)^{\mathrm{op}} = b^{\mathrm{op}}a^{\mathrm{op}}$ 应用于乘积 $X_1^*X_0$ 和 $X_0X_1^*$，得到

$$X_0^{\mathrm{op}}(X_1^{\mathrm{op}})^* = (X_1^*X_0)^{\mathrm{op}}, \qquad (X_1^{\mathrm{op}})^*X_0^{\mathrm{op}} = (X_0X_1^*)^{\mathrm{op}}.$$

等距映射 $L^2(\mathcal{M}) \to L^2(\mathcal{M}^{\mathrm{op}})$ 随后使两个代数的 (3.9) 右端互为相反数。因此，对 $\mathcal{A} = \mathcal{M}, \mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 上的 (3.9) 求和后处处为零。□

注 3.3. 第 4 节加入了 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 的能量恒等式，以抵消 (3.9) 中的加权行列式和；该和在 $\mathcal{M}$中可能严格为负。

取带有通常迹和矩阵单位 E_{ij}, $i,j \in \{1,2\}$ 的 $\mathcal{M} = M_2$。对于$X_0 = E_{11}$ 和 $X_1 = E_{12}$，有 $X_0X_1^* = 0$ 和 $X_1^*X_0 = E_{21}$，因此 $\|X_0X_1^*\|_{L^2(M_2)}^2 - \|X_1^*X_0\|_{L^2(M_2)}^2 = -1$。为实现这些值，固定一个满足 $\chi_{\mathrm{fib}}(Q) > 0$ 的点，并取$\Lambda = \{\xi_1, \xi_2\}$ 使得 $v_{\xi_1} \neq v_{\xi_2}$。在所选点处，振幅 $a_{\xi_1}, a_{\xi_2} \in M_2$ 通过以下方式确定 X_0, X_1

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{\xi_1}e^{i\theta_{\xi_1}} & m_{\xi_2}e^{i\theta_{\xi_2}} \\ v_{\xi_1}m_{\xi_1}e^{i\theta_{\xi_1}} & v_{\xi_2}m_{\xi_2}e^{i\theta_{\xi_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\xi_1} \\ a_{\xi_2} \end{pmatrix}.$$

这个标量矩阵的行列式为 $(v_{\xi_2} - v_{\xi_1})\, m_{\xi_1}m_{\xi_2}e^{i(\theta_{\xi_1}+\theta_{\xi_2})} \neq 0$，因此我们可以选择两个振幅，使其得到 $X_0 = E_{11}$ 和 $X_1 = E_{12}$。例如，在方环面 $\mathbb{R}^2/(100\mathbb{Z}^2)$ 上，频率 $(2\pi/100)(1,n)$ 和 $(2\pi/100)(-1,n)$ 对所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$ 都落在同一个固定球冠内。它们等长，因此令 $r \in (c_0, C_0)$ 和 $N = |\xi|/r$ 取任一频率，就能使二者都落在指定环带上，且 $N \geq 2$。在所选的点处，根据命题 3.2，(3.9) 中的加权行列式和在 M_2 中为 $-\chi_{\mathrm{fib}}(Q)^2/16$，在 M_2^{op} 中为 $+\chi_{\mathrm{fib}}(Q)^2/16$。

4. The auxiliary Dirichlet energy: proof of Theorem 1.1

为证明命题 2.3 的周期性单帽估计 (2.8)，我们将 (2.6) 中的四阶矩 q_u 与辅助狄利克雷能量 $\mathcal{E}$ 进行比较。我们利用第 3 节中源项为 $\mu_H = (A_H)_{TT}$ 的狄利克雷方程，并将 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 对应的能量相加。根据命题 3.2，行列式贡献相互抵消。随后利用格林公式得到 $\Delta_z \mathcal{E} = \mathcal{B} - \mathcal{Q}$，其中 Δ_z 是在 $z = (T, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}_k$ 的三个实坐标上的拉普拉斯算子，$\mathcal{B}$ 是边界通量，$\mathcal{Q} \geq 0$ 是内部贡献。

为了用 $q_u(T)$ 给出 $\mathcal{E}(T, \tau)$ 的下界，我们使用 $|W| \leq \gamma$ 上 m_ξ 中的高斯因子，其中 $\xi \in \Lambda$ 时 $|W - v_\xi| \leq 2\gamma$。在 $|W| = R$ 上，我们有 $|W - v_\xi| \geq R - \gamma$。由于 $\kappa_\xi \asymp N$ 且 $|Y| \asymp |\tau|$，(3.2) 中的高斯因子在此边界上有上界 $e^{-cN|\tau|}$，其中某个 $c > 0$。当 γ 足够小时，这种衰减给出了以 $\mathcal{E}$ 表示的 $|\mathcal{B}|$ 的上界，从而得到关于 $\mathcal{E}$ 的微分不等式。两次径向比较给出了 (2.8) 中的两个对数因子。我们使用圆盘几何，以及附录 D 和引理 6.1] 中对 [18, 的环域比较。

4.1. **纤维上的狄利克雷问题及其能量**。我们构造光滑、非负的配对狄利克雷能量 $\mathcal{E}$，见（4.7）。格林公式（4.11）使用 $\mathcal{E}$ 在每个纤维上的积分表达式。上界和下界（4.14）和（4.24）则使用其作为狄利克雷逆算子二次型的表达式。我们先用圆盘坐标写出微分算子 L_B，然后求解狄利克雷问题，并配对 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$的源项与解。

回忆 $a = K/N$第3.1 节中的 $z = (T, \tau)$ 遍历$\mathcal{U}_a = \mathbb{R} \times \{\tau \in \mathbb{C}_k : \ a < |\tau| < 4\}$。令 $R = 1/10$ 并定义

$$D = \{W \in \mathbb{C}_k : |W| < R\}, \qquad D_Q = \{Q \in \mathbb{C}_k : |Q| < 1/10\}.$$

记 $\mathbb{T}^2_X$ 坐标 $\mathbb{R}^2/\Gamma$ 下的空间环面$(X_1, X_2) = X = (x, b_0)$。给定（$W, Q$）如（3.3a）所示，原平直坐标中的纤维为

$$\Omega_z = \left\{(X, P, Z) \in \mathbb{T}^2_X \times \mathbb{C}^2_k : \tau + Z \neq 0, \ (W, Q) \in D \times D_Q\right\}.$$

其测度为 $d\zeta = dX\, d^2P\, d^2Z$，其中 dX 是概率 Haar 测度，d^2 表示平面勒贝格测度。

定义微分算子 L_B 在每个纤维 Ω 上z时，回顾四元数 Hessian H （见3.6）以及全纯函数 $\Phi = aQ$ （见3.3a）。在物理坐标系中，令

$$B = \mathsf{H}(|\Phi|^2) = 4(\partial\Phi)^* \partial\Phi\,,$$

其中 $\partial\Phi$ 是（τ、P、Z）中的全纯导数行向量。下标 f 表示指标为 1、2 的主块，对应于 X_1、X_2。对于整数 $m \geq 1$，令 $\mathrm{Herm}_m(\mathbb{H})$ 表示由 $m \times m$ 四元数 Hermitian 矩阵组成的实向量空间。记 $\mathrm{tr}_{\mathbb{H}}$ 为数值四元数矩阵的对角元素之和。定义 $C_2 : \mathrm{Herm}_2(\mathbb{H}) \to \mathrm{Herm}_2(\mathbb{H})$，使得 $C_2(L) = (\mathrm{tr}_{\mathbb{H}} L) I_2 - L$。在每个纤维上，算子 $L_B : C^2(\Omega_z; \mathbb{R}) \to C(\Omega_z; \mathbb{R})$ 定义为

$$L_B v = C_2(B_f) : \mathsf{H}_f(v), \qquad S : L = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{H}}(SL). \tag{4.1}$$

这里，$S : L$ 是 $\mathrm{Herm}_m(\mathbb{H})$ 上的实内积。取 $\mathrm{tr}_{\mathbb{H}}$ 的实部可得到循环迹，因为对于四元数 u，v，$\mathrm{Re}(uv) = \mathrm{Re}(vu)$。我们用 $\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}$ 表示系数代数 $\mathcal{A}$ 的迹。

固定 z，记 $\partial_{P,\,Z}=(\partial_P,\ \partial_Z)$，$c=(c_1,\ c_2)=\partial_{P,\,Z}\Phi$ 以及 $d=(c_2,\ -c_1)^{\mathrm{t}}\in\mathbb{C}_k^2$。回顾 $Y=(\tau+Z)/\sqrt{2}$，见（3.1）。

引理 4.1。对于 $z\in\mathcal{U}_a$，坐标图 (3.3a) 将 Ω_z 与 $\mathbb{T}^2_X\times D\times D_Q$ 相对应。映射 $(P,Z)\mapsto(W,\Phi)$ 在固定 z 时的复雅可比行列式为

$$\mathcal{J}=\det_{\mathbb{C}_k}\frac{\partial(W,\Phi)}{\partial(P,Z)}=(\partial_{P,Z}W)d=\frac{1+W^2/2}{\sqrt{2}Y}. \tag{4.2}$$

此坐标图中的体积形式和系数界为

$$d\zeta=a^2|\mathcal{J}|^{-2}\,dX\,d^2W\,d^2Q,\qquad |Y|\asymp|\tau|,\quad |d|\asymp 1,\quad |\mathcal{J}|\asymp|\tau|^{-1}. \tag{4.3}$$

比较常数仅依赖于 D 和 D_Q。对于 $v\in C^2(\Omega_z;\mathbb{R})$，将其在 (X,W,Q) 坐标下的表达式记为 $\widetilde{v}$。在这些坐标下，

$$L_Bv=4|\mathcal{J}|^2\Delta_W\widetilde{v}+4\sum_{i,j=1}^{2}\mathrm{Re}(d_i\bar{d}_j)\partial_{X_iX_j}\widetilde{v}\,. \tag{4.4}$$

所有导数均在固定 $z=(T,\tau)$ 和 Q 的条件下计算。实拉普拉斯算子 Δ_W 作用于 W 的两个实坐标，并固定 X；而 $\partial_{X_iX_j}$ 在 X_i 和 X_j 方向求导，同时固定 W。

证明。我们先证明雅可比行列式和测度公式（4.2）和（4.3），包括系数界。逆映射（3.3b）对 $(W,Q)\in D\times D_Q$ 在 $|\tau|>a$ 时有定义，并保持 X 不变。在固定 z 时，公式 $W=P/Y$ 和 $\Phi=(Z-\tau)/\sqrt{2}+P^2/(2Y)$ 给出

$$\partial_PW=Y^{-1},\qquad \partial_ZW=-W/(\sqrt{2}Y),\qquad c=\big(W,(1-W^2/2)/\sqrt{2}\big)\,.$$

沿第一行展开复行列式，得到 $(\partial_{P,Z}W)\,d$。代入上述导数，得到（4.2）中的分子 $1-W^2/2+W^2=1+W^2/2$。由于 $\Phi=aQ$，(W,Q) 的复雅可比行列式为 $\mathcal{J}/a$。其模的平方即为实雅可比行列式，由此得到（4.3）中的体积形式。在逆坐标图中，$|\sqrt{2}\tau+aQ|$ 介于 $(\sqrt{2}-1/10)|\tau|$ 与 $(\sqrt{2}+1/10)|\tau|$ 之间。在 D 上，$|1\pm W^2/2|$ 介于 $1-R^2/2$ 与 $1+R^2/2$ 之间。由这些上界可得（4.3）中 $|Y|$、$|d|$ 和 $|\mathcal{J}|$ 的比较关系。

对于（4.4），我们根据导数属于 X、属于 (P,Z) 还是同时属于二者，将 $\mathbf{H}f(v)$ 中的各项分别列出。由于 $B_f=4c^*c$ 和 c 是交换平面 $\mathbb{C}_k$ 上的一行，由恒等式 $|c|^2I_2-c^*c=dd^*$ 可得 $C_2(B_f)=4dd^*$。因此，$L_Bv=4\,\mathrm{Re}\,(d^*\mathbf{H}f(v)\,d)$。一个物理空间导数和一个辅助导数构成的各项，其系数属于 $\mathbb{C}_ki$。在任一侧乘以 $\mathbb{C}_k$ 的元素都会使该平面保持不变，因此其实部为零。(P,Z) 中的二阶导数贡献 $16\,d^*(\partial_{\bar{\omega}_i}\partial_{\omega_j}v)_{i,j=1,2}d$，其中 $(\omega_1,\omega_2)=(P,Z)$。坐标 W,Q 关于 (P,Z) 是全纯的，并满足

$$(\partial_{P,Z}W)d=\mathcal{J},\qquad (\partial_{P,Z}Q)d=cd/a=0\,.$$

混合链式法则与 d_id_j 逐点缩并，并对 $i,\ j\in\{1,2\}$ 求和，因此可写为

$$\sum_{i,j=1}^{2}\bar{d}_i(\partial_{\bar{\omega}_i}\partial_{\omega_j}v)d_j=|\mathcal{J}|^2\partial_{\bar{W}}\partial_W\widetilde{v}\,.$$

事实上，全纯坐标函数的混合导数为零，而每个包含 Q 导数的项都含有因子 $(\partial_{P,\ Z}Q)$ d 或其共轭。因此，辅助导数的贡献为 $16|\mathcal{J}|^2\partial_{\overline{W}}\partial_W\widetilde{v} = 4|\mathcal{J}|^2\Delta_W\widetilde{v}$。纯 X 项的贡献为 $4\sum_{i,\ j=1}^{2}\mathrm{Re}(d_i\bar{d}_j)\partial_{X_iX_j}\widetilde{v}$，因为该坐标图保持 X 不变。将这些贡献相加即证明了（4.4）。□

根据引理 4.1，固定 (z,Q) 后，我们可以通过对 X 取傅里叶系数来求解纤维方程。对于每个 $\mathcal{A}\in\{\mathcal{M},\mathcal{M}^{\mathrm{op}}\}$，回顾第 3 节中的有限维希尔伯特空间 $Z_{\mathcal{A}}$ 以及其自伴部分的实正交归一基 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$。对于 $H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$，令 $\mu_H=(A_H)_{TT}$ 为 (3.8) 中的实源项，以圆盘坐标表示，并设 $\mu_{\mathcal{A}}=\sum_{H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}\mu_H H$。带帽符号表示关于 dX、对 X 取的傅里叶系数。对于 $\ell=(\ell_1,\ell_2)\in\Gamma^*$，记作 $\ell\cdot d=\sum_{j=1}^{2}\ell_j d_j$。

引理 4.2. 对于每个 $\mathcal{A}\in\{\mathcal{M},\mathcal{M}^{\mathrm{op}}\}$ 和 $H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$，存在一个联合光滑的实函数 v_H：$\mathcal{U}_a\times\mathbb{T}^2_X\times D\times D_Q\to\mathbb{R}$。对于每个固定的 $(z,Q)\in\mathcal{U}_a\times D_Q$，切片 $v_H(z,\cdot,\cdot,Q)$ 是下列方程的唯一光滑解

$$L_B v_H=\mu_H\quad in\ \mathbb{T}^2_X\times D,\qquad v_H|_{\mathbb{T}^2_X\times\partial D}=0\,,$$

其中，L_B 用圆盘坐标表示。函数 v_H 在 $\chi_{\mathrm{fib}}(Q)=0$ 的所有位置均为零。

令 $V_{\mathcal{A}}=\sum_{H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}v_H H$，其取值于 $Z_{\mathcal{A}}$ 的自伴部分。对于每个 $(z、Q)\in\mathcal{U}_a\times D_Q$ 和 $\ell\in\Gamma^*$，

$$P_\ell=-\Delta_W+\frac{|\ell\cdot d|^2}{|\mathcal{J}|^2},\qquad f_\ell=\frac{\widehat{\mu}_{\mathcal{A}}(\ell)}{4|\mathcal{J}|^2},\qquad -\widehat{V}_{\mathcal{A}}(\ell)=P_\ell^{-1}f_\ell\,. \tag{4.5}$$

这里，P_ℓ 作用于复 $L^2(D)$，定义域为 $H^2(D)\cap H^1_0(D)$。其逆算子作用于 f_ℓ 的每个坐标：$D\to Z_{\mathcal{A}}$。在（4.5）中，我们省略了 P_ℓ 对 (τ,Q) 的依赖，以及 f_ℓ 对 $(z,Q,\mathcal{A})$ 的依赖。上界 $\|P_\ell^{-1}\|_{L^2(D)\to L^2(D)}\le\lambda_1(D)^{-1}$ 关于 (z,Q,ℓ) 是一致的，其中 $\lambda_1(D)$ 是 D 上的标量狄利克雷拉普拉斯算子的第一特征值。此外，$\frown V_{\mathcal{A}}(\ell)=0$ 对于 $\ell\in\Gamma^*\setminus(\Lambda-\Lambda)$。

证明。我们逐个空间傅里叶模态地求解狄利克雷问题。$\mu_{\mathcal{A}}$ 在（3.8）中的公式里的每个乘积都具有空间相位 $e^{iX\cdot(\xi-\eta)}$，其中 $\xi、\eta\in\Lambda$。因此，对于 $\ell\in\Gamma^*\setminus(\Lambda-\Lambda)$，$\widehat{\mu}_{\mathcal{A}}(\ell)=0$。在特征标 $e^{iX\cdot\ell}$ 上，（4.4）中的 X 导数给出乘子 $-4|\ell\cdot d|^2$。除以 $4|\mathcal{J}|^2$ 后，需要求解的方程为 $P_\ell(-\widehat{V}_{\mathcal{A}}(\ell))=f_\ell$，其中定义见（4.5）。在（$z$，$Q$，$\ell$）固定时，$P_\ell$ 的势为实数，在 D 上光滑且非负。根据（3.8）和逆坐标图（3.3b），源项 f_ℓ 一直光滑到 ∂D。

D 上的标量狄利克雷拉普拉斯算子的第一特征值为

$$\lambda_1(D)=\inf_{0\neq w\in H^1_0(D)}\frac{\int_D|\nabla_W w|^2\,d^2W}{\int_D|w|^2\,d^2W}>0. \tag{4.6}$$

有界圆盘上的 Poincar´e 不等式给出正性，而 $H^1_0(D)$ 到 $L^2(D)$ 的紧嵌入保证瑞利商存在极小化子。对于 $w\in H^1_0(D)$，P_ℓ 的二次型满足

$$\int_D\left(|\nabla_W w|^2+\frac{|\ell\cdot d|^2}{|\mathcal{J}|^2}|w|^2\right)d^2W\ge\int_D|\nabla_W w|^2\,d^2W\ge\lambda_1(D)\|w\|^2_{L^2(D)}\,.$$

对于每个标量源项 $f \in L^2(D)$，Lax–Milgram定理在 $H_0^1(D)$ 上给出唯一的弱狄利克雷解 w。椭圆正则性给出 $w \in H^2(D) \cap H_0^1(D)$，因此 $w = P_\ell^{-1} f$。分部积分将 w 处的二次型表示为 $\mathrm{Re}\langle P_\ell w,\ w\rangle_{L^2(D)}$。其下界和柯西–施瓦茨不等式给出

$$\lambda_1(D)\|w\|_{L^2(D)}^2 \le \mathrm{Re}\langle P_\ell w, w\rangle_{L^2(D)} = \mathrm{Re}\langle f, w\rangle_{L^2(D)} \le \|f\|_{L^2(D)}\|w\|_{L^2(D)}\,.$$

对于 $w \neq 0$，除以 $\lambda_1(D)\|w\|_{L^2(D)}$ 得到 $\|w\|_{L^2(D)} \le \lambda_1(D)^{-1}\|f\|_{L^2(D)}$。对于 $w = 0$，该估计同样成立，因此 $\|P_\ell^{-1}\|_{L^2(D)\to L^2(D)} \le \lambda_1(D)^{-1}$。

对于 $F \in L^2(D;\, Z_{\mathcal{A}})$，将 $F = \sum_{H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}} F_H H$ 写成 $Z_{\mathcal{A}}$的复正交归一基 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$下的形式，其中 $F_H \in L^2(D)$。由于 $P_\ell^{-1}F = \sum_{H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}(P_\ell^{-1}F_H)H$，由正交归一性和标量上界可得

$$\begin{aligned}\|P_\ell^{-1}F\|_{L^2(D;Z_{\mathcal{A}})}^2 &= \sum_{H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}} \|P_\ell^{-1}F_H\|_{L^2(D)}^2 \le \lambda_1(D)^{-2}\sum_{H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}\|F_H\|_{L^2(D)}^2 \\ &= \lambda_1(D)^{-2}\|F\|_{L^2(D;Z_{\mathcal{A}})}^2\,.\end{aligned}$$

T取平方根得到 $\lambda_1(D)^{-1}$ 在 $L^2(D;\, Z_{\mathcal{A}})$ 上的 P_ℓ^{-1} 范数的上界 .

对于（4.5）中的源项，直到 ∂D 的光滑性由经典的狄利克雷存在性定理和边界正则性定理 [7, 第 6.3–6 节4]给出。事实上，$-P_\ell$ 的二阶部分是拉普拉斯算子，其零阶系数非正，且势与源项均光滑，圆盘具有光滑边界，并且狄利克雷条件是齐次的。根据唯一性，经典解与弱解一致。

Si.....对于 $P_\ell^{-1}f_\ell = 0$ $\ell \in \Gamma^* \setminus (\Lambda - \Lambda)$，在固定的（$z$，$Q$）处，我们将 $V_{\mathcal{A}}$ 定义为

$$V_{\mathcal{A}}(z, X, W, Q) = -\sum_{\ell\in\Lambda-\Lambda} e^{iX\cdot\ell}(P_\ell^{-1}f_\ell)(W), \qquad (X, W) \in \mathbb{T}_X^2 \times \overline{D}\,.$$

对于 $H \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$，设 v_H 是 H 在 $V_{\mathcal{A}}$中的系数。根据P_ℓ^{-1}的逐坐标定义，$\ell \in \Gamma^*$处的傅里叶系数为 $\widehat{v}_H(\ell) = -P_\ell^{-1}\big(\widehat{\mu}_H(\ell)/(4|\mathcal{J}|^2)\big)$。实源项$\mu_H$ 在 ℓ 和 $-\ell$处具有共轭傅里叶系数。由于 $P_\ell = P_{-\ell}$ 具有实系数，其逆算子保持这种对称性，因此 v_H 是实数。

将（4.4）应用于 v_H 的每个模态可得

$$L_B v_H = -4|\mathcal{J}|^2\sum_{\ell\in\Lambda-\Lambda} e^{iX\cdot\ell}P_\ell\widehat{v}_H(\ell) = \sum_{\ell\in\Lambda-\Lambda} e^{iX\cdot\ell}\widehat{\mu}_H(\ell) = \mu_H\,.$$

每个 $\widehat{v}_H(\ell)$ 在 ∂D上均光滑，且由于属于 $H_0^1(D)$，故具有零狄利克雷迹。因此，v_H 的每一项在 $W \in \partial D$处都为零，且 $v_H|_{\mathbb{T}_X^2\times\partial D} = 0$。反过来，对任何在 $\mathbb{T}_X^2\times\partial D$ 上消失的光滑解进行傅里叶变换，可得每个 $\ell \in \Gamma^*$对应的相同狄利克雷方程。由 P_ℓ 的可逆性可知每个 v_H均唯一。根据（3.8），源项在满足 $\chi_{\mathrm{fib}}(Q) = 0$的所有此类 Q 处均为零，唯一性给出 $v_H = 0$，特别是当 $|Q| \ge 1/20$。

现在我们来验证，解关于 $(z,\ Q)$ 光滑依赖。固定 $\ell \in \Gamma^*$ 后，改变 $(z,\ Q)$ 只会改变固定圆盘 D上的光滑乘法势和光滑源项。为说明对 $(z,\ Q)$ 的坐标中一个实参数 υ 求导是合理的，记 $w_\upsilon = P_\ell(\upsilon)^{-1}f_\ell(\upsilon)$。对于两个参数值均位于

某个固定紧邻域内的实数 $\Delta_\varepsilon h = h$，将参数依赖量 h的增量记为 $\Delta_\varepsilon h = h(\upsilon+\varepsilon) - h(\upsilon)$。两条狄利克雷方程相减，得到

$$P_\ell(\upsilon)\frac{w_{\upsilon+\varepsilon}-w_\upsilon}{\varepsilon} = \frac{f_\ell(\upsilon+\varepsilon)-f_\ell(\upsilon)}{\varepsilon} - \frac{P_\ell(\upsilon+\varepsilon)-P_\ell(\upsilon)}{\varepsilon}w_{\upsilon+\varepsilon}.$$

除以 ε之前，这两个方程给出

$$P_\ell(\upsilon)(w_{\upsilon+\varepsilon}-w_\upsilon) = f_\ell(\upsilon+\varepsilon)-f_\ell(\upsilon) - \big(P_\ell(\upsilon+\varepsilon)-P_\ell(\upsilon)\big)w_{\upsilon+\varepsilon}\,.$$

差 $P_\ell(\upsilon+\varepsilon)-P_\ell(\upsilon)$ 等于乘以 $\Delta_\varepsilon(|\ell\cdot d|^2/|\mathcal{J}|^2)$ 的算子 (4.5)。应用$P_\ell(\upsilon)^{-1}$ 并利用其在 $L^2(D;Z_\mathcal{A})$ 上的一致上界，可得

$$\begin{aligned}\|w_{\upsilon+\varepsilon}-w_\upsilon\|_{L^2(D;Z_\mathcal{A})} &\le \lambda_1(D)^{-1}\|f_\ell(\upsilon+\varepsilon)-f_\ell(\upsilon)\|_{L^2(D;Z_\mathcal{A})}\\ &\quad+\lambda_1(D)^{-1}\|P_\ell(\upsilon+\varepsilon)-P_\ell(\upsilon)\|_{L^2(D;Z_\mathcal{A})\to L^2(D;Z_\mathcal{A})}\|w_{\upsilon+\varepsilon}\|_{L^2(D;Z_\mathcal{A})}\,.\end{aligned}$$

在 $\upsilon+\varepsilon$处的逆算子上界给出$\|w_{\upsilon+\varepsilon}\|_{L^2(D;Z_\mathcal{A})} \le \lambda_1(D)^{-1}\|f_\ell(\upsilon+\varepsilon)\|_{L^2(D;Z_\mathcal{A})}$，当 $\varepsilon\to 0$ 时它仍然有界。由光滑性，$f_\ell(\upsilon\pm\varepsilon)\to f_\ell(\upsilon)$ 属于 $L^2(D;Z_\mathcal{A})$，且势一致收敛于 D 上。因此，估计中的两项都趋于零，且$w_{\upsilon+\varepsilon}\to w_\upsilon$ 属于 $L^2(D;Z_\mathcal{A})$。

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$(\Delta_\varepsilon f_\ell)/\varepsilon \to \partial_\upsilon f_\ell$ 属于 $L^2(D;Z_\mathcal{A})$，而 $(\Delta_\varepsilon P_\ell)/\varepsilon\to\partial_\upsilon P_\ell$ 属于该空间上乘法算子的范数。将 $w_{\upsilon+\varepsilon}\to w_\upsilon$ 用于除法后的方程，并应用 $P_\ell(\upsilon)^{-1}$，可得参数导数属于 $L^2(D;Z_\mathcal{A})$，且满足其狄利克雷方程，源项为 $\partial_\upsilon f_\ell - (\partial_\upsilon P_\ell)w_\upsilon$。

为获得延伸至圆盘边界的联合光滑性，固定一个紧参数邻域 $\mathcal{K}\Subset\mathcal{U}_a\times D_Q$。对于每个固定的 ℓ，P_ℓ 的势及其所有导数在 $D\times\mathcal{K}$ 上都有上界。因此，固定圆盘上的狄利克雷椭圆估计表明，对于每个整数 $m\ge 0$,

$$\|w\|_{H^{m+2}(D;Z_\mathcal{A})} \le C_{m,\ell,\mathcal{K}}\big(\|P_\ell(z,Q)w\|_{H^m(D;Z_\mathcal{A})} + \|w\|_{L^2(D;Z_\mathcal{A})}\big)\,,$$

对于 $(z,\ Q)\in\mathcal{K}$ 和光滑的 w 一致成立：$D\to\overline{Z_\mathcal{A}}$ 在 ∂D 上为零。将其应用于 $P_\ell(z,\ Q)w = f_\ell(z,\ Q)$，可得解在 $\mathcal{K}$ 上具有一致的 H^{m+2} 上界，因为 f_ℓ 在那里关于 H^m 有界，且 P_ℓ^{-1} 在 $L^2(D;\ Z_\mathcal{A})$ 上有界。在 $w_{\upsilon+\varepsilon}-w_\upsilon$ 的方程中，$\Delta_\varepsilon f_\ell\to 0$ 属于 H^m，并且 $\Delta_\varepsilon P_\ell$ 在 H^m 上的乘法算子范数中趋于零。因此，椭圆估计给出 $w_{\upsilon+\varepsilon}\to w_\upsilon$ 属于 H^{m+2}。

因此，差商方程右端在H^m中收敛到 $\partial_\upsilon f_\ell - (\partial_\upsilon P_\ell)w_\upsilon$。将椭圆估计应用于 $(\Delta_\varepsilon w)/\varepsilon - \partial_\upsilon w_\upsilon$，可将 $(\Delta_\varepsilon w)/\varepsilon$ 的收敛提升至 H^{m+2}。对于实参数 $(z,\ Q)$ 中的多重指标 α，$w_\alpha = \partial^\alpha w$ 的方程具有如下形式

$$P_\ell w_\alpha = f_{\ell,\alpha},\qquad f_{\ell,\alpha} = \partial^\alpha f_\ell - \sum_{0<\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(\partial^\beta P_\ell)\,\partial^{\alpha-\beta}w\,.$$

这里将 $\beta\le\alpha$ 理解为逐分量的，并且 w_α 具有零狄利克雷迹。若 w 的直到 $|\alpha|$阶导数在 H^{m+2}中连续，则 $f_{\ell,\ \alpha}$ 关于 H^m 连续可微，因为和式中的 $|\alpha-\beta|<|\alpha|$。在差商方程中，将 w，f_ℓ替换为 w_α，$f_{\ell,\ \alpha}$，并改变任意一个实参数。L^2 对 P_ℓ^{-1} 的上界保证了商在 L^2 中收敛，而狄利克雷估计将其提升至 H^{m+2}。Sobolev 嵌入和有限傅里叶和给出 v_H 在 $(z,\ X,\ W,\ Q)$ 中直到

∂D。局部正则性常数可能取决于频率 ℓ 和参数邻域 $\mathcal{K}$。P_ℓ^{-1} 在 $L^2(D;\ Z_{\mathcal{A}})$ 上的界 $\lambda_1(D)^{-1}$ 关于 ℓ 和 $(z,\ Q)$ 是一致的。□

我们对圆盘坐标中的场及其到平直坐标的拉回使用相同的符号 v_H、$V_{\mathcal{A}}$、μ_H、$\mu_{\mathcal{A}}$。引理4.2 中的解定义了配对能量 $\mathcal{E}:\ \mathcal{U}_a \to [0,\infty)$ 如下

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(z) &= \tfrac{1}{2}\sum_{\mathcal{A}}\int_{\Omega_z}\operatorname{tr}_{\mathcal{A}}((-V_{\mathcal{A}})\mu_{\mathcal{A}})\,d\zeta = \tfrac{1}{2}\sum_{\mathcal{A},H}\int_{\Omega_z}(-v_H)\mu_H\,d\zeta \\ &= 2a^2\sum_{\mathcal{A},\ell}\int_{D_Q}\langle f_\ell, P_\ell^{-1}f_\ell\rangle_{L^2(D;Z_{\mathcal{A}})}\,d^2Q \ge 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

在本文及下文中，$\sum_{\mathcal{A},H}$ 对 $\mathcal{A}=\mathcal{M},\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 和 $H\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$求和，而对 $\ell\in\Gamma^*$的求和具有有限支集。在标准正交基 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ 中展开迹配对，得到标量积分之和。在 X中取实部，并关于希尔伯特内积应用普朗歇尔恒等式，将 $-\widehat{V}_{\mathcal{A}}(\ell)=P_\ell^{-1}f_\ell$与 $\widehat{\mu}_{\mathcal{A}}(\ell)=4|\mathcal{J}|^2 f_\ell$配对。将因子 $4|\mathcal{J}|^2$与(4.3)中的$\frac{1}{2}a^2|\mathcal{J}|^{-2}$ 结合，得到(4.7)中的 $2a^2$。正的狄利克雷逆算子给出 $\mathcal{E}\ge 0$。

–

在固定坐标图中，(4.7) 第一行的被积函数关于 z 一直 $|W|=R$光滑，并且在 $|Q|\ge 1/20$ 时为零。因此，我们可以在 $\mathcal{U}_a$ 的紧子集上对积分号下求导，从而得到 $\mathcal{E}$的光滑性。

现在可以陈述三个估计，以完成命题 2.3 的证明。定义圆周平均 $H:\ \mathbb{R}\times(a,4)\to[0,\infty)$ 为

$$H(T,s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{E}(T,se^{k\theta})\,d\theta. \tag{4.8}$$

孔径 γ 将在第 4.5 节中选定，且不依赖于 N 和系数代数；随后固定 $K=10$。回顾 $a=K/N$ 并暂且假设$2a<1/4$。

下面将要证明的估计为

$$\begin{aligned} a^2\int_1^2 q_u(T)\,dT &\lesssim \int_1^2 H(T,2a)\,dT && \text{(Lemma 4.6)}\\ &\lesssim \log^2(3/(2a))\,H(0,4a) && \text{(Lemma 4.7)}\\ &\lesssim a^2\log^2(3/(2a))\,q_u(0) && \text{(Lemma 4.5)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

第 4.5 节将这些估计结合起来证明 (2.8)，并讨论有界值域$2a\ge 1/4$。

(4.9) 中间的不等式取决于

$$\Delta_z\mathcal{E}(T,\tau)\le V_N(|\tau|)\mathcal{E}(T,\tau),\qquad 2a\le|\tau|\le 3,$$

其中，$\Delta_z=\partial_T^2+\partial_{\mathrm{Re}_k\,\tau}^2+\partial_{\mathrm{Im}_k\,\tau}^2$以及非负径向函数 V_N：$[2a,3]\to[0,\infty)$ 将在 (4.29) 中给出。为得到这一微分不等式，第 4.2 节推导出 $\Delta_z\mathcal{E}+\mathcal{Q}=\mathcal{B}$，其中 $\mathcal{Q}\ge 0$ 和边界通量 $\mathcal{B}$ 在引理 4.4 中定义。随后，引理 4.5 和 4.6 表明 $|\mathcal{B}(T,\tau)|\le V_N(|\tau|)\mathcal{E}(T,\tau)$：$|W|=R$ 上的高斯衰减弥补了在 $W=0$ 附近恢复 $q_u(T)$ 时造成的损失。

4.2. **配对能量的格林公式**。本小节的目标是给出恒等式 $\Delta_z\mathcal{E}+\mathcal{Q}=\mathcal{B}$ 引理 4.4。我们首先说明公式中涉及的边界测度和法向导数 $\mathcal{B}$。

根据引理 4.2，v_H 在 $|Q|\geq 1/20$ 上消失。由这一支撑性质以及 X 中的周期性可知，只有 $|W|=R$ 是格林公式中有贡献的边界。令 $r=|W|^2/R^2-1$。对于 $W\in\partial D$，令 $n(W)=W/R$ 为外单位法向量，令 dS_W 表示弧长，并将固定 (z,X,Q) 时沿方向 $n(W)$ 的微分记为 ∂_n。令 δ_0 为实变量 r 在零点处的狄拉克质量。由于 $\partial_n r=2/R$ 在∂D上成立，体积公式 (4.3) 给出边界测度

$$\delta_0(r)\,d\zeta=\frac{R}{2}a^2|\mathcal{J}|^{-2}\,dX\,dS_W\,d^2Q\,.$$

对于任意实值函数 v 在 $|W|=R$ 上光滑且在此处消失，v/r 可光滑地延拓到边界。事实上，横向坐标 r 中的微积分基本定理表明，v 可写成 r 乘以一个光滑函数。沿法向微分可得边界值 $(v/r)|_{\partial D}=(R/2)\partial_n v$。式 (3.6) 中的向量 $G(r)$ 编码了 r的全部九个平直导数，其中包括关于 τ 的导数，它们记录了边界随 z 变化而发生的运动。

为计算 $\Delta_z\mathcal{E}$，我们使用海森矩阵 $\mathrm{H}(v_H)$ 和 $B=\mathrm{H}(|\Phi|^2)$ 的混合余子式 M。我们首先证明，其实张量的各列在平直坐标下散度为零，从而可以进行分部积分。纤维方程给出 $M_{TT}=\mu_H$。v_H/r 的光滑延拓以及恒等式 $\operatorname{ran}\mathrm{H}(r)=G(r)\mathbb{H}$ 在 $r=0$ 上表明，将 $\mathrm{H}(v_H)$ 压缩到 $(G(r)\mathbb{H})^{\perp}$ 后在该处为零。随后，余子式公式给出$G(r)^*MG(r)=0$ 在 $r=0$ 上。

引理 *4.3*。设 $C:\mathit{Herm}_3(\mathbb{H})\to\mathit{Herm}_3(\mathbb{H})$ 是关于 *(4.1)* 中配对的 *Moore* 行列式的梯度。对于 $U,V\in\mathit{Herm}_3(\mathbb{H})$，令 $M(U,V)\in\mathit{Herm}_3(\mathbb{H})$ 表示 $C(U+tV)$ 中实参数 t 的系数。如果 $u,v\colon O\to\mathbb{R}$ 在平直坐标 *(3.6)* 下的某个开集 $O\subset\mathbb{R}^9$ 上光滑，则 $M(H(u),H(v))^{\mathbb{R}}$ 的每一列实列都具有散度为零。

证明。列散度是关于 u 和 v 的具有常数系数的双线性微分表达式。它在实指数函数对上的取值决定了其全部系数。这些指数函数的海森矩阵的秩至多为一，从而将计算归结为关于混合余子式的一个代数恒等式。

对于 $L\in\mathrm{Herm}_3(\mathbb{H})$，其三个实特征值的乘积为

$$\det_{\mathbb{H}}L=\tfrac{1}{6}\big(p_1^3-3p_1p_2+2p_3\big),\qquad p_m=\operatorname{Re}\operatorname{tr}_{\mathbb{H}}(L^m),\quad m=1,2,3.$$

事实上，酉对角化将 p_m 表示为特征值的 m 次幂之和，而三次项展开后得到其乘积的六倍。对于变分 $D_0\in\mathrm{Herm}_3(\mathbb{H})$，在零点对 $(L+tD_0)^m$ 求微分，会将 D_0 插入 m 个可能位置中的每一个。实迹的循环性给出 $dp_m(L)[D_0]=m\operatorname{Re}\operatorname{tr}_{\mathbb{H}}(L^{m-1}D_0)$。因此，即使在特征值重复或为零时，这个三次式仍然可微，且其梯度为

$$C(L)=L^2-(\operatorname{tr}_{\mathbb{H}}L)L+\tfrac{1}{2}\big((\operatorname{tr}_{\mathbb{H}}L)^2-\operatorname{tr}_{\mathbb{H}}(L^2)\big)I_3.$$

展开 $C(U+tV)$，并使用 $\operatorname{Re}\operatorname{tr}_{\mathbb{H}}(UV)=\operatorname{Re}\operatorname{tr}_{\mathbb{H}}(VU)$，得到

$$M(U,V)=UV+VU-(\operatorname{tr}_{\mathbb{H}}U)V-(\operatorname{tr}_{\mathbb{H}}V)U+\big((\operatorname{tr}_{\mathbb{H}}U)(\operatorname{tr}_{\mathbb{H}}V)-\operatorname{Re}\operatorname{tr}_{\mathbb{H}}(UV)\big)I_3.\tag{4.10}$$

首先计算 4.10在 $U = gg^*$ 和 $V = ll^*$上的值，其中 $g,\ l \in \mathbb{H}^3$ 是列。令$a_g = g^*g$，$a_l = l^*l$ （均为实数），并令 $c = g^*l$，于是 $l^*g = \bar{c}$。按给定顺序排列的乘积为 $UV = gcl^*$ 和 $VU = l\bar{c}g^*$，且 $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{H}}(UV) = \mathrm{Re}(l^*g\,c) = |c|^2$。因此，对于 $M_0 = M(gg^*,\ ll^*)$，

$$M_0 = gc\,l^* + l\bar{c}\,g^* - a_g ll^* - a_l gg^* + (a_g a_l - |c|^2)I_3.$$

分别在右侧乘以 g 和 l，得到

$$\begin{aligned} M_0 g &= gc\bar{c} + l\bar{c}\,a_g - a_g l\bar{c} - a_l g a_g + (a_g a_l - |c|^2)g = 0,\\ M_0 l &= gc\,a_l + l\bar{c}c - a_g l a_l - a_l gc + (a_g a_l - |c|^2)l = 0. \end{aligned}$$

第一行中，$l\bar{c}$ 的两项倍数相互抵消，因为 a_g 是实数。剩余项为 $g|c|^2 - g a_g a_l + g(a_g a_l - |c|^2)$。第二行中，$gc$ 的两项倍数相互抵消，因为 a_l 是实数，其余部分为 $l|c|^2 - l a_g a_l + l(a_g a_l - |c|^2)$。这两处抵消都用到了实数恒等式 $c\bar{c} = \bar{c}c = |c|^2$。

为转而讨论实列散度，令 $\mathbf{y} = (y_{d\kappa})_{d,\kappa=0}^{2}$ 表示九个平直实坐标，并令 $\eta, \xi \in \mathbb{R}^9$ 为任意量。对于测试函数 $u = e^{\eta\cdot\mathbf{y}}$, $v = e^{\xi\cdot\mathbf{y}}$，设 $g_d = \sum_\kappa e_\kappa \eta_{d\kappa}$ 和 $l_d = \sum_\kappa e_\kappa \xi_{d\kappa}$。方程 (3.6) 给出 $\mathrm{H}(u) = u\,gg^*$ 以及 $\mathrm{H}(v) = v\,ll^*$。因此，余子式在行 (d,κ) 和列 (b,λ) 上的实部为$uv\ \mathrm{Re}(\bar{e}_\kappa (M_0)_{db} e_\lambda)$。对于每个固定的 (b,λ)，其列散度为

$$uv \sum_{d,\kappa} (\eta_{d\kappa} + \xi_{d\kappa})\,\mathrm{Re}(\bar{e}_\kappa (M_0)_{db} e_\lambda) = uv\ \mathrm{Re}\big(\big[(g+l)^* M_0\big]_b e_\lambda\big) = 0.$$

事实上，M_0 是厄米的，并且从右侧消去 g 和 l 。对于任意的 $u,\ v$每个这样的散度都是一个有限的常系数表达式$\sum_{\mu,\ \nu} c_{\mu\nu}(\partial^\mu u)(\partial^\nu v)$，其多重指标为 $\mu,\ \nu \in \{0,1,\dots\}^9$。这些指数函数上的取值除以 uv后，得到多项式$\sum_{\mu,\ \nu} c_{\mu\nu}\eta^\mu \xi^\nu$。由于该多项式对每个$(\eta,\ \xi) \in \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9$都为零，在合并导数指标相同的项后，每个系数都为零。这就证明了该恒等式在局部对所有定义在 O上的光滑实值函数 $u,\ v$ 均成立，包括原始空间变量具有周期性的情形。□

令 $t_0 = (1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{t}}$ 为物理时间向量，令 $E = \ker B$，并记 $\beta = \mathrm{tr}_{\mathbb{H}} B > 0$。由于$\mathrm{tr}_{\mathbb{H}} B_f = 4|d|^2 > 0$ 和 B 的秩为一，投影到 E 上的正交投影为$P_E = I_3 - B/\beta$。向量 $P_E t_0/|P_E t_0|$ 和$(0,\ d/|d|)$构成E的标准正交标架。事实上 $cd = 0$，第二个向量是空间的，且 $|P_E t_0|^2 = 1 - B_{TT}/\beta = 4|d|^2/\beta$。对于每个 $\mathcal{A} \in \{\mathcal{M}, \mathcal{M}^{\mathrm{op}}\}$和 $H \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$，令 $D_H = \mathrm{H}(v_H)$，并用 $b_H = D_H|_E$和$\alpha_H = A_H|_E$表示该标架下的二维压缩，指标为$0,\ 1$。这里，压缩到 E 是指将 $P_E D_H P_E$ 或 $P_E A_H P_E$ 视为作用于 E上的算子。

引理 4.4。对于每个 $z = (T,\tau) \in \mathcal{U}_a$，能量 $\mathcal{E}$满足

$$\Delta_z \mathcal{E}(z) + \mathcal{Q}(z) = \mathcal{B}(z), \tag{4.11}$$

其中 $\mathcal{Q}\colon\ \mathcal{U}_a \to [0,\infty)$ 和 $\mathcal{B}\colon\ \mathcal{U}_a \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{Q}(z) = \sum_{\mathcal{A},H} \int_{\Omega_z} \beta \left| (b_H)_{01} + \frac{(\alpha_H)_{01}}{\beta} \right|^2 d\zeta \geq 0,$$

$$\mathcal{B}(z) = \sum_{\mathcal{A},H} \int \delta_0(r)\, \frac{v_H}{r}\, G(r)^* A_H G(r)\, d\zeta.$$

在 $|W| = R$上，使用 $v_H/r = (R/2)\partial_n v_H$ 以及边界测度 $\delta_0(r)$，$d\zeta$ 在第4.2节开头固定。

证明。记 $D_H = \mathsf{H}(v_H)$ 和 $M = M(D_H, B)$。我们将在移动纤维上应用分部积分，得到

$$S = A_H - \tfrac{1}{2} M.$$

这种选择给出 $S_{TT} = \mu_H/2$，即（4.7）中的密度因子。为证明（4.11），我们计算$G(r)^* S G(r)$ 在 $r = 0$ 上，并将内部配对 $S\colon\ D_H$ 写成一个平方项与行列式项之和；后者根据命题3.2抵消。

我们首先推导移动纤维上任意 $\mathsf{Herm}_3(\mathbb{H})$ 值张量 S 的分部积分恒等式。该张量光滑至壁，且其实列散度为零。对于仅依赖于 z 的测试函数 φ，$S^{\mathbb{R}}$：
$D^2\varphi = S_{TT}\Delta_z\varphi$ 因为 $\mathsf{Re}(\bar{e}_\kappa S_{TT} e_\lambda) = S_{TT}\delta_{\kappa\lambda}$。设 v 为实值函数，光滑至壁，在壁上为零，且支集远离 ∂D_Q。令 $q = v/r$，其光滑延拓在局部边界坐标中由 $q = \int_0^1 (\partial_r v)(tr)\, dt$ 给出，同时保持切向坐标不变。将 $vS^{\mathbb{R}}$ 延拓为零，使其穿过 $r = 0$。对于总空间的实指标 I，J，分布意义下的二重散度为

$$\sum_{I,J} \partial_I \partial_J (\mathbf{1}_{r<0}\, v S^{\mathbb{R}}_{IJ}) = \sum_{I,J} \partial_I (\mathbf{1}_{r<0}\, S^{\mathbb{R}}_{IJ} \partial_J v) = \mathbf{1}_{r<0}\, S : \mathsf{H}(v) - \delta_0(r)\, q\, G(r)^* S G(r).$$

确实，一阶导数中的边界项包含 $v|_{r=0}$，而对 $S^{\mathbb{R}}$ 求导后，求和所得各项因对称性和列守恒而消失。在二阶导数中，$\partial_I \mathbf{1}_{r<0} = -\delta_0(r)\partial_I r$ 以及 $\partial_J v = q\partial_J r$ 在 $r = 0$上的导数。令 I，J遍历包括辅助时间坐标在内的全部九个实坐标，定义（3.6）中的 G 以及 $S^{\mathbb{R}}$ 给出

$$\sum_{I,J} S^{\mathbb{R}}_{IJ}\, \partial_I r\, \partial_J r = G(r)^* S G(r).$$

令 $F_{IJ} = \mathbf{1}_{r<0}\, v S^{\mathbb{R}}_{IJ}$。将 $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{U}_a)$ 视为完整坐标中仅关于 z 的函数，其分布配对为

$$\left\langle \sum_{I,J} \partial_I \partial_J F_{IJ}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathcal{U}_a} \Delta_z \varphi(z) \left(\int_{\Omega_z} v S_{TT}\, d\zeta \right) dz\,.$$

这里是 $dz = dT\, d^2\tau$，并且我们在原始平直坐标中使用了 $S^{\mathbb{R}}\colon\ D^2\varphi = S_{TT}\Delta_z\varphi$。$X$ 中的周期性以及远离 ∂D_Q 的支集确保二重散度不会产生其他边界项。将其内部表达式和边界表达式与 φ配对

并改变符号，得到

$$\Delta_z \int_{\Omega_z} (-v) S_{TT}\, d\zeta = -\int_{\Omega_z} S : \mathsf{H}(v)\, d\zeta + \int \delta_0(r)\, q\, G(r)^* S G(r)\, d\zeta. \tag{4.12}$$

在固定坐标图（W，Q）中，所有三个积分关于 z 都是光滑的（壁积分具有$|W| = R$）。因此，分布恒等式也逐点成立。

为应用（4.12），取 $M = M(D_H,\ B)$（来自（4.10）。由引理 4.3 可知，其实列的散度为零；该引理应用时取 $u = v_H$ 和 $v = |\Phi|^2$。由于按照第 $A_H^{\mathbb{R}}$ 节中构造 $= 0$ 的方式，div(A_H) 3， $S = A_H - M/2$ 的实列也具有零散度。我们将使用

$$M : D_H = 2\beta \det_{\mathbb{H}} b_H, \qquad M_{TT} = C_2(B_f) : \mathsf{H}_f(v_H) = \mu_H. \tag{4.13}$$

要计算 M： D_H，使用一个适配于 $E \oplus E^\perp$ 的标准正交标架，使得 B =diag(0, 0, β)，并记 $D_H = \begin{pmatrix} b_H & u \\ u^* & d_0 \end{pmatrix}$。则 $D_H B + B D_H$ 的左上块为零，非对角块为 βu、βu^* ，右下角元素为 $2\beta d_0$。在（4.10）中，项 $-\beta D_H$ 抵消了这些非对角块。标量恒等式项的系数为 $\beta\, \mathrm{tr}_{\mathbb{H}} b_H$，因为 $\mathrm{tr}_{\mathbb{H}}(D_H B) = \beta d_0$。计入 $-(\mathrm{tr}_{\mathbb{H}} D_H)B$ 后，剩下 M =diag($\beta C_2(b_H)$, 0)。对于$b_H = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ \bar{b}_{01} & b_{11} \end{pmatrix}$，恒等式 $C_2(b_H)$： $b_H = 2($ $b_{00}b_{11} - |b_{01}|^2$) 给出了（4.13）中$M : D_H$ 的公式。

为了计算 M_{TT}，进而在壁上计算 $G(r)^* M G(r)$，我们使用余子式公式的以下推论：对于任意 $L \in \mathrm{Herm}_3(\mathbb{H})$ 以及任意单位列 $w \in \mathbb{H}^3$，

$$w^* C(L) w = \det(L|_{w^\perp}).$$

事实上，在以 w 开头的标架中，写作 $L = \begin{pmatrix} d_0 & u^* \\ u & B_2 \end{pmatrix}$。 L^2 的第一个对角元为 $d_0^2 + |u|^2$，且 $\mathrm{tr}_{\mathbb{H}} L^2 = d_0^2 + 2|u|^2 + \mathrm{tr}_{\mathbb{H}} B_2^2$。代入 $C(L)$ 得到 $\frac{1}{2}((\mathrm{tr}_{\mathbb{H}} B_2)^2 - \mathrm{tr}_{\mathbb{H}} B_2^2) = \det_{\mathbb{H}} B_2$。对 $L = D_H + tB$ 应用余子式恒等式，并取 t 的系数。展开二维行列式可得，对每个单位 $w \in \mathbb{H}^3$，

$$w^* M(D_H, B) w = C_2(B|_{w^\perp}) : (D_H|_{w^\perp}).$$

令 $w = t_0$这给出 $M_{TT} = C_2(B_f)$： $\mathsf{H}f(v_H) = \mu_H$，其中最后一个等式是狄利克雷方程。这就证明了（4.13）。

在 $r = 0$ 上，令 $\nu = G(r)/|G(r)|$ 为其四元数编码下的完整单位法向量。 W 关于三个辅助变量的全纯性给出

$$\mathsf{H}(r) = \frac{4}{R^2}(\partial W)^* \partial W, \qquad G(r) = \frac{2}{R^2}(\partial W)^* W i.$$

由于 $|W| = R > 0$ 和 $\partial_P W = 1/Y \neq 0$，H(r) 的值域是右四元数直线$G(r)\mathbb{H}$。令 $P_{\nu^\perp}$ 为投影到该直线的右四元数正交补上的正交投影。 $v_H = rq$ 的乘积法则在壁上给出

$$D_H = q\, \mathsf{H}(r) + G(q)G(r)^* + G(r)G(q)^*.$$

我们有 $P_{\nu^\perp}$H(r) $= 0$, $P_{\nu^\perp} G(r) = 0$，以及 $G(r)^* P_{\nu^\perp} = 0$。因此 $P_{\nu^\perp} D_H P_{\nu^\perp} = 0$。将$w = \nu$代入混合余因子公式，得到 $\nu^* M \nu = C_2(B|_{\nu^\perp}) : (D_H|_{\nu^\perp}) = 0$。由于$G(r) = |G(r)|\nu$ 在 $r = 0$ 上成立，因此在该处有 $G(r)^* M G(r) = 0$。所以，(4.12) 中的边界积分对 $S = A_H - M/2$ 使用 $G(r)^* S G(r) = G(r)^* A_H G(r)$。

我们已经计算出边界配对 $G(r)^{*}SG(r)$。现在计算内部配对 S： D_H。在(4.12)中取 $v = v_H$和 $S = A_H - M/2$。由(4.13)， $S_{TT} = \mu_H/2$和 S： $D_H = A_H$： $D_H - \beta$行列式$_{\mathbb{H}}\, b_H$。记 $\alpha = \alpha_H$, $b = b_H$。由于 $A_H = P_E A_H P_E$,

$$\mu_H = t_0^{*} A_H t_0 = |P_E t_0|^2 \alpha_{00} = 4|d|^2 \frac{\alpha_{00}}{\beta}\,.$$

另一方面 $C_2(B_f) = 4dd^{*}$，且 $(0,\ d/|d|)$ 是所选 E 标架的第二个向量。纤维方程给出

$$\mu_H = C_2(B_f) : \mathsf{H}_f(v_H) = 4|d|^2 b_{11}\,.$$

消去公共的正因子 $4|d|^2$ ，得到 $b_{11} = \alpha_{00}/\beta$。在同一标架中$A_H$： $D_H = \mathrm{Retr}_{\mathbb{H}}(\alpha b)$, 因为 A_H 在 $E^{\perp}$ 上消失。在这个二维平面中展开，得到

$$\begin{aligned} A_H : D_H - \beta \det_{\mathbb{H}} b &= \alpha_{00} b_{00} + \alpha_{11} b_{11} + 2\,\mathrm{Re}(\alpha_{01}\bar{b}_{01}) - \beta(b_{00}b_{11} - |b_{01}|^2) \\ &= \frac{\alpha_{00}\alpha_{11}}{\beta} + 2\,\mathrm{Re}(\alpha_{01}\bar{b}_{01}) + \beta|b_{01}|^2 \\ &= \beta|b_{01} + \alpha_{01}/\beta|^2 + \frac{\det_{\mathbb{H}}\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

对 $\mathcal{A} \in \{\mathcal{M}, \mathcal{M}^{\mathrm{op}}\}$ 求和 $(\sum_{\mathcal{A}}$，得到 $_{H,\ \mathbb{H}}\det\alpha_H(/\beta = 0)_z$在 Ω 上逐点成立。将（4.12）求和，并在左边使用（4.7），得到 $\Delta_z \mathcal{E} = -\mathcal{Q} + \mathcal{B}$，如（4.11）所述。□

4.3. **能量和边界通量的上界。** 在 $|\tau| = 4a$，若能用 $\mathcal{E}(0,\ \tau)$ 来给出 $q_u(0)$ 的上界，就能得到（4.9）中的最后一个不等式。我们在整个 $\mathcal{E}(T,\ \tau)$ 上估计 $2a \le |\tau| \le 3$，并对（ $\mathcal{B}(T,\ \tau)$ 中的通量也作上界估计。通量上界含有一个指数因子，其中 $e^{-c_w N|\tau|}$ 与孔径无关 $c_w > 0$。这种无关性使我们能够选择 γ，使衰减压过引理 4.6中的损失。

固定 $0 < c_0 < C_0$、 $R = 1/10$ 以及第 3 节中的纤维截断函数 χ_{fib}。对于缩放后的频率 $\eta = \xi/N = (\eta_x, \eta_{b_0}) \in \mathbb{R}^2$ （其中 $\eta_{b_0} > 0$），使用 (2.7) 中的 κ_η、v_η。由其齐次性可得 $\kappa_{\xi/N} = \kappa_\xi/N$ 和 $v_{\xi/N} = v_\xi$。选取径向轮廓函数 $\phi \in C_c^\infty((c_0/2, 2C_0))$，使其在 $[c_0, C_0]$ 上等于一；再选取一个实值光滑角向截断函数，使其在该帽内的 $|v_\eta| \le R/8$ 上等于一，并且支集包含于 $\eta_{b_0} > 0$ 且 $|v_\eta| < R/3$ 的区域。将 $\vartheta_{\mathrm{wide}}(\eta)$ 记为 $\phi(|\eta|)$ 与该角向截断函数的乘积。在其支集上，κ_η 有正下界，而 κ_η、v_η 至四阶导数均有界。对于每个标准正交标架 (e_x, e_{b_0})，我们在其频率坐标中使用相同的截断剖面。

暂取实参数 $K \ge 1$、 $0 < \gamma < R/8$ 和 $N \ge 2$，其中 $a = K/N$。波 u 在所选扇区 $c_0 \le |\xi|/N \le C_0$、 $|v_\xi| \le \gamma$ 中具有有限的空间傅里叶支集。在下列不等式中，$z = (T,\ \tau)$ 固定，且 $2a \le |\tau| \le 3$。特别地，$N|\tau| \ge 2K \ge 2$。我们得到壁处的指数速率 c_w，以及恢复界中的系数 C_*，然后再选取 γ 和 K。

引理 4.5。 对于每个 $T \in \mathbb{R}$、满足 $2a \le |\tau| \le 3$ 的每个 $\tau \in \mathbb{C}_k$，以及上述每个有限傅里叶和 u,

$$\mathcal{E}(T, \tau) \le C a^2 (N|\tau|)^{18} q_u(T)\,, \tag{4.14}$$

$$|\mathcal{B}(T, \tau)| \le C (a/|\tau|)^2 (N|\tau|)^{18} e^{-c_w N|\tau|} q_u(T)\,. \tag{4.15}$$

常数 C、$c_w > 0$ 仅取决于 c_0、C_0、R、χ_{fib} 和 $\vartheta_{\mathrm{wide}}$。

证明。我们通过估计式（4.14）中的狄利克雷源项，并使用 L^2（D）的 P_ℓ^{-1} 一致上界，来证明式（4.15）。对于 $\partial_n v_H$，我们将其估计与 G（r）$^* A_H G$（r）在 $r = 0$上的指数上界结合起来。首先，我们按照式（ G（r）$^* A_H G$（r）中的方式，用空间乘子表示时间密度 μ_H。

采用式（3.8）的记号，S_0、S_1 的符号是 m_ξ 乘以 $V_T^{v_\xi} = (1 + W v_\xi/2)/\sqrt{2}$ 在 $\mathbb{C}_k$ 中的两个实分量。为表示 $G(r)^* A_H G(r)$，我们先计算 $G(r)^* V^v$。在零坐标中，$\partial W = (-W, 1, 0)/Y$，因此 $\partial W\, V^v = (v - W)/(2Y)$。对 $G(r)$ 的公式取四元数伴随，得到

$$G(r)^* V^v = -i\,\frac{\bar W(v - W)}{R^2 Y} = \frac{W(v - \bar W)}{R^2|Y|}\,\rho_e(i)\,. \tag{4.16}$$

确实，对于 $\zeta \in \mathbb{C}_k$ 和 $1/Y = e/|Y|$，$i\zeta = \zeta i$。定义标量空间乘子 T_0，T_1 作用于频率属于 Λ 的三角多项式，并将该空间映射到自身，其相应的符号为

$$\frac{m_\xi}{R^2|Y|}(v_\xi \operatorname{Re}_k W - |W|^2) \quad \text{and} \quad \frac{m_\xi}{R^2|Y|} v_\xi \operatorname{Im}_k W\,.$$

它们作用于标量或 $L^4(\mathcal{A})$ 系数。对于标量波 $u_c = \sum_{\xi\in\Lambda} c_\xi e^{i\theta_\xi}$，满足$c \in \mathbb{C}_i^\Lambda$，公式（4.16）给出

$$G(r)^* \chi(c) = \big[\rho_e(T_0 u_c) + k\rho_e(T_1 u_c)\big]\rho_e(i)\,.$$

这里，$\rho_e(i)$ 与 $\rho_e(\mathbb{C}_i)$ 中的嵌入振幅对易。由于 $|\rho_e(i)| = 1$ 和 $\rho_e(\mathbb{C}_i)$ 以及 $k\rho_e(\mathbb{C}_i)$ 相互正交，我们有 $G(r)^* A(c) G(r) = \chi_{\mathrm{fib}}(Q)\sum_{j=0}^1 |T_j u_c|^2$。对于 $H \in \mathcal{H}_\mathcal{A}$，将此公式代入 $A_H = \sum_l \lambda_l A(c_l)$。在模平方的展开式中，每一对 ξ，$\eta \in \Lambda$ 对应的系数于是为 $\sum_l \lambda_l(c_l)\xi(c_l)\eta = \operatorname{tr}_\mathcal{A}(H a_\eta^* a_\xi)$。因此，$G(r)^* A_H G(r) = \operatorname{tr}_\mathcal{A}(H K_\mathcal{A})$，其中

$$K_\mathcal{A} = \chi_{\mathrm{fib}}(Q)\sum_{j=0}^1 (T_j u_\mathcal{A})^* T_j u_\mathcal{A}\,. \tag{4.17}$$

符号 $-|W|^2$ 中的这一项来自于对 T_0 进行展开，$W(v_\xi - \bar W)$（见4.16），其中$G(r)$包含两个实 τ 导数以及纤维变量上的导数。

为了给出 $\mu_\mathcal{A}$ 和 $K_\mathcal{A}$的上界，我们估计帽上的空间乘子 S_j 和 T_j。对于$z = (T, \tau)$，其中 $2a \le |\tau| \le 3$且 $(W, Q) \in D \times D_Q$固定，乘子 S_j，T_j、$j = 0$、1 在 X 上作用于系数取自 $L^4(\mathcal{A})$且频率位于所选扇区内的三角多项式。每个乘子都保持这个空间不变。对于满足 $\eta_{b_0} > 0$的 $\eta \in \mathbb{R}^2$，定义 $F_W(\eta) \in [0, \infty)$ 为

$$F_W(\eta) = \frac{\kappa_\eta}{2}\frac{|Y|}{|\tau|}|W - v_\eta|^2, \qquad m_\xi = \left(\frac{\kappa_\xi}{|Y|}\right)^{1/2} e^{-N|\tau|F_W(\xi/N)}\,. \tag{4.18}$$

第二个等式改写了 (3.2)，因为 $\kappa_\xi = N\kappa_{\xi/N}$。由 (4.3)，$|Y|/|\tau|$及其逆一致有界。其关于两个实 W 坐标的一阶导数在固定 (Q, z) 时有界，因为

$$\frac{|Y|}{|\tau|} = \frac{|\sqrt{2}\tau + aQ|}{|\tau|\,|1 + W^2/2|}\,.$$

η 关于 F_W 的所有导数在 $\vartheta_{\mathrm{wide}}$ 的支集上直到四阶均一致有界，其一阶 W 导数也如此。每对$e^{-N|\tau|F_W}$ 求一次导，至多增加一个因子 $N|\tau|$。(4.18)中的前因子写作$(N/|\tau|)^{1/2}(\kappa_\eta/(|Y|/|\tau|))^{1/2}$，在 $\xi = N\eta$处，其直到四阶的缩放导数均有上界 $C(N/|\tau|)^{1/2}$。由于 $N|\tau| \geq 2$，当 $k \in \{0,1,2,3,4\}$时，$(N|\tau|)^k$的各次幂均由$(N|\tau|)^4$所界。因此，将 S_j 的每个符号乘以 $\vartheta_{\mathrm{wide}}(\xi/N)$并应用莱布尼茨法则，可得其直到四阶的缩放导数均有上界 $C(N/|\tau|)^{1/2}(N|\tau|)^4$。对于 $N^{-1}\partial_{X_i} S_j$，额外的因子为 $i\eta_i$。对于 S_j的一阶实 W导数，其上界变为 $C(N/|\tau|)^{1/2}(N|\tau|)^5$。

在壁 $|W| = R$ 上，角向支集给出 $|W - v_\eta| \geq 2R/3$。选取 $c_w > 0$，仅利用 R 以及 κ_η和 $|Y|/|\tau|$的固定下界，使得 $F_W \geq c_w/2$ 在那里成立。在 T_j 的每个求导后的符号中，高斯函数仍以 $e^{-N|\tau|F_W}$ 的形式出现。额外的分母 $|Y|$ 与 $|\tau|$可比，因此符号上界为 $C|\tau|^{-1}(N/|\tau|)^{1/2}(N|\tau|)^4 e^{-c_w N|\tau|/2}$。在二次密度$K_{\mathcal{A}}$ 的估计中取平方，得到指数速率 c_w。

根据引理2.1(i)–(iii)，若每个局部化符号的缩放导数在四阶以内均有上界 A，则其 $L^4(\mathbb{T}^2_X;\, L^4(\mathcal{A}))$ 乘子范数至多为 CA。L^p 空间上的测度 $\mathbb{T}^2_X$ 采用概率 Haar 测度 dX。利用逐点等式$\|u_{\mathcal{M}}\|_{L^4(\mathcal{M})} = \|u_{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}}\|_{L^4(\mathcal{M}^{\mathrm{op}})}$，对于 $j = 0,1$，我们得到

$$\begin{aligned} &\|S_j u_{\mathcal{A}}\|_{L^4(\mathbb{T}^2_X;L^4(\mathcal{A}))} + N^{-1}\|\nabla_X (S_j u_{\mathcal{A}})\|_{L^4(\mathbb{T}^2_X;L^4(\mathcal{A}))} \\ &\quad + (N|\tau|)^{-1}\|\nabla_W (S_j u_{\mathcal{A}})\|_{L^4(\mathbb{T}^2_X;L^4(\mathcal{A}))} \\ &\quad \leq C(N/|\tau|)^{1/2}(N|\tau|)^4 q_u(T)^{1/4}\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

每个梯度范数表示其两个实坐标导数的范数之和，其中 W导数是在固定 (Q,z) 时取的。对于 $D_0 \in L^4(\mathbb{T}^2_X;\, L^4(\mathcal{A}))$，有$\|D_0^* D_0\|_{L^2(\mathbb{T}^2_X;L^2(\mathcal{A}))} = \|D_0\|^2_{L^4(\mathbb{T}^2_X;L^4(\mathcal{A}))}$。利用 (3.8) 和 (4.17) 中 $D_0 = S_j u_{\mathcal{A}}$和 $D_0 = T_j u_{\mathcal{A}}$ 的乘子界，并对 $j = 0,1$ 求和，得到

$$\|\mu_{\mathcal{A}}\|_{L^2(\mathbb{T}^2_X;L^2(\mathcal{A}))} \leq C(N/|\tau|)(N|\tau|)^8 q_u(T)^{1/2}\,, \tag{4.20}$$

$$\|K_{\mathcal{A}}\|_{L^2(\mathbb{T}^2_X;L^2(\mathcal{A}))} \leq C|\tau|^{-2}(N/|\tau|)(N|\tau|)^8 e^{-c_w N|\tau|} q_u(T)^{1/2} \qquad (W \in \partial D)\,. \tag{4.21}$$

我们使用（4.20）来估计狄利克雷源项。在（4.5）中，$f_\ell = \widehat{\mu}_{\mathcal{A}}(\ell)\,/\,(4|\mathcal{J}|^2)$。在 X，$|\mathcal{J}|^{-2} \lesssim |\tau|^2$中使用帕塞瓦尔恒等式，并在固定圆盘 D 上积分，可得关于 $Q \in D_Q$的一致结论，

$$\Big(\sum_{\ell} \|f_\ell\|^2_{L^2(D;Z_{\mathcal{A}})}\Big)^{1/2} \leq C|\tau|^2(N/|\tau|)(N|\tau|)^8 q_u(T)^{1/2} = CN|\tau|(N|\tau|)^8 q_u(T)^{1/2}\,. \tag{4.22}$$

由引理 4.2，P_ℓ^{-1} 在 $L^2(D;\, Z_{\mathcal{A}})$ 上的范数至多为 $\lambda_1(D)^{-1}$ 对每个 $\ell \in \Gamma^*$。在 (4.7) 中使用此估计，并在每个 Q 处应用 (4.22) 即得

$$\mathcal{E}(T,\tau) \leq 2a^2\lambda_1(D)^{-1}\sum_{\mathcal{A}}\int_{D_Q}\sum_{\ell}\|f_\ell\|^2_{L^2(D;Z_{\mathcal{A}})}\,d^2Q \leq Ca^2(N|\tau|)^{18} q_u(T)\,.$$

这就证明了（4.14）。

接下来只需将（4.21）与关于 ℓ 的一致法向导数界结合起来。对于光滑势 $V\colon D\to[0,\infty)$ 以及源项 $f\in L^2(D;\mathbb{C})$，令 $w=(-\Delta_D+V)^{-1}f\in H^2(D)\cap H_0^1(D)$. 映射 $f\mapsto\partial_n w$ 从 $L^2(D)$ 到 $L^2(\partial D)$ 满足

$$\|\partial_n w\|_{L^2(\partial D)}\le (R/2)^{1/2}\|f\|_{L^2(D)}\,. \tag{4.23}$$

法向导数 $\partial_n w$ 和 ∂D 上的弧长测度均按第 4.2 节中的规定固定。我们首先通过对偶性证明光滑 f 的情形 (4.23)。对于 $\phi\in C^\infty(\partial D;\mathbb{C})$，取一个到 D的光滑延拓 $\widetilde{\phi}$。那么 $b=\widetilde{\phi}-(-\Delta_D+V)^{-1}((-\Delta+V)\widetilde{\phi})$ 满足方程 $(-\Delta+V)b=0$，其中 $b|_{\partial D}=\phi$。由于 $\Delta|b|^2=2|\nabla b|^2+2V|b|^2\ge 0$，圆周平均$M_b(t)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}|b(te^{k\theta})|^2\,d\theta$满足 $M_b'(t)=(2\pi t)^{-1}\int_{|W|<t}\Delta|b|^2\,d^2W\ge 0$，对$0<t<R$成立；这是由散度定理得到的。因此

$$\int_D |b|^2\,d^2W=2\pi\int_0^R tM_b(t)\,dt\le \pi R^2M_b(R)=\frac{R}{2}\int_{\partial D}|\phi|^2\,dS_W\,.$$

我们用这个上界来估计 $\partial_n w$ 与 ϕ的配对。将 $\int_D w(-\Delta+V)b=0$ 从 $\int_D f\bar{b}$ 中减去即可消去势。由格林公式和$w|_{\partial D}=0$ 可得 $\int_D f\bar{b}=-\int_{\partial D}\partial_n w\,\bar{\phi}$。对满足$\|\phi\|_{L^2(\partial D)}\le 1$ 的光滑 ϕ 取上确界，即可证明光滑 f的 (4.23)。选取 $L^2(D)$中的光滑 $f_j\to f$，以 $j\in\mathbb{N}$为指标，并令 $w_j=(-\Delta_D+V)^{-1}f_j$。有界逆算子给出 $L^2(D)$中的 $w_j\to w$。对这个固定势 V的狄利克雷 H^2 估计给出

$$\|w_j-w\|_{H^2(D)}\le C_{D,V}\big(\|f_j-f\|_{L^2(D)}+\|w_j-w\|_{L^2(D)}\big)\longrightarrow 0\,.$$

法向迹从 $H^2(D)$ 到 $H^{1/2}(\partial D)$ 连续，因此 $\partial_n w_j\to\partial_n w$ 属于$L^2(\partial D)$。令 (4.23) 中的量趋于极限后，其常数 $(R/2)^{1/2}$仍保持不变，且与V无关。

在 ∂D 上，我们有 $V_{\mathcal{A}}/r=(R/2)\partial_n V_{\mathcal{A}}$ 由引理4.4中的边界商公式得到，$\widehat{\ }$导数是在固定的 Q处取的。将（4.23）应用于 $-V_{\mathcal{A}}(\ell)=P_\ell^{-1}f_\ell$ 在 $Z_{\mathcal{A}}$的一组标准正交基上的每个坐标。对估计两边平方后求和，并在 X 中使用普朗歇尔定理，可得对每个 $Q\in D_Q$,

$$\|V_{\mathcal{A}}/r\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2_X\times\partial D;L^2(\mathcal{A}))}=(R/2)^2\sum_{\ell}\|\partial_n\widehat{V}_{\mathcal{A}}(\ell)\|^2_{L^2(\partial D;Z_{\mathcal{A}})}\le (R/2)^3\sum_{\ell}\|f_\ell\|^2_{L^2(D;Z_{\mathcal{A}})}\,.$$

根据 (4.22)，$V_{\mathcal{A}}/r$ 在 $\mathbb{T}^2_X\times\partial D$ 上的范数至多为 $C(N|\tau|)^9q_u(T)^{1/2}$。在引理 4.4 的 $\mathcal{B}$ 公式中，代入 (4.17) 中的 $G(r)^*A_HG(r)=\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(HK_{\mathcal{A}})$，并对 H求和。由$\delta_0(r)d^2W=(R/2)dS_W$，可得

$$\mathcal{B}(z)=\frac{Ra^2}{2}\sum_{\mathcal{A}}\int_{D_Q}\int_{\mathbb{T}^2_X\times\partial D}|\mathcal{J}|^{-2}\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}\big((V_{\mathcal{A}}/r)K_{\mathcal{A}}\big)\,dX\,dS_W\,d^2Q\,.$$

根据 (4.3)， $|\mathcal{J}|^{-2} \le C|\tau|^2$。对每个 Q，在迹以及 $(X,\ W)$ 中应用柯西–施瓦茨不等式 $\in \mathbb{T}^2_X \times \partial D$。利用 (4.21) 以及 $V_{\mathcal{A}}/r$的上界，得到

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}(T,\tau)| &\le Ca^2|\tau|^2 \sum_{\mathcal{A}} \int_{D_Q} \|V_{\mathcal{A}}/r\|_{L^2(\mathbb{T}^2_X\times\partial D;L^2(\mathcal{A}))} \|K_{\mathcal{A}}\|_{L^2(\mathbb{T}^2_X\times\partial D;L^2(\mathcal{A}))}\, d^2Q \\ &\le Ca^2(N|\tau|)^{17}(N/|\tau|)e^{-c_w N|\tau|} q_u(T) \\ &= C(a/|\tau|)^2(N|\tau|)^{18} e^{-c_w N|\tau|} q_u(T)\,.\end{aligned}$$

这就证明了（4.15）。 □

4.4. 恢复四阶矩。要得到（4.9）中的第一个不等式，需要在 $|\tau| = 2a$ 处用 $q_u(T)$ 给出 $\mathcal{E}(T,\tau)$ 的下界。我们证明该下界在整个 $2a \le |\tau| \le 3$ 上成立，以便也能将其与（4.15）结合起来，通过 $V_N(|\tau|)\mathcal{E}(T,\tau)$ 控制 $|\mathcal{B}(T,\tau)|$。我们用一个支集在 $W = 0$ 附近的光滑函数乘以 $\mu_{\mathcal{M}}$，并以此作为测试函数，对 $V_{\mathcal{M}}$ 的狄利克雷方程进行检验。在那里，我们可以通过空间乘子从 $S_0 u$ 恢复 u。这为测试配对中 $(S_0 u)^* S_0 u$ 的贡献给出了下界。

引理 4.6。 固定引理 *4.5* 中的环带、圆盘和截断函数。存在 $C_* > 0$，使得对于每个实数 $\gamma \in (0, R/8)$，都存在 $c_\gamma > 0$，具有如下性质。对于所有实数 $K \ge 1$ 和 $N \ge 2$，每个形如 (2.5) 且频率位于引理 *4.5* 的正向环域帽中的有限傅里叶和 u，以及每个 $(T,\tau) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}_k$，满足 $2a \le |\tau| \le 3$，都有

$$\mathcal{E}(T,\tau) \ge c_\gamma a^2 (N|\tau|)^{-52} e^{-C_*\gamma^2 N|\tau|} q_u(T)\,. \tag{4.24}$$

这里 $a = K/N$。常数 C_* 仅取决于固定环域、圆盘和截断函数；c_γ 还可能取决于 γ。二者均与 K、N、帽轴、周期格、有限频率集、系数、代数和迹无关。

证明。 我们通过控制与 $\mu = \mu_{\mathcal{M}}$ 的配对 $V = V_{\mathcal{M}}$ 对（4.7）的贡献，证明（4.24）。固定 z，考虑光滑的自伴测试场 $\Xi:\ \mathbb{T}^2_X \times D \times D_Q \to Z_{\mathcal{M}}$ 在 $|W| = R$处消失。记 $W = W_1 + kW_2$，其中 $W_1,\ W_2 \in \mathbb{R}$。我们使用狄利克雷型取有限值的场

(4.25)

$$\mathfrak{d}(\Xi) = 4a^2 \sum_{\ell} \int_{D_Q}\int_{D} \left(\sum_{j=1}^{2} \|\partial_{W_j}\widehat{\Xi}(\ell)\|^2_{L^2(\mathcal{M})} + |\mathcal{J}|^{-2}|\ell\cdot d|^2 \|\widehat{\Xi}(\ell)\|^2_{L^2(\mathcal{M})} \right) d^2W\, d^2Q\,.$$

记 $\mathfrak{d}(\cdot,\ \cdot)$ 为相应的实双线性型。在每个（ℓ，Q）处，对梯度$\widehat{\ }$项进行分部积分，并取零边界值。于是（4.5）给出 $P_\ell(-V(\ell)) = f_\ell$。因此

$$\mathfrak{d}(-V,\Xi) = 4a^2 \sum_{\ell} \int_{D_Q} \mathrm{Re}\langle f_\ell, \widehat{\Xi}(\ell)\rangle_{L^2(D;Z_{\mathcal{M}})}\, d^2Q = \int_{\Omega_z} \mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(\mu\Xi)\, d\zeta =: \langle \mu, \Xi\rangle_{d\zeta}.$$

纤维迹配对由 X 和 $d\zeta = a^2|\mathcal{J}|^{-2}\, dX\, d^2W\, d^2Q$中的帕塞瓦尔恒等式得出。取 $\Xi = -V$ 可得 $\mathfrak{d}(-V)$，$\le 2\mathcal{E}$ 因为（ $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 4.7）中的贡献非负。现在，对形式（4.25）应用柯西–施瓦茨不等式，得到

$$|\langle \mu, \Xi\rangle_{d\zeta}|^2 \le 2\mathcal{E}\,\mathfrak{d}(\Xi). \tag{4.26}$$

取一个光滑截断函数 χ： $D\times D_Q\to[0,1]$，其支集位于 $|W|<\gamma$， $|Q|<1/400$，且在 $|W|\le\gamma/2$上等于一， $|Q|\le 1/800$。令（ $\Xi=\chi\mu$ 4.26）中的为 $\mathfrak{d}(\chi\mu$，我们需要给出其上界，以及 $\langle\mu$的下界， $\chi\mu\rangle_{d\zeta}$。我们利用 $\mathfrak{d}(\chi\mu$的导数来估计 $S_j u$ （见 4.19）。对于配对，我们将在 S_0 的空间傅里叶支集上使用其左逆 u。

为得到上界 $\mathfrak{d}(\chi\mu)$，注意到纤维截断函数 $\chi_{\mathrm{fib}}(Q)$ 在χ的支集上等于 1。因此，(3.8) 给出 $\Xi=\chi\sum_{j=0}^{1}D_j^*D_j$其中 $D_j=S_j u$对于 $j=0$， 1. 若 ∂是一个一阶实W 或 X 导数，则

$$\partial(\chi D_j^*D_j)=(\partial\chi)D_j^*D_j+\chi(\partial D_j)^*D_j+\chi D_j^*(\partial D_j).$$

在固定的 (z,Q) 处取 W导数，并且 $\nabla_X\chi=0$。对每个 X 处的迹应用 H¨older 不等式，再对 X 应用 H¨older 不等式，可将 $L^2(\mathbb{T}^2_X;\,L^2(\mathcal{M}))$ 中的每个乘积 $(\partial D_j)^*D_j$ 或 $D_j^*(\partial D_j)$ 控制为 $\|\partial D_j\|_{L^4(\mathbb{T}^2_X;L^4(\mathcal{M}))}\|D_j\|_{L^4(\mathbb{T}^2_X;L^4(\mathcal{M}))}$。对这两个因子应用 (4.19)，即可在每个 (W,Q) 处得到以下估计，其中 C_γ 计入了 χ的 W 导数，

$$\|\nabla_W\Xi\|_{L^2(\mathbb{T}^2_X;L^2(\mathcal{M}))}+N^{-1}\|\nabla_X\Xi\|_{L^2(\mathbb{T}^2_X;L^2(\mathcal{M}))}\le C_\gamma(N/|\tau|)(N|\tau|)^9 q_u(T)^{1/2}.$$

由于 $|\mathfrak{J}|^{-2}|\ell\cdot d|^2\le C|\tau|^2|\ell|^2$，将帕塞瓦尔恒等式应用于 X 中的（4.25），可将势项上界估计为 $C|\tau|^2\|\nabla_X\Xi\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2_X;\,L^2(\mathcal{M}))}$ 的积分。两个圆盘的面积均有上界，$|\tau|\ge 2K/N\ge N^{-1}$，且 $1+(N|\tau|)^2\le 2(N|\tau|)^2$。因此

$$\mathfrak{d}(\Xi)\le C_\gamma a^2(N/|\tau|)^2(1+(N|\tau|)^2)(N|\tau|)^{18}q_u(T)\le C_\gamma a^2N^4(N|\tau|)^{20}q_u(T). \tag{4.27}$$

在 μ 中，求和项 $(S_0u)^*S_0u$将给出 $\langle\mu,\ \chi\mu\rangle_{d\zeta}$的下界。对于 $|W|\le\gamma$，我们构造一个有界的周期乘子，将 S_0u 映射到 u。固定 $\psi\in C_c^\infty((-2,\ 2))$，使其在 $[-1,1]$上等于 1。对于满足 $\eta_{b_0}>0$的 $\eta\in\mathbb{R}^2$，令

$$\vartheta_\gamma(\eta)=\vartheta_{\mathrm{wide}}(\eta)\psi(v_\eta/\gamma)\,,$$

并令 $\vartheta_\gamma=0$ （ $\eta_{b_0}\le 0$）。则对每个 $\xi\in\Lambda$， $\vartheta_\gamma(\xi/N)=1$，且在 $\operatorname{supp}\vartheta_\gamma$ 上 $|v_\eta|\le 2\gamma$。对于满足 $\eta_{b_0}>0$的 $\eta\in\mathbb{R}^2$， S_0 符号中的实因子为

$$r_W(\eta)=\operatorname{Re}_k V_T^{v_\eta}=(1+v_\eta\operatorname{Re}_k W/2)/\sqrt{2}.$$

对于 $\eta\in\operatorname{supp}\vartheta_\gamma$，我们有 $r_W(\eta)\ge(1-\gamma^2)/\sqrt{2}>0$且 $|W-v_\eta|\le 3\gamma$。设 C_Y为 $|Y|/|\tau|$在 (4.3) 中的上界。由 (4.18)，

$$0\le F_W(\eta)\le C_{\mathrm{G}}\gamma^2,\qquad C_{\mathrm{G}}=\frac{9}{2}C_Y\sup_{\eta\in\operatorname{supp}\vartheta_{\mathrm{wide}}}\kappa_\eta\,.$$

特别地，在 $\operatorname{supp}\vartheta_\gamma$ 上 $e^{-C_{\mathrm{G}}\gamma^2N|\tau|}\le e^{-N|\tau|F_W}\le 1$。

将 m_ξ延拓至所有 $\xi\in\mathbb{R}^2$，使得 $\xi_{b_0}>0$由 (4.18) 给出。固定满足 W、 Q、 z) 的 ($|W|\le\gamma$，定义缩放频率下的实符号 b： $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为

$$b(\eta)=\frac{\vartheta_\gamma(\eta)}{m_{N\eta}r_W(\eta)}=\left(\frac{|\tau|}{N}\right)^{1/2}\vartheta_\gamma(\eta)\left(\frac{|Y|/|\tau|}{\kappa_\eta}\right)^{1/2}r_W(\eta)^{-1}e^{N|\tau|F_W(\eta)}\,.$$

在 $\operatorname{supp}\vartheta_\gamma$ 的一个邻域上使用此公式，其中 $r_W>0$，并在该邻域之外将其延拓为零。这样的邻域存在，因为支集是紧的

包含于 $|v_\eta|<2\gamma$ 中，其中 $r_W\geq(1-\gamma^2)/\sqrt{2}$。因此，$\overline{b}$ 光滑且具有紧支集。令 I_b 为 $L^4(\mathbb{T}^2_X;\,L^4(\mathcal{M}))$ 上符号为 $\xi\mapsto b(\xi/N)$、$\xi\in\Gamma^*$ 的周期乘子，如引理 2.1(ii)–(iii) 所述。对于 $\xi\in\Lambda$，$b(\xi/N)^m\xi r_W(\xi/N)=1$，因此 $I_b(S_0u)=u$。

对于多重指标 $\nu\in\{0,1,2,\dots\}^2$，令 ∂_η^ν 表示在缩放后的频率坐标中求导。v_η 和 κ_η 的四阶及以下导数在固定的宽补丁上有一致上界，由链式法则可得 $|\partial_\eta^\nu\vartheta_\gamma|\leq C_\nu\gamma^{-|\nu|}$，其中 $|\nu|\leq4$。对 $r_Wr_W^{-1}=1$ 求导可得，当 $1\leq|\nu|\leq4$ 时，

$$\partial_\eta^\nu(r_W^{-1})=-r_W^{-1}\sum_{0<\alpha\leq\nu}\binom{\nu}{\alpha}(\partial_\eta^\alpha r_W)\partial_\eta^{\nu-\alpha}(r_W^{-1})\,.$$

这里，$\alpha\leq\nu$ 按逐分量方式理解。r_W 的正下界以及关于 $|\nu|$ 的归纳法，给出了 r_W^{-1} 的所有四阶及以下导数的上界。在宽补丁上，$\kappa_\eta\geq c>0$。当 $s\geq c$ 时，$s\mapsto s^{-1/2}$ 的四阶及以下导数有界，因此链式法则给出 $\partial_\eta^\nu(\kappa_\eta^{-1/2})$ 的上界，其中 $|\nu|\leq4$。由于 $|Y|/|\tau|$ 与 η 无关，b 中除 $(|\tau|/N)^{1/2}$ 以外的非指数因子的导数均有 C_γ 上界。

$e^{N|\tau|F_W}$ 的每个导数要么对已有的 F_W 的某个导数求导，要么增加一个因子 $N|\tau|$ 和 F_W的一阶导数。因此，对于 $|\nu|\leq4$，F_W和 $N|\tau|\geq2$的有界导数给出

$$|\partial_\eta^\nu e^{N|\tau|F_W}|\leq C_\nu(N|\tau|)^{|\nu|}e^{N|\tau|F_W}\,.$$

由莱布尼茨法则以及 $F_W\leq C_{\mathrm{G}}\gamma^2$ 在支集上的性质可得

$$\max_{|\nu|\leq4}\|\partial_\eta^\nu b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\leq C_\gamma(|\tau|/N)^{1/2}(N|\tau|)^4e^{C_{\mathrm{G}}\gamma^2N|\tau|}\,.$$

前因子 C_γ 包含了 ϑ_γ的导数。常数 C_{G} 仅取决于固定的宽补丁以及（4.3）中 $|Y|/|\tau|$ 的一致上界，因此与 γ、K、N无关。

令 K_b 为 I_b的周期卷积核。由于 b 的支集包含于一个固定环域中，引理2.1(i)–(iii) 给出

$$\|K_b\|_{L^1(\mathbb{T}^2_X)}\leq\|\check{b}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\leq C\sum_{|\nu|\leq4}\|\partial_\eta^\nu b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,.$$

利用 $I_b(S_0u)=u$ 可得 $q_u(T)^{1/4}\leq\|K_b\|_{L^1(\mathbb{T}^2_X)}\|S_0u\|_{L^4(\mathbb{T}^2_X;\,L^4(\mathcal{M}))}$。因此，关于 b的导数估计给出

$$\|S_0u\|_{L^4(\mathbb{T}^2_X;L^4(\mathcal{M}))}\geq c_\gamma(N/|\tau|)^{1/2}(N|\tau|)^{-4}e^{-C_{\mathrm{G}}\gamma^2N|\tau|}q_u(T)^{1/4}\,.\tag{4.28}$$

我们利用$\|S_0u\|_{L^4(\mathbb{T}^2_X;L^4(\mathcal{M}))}$ 的下界，从下方估计 $\langle\mu,\chi\mu\rangle_{d\zeta}$。在 χ 的支集上，令 $B_j=(S_ju)^*S_ju\in L^2(\mathcal{M})_+$，使其在每个 X 处均为 $j=0,1$。由 (3.8)，$\mu=B_0+B_1$ 在那里成立。由于 $B_i^{1/2}\in L^4(\mathcal{M})$，利用循环性以及迹的 H¨older 不等式可得

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(B_0B_1)=\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(B_0^{1/2}B_1B_0^{1/2})=\|B_1^{1/2}B_0^{1/2}\|^2_{L^2(\mathcal{M})}\geq0.$$

第一个等号利用了 $B_1B_0^{1/2} \in L^{4/3}(\mathcal{M})$ 和 $B_0^{1/2} \in L^4(\mathcal{M})$ 的循环性。展开平方的迹，并注意 $\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(B_1B_0) = \mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(B_0B_1)$，即可得到

$$\|\mu\|^2_{L^2(\mathcal{M})} = \|B_0\|^2_{L^2(\mathcal{M})} + 2\,\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(B_0B_1) + \|B_1\|^2_{L^2(\mathcal{M})} \geq \|B_0\|^2_{L^2(\mathcal{M})} = \|S_0u\|^4_{L^4(\mathcal{M})}.$$

我们对该不等式在 X 上积分，并将 (W,Q) 限制在 $|W| \leq \gamma/2$, $|Q| \leq 1/800$，其中 $\chi = 1$。利用 $a^2|\mathfrak{J}|^{-2} \geq ca^2|\tau|^2$ 式 (4.3)，再利用 (4.28，得到

$$\begin{aligned}\langle \mu, \Xi\rangle_{d\zeta} &= \int_{\Omega_z} \chi\|\mu\|^2_{L^2(\mathcal{M})}\,d\zeta \\ &\geq ca^2|\tau|^2 \int_{\{|W|\leq\gamma/2,\,|Q|\leq 1/800\}} \|S_0u\|^4_{L^4(\mathbb{T}^2_X;L^4(\mathcal{M}))}\,d^2W\,d^2Q \\ &\geq c_\gamma a^2N^2(N|\tau|)^{-16}e^{-4C_{\mathrm{G}}\gamma^2N|\tau|}q_u(T)\,.\end{aligned}$$

这里 $a^2|\tau|^2(N/|\tau|)^2 = a^2N^2$，且 c_γ包含圆盘 $|W| \leq \gamma/2$的面积。如果$q_u(T) > 0$，则配对为正，因此 $\mathfrak{d}(\Xi) > 0$ 由 (4.26得出。结合配对的下界与 (4.27可得

$$\mathcal{E}(T,\tau) \geq \frac{|\langle \mu, \Xi\rangle_{d\zeta}|^2}{2\mathfrak{d}(\Xi)} \geq c_\gamma a^2(N|\tau|)^{-32-20}e^{-8C_{\mathrm{G}}\gamma^2N|\tau|}q_u(T)\,.$$

这就是 (4.24)，其中 $C_* = 8C_{\mathrm{G}}$。若 $q_u(T) = 0$，则 (4.24) 可由 $\mathcal{E} \geq 0$推出。

□

4.5. **径向比较与周期帽估计**。现在证明 ($\int_1^2 H(T,2a)\,dT$与 $H(0,4a)$ 在 (4.9中的比较。我们首先通过将 $\mathcal{E}$用 $|\mathcal{B}(T,\tau)|$ 界定于 $\mathcal{E}(T,\tau)$ 之内，推导出关于

对于固定环域、圆盘和截断函数，引理 4.5 和 4.6 给出 c_w，且独立于 γ、K、N。选取 $0 < \gamma < R/8$ 使得 $C_*\gamma^2 < c_w/2$，并固定 $K = 10$。令 $N \geq 2$ 为实数，并回顾 $a = K/N$。由于 $\mathcal{Q} \geq 0$，(4.11) 给出 $\Delta_z\mathcal{E} \leq |\mathcal{B}|$。将 (4.24) 中关于 $q_u(T)$ 的上界代入 (4.15) 中对 $|\mathcal{B}(T,\tau)|$ 的估计，得到

$$|\mathcal{B}(T,\tau)| \leq C_\gamma|\tau|^{-2}(N|\tau|)^{70}e^{-(c_w-C_*\gamma^2)N|\tau|}\mathcal{E}(T,\tau) \qquad (2a \leq |\tau| \leq 3)\,.$$

因子 a^2 相消，而 $N|\tau|$ 的幂相加为 $18+52=70$。由于 $x^{70}e^{-c_wx/4}$ 在 $x \geq 0$ 和 $c_w - C_*\gamma^2 > c_w/2$ 下有界，我们得到

$$\Delta_z\mathcal{E}(T,\tau) \leq V_N(|\tau|)\mathcal{E}(T,\tau), \qquad V_N(s) = C_\gamma s^{-2}e^{-c_wNs/4} \quad (2a \leq s \leq 3)\,. \tag{4.29}$$

对于环域比较，假设 $2a < 1/4$。则 $[1/2,3/2] \subset [2a,3]$ 和 $V_N(s) \leq M$：对 $s \in [1/2,3/2]$有 $= 4C_\gamma$。下面的径向屏障使用以下上界

$$\int_{2a}^3 s\log\Big(\frac{s}{2a}\Big)V_N(s)\,ds \leq C_\gamma\int_{2K}^\infty e^{-c_wx/4}\log\Big(\frac{x}{2K}\Big)\frac{dx}{x} \leq C\,, \tag{4.30}$$

其中我们使用了 $x = Ns$ 和 $2Na = 2K$。给定 γ 和 K 后，M 和（4.30）中的上界均与 N无关。

Lemma 4.7. 对于 $a = K/N$ 满足 $2a < 1/4$，在 H 中定义的圆周平均 (4.8) 满足 s

$$\int_1^2 H(T,2a)\,dT \leq C\log^2(3/(2a))H(0,4a)\,. \tag{4.31}$$

证明。为证明 (4.31)，定义 $j\colon\ [0,3]\to[0,1]$ by $j(T)=\sin(\pi T/3)$，并定义 $m\colon [2a,3]\to[0,\infty)$ by $m(s)=\int_0^3 j(T)H(T,s)\,dT$。由于 $\bar{j}\ge\sqrt{3}/2$ 在 $[1,2]$，上，只需用 $H(0,4a)$ 来给出 $m(2a)$ 的上界。记 $h_*=\inf_{|T|\le1}H(T,1)$ 和 $L_S=\log(S/(2a))$ 为 $S\in\{1,3\}$。我们首先用 $c\,m(2a)/L_3$ 给出 h_* 的下界，然后用 $c\,h_*/L_1$ 给出 $H(0,4a)$ 的下界。

在这两种比较中，我们都使用圆周平均所满足的微分不等式（4.8）。在 τ 的极坐标下，角向二阶导数的积分为零。因此，对（4.29）取平均可得

$$\mathcal{L}_N H\le 0,\qquad \mathcal{L}_N=\partial_T^2+\partial_s^2+s^{-1}\partial_s-V_N(s)\qquad (T\in\mathbb{R},\ 2a\le s\le 3)\,.$$

对于这两种比较，我们都需要具有指定端点值的径向解。对于$S\in\{1,3\}$ 和实数 $\lambda>0$，我们寻求实值函数 $b^{S,\lambda}_{01}$，$b^{S,\lambda}_{10}\in C^2([2a,S])$，使其满足

$$b''+s^{-1}b'=(V_N(s)+\lambda^2)b\qquad (2a<s<S)$$

它们的端点值分别为（0,1）和（1, 0）。令 $A=L_S$ 和 $x=\log(s/(2a))\in[0,A]$。定义 $P\colon [0,A]\to(0,\infty)$，使得 $P(x)=s^2(V_N(s)+\lambda^2)$，其中 $s=2ae^x$。由于 $\partial_x=s\partial_s$，$w(x)=b(2ae^x)$ 的方程变为 $w''=Pw$。由（4.30），

$$\int_0^A \min(x,A-x)P(x)\,dx\le C+\lambda^2S^2\int_0^\infty te^{-2t}\,dt=:C_{\lambda,S}\,.$$

对于 V_N 项，使用 $dx=ds/s$ 和 $\min(x,\ A-x)\le\log(s/(2a))$。对于 λ^2 项，使用$t=A-x$、$s=Se^{-t}$ 和 $\min(x,\ A-x)\le t$。

令 w 满足 $w''=Pw$，其中 $w(0)=0$ 且 $w'(0)=1$。积分两次可得

$$w(x)=x+\int_0^x(x-t)P(t)w(t)\,dt\,.$$

解 w 在零点附近为正。只要 $w\ge0$，就有 $w''\ge0$ 和 $w(x)\ge x$，这排除了第一个正零点。定义 $v\colon [0,A]\to[1,\infty)$，使得 $v(x)=w(x)/x$ for $x>0$ 且 $v(0)=1$。对于 $0<x\le A$ 和 $0\le t\le x$，我们有 $0\le(x-t)t/x\le\min(t,\ A-t)$。由积分方程和格朗沃尔不等式可得

$$1\le v(x)\le 1+\int_0^x\min(t,A-t)P(t)v(t)\,dt\le\exp\left(\int_0^x\min(t,A-t)P(t)\,dt\right)\le e^{C_{\lambda,S}}\,.$$

因此，$b^{S,\lambda}_{01}(s)=w(x)/w(A)$的端点值为(0, 1)，而 $w(x)\ge x$ 和 $w(A)\le Ae^{C_{\lambda,S}}$给出了它的下界。对于端点值(1, 0)，令 $\widetilde{w}$求解 $\widetilde{w}''(x)=P(A-x)\,\widetilde{w}(x)$，其中$\widetilde{w}(0)=0$ 且 $\widetilde{w}'(0)=1$。变量代换 $t=A-x$ 给出 $\int_0^A\min(x,A-x)P(A-x)\,dx\le C_{\lambda,S}$。将 w 的估计应用于这一反射势，得到 $\widetilde{w}(x)\ge x$ 以及$\widetilde{w}(A)\le Ae^{C_{\lambda,S}}$。对于剖面 $b^{S,\lambda}_{10}(s)=\widetilde{w}(A-x)/\widetilde{w}(A)$，分子至少为$A-x=\log(S/s)$。因此，对于每个 $s\in[2a,S]$，

$$b^{S,\lambda}_{01}(s)\ge e^{-C_{\lambda,S}}\frac{\log(s/(2a))}{L_S},\qquad b^{S,\lambda}_{10}(s)\ge e^{-C_{\lambda,S}}\frac{\log(S/s)}{L_S}\,.\tag{4.32}$$

为在 $|T|\le1$ 时得到 $H(T,\ 1)$ 的下界，我们首先估计 $m(s)$ 在 $3/4\le s\le5/4$ 上的值。分部积分两次，并利用 $j(0)=j(3)=0$ 和 $j''=-(\pi/3)^2j$，得到

$$\int_0^3 j(T)H_{TT}(T,s)\,dT=(\pi/3)\big(H(0,s)+H(3,s)\big)-(\pi/3)^2m(s)\,.$$

由于 $H \geq 0$ 和 $j \geq 0$，对 j 积分并以 $\mathcal{L}_N H \leq 0$ 为权，得到 $m'' + s^{-1}m' - (V_N + \pi^2/9)m \leq 0$。函数 $m(s) - m(2a)b^3_{,10}{}^{\pi/3}(s)$ 满足相同的微分不等式，且端点值为 0 和 $m(3) \geq 0$。在负的内部极小点处，其一阶导数为零，二阶导数非负。因此，在该点将 $\partial_s^2 + s^{-1}\partial_s - (V_N + \pi^2/9)$ 应用于该函数，结果会严格为正。这证明了在 $[2a, 3]$ 上 $m(s) \geq m(2a)b^3_{,10}{}^{\pi/3}(s)$。特别地，(4.32) 给出

$$m(s) \geq c\, m(2a)\frac{\log(3/s)}{L_3} \geq c'\frac{m(2a)}{L_3} \qquad (3/4 \leq s \leq 5/4)\,.$$

我们利用 $3/4 \leq s \leq 5/4$ 上 $m(s)$ 的这个下界，为每个 $T \in [-1, 1]$ 给出 $H(T, 1)$ 的下界。在 $U = \mathbb{R} \times \{\tau \in \mathbb{C}_k \text{ 上：} \ 1/2 < |\tau| < 3/2\}$，令 $H_0(T, \tau) = H(T, |\tau|)$。由于 $[1/2, 3/2]$ 上有 $\mathcal{L}_N H \leq 0$ 和 $V_N \leq M$，我们有 $\Delta_{T,\tau} H_0 \leq M H_0$。对于 $\omega = \sqrt{M} + 1$，定义 $F\colon\ U \times (-\pi/(3\omega)\ \pi/(3\omega)) \to [0, \infty)$，其中 $F(T, \tau, y') = H_0(T, \tau)\cos(\omega y')$。在这个定义域中

$$\Delta_{T,\tau,y'} F = \cos(\omega y')(\Delta_{T,\tau} H_0 - \omega^2 H_0) \leq 0\,.$$

用 $B^d(p,\ r)$ 表示在 $\mathbb{R}^d$ 中以 p 为中心、半径为 $r > 0$ 的开欧氏球。对于任意满足 $B^4((z,\ 0)\ 2\rho)$ 属于 F 的定义域的 $z = (T,\ \tau) \in U$ 和 $\rho > 0$，四维平均值不等式给出

$$H_0(z) \geq \frac{1}{|B^4(0, 2\rho)|}\int_{B^4((z,0),2\rho)} F \geq c\,\rho^{-3}\int_{B^3(z,\rho)} H_0(z')\,dz'\,. \tag{4.33}$$

第二个不等式可通过在 $B^4((z, 0)\ 2\rho)$ 内对 $B^3(z, \rho) \times (-\rho, \rho)$ 积分得到，其中 $\cos(\omega y') \geq 1/2$。

考虑紧连通集 $\mathcal{C} = [-1, 3] \times \{\tau \in \mathbb{C}_k\colon\ 3/4 \leq |\tau| \leq 5/4\}$。选取仅依赖于 M 和 $\mathcal{C}$ 的 $\rho > 0$，使其足够小，从而只要 z 与 $\mathcal{C}$ 的距离不超过 $\rho/8$，$B^4((z, 0)\ 2\rho)$ 就包含在 F 的定义域内。由于 $j \leq 1$，极坐标积分给出

$$\int_{\mathcal{C}} H_0(z)\,dz \geq 2\pi\int_{3/4}^{5/4} s\, m(s)\,ds \geq c\,\frac{m(2a)}{L_3}\,.$$

用 L 个开球 B_1、...、B_L 覆盖 $\mathcal{C}$，每个球的半径为 $\rho/8$，且球心位于 $\mathcal{C}$ 中。它们的交图是连通的，因为每个球都与 $\mathcal{C}$ 相交，且 $\mathcal{C}$ 是连通的。重新标记这些球，使得 $\int_{B_1} H_0 \geq c\, m(2a)/(LL_3)$。若 $B_i \cap B_j \neq \varnothing$，则根据三角不等式，对每个 $z \in B_j$ 都有 $B_i \subset B^3(z, \rho)$。在这样的 z 处应用 (4.33)，并在 B_j 上积分，得到

$$\int_{B_j} H_0 \geq c\rho^{-3}|B_j|\int_{B_i} H_0\,.$$

对于目标点 $z = (T,\ \tau)$，其中 $|T| \leq 1$ 且 $|\tau| = 1$，选取一个包含 B_j z 的球。至多 $L - 1$ 次重叠的链得到 $\int_{B_j} H_0 \geq c\, m(2a)/L_3$。由于 $B_j \subset B^3(z,\ \rho)$，4.33) 现在给出

$$h_* = \inf_{|T| \leq 1} H(T, 1) \geq c\,\frac{m(2a)}{L_3}\,.$$

球的数量 L、它们的公共体积以及 ρ 仅取决于 M 和 $\mathcal{C}$，因此该常数与 N 无关。

$s=1$ 处的下界为延伸至 $s=4a$ 的比较提供了边界数据。在矩形 $\mathcal{R}=[-1,1]\times[2a,1]$ 上，通过以下方式定义 $G\colon \mathcal{R}\to[0,\infty)$

$$G(T,s)=h_*\cos(\pi T/2)b_{01}^{1,\pi/2}(s)\,.$$

b^1、$_{01}^{\pi/2}$ 的方程给出 $\mathcal{L}_N G=0$。在 $T=\pm1$ 上以及在 $s=2a$ 上，我们有 $G=0\le H$。在 $s=1$ 上，我们有 $G(T,1)\le h_*\le H(T,1)$。因此，$H-G\ge 0$ 在 $\mathcal{R}$ 的边界上，而$\mathcal{L}_N(H-G)\le 0$ 在其内部。在 $H-G$ 的负内部最小值处，T 和 s 中的二阶导数应为非负，一阶导数应为零，而$-V_N(H-G)$ 应严格为正。因此，在 $\mathcal{R}$ 上有 $H\ge G$。在 (T,s) 处，$=(0,4a)$，由 (4.32) 得

$$H(0,4a)\ge h_* b_{01}^{1,\pi/2}(4a)\ge c\,h_*\frac{\log 2}{L_1}\,.$$

利用 $[1,2]$ 上的 $j\ge\sqrt{3}/2$ 以及 h_* 和 $H(0,4a)$ 的两个下界，我们得到

$$\int_1^2 H(T,2a)\,dT\le\frac{2}{\sqrt{3}}m(2a)\le CL_3h_*\le C'L_3L_1H(0,4a)\le C'L_3^2H(0,4a)\,,$$

即4.31）。 □

为了通过第2.3 节中的约化完成定理1.1的证明，我们将引理4.7 与能量界（4.14）和（4.24）结合起来，针对 $2a<1/4$ 并对 $2a\ge1/4$使用直接的乘子界。

命题 2.3 的证明。使用 (4.29) 之前选定的孔径以及 $a=K/N$ with$K=10$。我们先证明当 $2a\ge1/4$时的 (2.8)，或者等价地，当 $2\le N\le 8K$时的 (2.8)。选取在 $\{\eta\in\mathbb{R}^2$ 上恒等于一的 $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\colon\ c_0\le|\eta|\le C_0\}$，并定义$p_{T,N}\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$，使得$p_{T,N}(\eta)=\chi(\eta)e^{-iTN|\eta|}$。由 (2.5)，符号为 $p_{T,N}(\xi/N)$ 的周期乘子将 $u(0,\cdot)$ 映射到 $u(T,\cdot)$，其中 $\xi\in\Gamma^*$。对于 $T\in[1,2]$和 $2\le N\le 8K$，$p_{T,N}$ 的四阶及以下导数一致有界。引理 2.1 给出$q_u(T)\le Cq_u(0)$，其中 C 与周期格和系数代数无关。对 $[1,2]$ 积分，即可证明该范围内的 (2.8)。

如果 $2a<1/4$，则在 $|\tau|=4a$处应用（4.14）并在 $|\tau|=2a$处应用（4.24）。由于 $N|\tau|=4K$以及$N|\tau|=2K$分别成立，取圆周平均可得

$$H(0,4a)\le Ca^2q_u(0),\qquad ca^2q_u(T)\le H(T,2a)\qquad(T\in\mathbb{R})\,,$$

其中常数与 N无关。将 $H(0,4a)$ 的上界和 $H(T,2a)$ 的下界代入（4.31），得到（4.9）中的一系列估计，因此

$$a^2\int_1^2 q_u(T)\,dT\le Ca^2\log^2(3/(2a))q_u(0)\,.$$

消去 a^2 并利用 $\log(3/(2a))\lesssim\log(2+N)$，即可证明（2.8）。缩放后的符号上界在每个标准正交标架（e_x,e_{b_0}）中使用相同的截断剖面。引理 2.1 中的周期核估计以及采用概率 Haar 测度的空间帕塞瓦尔恒等式关于周期格 Γ一致。这些事实保证了关于标架和周期格的一致性。 □

根据第2.3节的归约，定理1.1的证明至此完成。

5. Local smoothing and quantum wave estimates

第5.1 节对带对数的 L^4 上界进行插值，得到单环估计（1.3），随后将其重新缩放到长时间区间，以供第7节和8节使用。第5.2 节对各环带求和，得到 Sobolev 估计，包括临界阶处带对数权重的估计。在临界阶处，证明利用了 F 的空间分块的环形傅里叶支撑及其在 $U(t)$ 下的保持性。在考察了标量障碍对无权 Sobolev 估计的影响后，我们引入量子傅里叶模型，并将波估计推广到量子环面和莫亚尔平面。

5.1.**环带局部平滑估计**。固定一个实数 $N \geq 2$、一个截断函数 $\psi \in C_c^\infty((1/2,\ 2))$，以及 $\nu \in \{-1, 1\}$。在测试张量上定义 $(T_N F)(t) = U(\nu t)\psi(|D|/N)F$对于 $t \in I$。为证明 (1.3，我们对算子进行插值

$$T_N : L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})$$

在 $p = 4$的每一侧。对于 L^4 的上界 T_N 由 (1.2以及 $U(-t)$ 的伴随恒等式得出。由于 $L^2(\mathcal{M})$ 是希尔伯特空间，普朗歇尔恒等式和 $|I| = 1$ 给出

$$\|T_N\|_{L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})\to L^2(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})} \leq \|\psi\|_{L^\infty((1/2,2))}.$$

对于 $p = \infty$，空间核满足一致上界

$$\sup_{1\leq t\leq 2} \|(e^{i\nu t|\xi|}\psi(|\xi|/N))^\vee\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C_\psi N^{1/2}. \tag{5.1}$$

在环带 $\xi = N\eta$ 上，将角向分割为 $O(N^{1/2})$ 个孔径为 $N^{-1/2}$ 的帽。这样的分割可由一个关于角度的光滑隆起函数的平移构造：将各平移函数除以它们的和；其重叠数一致有界，且每个整数阶导数$k \geq 0$均由 $C_k N^{k/2}$ 控制。在沿帽的坐标中，写作 $\eta =(N^{-1/2}z, r)$，其中 $(z, r) \in \mathbb{R}^2$, $r \geq c > 0$，并且这对变量取值于一个固定紧集。由于缩放后的角变量为 $N^{1/2}\arctan(N^{-1/2}z/r)$，截断函数在这些坐标中的四阶及以下导数均有界。去掉线性相位 νtNr相当于平移核。剩余相位为

$$\nu tN\big(\sqrt{r^2 + N^{-1}z^2} - r\big) = \nu tz^2/(\sqrt{r^2 + N^{-1}z^2} + r).$$

其前四阶导数均有上界，且该上界与帽及 N 无关。由 (2.3)，每个帽在 (z, r) 坐标下对应的核具有有界的 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 范数。频率坐标的逆线性变换保持此范数，从移除的相位所作的平移也保持此范数。对 $O(N^{1/2})$ 个帽求和，即得 (5.1)。令 $K_t =(e^{i\nu t|\xi|}\psi(|\xi|/N))^\vee$ ，其中 $t \in I$。固定 N 时，符号关于 t 连续，并且在其紧支集上，直至四阶导数均连续，因此由 (2.3) 可知 $t \mapsto K_t$ 在 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中连续。对于 $H \in L^1(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})$，Bochner 积分 $P_K H = \int_I \widetilde{K}_t * H(t)\ dt$ 定义了 $L^1(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$ 中的一个元素。事实上，引理 2.1(iii) 给出

$$\|P_K H\|_{L^1(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})} \leq \sup_{t\in I} \|K_t\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\, \|H\|_{L^1(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}.$$

伴随算子 P_K^*: $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2} \to \mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2}$在 $p = \infty$处定义了 T_N。对于互不相同的 r_0, $r_1 \in \{2, 4, \infty\}$, $F \in L^{r_0}(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})\cap L^{r_1}(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$，以及一个时空测试张量 H，空间卷积和富比尼定理给出 $\langle H,\ T_N F\rangle_{I\times\mathbb{R}^2} = \langle P_K H,\ F\rangle_{\mathbb{R}^2}$。对于有限端点指数，核作用

由空间卷积的上界可将其从测试张量延拓得到，且关于 t 一致。因此，配对恒等式确定了其交集上的端点作用。

对于 $\mathcal{B} = \mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}$ 和 $\mathcal{B} = \mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2}$，我们使用迹插值恒等式$[L^{p_0}(\mathcal{B})\ L^{p_1}(\mathcal{B})]_\theta = L^p(\mathcal{B})$，并保持等距，其中 $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$、$0 < \theta < 1$，以及 $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ [20, 第2节，(2.1)]。在 2 和 4 之间，定理 1.1 的权重为 $2 - 4/p$，因此对数幂为 $1 - 2/p$。在 4 和 ∞ 之间，(5.1) 的权重为 $1 - 4/p$。这给出了 N 的幂 $1/2 - 2/p$ 以及对数的幂 $2/p$。因此，$\sigma(p)$ 和 $\beta(p)$ 是 $U(\nu t)$ 的 (1.3) 中的幂。端点常数与 ν 及系数代数无关。

我们将 (1.3) 和 (5.1) 推广到 $U(\nu t)m(D/N)$，其中固定的光滑径向符号 $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 的支集位于远离零点的紧环域内。选取有限个 $d_l > 0, 1 \le l \le M$，满足 $M \in \mathbb{N}$，使得 $(d_l/2, 2d_l)$ 覆盖 m 的径向支集。一个从属的光滑分割将 m 分解为符号 m_l，其支集位于 $d_l/2 < |\eta| < 2d_l$ 内，其中 $\eta = \xi/N$。选取固定的 $\psi_l \in C_c^\infty((1/2, 2))$，使其在 m_l 缩放后的径向支集上等于一。于是

$$e^{i\nu t|\xi|} m_l(\xi/N) = e^{i\nu t|\xi|}\psi_l(|\xi|/(d_l N))\, m_l(\xi/N)\,.$$

若 $d_l N \ge 2$，则将 $U(\nu t)$ 的环带上界应用于频率参数为 $d_l N$ 的 $m_l(D/N)F$。乘积的核是 (5.1) 中的核与 $(m_l(\cdot/N))^\vee$ 的卷积。后者的范数为 L^1 $\|\check{m}_l\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$，这是由伸缩得到的。因此，引理 2.1 给出局部化乘子关于 N 的一致上界，而乘积核的范数至多为 L^1 $C_{m_l,\psi_l}(d_l N)^{1/2}$。若 $d_l N < 2$，则 $N < 2/d_l$，并且核估计 (2.3) 可直接应用于缩放变量中的 $e^{i\nu t N|\eta|} m_l(\eta)$。将有限多个部分相加，得到 $U(\nu t)m(D/N)$ 的 (1.3)，其中 N 的幂次和 $\log(2+N)$ 的幂次保持不变，同时还得到一致的核估计

$$\sup_{t\in I} \big\| (e^{i\nu t|\xi|} m(\xi/N))^\vee \big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \le C_m N^{1/2}\,.$$

重新缩放（1.3）给出 $[S, 2S]$ 的上界，其中波的空间频率位于一个固定环域内。

引理 5.1。固定 $0 < a < b < \infty$ 和 $2 \le p < \infty$。若 $h \in L^p$（$\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}$）的空间傅里叶支集位于 $a \le |\xi| \le b$，那么对每个 $\nu \in \{-1, 1\}$ 以及每个实数 $S \ge 1$，

$$\left(\int_S^{2S} \|U(\nu s)h\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^p \, ds \right)^{1/p} \le C_{a,b,p} S^{1/p+\sigma(p)} [\log(2+S)]^{\beta(p)} \|h\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}. \tag{5.2}$$

对于 $|s| \le 2$，有 $\|U(s)h\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})} \le C_{a,b}\|h\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$。

证明。我们先对有界的 s 给出 $U(s)h$ 的上界，然后将 $[S, 2S]$ 重新缩放为 $[1, 2]$，以证明 (5.2)。取 $\chi \in C_c^\infty((0,\infty))$，使其在 $[a, b]$ 的某个邻域上等于一。由引理 2.2，$\chi(|D|)h = h$。对于有界的 s，$\xi \mapsto e^{is|\xi|}\chi(|\xi|)$ 的四阶及以下导数在其支集上有界。引理 2.1 证明了关于 $|s| \le 2$ 的断言，并在任意固定的有界区间上给出一致上界，其常数依赖于该区间。

对于实数 $S \ge 1$，定义 $h_S \in L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$ 为 $h_S(y) = h(Sy)$，其中 $y \in \mathbb{R}^2$。要在 1.3 中应用 $[1, 2]$，我们需要 h_S 的频率支集和范数。其分布意义下的傅里叶变换为 $S^{-2}\widehat{h}(\eta/S)$，支集包含于 $aS \le |\eta| \le bS$。对于 $\tau \in \mathbb{R}$，将 $\eta = S\xi$代入半波公式，并将 $x = Sy$ 代入空间范数，可得

$$(U(\nu S\tau)h)(Sy) = (U(\nu\tau)h_S)(y), \qquad \|h_S\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^p = S^{-2}\|h\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^p.$$

波动恒等式首先对施瓦茨张量成立，然后通过局部化逼近（2.4）推广到，其中对逼近元使用了一个扩大的紧环带。

对于 $S \geq 2$，取 $N = S$，$m(\eta) = \chi(|\eta|)$，并在 $F = h_S$（1.3）的固定环带形式中取 $U(\nu\tau$。由于 $\chi(|D|/S)h_S = h_S$且径向分割仅依赖于 χ，因此得到

$$\|U(\nu\tau)h_S\|_{L^p([1,2];L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}))} \leq CS^{\sigma(p)}[\log(2+S)]^{\beta(p)}\|h_S\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}.$$

在范数积分中，将 $s = S\tau$ 替换为 $\tau \in [1,2]$，并将 $x = Sy$ 替换为 $y \in \mathbb{R}^2$。时间雅可比行列式 S 和空间雅可比行列式 S^2 给出

$$\begin{aligned}\int_S^{2S} \|U(\nu s)h\|^p_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}\,ds &= S^3\int_1^2 \|U(\nu\tau)h_S\|^p_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}\,d\tau \\ &\leq CS^{3+p\sigma(p)}[\log(2+S)]^{p\beta(p)}S^{-2}\|h\|^p_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}.\end{aligned}$$

取 p次方根，得到（5.2）。对于 $1 \leq S < 2$，在 $|s| \leq 4$上的局部化核估计直接给出（5.2）。当 $\nu = -1$时，对（5.2）作变量代换，可得到相同的上界，适用于$U(s)h$ 在 $[-2S, -S]$上。□

5.2. Sobolev 估计与对数权重。我们证明定理 1.2 的 (ii) 和 (iii) 部分。对于 $s > \sigma(p)$，第 j 个环项的 $L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})$ 范数至多为$C2^{-j(s-\sigma(p))}(1+j)^{\beta(p)}\|J^sF\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$，这些系数对 j 可求和。在 $s = \sigma(p)$ 处，我们将改为结合对 F 的加权频率片段的 ℓ^p 估计，以及对无权片段的半波之和的 ℓ^2 估计，如下文的 (5.4) 和 (5.5) 所示。

首先，取 F 属于第 2.1 节的 Schwartz张量类。选取 $\mathbb{R}^2$ 的非齐次径向分割 $1 = \chi_0 + \sum_{j\geq 1}\varphi(2^{-j}\cdot)$，其中实值光滑截断函数 χ_0、φ、χ_0 的支集包含于一个球内，而 φ 的支集包含于 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 中的一个紧环域。对每个整数 $j \geq 1$，在本小节中记 $\Pi_j = \varphi(2^{-j}D)$，并记 $\widetilde{\Pi}_j = \widetilde{\varphi}(2^{-j}D)$，其中 $\widetilde{\varphi}$ 光滑、径向对称，支集包含于一个紧环域内，并在 $\operatorname{supp}\varphi$ 的某个邻域上恒等于一。这两个空间乘子作用于 $L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$，也逐时作用于时空函数。对于有限集 $E \subset \{1,2,\ldots\}$，由三角不等式可得

$$\begin{aligned}\left\|U(t)\left(\chi_0(D)F + \sum_{j\in E}\Pi_jF\right)\right\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})} &\leq \|U(t)\chi_0(D)F\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})} \\ &\quad + \sum_{j\in E}\|U(t)\Pi_jF\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}.\end{aligned}$$

我们对 E 一致地估计环和，然后处理乘子 $\chi_0(D)$ 对应的项。

令 $G = J^sF \in L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$。关于变量 $\eta = 2^{-j}\xi$，$2^{js}\Pi_jJ^{-s}$ 的符号为

$$\varphi(\eta)(2^{-2j} + |\eta|^2)^{-s/2}.$$

其直到四阶的导数在 φ的~固定支集上一致有界，该支集远离原点。将（1.3）应用于 U（t）Π_j 的第5.1节及引理2.1 中的固定环带形式，可得 $2^{js}\Pi_jJ^{-s}$

$$\|U(t)\Pi_jF\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})} \leq C_{p,s}2^{-j(s-\sigma(p))}(1+j)^{\beta(p)}\|G\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}. \tag{5.3}$$

对于 $s > \sigma(p)$，这些系数是可求和的。对于低频项，令 $b(\xi) = \chi_0(\xi)\langle\xi\rangle^{-s}$，其中 $\xi \in \mathbb{R}^2$。$U(t)\chi_0(D)J^{-s}$的符号为 $b(\xi) + b(\xi)(e^{it|\xi|} - 1)$。核 $\check{b}$ 是可积的。为处理余项，取一个光滑的 $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，使其支集包含在一个紧环域中，并满足 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho(2^{-k}\xi) = 1$，其中 $\xi \neq 0$。对于 $k \in \mathbb{Z}$，令

$$b_{k,t}(\xi) = \rho(2^{-k}\xi)b(\xi)(e^{it|\xi|} - 1)\,.$$

在变量 $\eta = 2^{-k}\xi$中，因子 $e^{it2^k|\eta|} - 1$ 及其直到四阶的导数在 $O(2^k$的支集上满足 ρ 对 $k \le 0$一致成立，关于 $t \in I$。因此，(2.3) 中使用的分部积分估计给出

$$|b^{\vee}_{k,t}(x)| \le C2^{3k}(1 + 2^k|x|)^{-4} \qquad (k \le 0,\ x \in \mathbb{R}^2)\,.$$

这些逐点上界的 L^1 范数之和是有限常数。对于 $k > 0$，只有有限多个 $b_{k,t}$ 可能非零，因为 b 具有紧支撑。对于每个这样的 k，$b_{k,t}$ 直到四阶的导数关于 $t \in I$ 在一个固定紧环域上一致有界。将 $(1-\Delta_\xi)^2$应用于傅里叶反演，得到 $|b^{\vee}_{k,t}(x)| \le C_k(1+|x|^2)^{-2}$。因此，核 $b^{\vee}_{k,t}$ 之和在 L^1中收敛，且关于 $t \in I$一致。根据分割，其符号对于 $\xi \neq 0$ 等于$b(\xi)(e^{it|\xi|} - 1)$，并且两边在 $\xi = 0$处均为零。

对于有限的 p，$U(t)\chi_0(D)J^{-s}$ 的可积核对所有 $t \in I$ 一致地控制 $U(t)\chi_0(D)F$。对 j 将 (5.3) 求和，可得当 $m \to \infty$ 时，$U(t)\chi_0(D)F + \sum_{j=1}^{m} U(t)\Pi_j F$ 在时空 L^p 中收敛。对于测试张量的每个标量施瓦茨因子 f，傅里叶符号 $\chi_0(\xi) + \sum_{j=1}^{m}\varphi(2^{-j}\xi)$ 趋于 1，并且由有限重叠可知其具有一致上界。由于 $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$，对傅里叶反演应用控制收敛定理，可知在测试张量上，该极限等于 $U(t)F$。在范数 $\|J^s F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$ 下进行完备化，即得 (1.4)。在 $p = 2$ 和 $s = 0$ 处，空间变量的 Plancherel 定理与 $|I| = 1$ 直接给出等式。

对于 $p = \infty$，我们通过对局部化核求和，构造 $U(t)J^{-s}$ 的核 $K_t^{(s)}$。在第 j 个高频环带上，(5.1) 的固定环带延拓给出 $U(t)\widetilde{\Pi}_j$ 的核范数上界 $C2^{j/2}$。将 (2.3) 应用于 $\varphi(\eta)(2^{-2j} + |\eta|^2)^{-s/2}$，可得 $\Pi_j J^{-s}$ 的核的 L^1 范数上界 $C_s 2^{-js}$。它们的卷积范数至多为 $C_s 2^{-j(s-1/2)}$。对于 $s > 1/2$，对 $j \ge 1$ 上的 $C_s 2^{-j(s-1/2)}$ 求和，并加上 $U(t)\chi_0(D)J^{-s}$ 的核，可得 $K_t^{(s)}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中的核级数对于 $t \in I$ 一致收敛。由 (2.3)，每个局部化核关于 t 都是 L^1-连续的，因此 $t \mapsto K_t^{(s)}$ 是 L^1-连续的。根据引理 2.1(iii)，$H \mapsto \int_I \widetilde{K}_t^{(s)} * H(t)\,dt$ 的伴随算子在 $G \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}$ 上定义时空算子，其范数至多为 $\sup_{t\in I}\|K_t^{(s)}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$。单位分解表明，$K_t^{(s)}$ 的符号为 $e^{it|\xi|}\langle\xi\rangle^{-s}$。因此，对于 $F = J^{-s}G$，其伴随算子在测试张量上作用为 $U(t)F$，并由此对 $p = \infty$ 得到 (1.4)。

对于临界估计 (1.6)，固定 $2 < p < \infty$ 和 $B、C \in \mathbb{R}$，如 (1.5) 中所示。乘子 $D_w = J^{\sigma(p)}L_{B、C}(J)$ 将 (1.6) 中的对数加权索博列夫空间映射到 $L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$ 中。记 $G = D_w F$。对于每个整数 $j \ge 1$，定义 $v_j \in L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})$，使得 $v_j(t) = U(t)\Pi_j F$。为了用 G 表示 v_j的和，定义空间乘子 $A_j\colon\ L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}) \to L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$ 以及实权重 $w_j > 0$，使得

$$A_j = 2^{j\sigma(p)}(1+j)^B[\log(2+j)]^C\Pi_j D_w^{-1}, \qquad w_j = (1+j)^{\beta(p)-B}[\log(2+j)]^{-C} \qquad (j \ge 1).$$

~ ~由于 $\Pi_j A_j = A_j$，对 $U(t)\Pi_j$应用 $A_j G$的环带估计 (1.3)，得到

$$\|v_j\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})} \le C_p w_j \|A_j G\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}.$$

对于（1.6），我们需要在临界 Sobolev 阶数处对 v_j 求和。我们将利用 $(\|A_j G\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})})_{j\ge1}$ 的 ℓ^p范数给出上界，并通过 $(\|v_j\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})})_{j\ge1}$ 的 ℓ^2 范数估计 $\sum_j v_j$ 的时空范数。因此，H¨older 不等式要求 $(w_j)_{j\ge1} \in \ell^q$，其中 $1/q = 1/2 - 1/p = s_p$。对于空间乘子 A_j，我们将证明

$$\Big(\sum_{j\ge1} \|A_j G\|^p_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}\Big)^{1/p} \le C_{p,B,C}\|G\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})} \tag{5.4}$$

对于时空和，我们将证明

$$\Big\|\sum_{j\in E} v_j\Big\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})} \le C_p\Big(\sum_{j\in E}\|v_j\|^2_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}\Big)^{1/2}. \tag{5.5}$$

在（5.5）中，E可以是 $\{1,2,\dots\}$ 的任意有限子集，并且每个 v_j都可以是任意具有空间傅里叶支集包含于 $2^j \operatorname{supp}\varphi$中的时空$L^p$ 函数。我们需要（5.4）和（5.5）中的常数关于 E 以及系数代数保持一致。

为证明 (5.4)，我们首先一致地估计 L^1 空间乘子核的范数A_j，对 j一致成立。对于 $\eta = 2^{-j}\xi \in \mathbb{R}^2$，记 $r_j = \langle 2^j\eta\rangle$。其符号为 A_j，即 $\varphi(\eta)$ 乘以

$$(2^j/r_j)^{\sigma(p)}\big((1+j)/\ell_1(r_j)\big)^B\big(\log(2+j)/\ell_2(r_j)\big)^C.$$

在固定环域 $r_j/2^j = (2^{-2j}+|\eta|^2)^{1/2}$的值域包含于 $(0,\ \infty)$ 的某个紧子区间内，且其四阶以内的导数有界。写作 $\ell_1(r_j) = j\log 2 + \log(2^{1-j}+r_j/2^j)$ 可得 $\ell_1(r_j) \asymp 1+j$ 在该处为正，且其正阶导数直至四阶均有界。对 $\ell_2(r_j) = \log(2+\ell_1(r_j))$ 求导，可得相同的导数界，且 $\ell_2(r_j) \asymp \log(2+j)$。因此，归一化因子及其倒数的四阶以内导数均一致有界。根据 (2.3)，每个 A_j 的核的L^1 范数至多为 $C_{p,\ B,\ C}$。

将目标指数 p固定在 A_j 的符号中。对于有限集 $E \subset \{1,2,\dots\}$和 $2 \le r \le \infty$，考虑相同的映射

$$A_E : L^r(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}) \to L^r(\ell^\infty(E)\bar{\otimes}\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}), \qquad A_E G = (A_j G)_{j\in E},$$

其中，$\ell^\infty(E)$ 上的迹是计数测度。对于有限 r，我们有

$$\|A_E G\|_{L^r(\ell^\infty(E)\bar{\otimes}\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})} = \Big(\sum_{j\in E}\|A_j G\|^r_{L^r(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}\Big)^{1/r}.$$

对于 $r=\infty$，$A_E G$ 的范数等于 $\sup_{j\in E}\|A_j G\|_{L^\infty(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$，利用各个核范数，可由 $C_{p,B,C}\|G\|_{L^\infty(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$ 控制。在 $r=2$ 处，令 $a_j\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 表示 A_j 的符号。普朗歇尔恒等式给出 $\sum_{j\in E}\|A_j G\|^2_{L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$ 的上界

$$\sup_\xi \sum_{j\in E}|a_j(\xi)|^2\ \|G\|^2_{L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}.$$

包含给定 ξ 的环带数量有上界。对 A_E 在 $r=2$ 与 $r=\infty$ 之间进行插值，得到 $r=p$ 处的上界，即 (5.4)，其中求和范围限制在 E。

取 $E=\{1,\dots,m\}$ 并令 $m\to\infty$，由标量和的单调收敛可得 (5.4)。

对于（5.5），我们使用随机符号来估计时空和。固定一个有限 $E\subset\{1,2,\dots\}$。对于 $\epsilon=(\epsilon_j)_{j\in E}\in\{-1,1\}^E$ 令 $S_\epsilon=\sum_{j\in E}\epsilon_j\widetilde{\Pi}_j$。我们将通过对 $\sum_{j\in E}\epsilon_j v_j$ 应用 S_ϵ 并在 ϵ 上取平均来得到 $\sum_{j\in E}v_j$。为实现这一约化，我们首先证明一个 L^p 乘子界，该乘子界对 E 和 ϵ 一致，适用于 S_ϵ。其核 $K_\epsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ 由 $K_\epsilon(x)=\sum_{j\in E}\epsilon_j 2^{2j}\check{\widetilde{\varphi}}(2^j x)$ 给出。对于 $m=0,\,1$，其 m 阶导数满足

$$|\nabla^m K_\epsilon(x)|\le C_m\sum_{j\in E}2^{(2+m)j}(1+2^j|x|)^{-4}\le C'_m|x|^{-(2+m)}\qquad(x\neq 0)。$$

事实上，含有 $2^j|x|\le 1$ 的项构成递增的几何级数，而含有 $2^j|x|>1$ 的项则以上界 $C|x|^{-4}2^{(m-2)j}$ 为界。梯度估计给出了 $K_\epsilon(x-y)$ 在任一变量上的 Lipschitz 核差估计，适用于位移不超过 $|x-y|/2$ 的情形。由 $L^2(\mathbb{R}^2;L^2(\mathcal{M}))$ 上的 Hilbert 值 Plancherel 定理可知，S_ϵ 的 L^2 范数以上确界 $\sup_\xi\sum_{j\in E}|\widetilde{\varphi}(2^{-j}\xi)|$ 为界，且由有限重叠，该估计是一致的。Parcet 的标量核 Calder´on–Zygmund 定理 [19, 定理 A] 给出 $L^p(L^\infty(\mathbb{R}^2)\bar{\otimes}\mathcal{M})$ 的上界，该上界仅取决于 p、维数、核估计和 L^2 上界。所有这些上界对于 E，ϵ，$\mathcal{M}$ 都是一致的。对 t 积分后，得到 $L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})$ 上相同的算子范数。

独立地选择符号 ϵ_j，$j\in E$，每个符号取值为 -1 和 1 的概率分别为$\tilde{}$。1/2。引理 2.2，取系数代数 $\mathcal{N}_I$，由 $\Pi_j v_j=v_j$ 的空间傅里叶支集可得v_j。由于 $\mathbb{E}(\epsilon_j\epsilon_k)=1_{j=k}$，我们得到

$$\mathbb{E}_\epsilon S_\epsilon\Big(\sum_{k\in E}\epsilon_k v_k\Big)=\sum_{j,k\in E}\mathbb{E}_\epsilon(\epsilon_j\epsilon_k)\widetilde{\Pi}_j v_k=\sum_{j\in E}v_j.$$

利用期望的三角不等式、刚刚证明的乘子上界，以及关于符号变量的 H¨older 不等式，我们得到

$$\Big\|\sum_{j\in E}v_j\Big\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}\le C_p\mathbb{E}_\epsilon\Big\|\sum_{j\in E}\epsilon_j v_j\Big\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}\le C_p\Big(\mathbb{E}_\epsilon\Big\|\sum_{j\in E}\epsilon_j v_j\Big\|^p_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}\Big)^{1/p}.$$

由非交换 Khintchine 不等式以及 Rademacher 矩的比较 [20, 定理 6.1 和 (6.2)]，可将 $(\mathbb{E}_\epsilon\|\sum_{j\in E}\epsilon_j v_j\|^p_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})})^{1/p}$ 上界估计为

$$C_p\max\left\{\Big\|\Big(\sum_{j\in E}v_j^*v_j\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})},\ \Big\|\Big(\sum_{j\in E}v_jv_j^*\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}\right\}.$$

对于列平方函数，其范数的平方为

$$\Big\|\sum_{j\in E}v_j^*v_j\Big\|_{L^{p/2}(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}\le\sum_{j\in E}\|v_j^*v_j\|_{L^{p/2}(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}=\sum_{j\in E}\|v_j\|^2_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}.$$

对于行平方函数，利用 $L^{p/2}(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})$ 中的三角不等式作用于 $v_jv_j^*$，并使用

$$\|v_jv_j^*\|_{L^{p/2}(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}=\|v_j^*\|^2_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}=\|v_j\|^2_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})}.$$

对行估计和列估计取平方根即可证明（5.5）。

剩下的工作是在 () 处结合（5.4）和（5.5）。令 $q = 1/s_p = 2p/(p-2) \in (2, \infty)$，则 $1/2 = 1/p + 1/q$。将（5.5）与每个 v_j 的上界结合，然后对标量序列 w_j^2 和 $\|A_j G\|_{L^p}^2$ $(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$ 应用带有指数 $q/2$, $p/2$ 的 Hölder 不等式，得到

$$\Big\| \sum_{j\in E} U(t)\Pi_j F \Big\|_{L^p(\mathcal{N}_{I\times\mathbb{R}^2})} \lesssim \Big(\sum_{j\in E} w_j^q \Big)^{1/q} \Big(\sum_{j\in E} \|A_j G\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^p \Big)^{1/p}.$$

由 (5.4)，$(\|A_j G\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})})_{j\in E}$ 的 ℓ^p 范数关于 E 一致有界。若 $\sum_{j\geq 1}(1+j)^{-q(B-\beta(p))}[\log(2+j)]^{-qC}$ 收敛，则 $(w_j)_{j\in E}$ 的 ℓ^q 范数一致有界。由积分判别法，当 $q(B-\beta(p)) > 1$，或当 $q(B-\beta(p)) = 1$ 和 $qC > 1$ 时，级数收敛。由于 $1/q = s_p$，这恰好是 (1.5) 中的两种情形。若 $E \subset \{m, m+1, \dots\}$，则 ℓ^q 因子至多为 $(\sum_{j\geq m} w_j^q)^{1/q}$，当 $m \to \infty$ 时趋于零。由 (5.4)，$\big(\sum_{j\in E} \|A_j G\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^p\big)^{1/p}$ 至多为 $C_{p,B,C}\|G\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$，且与 E 无关。因此，部分和 $\sum_{j=1}^m U(t)\Pi_j F$ 在时空 L^p 中构成柯西列。对于低频项，(1.4) 的证明可用于 $b(\xi) = \chi_0(\xi)\langle\xi\rangle^{-\sigma(p)} L_{B,C}(\langle\xi\rangle)^{-1}$，该函数光滑且具有紧支撑。在施瓦茨测试张量上，单位分解和傅里叶反演中的控制收敛表明，$U(t)\chi_0(D)F + \sum_{j\geq 1} U(t)\Pi_j F$ 等于 $U(t)F$。在 $\|J^{\sigma(p)} L_{B,C}(J)F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$ 中取完备化，即可证明 (1.6)。特别地，$p = 4$ 允许 $B = 3/4$, $C > 1/4$。

5.3. **无权 Sobolev 估计的标量障碍**。第5.2 节通过对频率环域求和证明了无权估计（1.4）。为了了解 Sobole夫阶数 s能够降低到何种程度，我们用标量函数检验该估计。任何对每个系数代数均成立的上界，特别必须对 $\mathcal{M} = \mathbb{C}$成立。

命题 5.2。固定 $2 \leq p \leq \infty$ 和 $s \in \mathbb{R}$。假设定理 1.4中的无权估计（1.2(ii) 成立，且其常数与 F无关，对于每个标量 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$。那么

$$\begin{array}{ll} s \geq 0 & \text{if } p = 2, \\ s > 0 & \text{if } 2 < p \leq 4, \\ s \geq 1/2 - 2/p & \text{if } 4 < p < \infty, \\ s > 1/2 & \text{if } p = \infty. \end{array}$$

结合定理 1.2(ii)，这些条件给出了 s 在 $2 \leq p \leq 4$ 以及在 $p = \infty$时的确切值域。对于 $4 < p < \infty$，在 $s = 1/2 - 2/p$ 处的无权估计对于一般系数代数仍是一个悬而未决的问题。

证明。我们使用 $U(-t)$，因为复共轭会交换 $U(t)$ 和 $U(-t)$，并保持范数和径向频率支撑不变。取一个光滑环形截断函数 χ，使其在 $5/4 \leq |\eta| \leq 7/4$ 上等于一。关于变量 $\eta = \xi/N$，$\chi(\eta)(N^{-2} + |\eta|^2)^{s/2}$ 的四阶以内导数在 $N \geq 2$上一致有界。因此，根据引理 2.1，只要 $F_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 的傅里叶支撑位于 $5N/4 \lhd |\xi| < 7N/4$ 中，就有 $\|J^s F_N\|_p \lesssim_s N^s \|F_N\|_p$。

在 $p = 2$处，普朗歇尔恒等式和 $|I| = 1$给出 $\|U(-t) F_N\|_{L^2(I\times\mathbb{R}^2)} = \|F_N\|_2$。在（$F_N$ 1.4）中的每个环带上取一个非零 $1 \lesssim_s N^s$，得到 $s \geq 0$，因此 $2 < p \leq 4$，[18, 命题 82] 表明，对于任意大的 $N \geq 2$，存在非零 Schwartz 函数

$F_N \in \mathcal{S}$（$\mathbb{R}^2$），其傅里叶支撑位于 $5N/4 < |\xi| < 7N/4$ 且

$$\|U(-t)F_N\|_{L^{p,\infty}(I\times\mathbb{R}^2)} \geq c_p(\log N)^{1/2-1/p}\|F_N\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\,.$$

强时空 L^p 范数支配弱范数，因此（1.4）给出（log N）$^{1/2-1/p} \lesssim_{p,\ s} N^s$。由于 $1/2-1/p>0$，这要求 $s>0$。

对于 $4<p\leq\infty$，我们使用 [18, 命题 81] 中的聚焦例子来说明（1.4）要求 $s\geq\sigma$（p）。取 $t_0=3/2$ 以及一个非零径向函数 $\phi\in C_c^\infty$（$\mathbb{R}^2$），满足 $\phi\geq 0$支集包含于 $5/4<|\xi|<7/4$。对于实数 $N\geq 2$，定义 $F_N\in\mathcal{S}$（$\mathbb{R}^2$）如下：$\widehat{F}_N$（ξ） $=e^{it_0|\xi|}\phi$（ξ/N）。利用傅里叶反演及 $\xi=N\eta$，得到

$$U(-t)F_N(x)=\frac{N^2}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}e^{iN[x\cdot\eta+(t_0-t)|\eta|]}\phi(\eta)\,d\eta\,.$$

在 $E_N=\{(t,\ x)\in I\times\mathbb{R}^2:\ |x|+|t-t_0|<c/N\}$，当 $c>0$ 足够小时，对所有 $\eta\in\operatorname{supp}\phi$，指数函数的实部至少为 $1/2$。由于 $\phi\geq 0$ 和 $\int\phi>0$，我们在 E_N 上有 $|U(-t)F_N(x)|\gtrsim N^2$，其测度与 N^{-3} 相当。

为估计 $\|F_N\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$，我们首先使用普朗歇尔恒等式得到 $\|F_N\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ $=O(N)$。在极坐标 $\xi=N\rho\omega$ 中，令 $\rho>0$ 和 $\omega\in\mathbb{S}^1$，则 F_N 的傅里叶反演公式中的径向相位为 $N\rho(t_0+x\cdot\omega)$。对于 $|x|\leq t_0/2$，其 ρ阶导数至少为 $Nt_0/2$。对 ρ 中的 $\rho\phi(\rho\omega)$（这是一个具有紧支撑的振幅）分部积分 M 次，可得对于每个整数 $M\geq 1$， $F_N(x)$ $=O_M(N^{2-M})$。对于 $|x|>t_0/2$，角向积分为 $2\pi J_0(N\rho|x|)$，其中 J_0 是零阶第一类贝塞尔函数。根据 [16, (10.17.3)]，在 ϕ 的支集上，它满足 $O(N^{-1/2})$。前因子N^2随后给出 $\|F_N\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ $=O(N^{3/2})$。对 L^2范数和 L^∞范数进行插值，得到$\|F_N\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\lesssim N^{3/2-1/p}$，其中 $2\leq p<\infty$。

对于 $4<p<\infty$， E_N的下界以及（ $\|J^sF_N\|_p\lesssim_s N^s\|F_N\|_p$1.4）中的环域上界给出 $N^{2-3/p}\lesssim N^{s+3/2-1/p}$，因此 $s\geq 1/2-2/p$。对于 $p=\infty$，本质上确界给出 $N^2\lesssim N^{s+3/2}$，因此 $s\geq 1/2$。

为排除在 $p=\infty$ 处取等号，定义 $K=K/2$ 成立，如下取满足 $G\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 的 (1.4) $F=J^{-1/2}G$，便得到

$$|\langle K,G(-\cdot)\rangle|=|(U(-t_0)J^{-1/2}G)(0)|\leq C\|G\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,.$$

傅里叶反演表明 $(t,\ x)\mapsto U(-t)J^{-1/2}G(x)$ 连续，因此本质上确界控制了在 $(t_0,\ 0)$ 处的取值。由于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 在 $C_0(\mathbb{R}^2)$ 中稠密，且其对偶空间满足表示定理， K 将是一个有限测度。我们证明， K 在圆 $|x|=t_0$ 上有一个非零主值项。

对于 $\epsilon>0$，令 K_ϵ 为 $e^{-\epsilon|\xi|}\widehat{K}(\xi)$ 的傅里叶逆变换。则根据控制收敛定理，$K_\epsilon\to K$ 属于 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$。记 $r=|x|$，我们有

$$K_\epsilon(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-(\epsilon+it_0)\rho}\langle\rho\rangle^{-1/2}J_0(r\rho)\,\rho\,d\rho\,.$$

关于 $0\leq\rho\leq 1$ 的积分在 r 中局部一致收敛，当 $\epsilon\downarrow 0$时。对于 $\rho\geq 1$，大参数展开 [16, (10.17.3) 和第 10.17 节(iii)]给出

$$\langle\rho\rangle^{-1/2}\rho J_0(r\rho)=\sum_{\pm}e^{\pm ir\rho}\left(c_\pm(r)+\frac{d_\pm(r)}{\rho}\right)+O(\rho^{-2})\,,$$

其中 $c_\pm$，$d_\pm$光滑，且 $c_+(r) = e^{-i\pi/4}/\sqrt{2\pi r}$。余项在 t_0附近的 r 上一致，并且在极限中贡献一个局部有界函数。

相位为 $e^{-i(r+t_0)\rho}$ 的项在 $r = t_0$ 附近有光滑的阿贝尔极限。对于常数振幅，这可由公式 $e^{-i(r+t_0)}/[i(r+t_0)]$ 得出，该公式给出了在 $[1,\infty$ 上的积分的极限。对于振幅 $1/\rho$，作变量替换 $v = (r+t_0)\rho$，得到极限 $\int_{r+t_0}^{\infty} e^{-iv}\, dv/v$，其下端点始终为正。对于相位为 $e^{i(r-t_0)\rho}$、振幅为 $1/\rho$ 的项，令 $u = r - t_0$。若 $0 < |u| < 1$，则在 $A = |u|^{-1}$处分割积分。积分至 A 的部分的模至多为 $\log A$。通过一次分部积分，尾部可一致地关于 $\epsilon > 0$ 估计为

$$\left| \int_A^\infty e^{iu\rho} \frac{e^{-\epsilon\rho}}{\rho}\, d\rho \right| \le \frac{2e^{-\epsilon A}}{|u|A} \le 2\,.$$

此处 $e^{-\epsilon\rho}/\rho$递减至零。利用局部可积的上界 $2 + |\log |u||$ 作控制收敛可知，该阿贝尔极限关于 r 局部可积。

对于相位为 $e^{iu\rho}$ 的恒定振幅 $c_+(r)$，我们使用阿贝尔极限

$$\int_0^\infty e^{iu\rho - \epsilon\rho}\, d\rho = (\epsilon - iu)^{-1} \longrightarrow \pi\delta_0(u) + i\ \mathrm{pv}(1/u) \qquad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R})\,.$$

去掉 $0 < \rho < 1$ 会使极限改变一个光滑函数。因此，合并阿贝尔极限可得，在关于 $r = t_0$ 的环带上的径向变量中，

$$K(r) = \frac{ic_+(r)}{2\pi}\,\mathrm{pv}\,\frac{1}{r-t_0} + \frac{c_+(t_0)}{2}\delta_{t_0}(r) + h(r)\,, \qquad h \in L^1_{\mathrm{loc}}\,.$$

极坐标雅可比行列式 r 在该环带上光滑且有正的下界。远离该圆时，主值项是函数 $ic_+(r)/(2\pi(r-t_0))$，其绝对值积分在 t_0 附近发散，因为 $c_+(t_0) \neq 0$。δ项和 h 在任意更小的环带上定义有限测度。因此， K 不可能是有限测度，这排除了在 $p = \infty$ 处的$s = 1/2$ 。□

5.4. **量子傅里叶模型**。 我们描述量子环面和广义 Moyal 平面上傅里叶坐标中的平移，并验证其轨道在 L^p 上关于 $1 \le p < \infty$范数连续。第 5.5 节利用这些作用，将欧几里得时空估计迁移到这两个模型中，以证明定理1.3。

频率 ξ 在环面上取值于 $\mathbb{Z}^2$ ，在平面上取值于 $\mathbb{R}^2$ 。无论哪种情况，平移 $z \in \mathbb{R}^2$ 都会将 ξ 处的系数乘以 $e^{iz\cdot\xi}$。因此，用傅里叶变换为 m 的标量核对 y 中的 $-y$ 轨道进行积分，即可实现符号为 m的量子乘子。

固定一个实反对称 2×2 矩阵 Θ。我们使用两个冯·诺依曼代数 $\mathcal{Q}_\Theta$，每个代数都配备一个迹，以及由 $\mathbb{R}^2$ 通过保迹自同构给出的作用 $\gamma\ \gamma_z:\ \ \mathcal{Q}_\Theta \to \mathcal{Q}_\Theta$ ，其中 $z \in \mathbb{R}^2$。

在量子环面上，两个酉生成元满足 $U_jU_k = e^{2\pi i\Theta_{jk}}U_kU_j$ for$j,\ \ k \in \{1,2\}$。对于 $n = (n_1,\ n_2) \in \mathbb{Z}^2$，有序单项式为 $U^n = U_1^{n_1}U_2^{n_2}$，其中第一个生成元始终位于左侧，$U_j^0 = 1$并且对于正整数 k，$U_j^{-k} = (U_j^*)^k$。对于符号 $m\colon\ \ \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$，乘子 $m(D_\Theta)$ 作用于由单项式张成的空间，并将其取值于同一空间。在单项式上，这些约定给出

$$\mathrm{tr}_\Theta(U^n) = 1_{n=0}, \qquad \gamma_z(U^n) = e^{iz\cdot n}U^n, \qquad m(D_\Theta)U^n = m(n)U^n.$$

迹表示中多项式代数的弱闭包是量子环面。规范作用通过 $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ 因子化，并保持迹，因而保持每个 L^p 范数。对于 $1 \le p < \infty$，映射 $z \mapsto \gamma_z x$ 对于每个 $x \in L^p$都是范数连续的，这由多项式上的特征标公式和稠密性可得。规范作用及其在半交换 L^p 空间中的轨道刻画见 Chen、Xu 和 Yin [3, 命题 2.1 和推论 2。2]。

在广义 Moyal 平面上，$\mathcal{Q}_\Theta$ 是$\mathbb{R}^2$ 在其正则表示下的扭曲群冯·诺依曼代数，其生成酉元为 $\lambda_\Theta(\xi) \in \mathcal{Q}_\Theta$。对于 ξ，$\eta \in \mathbb{R}^2$它们满足

$$\lambda_\Theta(\xi)\lambda_\Theta(\eta) = e^{i\langle \eta, \Theta\xi\rangle/2}\lambda_\Theta(\xi+\eta).$$

对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$，弱算子积分 $\lambda_\Theta(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi)\lambda_\Theta(\xi)\,d\xi$属于 $\mathcal{Q}_\Theta$。对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$，Plancherel 迹满足 $\mathrm{tr}_\Theta(\lambda_\Theta(f)) = f(0)$，且 $\|\lambda_\Theta(f)\|_{L^2(\mathcal{Q}_\Theta)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$。我们将 $\mathcal{S}(\mathcal{Q}_\Theta) = \lambda_\Theta(\mathcal{S}(\mathbb{R}^2))$称为量子 Schwartz 类。对于可测符号 $m\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$，作用于 $L^2(\mathcal{Q}_\Theta)$上的乘子 $m(D_\Theta)$的定义域为 $\{\lambda_\Theta(f)\colon f, mf \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$，其中使用由普朗歇尔恒等式给出的 λ_Θ 的 L^2 延拓。在傅里叶坐标下，对偶作用和乘子为

$$\gamma_z(\lambda_\Theta(f)) = \lambda_\Theta(e^{iz\cdot\xi}f(\xi)), \qquad m(D_\Theta)\lambda_\Theta(f) = \lambda_\Theta(mf).$$

对 γ_z 的公式保持扭曲乘积和迹，并可扩展为正规保迹自同构。关于这些模型，参见 [9, 第 2] 节和 [10, 命题 6.1]。对于施瓦茨 f，系数 $(e^{iz\cdot\xi}-1)f(\xi)$ 在 L^2_ξ和 L^1_ξ中均趋于零，当 $z \to 0$时。普朗歇尔恒等式和酉积分估计 $\|\lambda_\Theta(f)\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_\Theta)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ 因此给出这些元素在 L^2 中的轨道连续性，以及在算子范数下的连续性。插值给出 $2 < p < \infty$在 L^p 中的连续性。

对于任一模型，令 $\mathcal{D} = \mathcal{C}\bar{\otimes}\mathcal{Q}_\Theta$ 配备乘积迹，其中 $\mathcal{C}$ 是任意半有限迹系数代数。对于 $z \in \mathbb{R}^2$，记 $\beta_z = \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \otimes \gamma_z\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$。由于 β_z 保持乘积迹，对于任意 $z \in \mathbb{R}^2$，$1 \le p \le \infty$，有$\|\beta_z x\|_{L^p(\mathcal{D})} = \|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$，且 $x \in L^p(\mathcal{D})$。对于 $2 \le p < \infty$，环面上的量子多项式在 $L^p(\mathcal{Q}_\Theta)$ 中稠密，而平面上的量子 Schwartz 类由 [9, 第 2.2] 节知在 $L^p(\mathcal{Q}_\Theta)$ 中稠密。结合第 2.1 节中初等张量有限和的稠密性，可将轨道连续性扩展到每个 $x \in L^p(\mathcal{D})$。迹前对偶 $L^1(\mathcal{D})$ 上的连续性将使我们能够通过对偶在 $p = \infty$ 处定义 (5.6)。给定$d = u|d| \in L^1(\mathcal{D})$，令 $a = u|d|^{1/2}$ 和$b = |d|^{1/2}$。二者均属于 $L^2(\mathcal{D})$ 并

$$\|\beta_z d - d\|_{L^1(\mathcal{D})} \le \|\beta_z a - a\|_{L^2(\mathcal{D})}\|b\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|a\|_{L^2(\mathcal{D})}\|\beta_z b - b\|_{L^2(\mathcal{D})} \longrightarrow 0.$$

对于支撑投影具有有限迹的有界 $d \in \mathcal{D}$，在 L^1 和 L^2 范数之间插值可得$\|\beta_z d - d\|_{L^p(\mathcal{D})} \to 0$，其中 $1 < p < 2$。由于 β_z 保持$L^p(\mathcal{D})$范数，这些元素的稠密性使连续性得以扩展到整个 $L^p(\mathcal{D})$。特别地，对于每个 $x \in L^p(\mathcal{D})$和 $1 \le p < \infty$，$z \mapsto \beta_z x$ 从 $\mathbb{R}^2$ 到 $L^p(\mathcal{D})$是范数连续的。

设（Λ_Θ，μ_Θ）为环面上带 $\mathbb{Z}^2$ 计数测度的空间，或为平面上带 $\mathbb{R}^2$ 勒贝格测度的空间。环面单项式构成 $L^2(\mathcal{Q}_\Theta)$的标准正交基，因为对于 m，$n \in \mathbb{Z}^2$，$\mathrm{tr}_\Theta((U^m)^*U^n) = 1_{m=n}$，且多项式是稠密的。在平面上，普朗歇尔恒等式将 $\lambda_\Theta(f)$与 f 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$中的空间对应起来。将任一对应与 $L^2(\mathcal{C})$上的恒等式进行张量化，可得到一个酉映射 $x \mapsto \widehat{x}_\Theta$，它将 $L^2(\mathcal{D})$映到$L^2(\Lambda_\Theta,\ \mu_\Theta;\ L^2(\mathcal{C}))$。

我们将 $|D_\Theta| = \sqrt{-\Delta_\Theta}$ 和 $J_\Theta = (1-\Delta_\Theta)^{1/2}$ 分别记作符号 $|\xi|$ 和 $\langle\xi\rangle$ 的乘子。令 Dom_2 表示 $L^2(\mathcal{D})$ 中的定义域，

$$\mathrm{Dom}_2(|D_\Theta|) = \left\{ x \in L^2(\mathcal{D}) : \int_{\Lambda_\Theta} |\xi|^2 \|\widehat{x}_\Theta(\xi)\|^2_{L^2(\mathcal{C})}\, d\mu_\Theta(\xi) < \infty \right\},$$
$$\mathrm{Dom}_2(J_\Theta) = \left\{ x \in L^2(\mathcal{D}) : \int_{\Lambda_\Theta} (1+|\xi|^2) \|\widehat{x}_\Theta(\xi)\|^2_{L^2(\mathcal{C})}\, d\mu_\Theta(\xi) < \infty \right\}.$$

5.5. 时空转移原理与量子波。我们将欧几里得时空估计应用于轨道 $z \mapsto \beta_z x$，方法是将其限制在一个正方形上。比较欧氏卷积与轨道上的算子时，平移 $y \in \mathbb{R}^2$ 所产生的误差支集位于该正方形与其平移后的正方形的对称差上。对于半有限迹冯诺依曼代数 $\mathcal{D}$，记 $\mathcal{S}_\mathcal{D} = L^\infty(\mathbb{R}^2)\bar{\otimes}\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}_I = L^\infty(I)\bar{\otimes}\mathcal{D}$，二者均取乘积迹。恒等式 (2.1) 给出 $L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D}) = L^p(\mathbb{R}^2;\, L^p(\mathcal{D}))$ 和 $L^p(\mathcal{D}_I) = L^p(I;\, L^p(\mathcal{D}))$，且对 $1 \le p < \infty$ 为等距映射。

命题 5.3。设 $1 \le p < \infty$，且设 β 是 $\mathbb{R}^2$ 在 $\mathcal{D}$ 上由保持法向迹的 $*$-自同构构成的作用，其在 $L^p(\mathcal{D})$ 上具有范数连续轨道。假设联合可测核 $(t,y) \mapsto K_t(y)$ 从 $I \times \mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{C}$，其中 $I = [1,2]$，满足对某个共同的 $k \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 有 $|K_t(y)| \le k(y)$，并且

$$\|K_t * F\|_{L^p(I;L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D}))} \le C\|F\|_{L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})} \qquad (F \in L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})).$$

对于 $t \in I$，定义 $Q_t :\ L^p(\mathcal{D}) \to L^p(\mathcal{D})$ 如下：

$$Q_t x = \int_{\mathbb{R}^2} K_t(y)\beta_{-y}x\, dy \tag{5.6}$$

对于 $x \in L^p(\mathcal{D})$。时空映射 $x \mapsto (t \mapsto Q_t x)$ 满足

$$\|Q_t x\|_{L^p(I;L^p(\mathcal{D}))} \le C\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}. \tag{5.7}$$

证明。我们通过将欧几里得估计应用于 $x \in L^p(\mathcal{D})$ 的局部化轨道，来证明 (5.7)。连续轨道 $y \mapsto \beta_{-y}x$ 在 $L^p(\mathcal{D})$ 中具有可分的闭线性张成空间。由于 $K_t(y)$ 联合可测，映射 $(t,y) \mapsto K_t(y)\beta_{-y}x$ 强可测。上界 $\|K_t(y)\beta_{-y}x\|_{L^p(\mathcal{D})} \le k(y)\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 使 (5.6) 可作为 Bochner 积分成立。博赫纳-富比尼定理推出 $t \mapsto Q_t x$ 强可测，且 $\|Q_t x\|_{L^p(\mathcal{D})} \le \|k\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$。对于 $R > 0$，令 $B_R = [-R,R]^2$，$w_R = |B_R|^{-1/p}1_{B_R}$，并定义 $F_R :\ \mathbb{R}^2 \to L^p(\mathcal{D})$ 如下：$F_R(z) = w_R(z)\beta_z x$。由于 $\|w_R\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = 1$ 且 β_z 保持 $L^p(\mathcal{D})$ 范数，

$$\|F_R\|_{L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})} = \|x\|_{L^p(\mathcal{D})}, \qquad \|w_R(z)\beta_z(Q_t x)\|_{L^p(I\times\mathbb{R}^2;L^p(\mathcal{D}))} = \|Q_t x\|_{L^p(\mathcal{D}_I)}.$$

事实上，$\beta_z(Q_t x) = \int_{\mathbb{R}^2} K_t(y)\beta_{z-y}x\, dy$，这也给出了在 (t,z) 中的联合强可测性。将两个积分相减可得

$$(K_t * F_R)(z) - w_R(z)\beta_z(Q_t x) = \int_{\mathbb{R}^2} K_t(y)[w_R(z-y) - w_R(z)]\beta_{z-y}x\, dy\,.$$

对于每个 $y \in \mathbb{R}^2$，由迹保持和 $|I| = 1$ 得到

$$\big\|K_t(y)[w_R(z-y) - w_R(z)]\beta_{z-y}x\big\|_{L^p(I\times\mathbb{R}^2;L^p(\mathcal{D}))} \le k(y)\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}\|w_R(\cdot - y) - w_R\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\,.$$

应用闵可夫斯基积分不等式以及关于 $K_t * F_R$ 的假设，得到

$$\|Q_t x\|_{L^p(\mathcal{D}_I)} \le C\|x\|_{L^p(\mathcal{D})} + \|x\|_{L^p(\mathcal{D})} \int_{\mathbb{R}^2} k(y) \left(\frac{|(B_R + y) \triangle B_R|}{|B_R|} \right)^{1/p} dy \,,$$

其中面积比为 $\|w_R(\cdot - y) - w_R\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p$。对于每个固定的 y，该比值趋于零，当 $R \to \infty$时，且其至多为二。控制收敛证明了（5.7）。 □

现在证明定理 1.3，首先利用第 (ii) 部分的环带估计来证明第 (i) 部分，然后建立第 (iii) 部分的临界估计。

对于环带估计，我们将命题 5.3 应用于 $\beta_z = \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \otimes \gamma_z$，在任一量子模型上。对于 $1 \le p < \infty$ 和一个标量核 $K \in L^1(\mathbb{R}^2)$，将（5.6）中核为 K 的算子记为 A_K： $L^p(\mathcal{D}) \to L^p(\mathcal{D})$。对于 $x \in L^2(\mathcal{D})$，在 $A_K x$ 的 Bochner 积分中取量子傅里叶变换，得到

$$\widehat{A_K x}_\Theta(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}^2} K(y) e^{-iy\cdot\xi} \, dy \right) \widehat{x}_\Theta(\xi) = \widehat{K}(\xi) \widehat{x}_\Theta(\xi) \,.$$

第一个等式由 β_{-y} 的作用公式以及与 $L^2(\Lambda_\Theta, \mu_\Theta; L^2(\mathcal{C}))$ 中的元素配对后应用富比尼定理得到。若 $x \in L^2(\mathcal{D}) \cap L^p(\mathcal{D})$，则轨道在范数为 $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|\cdot\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 的交集中连续。该范数下的积分与 $L^2(\mathcal{D})$ 和 $L^p(\mathcal{D})$ 中的积分一致。

固定一个实数 $N \ge 2$ 和一个截断函数 $\psi \in C_c^\infty((0,\infty))$。对于 $t \in I$，令 $m_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 为 $m_t(\xi) = e^{it|\xi|}\psi(|\xi|/N)$。对于固定的 N，符号 m_t 具有远离零点的公共紧支撑，并且其所有导数关于 t 一致有界。傅里叶反演给出联合连续的核 $K_t = \check{m}_t$，而按照 (2.3) 中的方法进行分部积分可得 $|K_t(y)| \le C_{N,\psi}(1 + |y|^2)^{-2}$。关于 A_{K_t} 的傅里叶公式将 Q_t 与 $U_\Theta(t)\psi(|D_\Theta|/N)$ 在 $L^2(\mathcal{D}) \cap L^p(\mathcal{D})$ 上对应起来。将 (5.7) 与 $U(t)$ 的欧几里得环带估计结合，便可对支集包含于 $(1/2, 2)$ 中的 $2 \le p < \infty$ 和 ψ 证明定理1.3(ii)。对于支集包含于 $(0,\infty)$ 的任意固定紧子区间内的 ψ，使用第 5.1 节中 (1.3) 的固定环带形式，并令 $m(\eta) = \psi(|\eta|)$。将其上界代入关于 $K_t = \check{m}_t$ 的 (5.7)，即可得到关于 Q_t 的因子 $N^{\sigma(p)}[\log(2+N)]^{\beta(p)}$。

对于 $p = \infty$ 和 $\psi \in C_c^\infty((1/2, 2))$，在弱星意义下通过 (5.6) 定义 Q_t。对于与 $d \in L^1(\mathcal{D})$ 配对的 $\langle d, x\rangle = \mathrm{tr}_{\mathcal{D}}(d^* x)$，其预伴随算子为 $d \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} K_t(y)\beta_y d \, dy$。根据 L^1 轨道连续性，该 Bochner 积分存在，且其范数至多为 $\|K_t\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|d\|_{L^1(\mathcal{D})}$。对支撑投影具有有限迹的有界 d 进行检验可知，该弱星积分与 $\mathcal{D} \cap L^2(\mathcal{D})$ 上的傅里叶乘子一致。因此，上界 (5.1) 给出了算子范数下的一致环带估计，其中对 t 一致。固定 N，将 (2.3) 应用于 $m_u - m_t$，视其为 I 中的 $u \to t$，可知 $t \mapsto K_t$ 在 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中连续。因此，$t \mapsto Q_t x$ 在算子范数下连续，并通过取值于 $\mathcal{D}$ 的阶梯函数进行一致逼近而定义了 $\mathcal{D}_I$ 的一个元素。

由于每个 β_y、$y \in \mathbb{R}^2$ 都保持伴随算子不变，轨道公式 (5.6) 给出 $(A_K x)^* = A_K(x^*)$，其中 $K \in L^1(\mathbb{R}^2)$。等式 $\widehat{K}(\xi) = \overline{\widehat{K}(-\xi)}$ 随即通过将 $U_\Theta(t)$ 的上界应用于带截断函数 ψ 的 x^*，给出 $U_\Theta(-t)$ 在 I 上的估计。对于 $p = \infty$处的弱星积分，通过对迹前对偶进行测试并对核取共轭，可得到同样的恒等式。

我们使用环带估计来给出量子柯西问题解的上界。固定 $2 \le p < \infty$。令 x、y属于 $c \otimes U^n$的张成空间，$n \in \mathbb{Z}^2$在环面上，或属于 $c \otimes \lambda_\Theta(f)$，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$，在平面上。在这两种情况下，$c \in \mathcal{C}$ 均有上界，且其支撑投影具有有限迹。定理 1.3之前给出的 $u_\Theta(t;\ x、\ y)$ 的傅里叶乘子公式给出了

$$u_{tt} - \Delta_\Theta u = 0, \qquad u(0) = x, \qquad u_t(0) = y.$$

事实上，标量傅里叶方程为 $u_{tt} + |\xi|^2 u = 0$，其解乘子为 $\cos(t|\xi|)$ 和 $\sin(t|\xi|)/|\xi|$。为证明 (1.7) 对 $s > \sigma(p$成立，取自第 5.2 节的分割。低频项使用 χ_0，环带项使用 $\varphi(2^{-j}\cdot)$、$j \ge 1$。作用于 $J_\Theta^s x$和 $J_\Theta^{s-1} y$上的低频符号为

$$\chi_0(\xi)\cos(t|\xi|)\langle\xi\rangle^{-s}, \qquad \chi_0(\xi)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\langle\xi\rangle^{1-s}.$$

余弦商和正弦商都是 $|\xi|^2$ 在零附近的光滑函数，且正弦商在此处的值为 t。紧支撑和导数界（2.3）为 $t \in I$ 给出一致的核范数。在（5.6）中使用 $\|\beta_z a\|_{L^p(\mathcal{D})} = \|a\|_{L^p(\mathcal{D})}$，它们对（1.7）的贡献分别有上界 $C_{p,\ s}\|J_\Theta^s x\|_{L^p(\mathcal{D})}$和 $C_{p,\ s}\|J_\Theta^{s-1} y\|_{L^p(\mathcal{D})}$。

在每个高频环带上，分别对 $J_\Theta^s x$ 和 $J_\Theta^{s-1} y$ 应用符号为

$$\varphi(2^{-j}\xi)\langle\xi\rangle^{-s}, \qquad \varphi(2^{-j}\xi)|\xi|^{-1}\langle\xi\rangle^{1-s}, \qquad j \ge 1\,.$$

乘以 2^{js}后，它们关于缩放变量$\eta = 2^{-j}\xi$ 的四阶及以下导数在 j上一致有界。由（2.3）和（5.6），两个乘子的算子范数均不超过 $C_s 2^{-js}$。令 $\widetilde{\varphi}$（$2^{-j}\cdot$），并应用量子环带估计，其中固定的径向截断函数 $\widetilde{\varphi}$ 支集包含于远离零点的紧环域上，且在 $\operatorname{supp}\varphi$上等于一。将此估计应用于 $U_\Theta(t)$ 和 $U_\Theta(-t)$，对每个 j使用三角不等式，再求和，得到

$$\begin{aligned}&\sum_{j\ge1}\|\varphi(2^{-j}D_\Theta)u_\Theta(t;x,y)\|_{L^p(\mathcal{D}_I)}\\ &\quad\le C_{p,s}\big(\|J_\Theta^s x\|_{L^p(\mathcal{D})} + \|J_\Theta^{s-1} y\|_{L^p(\mathcal{D})}\big)\sum_{j\ge1} 2^{-j(s-\sigma(p))}(1+j)^{\beta(p)}\,.\end{aligned}$$

因此，对于 $s > \sigma(p)$，$\sum_{j\ge1}\varphi(2^{-j}D_\Theta)u_\Theta(t;\ x,y)$ 在 $L^p(\mathcal{D}_I)$ 中绝对收敛。为了在加上 $\chi_0(D_\Theta)u_\Theta(t;\ x,y)$ 后确定其和，回想一下，在张量张成空间上，$x,y \in L^2(\mathcal{D})$。保留环带 $1 \le j \le M$ 和低频项，会将 $u_\Theta(t;\ x,y)$ 的傅里叶系数乘以 $\chi_0 + \sum_{j=1}^M \varphi(2^{-j}\cdot)$。由有限重叠可知这些乘子一致有界，且逐点收敛到一。对 $t \in I$，余弦商和正弦商均有界，因此由普朗歇尔定理和控制收敛可知，它们在 $L^2(\mathcal{D}_I)$ 中收敛到 $u_\Theta(t;\ x,y)$。L^2 和 L^p 的极限相同，因为二者都蕴含乘积迹的依测度收敛。低频和高频上界现已证明张量张成空间上的（1.7）。该估计将解映射延拓至 $\|J_\Theta^s x\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 和 $\|J_\Theta^{s-1} y\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 中的完备化。

在端点 $p = 2$, $s = 0$，利用 $|\cos(tr)| \le 1$, $\langle r\rangle|\sin(tr)|/r \le C_I$ 以及量子傅里叶变换与 $L^2(\mathcal{C})$ 上的恒等映射的张量积所对应的普朗歇尔恒等式。由于

$|I| = 1$，余弦贡献的时空范数至多为 $\|x\|_{L^2(\mathcal{D})}$，而正弦商项的时空范数至多为 $C_I \|J_\Theta^{-1} y\|_{L^2(\mathcal{D})}$。

还需证明 Sobole夫阶数 $\sigma(p)$ 下的估计。对于 $2 < p < \infty$ 和 B，C 如（1.5），令 $D_w = J^{\sigma(p)} L_{B,C}(J)$。一旦证明 $G \mapsto (U_\Theta(t) D_w^{-1}{}_{,\Theta} G)_{t\in I}$ 是从 $L^p(\mathcal{D})$ 到 $L^p(\mathcal{D}_I)$ 的有界算子，定理 1.3(iii) 的半波断言便得证。我们首先转移具有紧频率支撑的算子。记

$$d_w(\xi) = \langle \xi \rangle^{\sigma(p)} L_{B,C}(\langle \xi \rangle), \qquad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

为 D_w 的符号。函数 d_w 和 d_w^{-1}光滑，且每个导数至多具有多项式增长。因此，乘以任一函数都保持平面上的施瓦茨类；在环面上则保持有限傅里叶和。因此$D_{w,\Theta}$ 将这些初等张量张成的空间双射映到自身。其像在 $L^p(\mathcal{D})$ 中稠密，因此$D_{w,\Theta}$ 可延拓为从$\|D_{w,\Theta} x\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 中的完备化到 $L^p(\mathcal{D})$的等距同构。

选取在零点附近等于 1 的 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$。对于每个整数 $m \geq 1$，局部化的欧几里得算子具有符号 $e^{it|\xi|}\chi(2^{-m}\xi)/d_w(\xi)$。根据 $U(t)$ 的欧几里得加权估计以及卷积界 $\|\check{\chi}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$，欧几里得时空范数关于 m 保持一致有界。固定 m 后，满足 $1 \lesssim |\xi| \lesssim 2^m$ 的有限多个壳层具有关于 t 一致的共同可积核界。在低频处，我们写作 $e^{it|\xi|} = 1 + (e^{it|\xi|} - 1)$，并分离出光滑项 $\chi_0(\xi)\chi(2^{-m}\xi)/d_w(\xi)$。在壳层 $|\xi| \simeq 2^k$ 上，当 $k \in \mathbb{Z}$、$k \leq 0$ 时，重标度因子 $e^{it2^k|\eta|} - 1$、$\eta = 2^{-k}\xi$ 及其前四阶导数关于 $t \in I$ 一致地为 $O(2^k)$。利用第 5.2 节的环带划分 ρ，该壳层上的符号为

$$\rho(2^{-k}\xi)\chi_0(\xi)\chi(2^{-m}\xi)(e^{it|\xi|} - 1)/d_w(\xi)\,.$$

其在 $z \in \mathbb{R}^2$ 处的傅里叶逆变换由第 5.2 节中的低频计算可知，被 $C 2^{3k}(1 + 2^k|z|)^{-4}$ 控制。对这些主控函数的 L^1 范数在 $k \leq 0$ 上求和。局部化核之和给出一个联合可测核 K_m，$_t$ 其傅里叶变换为 $e^{it|\xi|}\chi(2^{-m}\xi)/d_w(\xi)$，并且对于每个固定的 m，在 $t \in I$ 上具有一个共同的可积主控函数。令 T_m： $L^p(\mathcal{D}) \to L^p(\mathcal{D}_I)$ 由 $(T_m G)(t) = A_{K_m,\ t} G$ 定义。根据 (5.7)，T_m 的范数与 m 无关地有界。

为了在 $m \to \infty$ 时令 T_m 趋于极限，对每个整数 $l \geq 1$，写成 $\chi_l(\xi) = \chi(2^{-l}\xi)$ 和 $P_l = \chi_l(D_\Theta) = A_{\check{\chi}_l}$。重新缩放 $\check{\chi}_l(y) = 2^{2l}\check{\chi}(2^l y)$ 以及 $\int_{\mathbb{R}^2} \check{\chi}(y)\,dy = \chi(0) = 1$给出，对于每个 $G \in L^p(\mathcal{D})$，

$$\|P_l G - G\|_{L^p(\mathcal{D})} \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\check{\chi}(y)|\, \|\beta_{-2^{-l}y} G - G\|_{L^p(\mathcal{D})}\, dy \longrightarrow 0 \qquad (l \to \infty)$$

由轨道连续性和控制收敛定理。

对于 $K, L \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 和 $G \in L^p(\mathcal{D})$，由博赫纳-富比尼定理和作用律可得

$$A_K A_L G = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} K(y) L(v) \beta_{-(y+v)} G\, dv\, dy = A_{K * L} G\,.$$

被积函数的范数至多为 $|K(y)L(v)|\|G\|_{L^p(\mathcal{D})}$，因此积分次序的变化是成立的。固定 l，对于每个充分大的整数 m，都有 $\chi_m \chi_l = \chi_l$。于是，$K_{m,\ t} * \check{\chi}_l$ 的傅里叶变换为 $e^{it|\xi|}\chi_l(\xi)/d_w(\xi)$，且与 m 无关。由

L^1 上傅里叶变换的唯一性以及复合规则可知，对于所有充分大的 m， n，都有 $T_m P_l G = T_n P_l G$。现在利用共同上界 $\|T_m\| \le C$，得到

$$\|T_m G - T_n G\|_{L^p(\mathcal{D}_I)} \le 2C \|G - P_l G\|_{L^p(\mathcal{D})} .$$

由于 $\|G - P_l G\|_{L^p(\mathcal{D})} \to 0$，序列 $T_m G$ 在 $L^p(\mathcal{D}_I)$ 中是柯西序列。将其极限记为 $T_1 G$。则 $\|T_1 G\|_{L^p(\mathcal{D}_I)} \le C \|G\|_{L^p(\mathcal{D})}$。

对于初始张量生成空间中的 x，$G = D_{w,\Theta} x$ 属于 $L^2(\mathcal{D}) \cap L^p(\mathcal{D})$。$A_{K_m,t}$ 的 L^2乘子公式表明，$T_m G = U_\Theta(t) \chi_m(D_\Theta) x$。根据普朗歇尔定理和控制收敛定理，$\chi_m(D_\Theta) x \to x$ 在 $L^2(\mathcal{D})$ 中。由于 $U_\Theta(t)$ 在 $L^2(\mathcal{D})$ 上是酉的，并且 $|I| = 1$，我们有 $T_m G \to U_\Theta(t) x$ 在 $L^2(\mathcal{D}_I)$ 中。根据依测度收敛极限的唯一性，L^2 和 L^p 的极限相同。因此，在张量张成空间上，$(T_1(D_{w,\Theta} x))(t) = U_\Theta(t) x$，并且在 $\|D_{w,\Theta} x\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 中进行完备化即可证明加权半波估计。

对于 $G \in L^p(\mathcal{D})$，定义 $T_{-1} G = (T_1(G^*))^*$，其中外部伴随作用于 $T_1(G^*)$ 中的 $L^p(\mathcal{D}_I)$。于是 $\|T_{-1} G\|_{L^p(\mathcal{D}_I)} \le C \|G\|_{L^p(\mathcal{D})}$。由于 d_w 为实偶函数，$(D_{w,\Theta} x)^* = D_{w,\Theta} x^*$ 在初始张量生成空间上成立。对于 $\xi \in \mathbb{R}^2$，按照 (2.2) 令 $\chi_m^\sharp(\xi) = \chi_m - \xi$。将轨道伴随恒等式应用于 $K_{m,t}$ 可得

$$\big[(T_m(D_{w,\Theta} x^*))(t)\big]^* = U_\Theta(-t) \chi_m^\sharp(D_\Theta) x .$$

由于 $m \to \infty$，左侧在 $L^p(\mathcal{D}_I)$ 中收敛到 $T_{-1}(D_{w,\Theta} x)$。右侧在 $L^2(\mathcal{D}_I)$ 中收敛到 $U_\Theta(-t) x$，因为有界符号 $\chi_m^\sharp$ 逐点收敛于 1。两个极限在测度意义下相等，因此 T_{-1} 给出了 $U_\Theta(-t)$ 在 I 上的加权估计。

为证明 $u_\Theta(t; x, y)$ 的加权估计，将 $G_x = D_{w,\Theta} x$ 和 $G_y = J_\Theta^{-1} D_{w,\Theta} y$ 置于 x, y 的初始张量生成空间中。位移项为 $\frac{1}{2}(T_1 + T_{-1}) G_x$。利用 χ_0 和 $1 - \chi_0$ 对速度项进行分解。低频算子 S_{low}： $L^p(\mathcal{D}) \to L^p(\mathcal{D}_I)$ 作用于 G_y 时，其符号为

$$\chi_0(\xi) \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \frac{\langle \xi \rangle}{d_w(\xi)} \qquad (t \in I,\ \xi \in \mathbb{R}^2) .$$

该符号光滑且具有紧支撑，并且对于 $t \in I$ 具有一致有界导数。由（2.3）和（5.6），$\|S_{\mathrm{low}} G_y\|_{L^p(\mathcal{D}_I)} \le C \|G_y\|_{L^p(\mathcal{D})}$。

对于高频速度项，定义 a： $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为 $a(\xi) = (1 - \chi_0(\xi)) \langle \xi \rangle / |\xi|$，其中 $\xi \neq 0$ 且 $a(0) = 0$。单位分解给出

$$a(\xi) = 1 - \chi_0(\xi) + \sum_{j \ge 1} \varphi(2^{-j} \xi) \left(\frac{\langle \xi \rangle}{|\xi|} - 1 \right) ,$$

其中每个环形符号在原点附近为零。在缩放变量 $\eta = 2^{-j} \xi$ 上 $\operatorname{supp} \varphi$ 中，

$$\frac{\langle 2^j \eta \rangle}{2^j |\eta|} - 1 = \frac{2^{-2j} |\eta|^{-2}}{\sqrt{1 + 2^{-2j} |\eta|^{-2}} + 1}, \qquad j \ge 1 .$$

这个表达式及其关于 η 直到四阶的导数在固定环域上均为 $O(2^{-2j})$。由 (2.3)，环带核的 L^1 范数可求和。利用 (5.6) 处理环带核以及 $\check{\chi}_0$，因此可将 $a(D_\Theta$定义为 $L^p(\mathcal{D}$ 上的有界算子。在张量张成空间上，它与符号为 a的乘子一致，这是由 L^2 公式得到的A_K。符号 a 是光滑的，其导数至多呈多项式增长，因此该乘子保持张量张成空间不变。

在张量张成空间上，恒等式 $\sin(t|\xi|) = (e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|})/(2i)$ 给出完整解

$$u_\Theta(\cdot; x, y) = \frac{T_1 + T_{-1}}{2} G_x + S_{\mathrm{low}} G_y + \frac{T_1 - T_{-1}}{2i} a(D_\Theta) G_y \,.$$

T_1、T_{-1}、S_{low} 和 $a(D_\Theta)$ 的上界给出 $\|u_\Theta(\cdot;\ x、\ y)\|_{L^p(\mathcal{D}_I)} \le C\,(\|G_x\|_{L^p(\mathcal{D})} + \|G_y\|_{L^p(\mathcal{D})})$。分别在$\|D_{w、\Theta}x\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 以及$\|J_\Theta^{-1} D_{w、\Theta}y\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 中取完备化后，即可得到定理 1.3(iii)的波估计。

6. Maximal inequalities and convergence for generalized circular means

我们证明 1.9 中的全半径估计 $\mathcal{A} = L^\infty(\mathbb{R}^2) \bar{\otimes} \mathcal{M}$，其赋有乘积迹。对于 $2 \le p < \infty$ 和 $t|\xi| \asymp 2^j$，局部平滑以及贝塞尔符号的衰减给出了均值及其半径导数在 $1 \le t \le 2$上的一个上界。利用这组估计，我们构造正主控函数，其范数在$j \ge 1$ 上对所有半径求和有限，只要 $\Re\alpha > -g(p)$。第 6.3 节将极大估计推广至保迹作用。第 6.4 节利用这一控制证明，当半径趋于零时的双边几乎一致收敛。

对于 $t > 0$ 和 $\alpha \in \mathbb{C}$，圆平均 A_t^α保持初等张量 $f \otimes a$的线性张成空间，其中 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$，且 $a \in \mathcal{M}$ 在支撑投影具有有限迹时有上界。其空间傅里叶符号为 $\xi \mapsto m_\alpha(t|\xi|)$，其中 $\xi \in \mathbb{R}^2$，且 $m_\alpha : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ 由第一类贝塞尔函数 J_α 及其级数展开确定，适用于 $r > 0$

$$m_\alpha(r) = \pi 2^\alpha r^{-\alpha} J_\alpha(r) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-r^2/4)^n}{n!\,\Gamma(n+1+\alpha)}\,. \tag{6.1}$$

我们在 $r^{-\alpha}$中使用实对数。级数中的整个伽马函数的倒数给出 $m_\alpha(0) = \pi/\Gamma(1+\alpha)$，包括在 Γ的极点处。当 $\Re\alpha > 0$时，核 $K_t^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^2)$对几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^2$ 由下式给出

$$K_t^\alpha(y) = \frac{1}{t^2\Gamma(\alpha)}(1 - |y|^2/t^2)_+^{\alpha-1}\,. \tag{6.2}$$

事实上，在 $r = t|\xi|$ 处，极坐标积分给出

$$\widehat{K_t^\alpha}(\xi) = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1} J_0(sr)\, s\, ds.$$

代入 $J_0(sr)$ 的幂级数。对于每个固定的 r，该级数在$0 \le s \le 1$ 上绝对且一致收敛。作变量代换 $v = s^2$，得到

$$\int_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1} s^{2n+1}\, ds = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(n+1+\alpha)}.$$

这就证明了可积范围内的（6.1）。在 $|y| = t$ 附近，写作 $y = t\sqrt{1-v}\,\omega$，其中$v = 1 - |y/t|^2$ 且 $\omega \in S^1$。对于一个支集位于圆周附近窄环域内的光滑测试函数 ϕ，令 $\Phi(v) = \int_{S^1} \phi(t\sqrt{1-v}\,\omega)\, d\omega$，其中 $d\omega$ 是单位圆上的弧长。函数 Φ 是关于 v的光滑测试函数，在坐标区间外延拓为零。记 $r = |y|$，得到 $r\,dr = -\frac{1}{2}t^2\,dv$，因此对于 $\Re\alpha > 0$，我们有

$$\langle K_t^\alpha, \phi \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{v_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \Phi \right\rangle .$$

恒等式

$$\frac{v_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \partial_v^k \frac{v_+^{\alpha+k-1}}{\Gamma(\alpha+k)} \qquad (k \in \mathbb{N},\ \Re(\alpha+k) > 0)$$

将单变量配对延拓至 $\Re(\alpha+k) > 0$。不同 k 的解析延拓依据恒等定理彼此一致。因此，极坐标配对在圆附近定义了一个整分布族。它在内部和外部均与解析核一致

依据恒等定理重叠，因为两种构造都与（6.2）一致，其中 $\Re\alpha > -1$。在闭圆盘外进行测试，在整个解析延拓过程中结果均为零，因此 $\operatorname{supp} K_t^\alpha \subset B(0,\, t)$ 对所有 α 均成立。固定 $t > 0$，取 $\zeta_t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 在闭圆盘的某个邻域上恒等于 1。用 $\zeta_t(y)\, e^{-iy\cdot\xi}$ 进行测试，将傅里叶恒等式延拓至每个 $\alpha \in \mathbb{C}$。在 $\alpha = -1$ 处，$\pi J_0(t|\xi|)$ 的逆变换是 π 乘以 $|y| = t$ 上的概率测度。

为了度量一族半径，固定 $1 \le p \le \infty$ 和指标集 E。对于 $L^p(\mathcal{A})$ 中的一族 $Y_E = (Y_t)_{t\in E}$，极大范数为

$$\|Y_E\|_{L^p(\mathcal{A};\ell^\infty(E))} = \inf_{Y_t = a z_t b} \|a\|_{L^{2p}(\mathcal{A})} \sup_{t\in E} \|z_t\|_{L^\infty(\mathcal{A})} \|b\|_{L^{2p}(\mathcal{A})}\,, \tag{6.3}$$

其共同因子为 a，$b \in L^{2p}(\mathcal{A})$ 和 $z_t \in \mathcal{A}$。空集上的下确界为 $+\infty$。当指标显示在这族对象上时，我们省略 $\ell^\infty(E)$ 中的 E。该范数可在有限指标集上计算（§2.2，(2.1)）；任意指标的表述见第 8] 页。对于任意复数族，

$$\|Y_E\|_{L^p(\mathcal{A};\ell^\infty(E))} = \sup_{\substack{E_0\subset E\\ E_0 \text{ finite}}} \|Y_{E_0}\|_{L^p(\mathcal{A};\ell^\infty(E_0))}. \tag{6.4}$$

对于自伴 Y_t，同一参考文献中的序刻画给出

$$\|Y_E\|_{L^p(\mathcal{A};\ell^\infty(E))} = \inf\{\|B\|_{L^p(\mathcal{A})} : B \in L^p(\mathcal{A})_+,\ -B \le Y_t \le B \text{ for all } t \in E\}.$$

为了说明下文所用值域 $1 < p < \infty$ 中不可数多个指标的序描述，设自伴族在（6.4）中的上确界不超过 C。在半径为 $C + \delta$ 的正元球中，$\delta > 0$ 每个条件 $B \ge \pm Y_t$ 都是弱闭的。由自反性可知，球是弱紧的，而有限族的序公式给出有限交性质。因此存在同一个 B 满足所有不等式。令 $\delta \downarrow 0$ 趋于极限，即得下确界具有相同的上界。

对于一般情形，Y_t 我们可以分别控制 $\Re Y_t$ 和 $\Im Y_t$。对一个分解取伴随算子可得 $Y_t^* = b^* z_t^* a^*$，且范数保持不变。因此，这两个自伴族的范数各自不超过 $\|Y_E\|_{L^p(\mathcal{A};\ell^\infty(E))}$。反过来，对于实部和虚部的正负两种情形，若范数 C_1 和 C_2 均有主控函数，则由三角不等式可得（6.3）中的上界 $C_1 + C_2$。这些表述同样适用于将 $\mathcal{A}$ 替换为任意半有限迹代数的情形。

6.1. 有界半径区间上的一个频带。 固定 $2 \le p < \infty$。选取 $\varphi \in C_c^\infty((1/2,\ 2))$，使得 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}r) = 1$ 对 $r > 0$ 成立，并在 $[0,\infty)$ 上定义低频截断函数 η：$\eta(r) = 1 - \sum_{j\ge 1} \varphi(2^{-j}r)$。变量 $t|\xi|$ 上的分解用于 [10, §3], ，其形式为

$$A_t^\alpha = A_{t,0} + \sum_{j\ge 1} A_{t,j}, \qquad A_{t,0} = (\eta m_\alpha)(t|D|), \quad A_{t,j} = m_\alpha(t|D|)\varphi(2^{-j}t|D|)\,. \tag{6.5}$$

对于固定的 $t > 0$ 和整数 $j \ge 0$，A_t 的光滑紧支撑符号 $_j$ 在 $L^p(\mathcal{A})$ 上定义了一个有界算子。极大空间中的三角不等式将 $2 \le p < \infty$ 的 (1.9) 化简为对以下量进行估计

$$\|(A_{t,0}F)_{t>0}\|_{L^p(\mathcal{A};\ell^\infty)} + \sum_{j\ge 1} \|(A_{t,j}F)_{t>0}\|_{L^p(\mathcal{A};\ell^\infty)}.$$

我们用正球平均处理低频族。对于 $j \geq 1$，我们首先将 t 限制到 $I = [1,2]$，以应用局部平滑，然后合并 I 的伸缩。值域 $1 < p < 2$ 将在 $p = 2$ 处求和后，通过在 α 中插值得到。

逆变换 k_0 由 $\eta(|\xi|)m_\alpha(|\xi|)$ 根据 6.1是施瓦茨函数，并且当 α 属于 $\mathbb{C}$的紧子集时，其半范数有界。特别地

$$t^{-2}|k_0(y/t)| \leq C_\alpha \sum_{l\geq 0} 2^{-2l}|B(0,2^l t)|^{-1}\mathbf{1}_{B(0,2^l t)}(y)\,. \tag{6.6}$$

对于 $F \in L^p(\mathcal{A})_+$，核的主控函数为 $\Re A_{t,\,0}F$和 $\Im A_{t,\,0}F$的正负两种情形均给出一个阶上界：每个都不超过

$$C_\alpha \sum_{l\geq 0} 2^{-2l}|B(0,2^l t)|^{-1}\int_{|y|<2^l t} F(\cdot - y)\,dy.$$

由球的非交换 Hardy–Littlewood 极大不等式，按照 [10, 证明引理 3.2], 中所采用的形式，这些平均（遍历所有球半径）具有一个公共的正主控函数，其 $L^p(\mathcal{A})$ 范数至多为 $C_p\|F\|_{L^p(\mathcal{A})}$。因此，将一般 F 的实部和虚部分解为正部和负部，可得

$$\|(A_{t,0}F)_{t>0}\|_{L^p(\mathcal{A};\ell^\infty)} \leq C_{p,\alpha}\|F\|_{L^p(\mathcal{A})}\,. \tag{6.7}$$

环带估计（1.3）控制 $L^p(I;\ L^p(\mathcal{A})$ 范数。我们使用 Hong、第一作者和 Wang 的时间 Sobolev 估计的以下形式 [10, 引理 3。6]以得到极大估计。对于自伴族，该引理还给出了一个显式的正主控函数。

引理 6.1. 设 $(\mathcal{B},\tau)$ 为半有限迹冯诺依曼代数，$2 \leq p < \infty$，且$I = [1,2]$。对 $H \in C^1(I;\ L^p(\mathcal{B}))$ 以及每个整数 $N \geq 1$,

$$\|(H(u))_{u\in I}\|_{L^p(\mathcal{B};\ell^\infty)} \leq 2N^{1/p}\Big(\|H\|_{L^p(I;L^p(\mathcal{B}))} + N^{-1}\|H'\|_{L^p(I;L^p(\mathcal{B}))}\Big)\,. \tag{6.8}$$

若 H 是自伴的，则存在一个 $B \in L^p(\mathcal{B})_+$ 使得 $-B \leq H(u) \leq B$ 对所有$u \in I$，且 $\|B\|_{L^p(\mathcal{B})}$ 满足(6.8) 中的右端上界，其中以因子 1 代替 2。

证明。对于自伴的 H，我们在每个长度为 N^{-1} 的子区间上构造一个正主控函数，并通过将这些主控函数的 p次幂求和来加以合并。将 I分割成 N个长度为 N^{-1}、内部互不相交的区间 J。对 $u,\ v \in J$，恒等式$H(u) = H(v) + \int_v^u H'(s)\,ds$ 与序上界 $\pm H'(s) \leq |H'(s)|$ 给出

$$\pm H(u) \leq |H(v)| + \int_J |H'(s)|\,ds\,.$$

对 $v \in J$ 求平均可得

$$-B_J \leq H(u) \leq B_J \quad (u \in J), \qquad B_J = N\int_J |H(v)|\,dv + \int_J |H'(v)|\,dv\,.$$

为证明定义 B_J 的 Bochner 积分是合理的，我们检查 $L^p(\mathcal{B})$ 中 $|H|$ 和$|H'|$ 的强可测性。对于取值为自伴算子的连续曲线 $X:\ J \to L^p(\mathcal{B})$，我们采用如下表示

$$|X(v)| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{n} \lambda^{-1/2}X(v)^2(X(v)^2+\lambda)^{-1}\,d\lambda.$$

根据谱定理，对于 $\lambda>0$ 和 $v\in J$，

$$0\le X(v)^2(X(v)^2+\lambda)^{-1}\le\frac{|X(v)|}{2\sqrt{\lambda}}.$$

特别地，截断积分中的被积函数属于 $L^p(\mathcal{B})$，谱支配收敛给出了在$(0,\infty)$的紧子区间上关于 λ 在 $L^p(\mathcal{B})$中的连续性。对于固定的 $\lambda>0$，标量函数 $s\mapsto s^2/(s^2+\lambda)$在 $\mathbb{R}$ 上是一个常数与$(s\pm i\sqrt{\lambda})^{-1}$的线性组合。预解式恒等式给出

$$\big\|X(v)^2(X(v)^2+\lambda)^{-1}-X(w)^2(X(w)^2+\lambda)^{-1}\big\|_{L^p(\mathcal{B})}\le C_\lambda\|X(v)-X(w)\|_{L^p(\mathcal{B})}.$$

这里 $v,w\in J$，并且当 λ遍历$(0,\infty)$的一个紧子区间时，C_λ有上界。因此，每个截断积分关于 v都是连续的。谱定理以及相对于 $|X(v)|^p$ 的迹测度的控制收敛表明，对于每个v，在 $L^p(\mathcal{B})$中都有收敛。因此，$v\mapsto|X(v)|$ 是强可测的。将这一结论应用于 H 和 H'，并利用 $\||X(v)|\|_{L^p(\mathcal{B})}=\|X(v)\|_{L^p(\mathcal{B})}$，可证明定义 B_J 的两个被积函数都是博赫纳可积的。

剩下的任务是用一个正算子在整个 I 上控制 $H(u)$。令 $S=\sum_J B_J^p\in L^1(\mathcal{B})_+$ 和 $B=S^{1/p}$。由 $B_J^p\le S$ 以及 $1/p$ 次幂的算子单调性可得，对每个 J，都有 $B_J\le B$。对于正可测算子，这种单调性可由 $s^{1/p}$ 的积分表示推出：该表示由 $s/(s+\lambda)$ 的正倍数组成，而预解式 $(s+\lambda)^{-1}$（$\lambda>0$）会反转序关系。取迹得到 $\|B\|_{L^p(\mathcal{B})}^p=\sum_J\|B_J\|_{L^p(\mathcal{B})}^p$。在每个 J 上，对时间应用 H¨older 不等式，得到

$$\|B_J\|_{L^p(\mathcal{B})}\le N^{1/p}\|H\|_{L^p(J;L^p(\mathcal{B}))}+N^{-1+1/p}\|H'\|_{L^p(J;L^p(\mathcal{B}))}.$$

对分割取 ℓ^p 范数，并利用 $\|B\|_{L^p(\mathcal{B})}^p=\sum_J\|B_J\|_{L^p(\mathcal{B})}^p$，得到系数为 1 的 (6.8)。对于一般的 H，分别对 $\Re H$ 和 $\Im H$ 应用自伴情形的结论。取实部或虚部与求导可交换，并且不会增大$L^p(\mathcal{B})$ 范数。(6.3) 中的三角不等式现在给出 (6.8)。□

我们在时间分辨率 2^{-j} 下应用引理 6.1，对于整数 $j\ge1$，得到频带 $A_{u,\,j}$ 的极大估计。

引理 6.2。对于 $2\le p<\infty$、$\alpha\in\mathbb{C}$、整数 $j\ge1$，以及 $F\in L^p(\mathcal{A})$，

$$\|(A_{u,j}F)_{u\in I}\|_{L^p(\mathcal{A};\ell^\infty)}\le C_{p,\alpha}\,2^{-j(\Re\alpha+g(p))}(1+j)^{2g(p)}\|F\|_{L^p(\mathcal{A})}. \tag{6.9}$$

对于固定的 p，这些常数可以在阶数为 α 的紧集上一致选取。

证明。置 $N=2^j$。由引理 6.1，只需对 $A_{u,\,j}F$ 以及 $N^{-1}\partial_uA_{u,\,j}F$ 在$L^p(I;\ L^p(\mathcal{A})$ 中给出上界。我们利用定理 1.2 的环带估计来估计含有 $U(u)$ 和 $U(-u)$ 的项。

对于 $r\ge1$，恒等式 $2J_\alpha=H_\alpha^{(1)}+H_\alpha^{(2)}$给出精确分解

$$m_\alpha(r)=\sum_{\nu=\pm1}e^{i\nu r}r^{-1/2-\alpha}b_{\alpha,\nu}(r),\qquad|\partial_r^lb_{\alpha,\nu}(r)|\le C_{l,\alpha}\,r^{-l}\quad(l=0,1,2,\dots). \tag{6.10}$$

事实上，取 $b_{\alpha,\,+}(z)=\pi2^{\alpha-1}z^{1/2}e^{-iz}H_\alpha^{(1)}(z)$ 和 $b_{\alpha,\,-}(z)=\pi2^{\alpha-1}z^{1/2}e^{iz}H_\alpha^{(2)}(z)$，其中 z位于正实轴附近的复扇形区域内，并采用在该轴上为正的 $z^{1/2}$ 分支。大参数展开及其复阶余项界 [16,

§10.17(i),(iv)]在那里为两个函数给出上界，且对 α 紧集中的 cr ，在 r 附近半径为的圆盘上应用柯西公式，得到（6.10），而 r 的有界值域则由连续性覆盖。

为了应用（1.3），我们将振荡相位与一个空间乘子分离开来，该乘子的核具有有界的 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 范数。取在 $[1/4,2]$ 上等于一的 $\chi \in C_c^\infty((0,\infty))$。对于 $u \in I$和 $\xi \in \mathbb{R}^2$，令 $w = u|\xi|/N$。对于 $\nu \in \{-1,1\}$，定义 $a_\nu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ by$a_\nu(w) = \varphi(w)$ $w^{-1/2-\alpha}b_{\alpha,\nu}(Nw)$，在 φ 的支集上定义，并在其外延拓为零。相位为 $e^{i\nu u|\xi|}$ 的项具有符号 $N^{-1/2-\alpha}e^{i\nu u|\xi|}a_\nu(w)$。由于 $\partial_u w = |\xi|/N$，微分会同时作用于相位和 a_ν。提取出 $N^{-1/2-\alpha}e^{i\nu u|\xi|}\chi(|\xi|/N)$ 后，对于 $A_{u,j}$ 和 $N^{-1}\partial_u A_{u,j}$ ，剩余符号分别为

$$a_\nu(w), \qquad \frac{|\xi|}{N}\big(i\nu a_\nu(w) + N^{-1}a_\nu'(w)\big)\,.$$

对于 $u \in I$，此显示式中的残余符号在$\zeta = \xi/N$中具有固定的紧环形支撑。它们在 ζ 中的直到四阶的导数均由（6.10）一致地控制。将（$1-\Delta_\zeta$）^{2} 应用于傅里叶反演，可得到 C（$1+|x|^2$）$^{-2}$ 中的可积主控函数，因此在缩放空间变量中具有一致的 L^1（$\mathbb{R}^2$）核估计。

因此，我们可以通过将这些具有一致有界 L^1（$\mathbb{R}^2$）范数的核应用于 U（νu）χ（$|D|/N$）F，来估计A_u、$_jF$ 和$N^{-1}\partial_u A_u$、$_jF$ 。在u中取 L^p（I）范数时，对于两个时间符号以及固定截断函数 χ，我们使用（1.3）；有限的环形覆盖保证了这一点，详见第 5.1 节。恢复因子 $N^{-1/2-\alpha}$ 并使用 β（p）$= 2g$（p）可得

$$\sum_{s=0}^{1} N^{-s}\|\partial_u^s A_{u,j}F\|_{L^p(I;L^p(\mathcal{A}))} \le C_{p,\alpha}N^{-1/2-\Re\alpha+\sigma(p)}(1+j)^{2g(p)}\|F\|_{L^p(\mathcal{A})}\,. \tag{6.11}$$

对于固定的 j 映射$u \mapsto A_{u,\ j}F$ 在 C^1 中是 L^p（$\mathcal{A}$），因为紧支撑环形符号及其 u-阶导数的施瓦茨核在 L^1（$\mathbb{R}^2$）中连续。将引理6.1 应用于此映射，其中 $N = 2^j$。将（6.11）右侧乘以 $2N^{1/p}$ 得到（6.9），因为$1/p - 1/2 + \sigma$（p）$= -g$（p）。□

6.2. **所有半径与临界阶**。我们将关于 $I = [1,2]$ 的估计与其二进伸缩结合起来，利用由$A_{2^k u}$选择的空间频率环带的有界重叠，$_j$ 因为 $k \in \mathbb{Z}$ 随 $u \in I$ 变化，而 $j \ge 1$ 保持固定。这对 $2 \le p < \infty$给出（1.9）；随后在 α 中进行插值，即可得到 $1 < p < 2$的值域。

定理 1.4 的欧几里得断言的证明。对于 $2 \le p < \infty$，还需将 (6.9) 转化为 $(A_{t,j}F)_{t>0}$ 上的可求和估计。对于 $j \ge 1$，令 $D_j = 2^{-j(\Re\alpha+g(p))}(1+j)^{2g(p)}$。若 $t = 2^k u$，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $u \in [1,2]$，则 $\varphi(2^{-j}t|\xi|)$ 的支集迫使 $2^{k-j}|\xi| \in [1/4,2]$。固定 j 时，这些环带随着 k 变化而具有有界重叠。对于 $l \in \mathbb{Z}$，令$\Delta_l = \chi(2^{-l}|D|)$ 定义在 $L^p(\mathcal{A})$ 上，其中 χ 是引理 6.2 中的截断函数。由于 $\chi = 1$ 在 $[1/4,2]$ 上成立，我们有

$$A_{2^k u,j}F = A_{2^k u,j}\Delta_{j-k}F\,.$$

将（6.9）应用于$G_{k,\ j}(x)$ $=(\Delta_{j-k}F)(2^k x)$，其中 $x \in \mathbb{R}^2$。对于每个 $\bullet \in \{\Re,\Im\}$，（6.3）的阶数$\widetilde{\ }$描述给出了一个正主控函数 $B^\bullet_{k,\ j} \in L^p(\mathcal{A})$，适用于 $\bullet(A_{u,\ j}G_{k,\ j})$ 的正负两种情况

~在 $u \in I$ 上，其中$\|B^{\bullet}_{k,\ j}\|_{L^p(\mathcal{A})} \le C_{p,\ \alpha} D_j \|G_{k,\ j}\|_{L^p(\mathcal{A})}$。根据傅里叶伸缩，

$$(A_{u,j} G_{k,j})(x) = (A_{2^k u, j} \Delta_{j-k} F)(2^k x)\,.$$

令 $B^{\bullet}_{k,\ j}(x) = \widetilde{B}^{\bullet}_{k,\ j}(2^{-k}x)$。伸缩保持顺序不变。两次空间变量的变换给出

$$\|G_{k,j}\|_{L^p(\mathcal{A})} = 2^{-2k/p} \|\Delta_{j-k} F\|_{L^p(\mathcal{A})}, \qquad \|B^{\bullet}_{k,j}\|_{L^p(\mathcal{A})} = 2^{2k/p} \|\widetilde{B}^{\bullet}_{k,j}\|_{L^p(\mathcal{A})}.$$

2 的幂相互抵消，得到

$$\pm \bullet\,(A_{2^k u, j} F) \le B^{\bullet}_{k,j} \quad (u \in I), \qquad \|B^{\bullet}_{k,j}\|_{L^p(\mathcal{A})} \le C_{p,\alpha} D_j \|\Delta_{j-k} F\|_{L^p(\mathcal{A})}\,.$$

固定 j 时，指标 $j-k$ 随着 k 的变化遍历所有整数。为对主控函数的范数求和，我们使用

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \|\Delta_l F\|^p_{L^p(\mathcal{A})} \le C_p^p \|F\|^p_{L^p(\mathcal{A})}\,. \tag{6.12}$$

事实上，考虑 $F \mapsto (\Delta_l F)_l$，其值域取为直和代数 $\ell^\infty(\mathbb{Z}) \bar{\otimes} \mathcal{A}$ 上的普通迹 L^p 空间，其中第一因子带有计数迹。空间变量中的普朗歇尔恒等式以及环带的有界重叠性给出其 L^2 上界。在此直和中，L^∞ 范数为 $\sup_l \|\Delta_l F\|_{L^\infty(\mathcal{A})}$；由于伸缩保持核的 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 范数不变，它被 $\|\chi(|\cdot|)^\vee\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|F\|_{L^\infty(\mathcal{A})}$ 所控制。先在有限指标集上进行复插值，然后利用和的单调收敛，得到（6.12）。

对每个 $\bullet \in \{\Re, \Im\}$，$B^{\bullet}_{k,j}$ 的上界以及（6.12）蕴含 $S^{\bullet}_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (B^{\bullet}_{k,j})^p$ 在 $L^1(\mathcal{A})_+$ 中收敛。定义 $B^{\bullet}_j = (S^{\bullet}_j)^{1/p}$。取迹可得

$$\|B^{\bullet}_j\|^p_{L^p(\mathcal{A})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|B^{\bullet}_{k,j}\|^p_{L^p(\mathcal{A})} \le C^p_{p,\alpha} D_j^p \|F\|^p_{L^p(\mathcal{A})}\,.$$

正锥在 $L^1(\mathcal{A})$ 中是闭的，因此对每个 $B^{\bullet}_{k,j})^p \le S^{\bullet}_j$，$k$。如引理 6.1 的证明中一样，$1/p$ 次幂的算子单调性给出 $B^{\bullet}_{k,j} \le B^{\bullet}_j$。每个 $t > 0$ 都具有 $2^k u$ 的形式，其中 $u \in I$，因此 $\pm \bullet\,(A_{t,j} F) \le B^{\bullet}_j$ 对所有 $t > 0$ 都成立。（6.3）中的三角不等式现在给出

$$\|(A_{t,j} F)_{t>0}\|_{L^p(\mathcal{A};\ell^\infty)} \le C_{p,\alpha} D_j \|F\|_{L^p(\mathcal{A})}\,. \tag{6.13}$$

对于 $\Re\alpha + g(p) > 0$，(6.3) 中的三角不等式将 (6.5) 中族的范数上界控制为对 $j \ge 1$ 求和的 (6.7) 与 (6.13) 之和。事实上 $\sum_{j \ge 1} D_j < \infty$，因此族值级数 $\sum_{j \ge 1} (A_{t,j} F)_{t>0}$ 在 $L^p(\mathcal{A};\ \ell^\infty)$ 中收敛。对于一个族 Y_E 和 $t \in E$，将迹 H¨older 不等式应用于 (6.3) 中的分解，得到 $\|Y_t\|_{L^p(\mathcal{A})} \le \|Y_E\|_{L^p(\mathcal{A};\ell^\infty(E))}$。因此，对于每个 $t > 0$，族范数极限给出其 t坐标在 $L^p(\mathcal{A})$ 中的极限。为确定该坐标极限，取一个标量因子为 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 的施瓦茨张量。级数 (6.1) 与汉克尔估计 (6.10)^表明，$m_\alpha(t|\xi|) f(\xi)$ 在 ξ 中可积。在固定的 t 下，部分截断和 $\eta(t|\xi|) + \sum_{j=1}^m \varphi(2^{-j} t|\xi|)$ 由有限重叠一致有界，并根据 (6.5) 收敛到 1。因此，傅里叶反演中的控制收敛确定了 $A_{t,0} F + \sum_{j=1}^m A_{t,j} F$ 的坐标极限在施瓦茨张量上等于 $A^\alpha_t F$。$L^p(\mathcal{A})$ 中的稠密性给出了对该值域内所有 F 的所述延拓与估计。特别地，$g(2) = 0$，因此 L^2 频带范数对 $\Re\alpha > 0$ 求和。

对于 $1<p<2$，插值论证要求沿整条直线 $\Re\alpha=h$ 对 L^2 极大范数给出一个上界，包括其关于 $\Im\alpha$ 的增长。固定 $h>0$，并且对于 $v\in\mathbb{R}$，令 $\alpha=h+iv$。对于 $r\geq 1$，我们声称

$$|m_\alpha(r)|+|m'_\alpha(r)|\leq C_h e^{C_h(1+|v|)}r^{-h-1/2}\,. \tag{6.14}$$

对核 (6.2) 在 $t=1$ 的第二个坐标上积分，并利用贝塔积分可得

$$m_\alpha(r)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1/2)}\int_{-1}^{1}e^{-irs}(1-s^2)^{\alpha-1/2}\,ds\,.$$

对 r 求导会引入有界光滑因子 $-is$，因此只需估计所示积分，其振幅为 $(1-s^2)^{\alpha-1/2}$ 或 $-is(1-s^2)^{\alpha-1/2}$。在每个端点 $s=1$ 和 $s=-1$ 附近，令 $d=1-|s|$，并使用光滑的二进分割 $d\asymp D$、$D=2^{-l}$，其中整数 $l\geq 1$。在这样的分段上，$1-s^2=d(2-d)$，且区间长度为 $O(D)$。对 $d^{\alpha-1/2}$ 求每次导数，相对于其大小，至多会产生 $C_{h,M}(1+|v|)D^{-1}$ 的代价。二进截断函数的 m 阶导数有界于 $C_m D^{-m}$。因此，对于 $0\leq m\leq M$，局部化振幅的 m 阶导数有界于 $C_{h,M}(1+|v|)^M D^{h-1/2-m}$。由平凡估计和 M 次分部积分可得，其积分的上界为

$$C_{h,M}(1+|v|)^M D^{h+1/2}\min\{1,(rD)^{-M}\}.$$

取一个整数 $M>h+1/2$。对于 $D\leq r^{-1}$ 的 $D^{h+1/2}$ 几何级数为$O(r^{-h-1/2})$。对于 $D>r^{-1}$，我们对 $r^{-M}D^{h+1/2-M}$求和，其中 D的指数为负，从而得到相同的上界。在远离 $s=\pm1$的紧子区间上，分部积分 M次得到$O_{h,M}((1+|v|)^M r^{-M})$。对 $\Re(\alpha+1/2)$ 应用斯特林公式，现在即可证明（6.14）。

对于 $N=2^j$、$u\in I$ 和 $u|\xi|\asymp N$，(6.14) 给出了 A_u、$_j$ 和 $N^{-1}\partial_u A_u$、$_j$ 的符号的上界 $C_h e^{C_h(1+|v|)}N^{-h-1/2}$，因为 $|\xi|/N$ 在它们的支集上有界。在希尔伯特空间 $L^2(\mathcal{M})$ 上，对空间变量应用普朗歇尔恒等式，可知对于 $L^2(I;L^2(\mathcal{A}))$ 范数，两者均可得到这个相同的上界再乘以 $\|F\|_{L^2(\mathcal{A})}$，因为 $|I|=1$。引理 6.1 需付出一个因子 $2N^{1/2}$，以同时控制所有 $u\in I$。因此，对 $u\in I$ 上的极大范数，其上界包含衰减因子 $2N^{1/2}N^{-h-1/2}=2N^{-h}$。现在根据 (6.12) 对 k 求和 $\|\Delta_{j-k}F\|^2_{L^2(\mathcal{A})}$，即可得到 (6.13)，其中 $D_j=2^{-jh}$，常数为 $C_h e^{C_h(1+|v|)}$。

对于低频界（6.7），在 η 的支集上，ξ 中的 $m_\alpha(|\xi|)$ 的四阶以内空间导数，可通过积分 $|K_1^\alpha(y)|(1+|y|)^4$ 得到上界。根据（6.2），这至多为 $C_h/|\Gamma(h+iv)|$。在傅里叶反演中分部积分四次，得到（6.6），其中 $C_\alpha\leq C_h e^{C_h(1+|v|)}$。加上低频项并对 N^{-h} 求和，得到

$$\|(A_t^{h+iv}F)_{t>0}\|_{L^2(\mathcal{A};\ell^\infty)}\leq C_h e^{C_h(1+|v|)}\|F\|_{L^2(\mathcal{A})}\,. \tag{6.15}$$

为了与 L^2 估计式（6.15）进行插值，我们使用直线 $\Re\alpha=1$ 上的球平均。在 $\Re\alpha=1$ 上，（6.2）的绝对值在圆盘 $|y|<t$上为常数。对于 $F\geq 0$，将其归一化球平均记为 $B_tF=|B(0,t)|^{-1}\int_{|y|<t}F(\cdot-y)\,dy$。标量不等式 $\pm\Re K_t^{1+iv}$, $\pm\Im K_t^{1+iv}\leq|K_t^{1+iv}|$ 给出

$$\pm\Re A_t^{1+iv}F,\quad \pm\Im A_t^{1+iv}F\ \leq\ \frac{\pi}{|\Gamma(1+iv)|}B_tF.$$

对于 $1<q<\infty$ 和 $F\in L^q(\mathcal{A})_+$，式（6.7）中使用的球极大不等式给出了 $L^q(\mathcal{A})$中的一个正元，它支配每个范数不超过$C_q\|F\|_{L^q(\mathcal{A})}$的 B_tF 。将一般 F 的实部和虚部分解为正部和负部，便得到

$$\|(A_t^{1+iv}F)_{t>0}\|_{L^q(\mathcal{A};\ell^\infty)}\le C_q|\Gamma(1+iv)|^{-1}\|F\|_{L^q(\mathcal{A})}\,.$$

固定 $1<p<2$ 和 $\alpha=s+ib$，使得 $s>2/p-1$ 和 $b\in\mathbb{R}$。我们必须在条带中的同一点插值到指数 p 和阶数 $s+ib$。对于 $1<q<p$，关系式 $1/p=(1-\vartheta)/q+\vartheta/2$ 确定

$$1-\vartheta=\frac{1/p-1/2}{1/q-1/2}\;\longrightarrow\;2/p-1\quad(q\downarrow 1).$$

选择足够接近 1 的 q，使得 $1-\vartheta<s$。为了在 L^2 边界处以正阶数 h实现 $s=(1-\vartheta)\cdot 1+\vartheta h$，令

$$h=\frac{s-1+\vartheta}{\vartheta}>0,\qquad \alpha(z)=1+ib+(h-1)z\quad(0\le\Re z\le 1).$$

于是 $\alpha(\vartheta)=\alpha$。对于有限集 $E\subset(0,\infty)$，取 $T_zF=(A_t^{\alpha(z)}F)_{t\in E}$。由于 $\Re\alpha(z)\ge\min(1,h)>0$，(6.2) 中的核关于 z 在 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中解析。求导会在可积权重中产生 $\log(1-|y/t|^2)$ 的幂，同时也会产生伽马函数倒数因子的导数。对于 $\Re\alpha>0$，极坐标积分给出

$$\|K_t^\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}=\frac{2\pi}{|\Gamma(\alpha)|}\int_0^1(1-s^2)^{\Re\alpha-1}s\,ds=\frac{\pi}{\Re\alpha\,|\Gamma(\alpha)|}\,.$$

因此 $\|K_t^{\alpha(z)}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ 至多按指数增长 $|\Im z|$ 根据斯特林公式，并且关于 t一致。对于固定的有限 E，一个元组的极大范数受其坐标范数之和的上界控制。因此，坐标核估计给出了 T_zF 对每个有限 E 在第 2.1节的稠密施瓦茨张量空间上的解析性及所需增长性。下面的边界极大估计关于 E一致。

将 T_z 乘以 $e^{(z-\vartheta)^2}$。对于带有 $j\in\{0,1\}$ 和 $y\in\mathbb{R}$的 $z=j+iy$，高斯因子的模为 $e^{(j-\vartheta)^2-y^2}$，而阶的虚部为 $b+(h-1)y$。因此，$e^{(z-\vartheta)^2}T_z$ 在每条边界直线上均有一致上界：当 $j=0$时，由从$L^q(\mathcal{A})$到 $L^q(\mathcal{A};\ell^\infty(E))$的球估计得到；当$j=1$时，由（6.15）从 $L^2(\mathcal{A})$到 $L^2(\mathcal{A};\ell^\infty(E))$得到。这些上界与 y 和 E无关。为插值得到目标空间，我们使用等距恒等式 [10,引理 2.7(i)]

$$[L^q(\mathcal{A};\ell^\infty(E)),L^2(\mathcal{A};\ell^\infty(E))]_\vartheta=L^p(\mathcal{A};\ell^\infty(E))\,.$$

高斯函数在 ϑ 处等于 1，因此 $\|(A_t^\alpha F)_{t\in E}\|_{L^p(\mathcal{A};\ell^\infty(E))}\le C_{p,\,\alpha}\|F\|_{L^p(\mathcal{A})}$。由于$C_{p,\,\alpha}$与 E 无关，在 (6.4) 中取上确界即可证明，对所述值域中的每个 $1<p<2$，(1.9) 均成立。□

推论 6.3。固定 $2<p<\infty$ 和 $0\le L<\infty$。对于满足 $|\Im\alpha|\le L$ 且$0<\varepsilon=\Re\alpha+g(p)\le 1$ 的 $\alpha\in\mathbb{C}$，在所有半有限迹系数代数上一致成立的 (1.9) 中的最小常数不超过$C_{p,\,L}\varepsilon^{-1-2g(p)}$。

证明。（1.9）的证明将其常数控制在 $1+\sum_{j\ge1}D_j$的一致倍数之内。因此，我们需要将此和估计为 $\varepsilon\downarrow 0$。紧矩形 $-g(p)\le\Re\alpha\le$

$1-g(p)$， $|\Im\alpha|\le L$ 包含所有所考虑的阶数，并且在此矩形上，（6.7）中的核估计和引理 6.2 是一致的。

为估计 $\sum_{j\ge1}D_j$，我们将其与一个积分进行比较。对于 $j\le v\le j+1$, $2^{-\varepsilon j}(1+j)^{2g(p)}\le 2^{\varepsilon}2^{-\varepsilon v}(1+v)^{2g(p)}$。在每个区间上积分并令 $w=\varepsilon v$，得到

$$\sum_{j\ge1}D_j\le 2^{\varepsilon}\varepsilon^{-1-2g(p)}\int_{\varepsilon}^{\infty}2^{-w}(\varepsilon+w)^{2g(p)}\,dw\le C_p\varepsilon^{-1-2g(p)}.$$

结合（6.7）和（6.13，即可得到所声称的上界。 □

Liu、Shen、Song 和 Yan [14, 定理 1.1]证明了标量强型需要满足$\Re\alpha\ge\max(1/p-1/2,\ -1/p)$。在边界线段 $2<p\le4$ 上，Nowak、Roncal 和 Szarek [17, 推论 1.5 和 1.6] 证明了在实数阶 $\alpha=1/p-1/2$ 时，径向函数在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上的全半径算子不满足弱型。下面的单坐标检验适用于有界区间 $1\le t\le2$，允许任意虚部，并且也适用于每个固定的量子环面内部。

命题 6.4. 设 $2<p\le4$ and $\alpha=1/p-1/2+ib$, $b\in\mathbb{R}$。标量算子$F\mapsto\sup_{1\le t\le2}|A_t^{\alpha}F|$ 不能将 $L^p(\mathbb{R}^2)$映射到弱 $L^p(\mathbb{R}^2)$。相应的强极大不等式在周期为 2π的每个固定二维量子环面上也不成立。

证明。我们构造一个函数 F_ϵ，使得$\|F_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}=O((\log(1/\epsilon))^{1/p})$，并且在一个固定矩形上有$|A^{\alpha}_{x_1}F_\epsilon(x_1,x_2)|\gtrsim\log(1/\epsilon)$。在此取 $t=x_1$，便可利用 K_t^{α}的一维边缘分布的奇异性。

对第二个坐标上的 (6.2) 积分，其中 $\Re\alpha>0$，得到边缘密度 $k_t^{\alpha}\in L^1(\mathbb{R})$ 的如下公式

$$k_t^{\alpha}(y_1)=\frac{\sqrt{\pi}}{t\,\Gamma(\alpha+1/2)}(1-y_1^2/t^2)_+^{\alpha-1/2}.$$

对于 $|y_1|<t$，将 $y_2=t(1-y_1^2/t^2)^{1/2}z$ 代入核中。对 $-1<z<1$的积分为 $\int_{-1}^{1}(1-z^2)^{\alpha-1}dz=\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)/\Gamma(\alpha+\overline{1}/2)$，从而得到所显示的稠密性。对于 $|y_1|>t$， K_t^{α}的支集使边缘分布为零。通过针对光滑测试函数进行解析延拓，边缘分布公式可延拓到 $\Re\alpha>-1/2$，因为其右端在该处局部可积。

为使边缘分布在 $y_1=t$处的相位相匹配，固定 $0<c<1/4$，取 $0<\epsilon<c/4$，并取一个光滑函数 $\omega_\epsilon\colon\ \mathbb{R}\to[0,1]$，其支集包含于 $[\epsilon,c]$ 中，并且在$[2\epsilon,c/2]$上等于一。定义 $h_\epsilon\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$，令其在 $v>0$上满足 $h_\epsilon(v)=v^{-1/p-ib}\omega_\epsilon(v)$，其他地方为零。于是$\|h_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\le\int_\epsilon^c v^{-1}dv=\log(c/\epsilon)$。在 $x_1=t\in[1,2]$处，将 $v=t-y_1$ 代入边缘积分。提出因子 $1-(1-v/t)^2=(2v/t)(1-v/(2t))$ 后得到

$$(k_t^{\alpha}*h_\epsilon)(t)=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{\alpha-1/2}t^{-\alpha-1/2}}{\Gamma(\alpha+1/2)}\int_\epsilon^c\omega_\epsilon(v)(1-v/(2t))^{\alpha-1/2}\,\frac{dv}{v}.$$

该式中的积分一致地等于 $\log(1/\epsilon)+O_{\alpha,\ c}(1)$，其中 $t\in[1,2]$。事实上，因子 $(1-v/(2t))^{\alpha-1/2}$与 1 相差 $O_\alpha(v)$，而 ω_ϵ 的过渡区域 $[\epsilon,2\epsilon]$ 和$[c/2,c]$ 具有有界的对数测度。前因子的模有正下界，因此当 ϵ 充分小时，对所有 $t\in[1,2]$ 都有 $|(k_t^{\alpha}*h_\epsilon)(t)|\gtrsim_{\alpha,\ c}\log(1/\epsilon)$。

定义 $F_\epsilon\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ 通过 $F_\epsilon(x_1,\ x_2)=h_\epsilon(x_1)\rho(x_2)$，其中 $\rho\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在 $[-4,4]$ 上恒等于一。对于 $1\le x_1\le2$, $|x_2|\le1$， $K_{x_1}^{\alpha}$ 的支集蕴含 $A^{\alpha}_{x_1}F_\epsilon(x_1,\ x_2)=$

$(k^{\alpha}_{x_1} * h_\epsilon)(x_1)$。因此，在 $[1,2]\times[-1,1]$ 上 $\sup_{1\le t\le 2}|A^{\alpha}_t F_\epsilon| \gtrsim \log(1/\epsilon)$。取等于该下界一半的水平，并使用 $\|F_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim (\log(1/\epsilon))^{1/p}$，得到

$$\frac{\big\|\sup_{1\le t\le 2}|A^{\alpha}_t F_\epsilon|\big\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^2)}}{\|F_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}} \gtrsim (\log(1/\epsilon))^{1-1/p}.$$

当 $\epsilon\downarrow 0$ 时，该商趋于无穷大。

对于环面断言，使用由第一坐标酉元 U_1生成的交换子代数中的 2π-周期延拓 $h^{\mathrm{per}}_\epsilon$ of h_ϵ。其迹是概率 Haar 测度 $dy/(2\pi)$。该测度的限制卷积核为

$$k^{\alpha}_{t,\mathrm{per}}(y) = 2\pi\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} k^{\alpha}_t(y+2\pi\ell)\,.$$

事实上，其在概率 Haar 测度中 $n\in\mathbb{Z}$ 处的傅里叶系数为 $k^{\alpha}_t(n) = m_\alpha(t|n|)$，即 U_1^n 上的乘子。由于 k^{α}_t 的支集包含于 $[-t,t]$，因此对于 $x_1 = t\in[1,2]$，其卷积只使用 $h^{\mathrm{per}}_\epsilon$ 在 $[0,4]$ 上的值。在那里，$h^{\mathrm{per}}_\epsilon = h_\epsilon$，因为 $4<2\pi$，且 h_ϵ 的支集包含于 $[\epsilon,c]$。因此，对于 $1\le t\le 2$，$|(k^{\alpha}_{t,\ \mathrm{per}} * h^{\mathrm{per}}_\epsilon)(t)| \gtrsim_{\alpha,\ c} \log(1/\epsilon)$。

对于 $1\le t\le 2$，记作 $z_t = m_\alpha(t|D_\Theta|)h^{\mathrm{per}}_\epsilon$。如果环面上成立强型估计，序刻画将分别对 $\Re z_t$ 和 $\Im z_t$ 的两种符号给出正主控函数 $B_\Re, B_\Im$，且 $L^p(\mathcal{Q}_\Theta)$的范数有上界，为常数乘以 $\|h^{\mathrm{per}}_\epsilon\|_{L^p(\mathcal{Q}_\Theta)}$。令$E_1$ 表示对第二生成元的旋转取平均所给出的保迹条件期望。每个 z_t 都属于这个交换子代数，因此 $|z_t|\le|\Re z_t|+|\Im z_t|$受 $E_1B_\Re + E_1B_\Im$控制，其范数至多为 $\|B_\Re\|_{L^p(\mathcal{Q}_\Theta)} + \|B_\Im\|_{L^p(\mathcal{Q}_\Theta)}$。取有理数 $t\in[1,2]$，便可在同一个全测度集合上得到这些逐点上界。对几乎处处的 $x_1\in[1,2]$，连续性使得 $t\mapsto (k^{\alpha}_{t,\mathrm{per}} * h^{\mathrm{per}}_\epsilon)(x_1)$ 将该上界延拓到$t=x_1$，这与边缘分布的下界矛盾。□

推论 6.5. 固定 $2<p\le 4$ 和 $0\le L<\infty$。令 $\alpha = 1/p - 1/2 + \varepsilon + ib$ 为 $b\in[-L,L]$和 $\varepsilon>0$。存在常数 $c_{p,L},\varepsilon_0(p,L)>0$，使得只要$0<\varepsilon\le\varepsilon_0(p,L)$，$1\le t\le 2$ 在标量平面上的最佳强极大常数至少为 $c_{p,L}\varepsilon^{-(1-1/p)}$。对于周期为 2π的每个二维量子环面，同样的下界也成立，且常数与变形参数无关。

证明. 在命题 F_ϵ 中的构造 6.4里，取 $c=1/8$ 和 $\epsilon = e^{-1/\varepsilon}$。于是$\|F_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim \varepsilon^{-1/p}$。我们将证明 $|A^{\alpha}_{x_1}F_\epsilon(x_1,x_2)| \gtrsim_{p,L} \varepsilon^{-1}$在 $[1,2]\times[-1,1]$上。

在边缘积分中，因子 $v^{-1/p-ib}$ （来自 h_ϵ）与核因子 $v^{\alpha-1/2}$ 的乘积现在是 $v^{\varepsilon-1}$。函数 ω_ϵ 在 $[2\epsilon, c/2]$上等于一，其中

$$\int_{2\epsilon}^{c/2} v^{\varepsilon-1}\,dv = \frac{(c/2)^\varepsilon - (2\epsilon)^\varepsilon}{\varepsilon} \gtrsim \varepsilon^{-1}$$

对于较小的 ε，由于 $(2\epsilon)^\varepsilon\to e^{-1}$。对于 $1\le t\le 2$ 和 $|b|\le L$，一致地有 $(1-v/(2t))^{\alpha-1/2} = 1+O_{p,L}(v)$，在 $(0,c)$ 上。将边缘积分中的 $(1-v/(2t))^{\alpha-1/2}$替换为 1，会使其值改变 $O_{p,L}(1)$。前因子 $\sqrt{\pi}\,2^{\alpha-1/2}t^{-\alpha-1/2}/\Gamma(\alpha+1/2)$在所示的阶数紧集上始终有正下界，因为 $\Re(\alpha+1/2)\ge 1/p$。因此，在矩形 $1\le x_1\le 2$ 上，$|x_2|\le 1$ $|A^{\alpha}_{x_1}F_\epsilon(x_1,x_2)|$ 至少为 $c_{p,L}\varepsilon^{-1}$。在此矩形上取 L^p 范数并除以 $\|F_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$，即可得到所述幂次 $\varepsilon^{-(1-1/p)}$。在圆上与 $h^{\mathrm{per}}_\epsilon$卷积会得到相同的边缘积分

在区间 $1 \le x_1 \le 2$。应用命题 6.4 证明中的条件期望，即可将此下界传递到量子环面的极大范数。□

对于 $2 < p \le 4$，推论6.3 和6.5 在最佳一致常数随 $1 - 1/p$ 和$1 + 2g(p)$ 增长的幂次之间留有一个间隙 $\varepsilon \downarrow 0$。在另一段区间$p > 4$，全半径标量算子在实数阶 $\alpha = -1/p$ 上对径向函数 [17, 推论 1。5]成立。对于任意 $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$，我们在 (6.13) 中的全半径求和要求 $\Re\alpha > -1/p$。

6.3. **向保迹作用应用转移原理。** 我们通过先证明定理1.4(ii) 的量子极大估计，首先建立定理6.17的轨道估计（6.7），适用于一般的保迹作用。

固定一个保迹作用 β，它作用于 $\mathbb{R}^2$ 上的半有限迹冯诺依曼代数 $\mathcal{D}$，并将 $\mathcal{S}_{\mathcal{D}} = L^\infty(\mathbb{R}^2)\bar{\otimes}\mathcal{D}$ 记作第5.5节中的记法。为转移（1.9），我们寻求一个正主控函数，使其在所有半径处同时控制实部的两种符号；另寻一个主控函数，同时控制虚部的两种符号。对于有限个半径，由于核具有紧支撑，我们可以在一个较小正方形上保持所有卷积不变，同时将轨道限制在一个较大的正方形内。随后在较小正方形上对欧氏主控函数取平均，便可得到 $L^p(\mathcal{D})$中的一个主控函数。有限族的上界将与半径无关。这种局部化方法曾用于测度平均，见 [12, 命题 8。1]。

我们首先在具有光滑 L^p 轨道的元素上定义紧支撑分布的轨道平均。对于 $1 < p < \infty$，令

$$\mathcal{D}^\infty_{\beta,p} = \{x \in L^p(\mathcal{D}) : z \mapsto \beta_z x \text{ belongs to } C^\infty(\mathbb{R}^2; L^p(\mathcal{D}))\}.$$

对于每个多重指标 $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \{0, 1, \ldots\}^2$，阶数为$|\nu| = \nu_1 + \nu_2$的导数 $\partial_z^\nu = \partial_{z_1}^{\nu_1}\partial_{z_2}^{\nu_2}$ 必须存在，并且关于 $L^p(\mathcal{D})$ 范数连续。紧支撑标量分布 K 可以作用于每个此类 x 的轨道。具体而言，选取一个闭球D_0，使其内部包含 $\operatorname{supp} K$。由分布在支集包含于固定紧集的测试函数上的连续性可知，存在 $m \in \{0, 1, \ldots\}$ 和 $C_K < \infty$，使得

$$|\langle K, f\rangle| \le C_K \max_{|\nu|\le m} \sup_{y\in D_0} |\partial_y^\nu f(y)| \qquad (f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)).$$

这里 $\langle K,\ f\rangle = \langle K,\ \theta f\rangle$，其中固定的 $\theta \in C_c^\infty(D_0^\circ)$ 在 $\operatorname{supp} K$ 附近等于一。常数 C_K 吸收了 θ 的直至 m 阶导数。与标量测试函数的配对是复线性的。

对于复巴拿赫空间 V，首先取一个有限和 $F = \sum_i f_i v_i$，其中 $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\ \mathbb{C})$ 以及 $v_i \in V$。定义 $\langle K,\ F\rangle = \sum_i \langle K,\ f_i\rangle v_i$。用 V^* 的单位球中的线性泛函进行检验可得

$$\|\langle K, F\rangle\|_V \le C_K \max_{|\nu|\le m} \sup_{y\in D_0} \|\partial_y^\nu F(y)\|_V. \tag{6.16}$$

对于光滑的 V值 F，这些有限和在右侧的半范数中逼近 F。事实上，将 F局部化到 D_0的一个邻域，在 y中进行磨光，并通过磨光核的标量平移与 F的固定值之积的黎曼和，在 D_0 上一致地逼近磨光积分及其直至 m阶的导数。因此，（6.16）定义了从 $C^\infty(\mathbb{R}^2;\ V)$到 V的配对$F \mapsto \langle K、\ F\rangle$。其值仅取决于 F在 $\operatorname{supp} K$附近的取值。对于任意将 T映射到复巴拿赫空间 W中的有界线性映射 $V \to W$，$T\langle K、\ F\rangle = \langle K、\ TF\rangle$

通过有限和逼近。特别地， $y \mapsto \beta_{-y}x$ 是$V = L^p(\mathcal{D})$的可容许测试函数， $x \in \mathcal{D}^\infty_{\beta,\,p}$。

命题 6.6。设 $1 < p < \infty$，且设 β 是 $\mathbb{R}^2$ 通过保持法向迹的 $*$-自同构在具有范数连续 L^p 轨道的 $\mathcal{D}$ 上的作用。设 $(K_t)_{t>0}$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的紧支集标量分布。假设存在常数 C，使得对于每个有限集 $E \subset (0,\ \infty)$,

$$\|(K_t * F)_{t\in E}\|_{L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D};\ell^\infty(E))} \le C\|F\|_{L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})} \quad (F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \otimes L^p(\mathcal{D})).$$

对每个 $t > 0$ 定义 $Q_t : \mathcal{D}^\infty_{\beta,\,p} \to L^p(\mathcal{D})$，其中 $Q_t x = \langle K_t(y)\ \beta_{-y}x\rangle$。则 $x \mapsto (Q_t x)_{t>0}$ 可延拓到 $L^p(\mathcal{D})$ 的全部空间，并且

$$\|(Q_t x)_{t>0}\|_{L^p(\mathcal{D};\ell^\infty)} \le 2C\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}.$$

证明。固定 $x \in \mathcal{D}^\infty_{\beta,\,p}$，我们同时为 $\operatorname{Re} Q_t x$ 的两种符号以及所有 $t > 0$ 构造一个正主控函数，其范数至多为 $C\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$。我们首先将问题局部化到一个有限的半径集，并对欧氏主控函数取平均。随后，利用弱紧性可得到适用于所有半径的一个主控函数。将这一构造应用于虚部，并用具有光滑轨道的任意 L^p 元素进行逼近，即可完成证明。

为进行局部化，固定一个非空有限集 $E \subset (0,\infty)$。记 $B_r = [-r,r]^2$ 为 $r > 0$，并选取 $S > 0$，使得每个 K_t, $t \in E$ 的支集都包含于 B_S。对于 $R > 0$，选取一个光滑的 $\rho_R : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$，使其在 B_{R+S+1} 上恒等于一，且支集包含于 B_{R+S+2}。函数 $F_R(z) = \rho_R(z)\beta_z x$ 是光滑且具有紧支撑的，其取值属于 $L^p(\mathcal{D})$。根据假设，映射 $F \mapsto (K_t * F)_{t\in E}$ 可从有限张量延拓至整个 $L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})$，取值属于 $L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D};\ell^\infty(E))$。事实上，若有限张量序列 F_n 在 $L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})$ 中收敛到 F，则假设的上界保证 $(K_t * F_n)_{t\in E}$ 在 $L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D};\ell^\infty(E))$ 中是柯西列，当 $n \to \infty$ 时成立。由完备性可得该延拓，其范数至多为 C。根据迹的 Hölder 不等式，在 (6.3) 中投影到一个坐标的范数至多为一，因此每个坐标都与 $F \mapsto K_t * F$ 的有界延拓一致。对于光滑的 $L^p(\mathcal{D})$ 值函数 F，写作 $(K_t * F)(z) = \langle K_t(y)\ F(z-y)\rangle$。我们验证此公式给出了在 F_R 处有界延拓的坐标。令 m 为 $t \in E$ 在（6.16）中所用阶数的最大值。该处使用的磨光和有限和逼近给出有限张量 F_j, $j \in \mathbb{N}$，其支集包含于同一个紧集 B 中，该紧集包含 $\operatorname{supp} F_R$，且它们的 m 阶及以下导数一致收敛到 F_R 的相应导数。特别地， $F_j \to F_R$ 在空间 L^p 中成立。对于每个 $t \in E$，将（6.16）应用于 $y \mapsto (F_j - F_R)(z-y)$，得到

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^2} \|(K_t * (F_j - F_R))(z)\|_{L^p(\mathcal{D})} \le C_t \max_{|\nu|\le m} \sup_{w\in\mathbb{R}^2} \|\partial^\nu (F_j - F_R)(w)\|_{L^p(\mathcal{D})} \longrightarrow 0\,.$$

函数 $K_t * F_j$ 和 $K_t * F_R$ 的支集包含于 $B + B_S = \{u+v\colon\ u \in B,\quad v \in B_S\}$。因此，$K_t * F_j$ 在空间的 L^p 中收敛于 $K_t * F_R$，其定义由该配对给出。连续函数 $K_t * F_j$ 的一致收敛表明，该配对就是延拓的坐标的连续代表。因此，对于 $z \in B_R$ 和$t \in E$,

$$(K_t * F_R)(z) = \langle K_t(y), \beta_{z-y}x\rangle = \beta_z(Q_t x),$$

因为 $\rho_R(z-y) = 1$ 在 $\operatorname{supp} K_t$ 的某个邻域上。

在正方形上 B_R 我们现在可以使用欧几里得卷积的正主控函数，来给 $\beta_z(Q_t x)$ 的实部建立上界，其中 $t \in E$。固定 $\delta > 0$。伴随算子在分解范数上是等距映射（6.3），因此取实部是压缩映射。根据该范数的序描述，存在 $b_R \in L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})_+$ 使得

$$\pm \operatorname{Re}(K_t * F_R) \le b_R \quad (t \in E), \qquad \|b_R\|_{L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})} \le (C+\delta)|B_{R+S+2}|^{1/p}\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}.$$

这里 $\|F_R\|^p_{L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})} = \|x\|^p_{L^p(\mathcal{D})} \int |\rho_R(z)|^p \, dz \le |B_{R+S+2}| \|x\|^p_{L^p(\mathcal{D})}$，因为每个 β_z 都保持 $L^p(\mathcal{D})$ 范数。对于 $x = 0$ 取 $b_R = 0$。在 (2.1) 下，$L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})$ 的正锥由几乎处处为正的场组成（负部的函数演算是逐点进行的）。由于 E 是有限的，所显示不等式的例外零测集具有一个共同的零测并集。因此，对于几乎所有 $z \in B_R$，这些不等式可同时成立。对于这些 z，应用 β_{-z} 并利用 $(K_t * F_R)(z)$ 的公式，可得对于任意 $t \in E$，$\beta_{-z}(b_R(z)) \ge \pm \operatorname{Re} Q_t x$。映射 $z \mapsto \beta_{-z}(b_R(z))$ 是强可测的。事实上，在 $L^p(\mathcal{D})$ 中，用简单函数在几乎处处逐点逼近 b_R。将 β_{-z} 应用于每个简单函数的有限个取值，由轨道连续性可知所得函数是强可测的。应用 β_{-z} 后逼近仍然收敛，因为它保持 L^p 范数。在 B_R 上应用 H¨older 不等式可得

$$\int_{B_R} \|\beta_{-z}(b_R(z))\|_{L^p(\mathcal{D})} \, dz \le |B_R|^{1-1/p} \|b_R\|_{L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})} .$$

因此我们可以取 Bochner平均

$$b_{R,\delta} = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} \beta_{-z}(b_R(z)) \, dz .$$

对于每个 $t \in E$，场 $\beta_{-z}(b_R(z))$ 和 $\beta_{-z}(b_R(z)) \pm \operatorname{Re} Q_t x$ 几乎处处为正。它们的平均值属于闭凸锥 $L^p(\mathcal{D})_+$，因此 $b_{R,\,\delta} \ge 0$ 且 $b_{R,\,\delta} \ge \pm \operatorname{Re}\, Q_t x$。根据积分估计以及 b_R 的上界，

$$\|b_{R,\delta}\|_{L^p(\mathcal{D})} \le (C+\delta) \left(\frac{|B_{R+S+2}|}{|B_R|} \right)^{1/p} \|x\|_{L^p(\mathcal{D})} .$$

我们将有限 E 对应的主控函数 $b_{R,\,\delta}$ 推广为适用于所有 $t > 0$ 的单个主控函数。对于每个 $t > 0$，集合

$$\mathcal{C}_t = \{ b \in L^p(\mathcal{D})_+ : b \pm \operatorname{Re} Q_t x \in L^p(\mathcal{D})_+ \}$$

由于正锥是范数闭且凸的，因此它是弱闭的。对于固定的有限个 E，取 $R = n$ 和 $\delta = 1/n$，使得 $n \in \mathbb{N}$。体积比趋于 1。序列 $b_{n,1/n}$ 有界，因此由 $L^p(\mathcal{D})$的自反性可得一个弱收敛子网。其极限属于 $\bigcap_{t\in E} \mathcal{C}_t$，并由弱下半连续性知其范数不超过 $C\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$。由于 E 是任意的，$\mathcal{C}_t$ 与半径为$C\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$的弱紧球的交集具有有限交性质。它们的交集中的一个点是对所有 $t > 0$，$\pm\operatorname{Re}\, Q_t x$ 的主控函数。对于核 $-iK_t$，乘以 $-i$ 保持 (6.3) 中的欧几里得族范数，且 $\operatorname{Re}(-iQ_t x) = \operatorname{Im} Q_t x$。因此，刚刚证明的实部上界给出一个正主控函数，用于所有 $t > 0$的 $\pm\operatorname{Im}\, Q_t x$，其范数至多为$C\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$。(6.3) 中的三角不等式给出了所述因子 $2C$。

为了推广到所有 $x \in L^p(\mathcal{D})$，取一个非负的 $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，使得 $\int \rho = 1$，并写作$\rho_\delta(y) = \delta^{-2}\rho(y/\delta)$。对于 $x_\delta = \int \rho_\delta(y)\beta_y x\, dy$,

$$\beta_z x_\delta = \int \rho_\delta(y-z)\beta_y x\, dy, \qquad \|x_\delta - x\|_{L^p(\mathcal{D})} \le \int \rho_\delta(y)\|\beta_y x - x\|_{L^p(\mathcal{D})}\, dy.$$

对 L^1 中的 $z \mapsto \rho_\delta(\cdot - z)$ 求导可知，$x_\delta \in \mathcal{D}^\infty_{\beta,\,p}$。由 $y \mapsto \beta_y x$ 在 $y = 0$ 处的连续性，$\|x_\delta - x\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 的积分上界趋于零。将光滑轨道的上界应用于 $x_\delta - x_{\delta'}$，得到

$$\|(Q_t x_\delta - Q_t x_{\delta'})_{t>0}\|_{L^p(\mathcal{D};\ell^\infty)} \le 2C\|x_\delta - x_{\delta'}\|_{L^p(\mathcal{D})} \longrightarrow 0 \qquad (\delta, \delta' \downarrow 0)\,.$$

空间在 (6.3) 中的完备性给出了到 x 的所需延拓，并具有相同的上界$2C\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$。□

定理 6.7。 固定 $p \in (1、\infty)$ 以及满足 $\operatorname{Re}\alpha > a(p)$ 的 $\alpha \in \mathbb{C}$。设 β 是 $\mathbb{R}^2$ 在半有限迹冯诺依曼代数 $\mathcal{D}$ 上由保持法向迹的 $*$-自同构给出的作用，且具有范数连续的 L^p 轨道。在具有光滑 L^p 轨道的元素上定义的广义圆平均为

$$A^\alpha_{t,\beta} x = \langle K^\alpha_t(y), \beta_{-y} x\rangle \qquad (t > 0)$$

延拓为一个有界族映射 L^p（$\mathcal{D}$）$\to L^p$（$\mathcal{D}$；ℓ^∞（（0，∞））） *satisfying*

$$\|(A^\alpha_{t,\beta} x)_{t>0}\|_{L^p(\mathcal{D};\ell^\infty)} \le C_{p,\alpha}\|x\|_{L^p(\mathcal{D})} \qquad (x \in L^p(\mathcal{D})). \tag{6.17}$$

该常数关于 $\mathcal{D}$ 和 β 一致。对于 $2 < p < \infty$ 和任意 $L \in [0,\infty)$，若 $|$虚部$\alpha| \le L$ 且 $0 < \varepsilon =$ 实部$\alpha + g$（p）≤ 1，可取$C_{p,\ \alpha} \le C_{p,\ L}\varepsilon^{-1-2g(p)}$。

证明。 对每个 $t > 0$，分布 K^α_t在（6.2）中的支集位于半径为 t 的闭圆盘内。对于有限个半径，所有这些圆盘都包含在同一个正方形中。定理 1.4，取系数代数 $\mathcal{D}$，给出了一个与所选半径无关的欧几里得卷积上界，其卷积核为 K^α_t。这满足命题 6.6 的支集和范数假设。将其应用于给定的作用，先在光滑轨道上得到（6.17），再通过轨道磨光推广到L^p（$\mathcal{D}$）上的所有元素。该命题使范数至多增加两倍，因此对于 $2 < p < \infty$，它也将关于 ε 的依赖关系从推论 6.3 中传递过来。□

为了由（6.17）推出定理1.4 的第（ii）部分，只需将轨道平均与傅里叶乘子 $m_\alpha(t|D_\Theta|)$对应起来。对于第 $\beta = 5.4_{\mathcal{C}} \otimes \gamma$ 节中的作用id，K^α_t的傅里叶变换可明确确定轨道乘子。在量子环面上，用 K^α_t对 $y \mapsto e^{-iy\cdot n}$ 进行检验，得到

$$A^\alpha_{t,\beta}(c \otimes U^n) = m_\alpha(t|n|)\, c \otimes U^n, \qquad n \in \mathbb{Z}^2,$$

对于有界的 $c \in \mathcal{C}$，其支撑投影具有有限迹。

在带有 $1 < p \le 2$ 的莫亚尔平面上，我们有 $\Re\alpha > a(p) \ge 0$，因此对于每个 $t > 0$ 都有 $K^\alpha_t \in L^1(\mathbb{R}^2)$。按照第 5.5 节的记号，与任意$K \in L^1(\mathbb{R}^2)$相关联的博赫纳算子 A_K 由 (5.6) 中的积分给出。对于 $K = K^\alpha_t$，该算子在光滑轨道上与分布配对一致，因而也与其有界 L^p 延拓一致。对于 $x \in L^p(\mathcal{D}) \cap L^2(\mathcal{D})$，交空间范数中的积分与其在$\widehat{\ }$各空间中的取值一致。应用关于 A_K 的傅里叶公式以及恒等式 $K^\alpha_t(\xi) = m_\alpha(t|\xi|)$，可得

$$\widehat{A^\alpha_{t,\beta} x}_\Theta(\xi) = m_\alpha(t|\xi|)\widehat{x}_\Theta(\xi) \qquad \text{for almost every } \xi \in \mathbb{R}^2\,.$$

交空间包含所有支撑投影具有有限迹的有界元素，因此在 $L^p(\mathcal{D})$中稠密。这便将 L^p 延拓认定为所述乘子。

对于 $2 < p < \infty$，允许的阶数可能有 $\Re\alpha \le 0$，因此我们使用分布配对。固定 $t > 0$ 和 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$。令 $V = L^2(\mathcal{Q}_\Theta) \cap L^p(\mathcal{Q}_\Theta)$，其范数为 $\|u\|_V = \|u\|_{L^2(\mathcal{Q}_\Theta)} + \|u\|_{L^p(\mathcal{Q}_\Theta)}$。由普朗歇尔恒等式和 $\|\lambda_\Theta(g)\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_\Theta)} \le \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$，再结合插值，可得 $\lambda_\Theta\colon\ L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2) \to V$有界。映射 $y \mapsto e^{-iy\cdot\xi} f(\xi)$ 是一个取值于 $L^1 \cap L^2$ 的光滑映射。其 ν 阶导数为 $(-i\xi)^\nu e^{-iy\cdot\xi} f(\xi)$，这是在两种范数下应用控制收敛得到的。因此，轨道 $F(y) = \lambda_\Theta(e^{-iy\cdot\xi} f(\xi))$ 是一个取值于 V 的光滑映射。

取一个非负的 $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，满足 $\int \rho = 1$，并且对于 $\epsilon > 0$，令 $\rho_\epsilon(y) = \epsilon^{-2}\rho(y/\epsilon)$，$\widetilde{\rho}_\epsilon(y) = \rho_\epsilon(-y)$ 以及 $K_\epsilon = K_t^\alpha * \rho_{\epsilon\circ}$ 对 $K_\epsilon(y) = \langle K_t^\alpha(s)\ \rho_\epsilon(y-s)\rangle$ 进行积分，并以 $F(y)$ 为核，得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} K_\epsilon(y)F(y)\,dy = \langle K_t^\alpha, \widetilde{\rho}_\epsilon * F\rangle \longrightarrow \langle K_t^\alpha, F\rangle \qquad \text{in } V\,.$$

对于等式，积分可以限制在 y 中所有s 球 D_0 （6.16）中所使用的公共紧集上。对于带核 ρ_ϵ（$y-s$）的积分，黎曼和在 $s \in D_0$ 中一致收敛，且导数阶数不超过 m，见（6.16），因此可以交换次序。将（6.16）应用于 $\widetilde{\rho}_\epsilon * F - F$，可得配对在 V中收敛，因为该差的所有导数在 m 阶以内都在 D_0上一致趋于零。

在迹希尔伯特空间中，$\int K_\epsilon(y)F(y)\ dy$的傅里叶系数为 $\widehat{\rho}(\epsilon\xi)m_\alpha(t|\xi|)f(\xi)$。这里 $|\widehat{\rho}(\epsilon\xi)| \le 1$ 和 $\widehat{\rho}(\epsilon\xi) \to 1$。将（6.16）应用于特征标可知，紧支撑分布 K_t^α 的傅里叶变换至多按多项式增长，因此$m_\alpha(t|\xi|)f(\xi)$平方可积。控制收敛表明，V-极限的傅里叶系数为 $m_\alpha(t|\xi|)f(\xi)$。将这些恒等式与支撑投影具有有限迹的有界$c \in \mathcal{C}$ 张量化，并利用稠密性，可在每个放大模型中确定$A_{t,\beta}^\alpha$ 与$m_\alpha(t|D_\Theta|)$相同。定理 6.7 现即证明定理 1.4(ii)。

6.4. **双边几乎一致收敛**。 为证明推论 6.8中的小半径收敛性，我们使用下面的伸缩恒等式，根据 K_1^α的质量来确定光滑轨道上的极限。对每个 $t > 0$，$\alpha \in \mathbb{C}$，以及标量 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，

$$\langle K_t^\alpha, \varphi\rangle = \langle K_1^\alpha, y \mapsto \varphi(ty)\rangle. \tag{6.18}$$

对于 $\Re\alpha > 0$，在（6.2）中代入 $y = tv$。雅可比行列式 t^2 抵消了伸缩因子 t^{-2}。对于固定的 φ，t 两个配对关于 α 都是整函数，解析延拓见（6.2）。由恒等定理可知，（6.18）对所有复阶均成立。在支集的邻域上截断并应用（6.16），即可将伸缩公式推广到光滑的 Banach 值$\widehat{}$测试函数。特别地，$\langle K_1^\alpha,\ 1\rangle = K_1^\alpha(0) = m_\alpha(0)$。

对于归一化几何平均，本文两位作者利用极大不等式，得到了沿作用 [12, Propo-sition 8.1 and Corollary 8.3]的双边几乎一致收敛。对于复阶分布 K_t^α，（6.18）给出了光滑轨道上的收敛性，而（6.17）则控制了任意 $x \in L^p(\mathcal{D})$ 下的误差。

推论 6.8. 固定 $p \in (1,\infty)$ 以及 $\alpha \in \mathbb{C}$，使得 $\operatorname{Re}\alpha > a(p)$。设 β 是 $\mathbb{R}^2$ 在半有限迹代数 $\mathcal{D}$ 上的一种作用，由保法向迹的 $*$-自同构给出，且

L^p-连续轨道。当 $t\downarrow 0$ 时，每个 $x\in L^p(\mathcal{D})$ 都满足

$$A^{\alpha}_{t,\beta}x \longrightarrow \frac{\pi}{\Gamma(1+\alpha)}x \qquad \textit{bilaterally almost uniformly.}$$

证明。固定 $x\in L^p(\mathcal{D})$ 和 $\eta>0$。令 $c_\alpha=m_\alpha(\mathbf{0})$，并用 $\mathrm{tr}_{\mathcal{D}}$表示 $\mathcal{D}$ 上的迹。我们要寻找一个投影 $e\in\mathcal{D}$，使得 $\mathrm{tr}_{\mathcal{D}}(1-e)<\eta$，且 $\|e(A^{\alpha}_{t,\beta}x-c_\alpha x)e\|_{L^\infty(\mathcal{D})}\to 0$ 如$t\downarrow 0$。对于待选取的逼近元 x_n，令 $h_n=x-x_n$，其中 $n\in\mathbb{N}$。对于任意投影$e\in\mathcal{D}$ 和 $t>0$，我们有 $L^p(\mathcal{D})$ 中的恒等式

$$e(A^{\alpha}_{t,\beta}x-c_\alpha x)e=e(A^{\alpha}_{t,\beta}x_n-c_\alpha x_n)e+e(A^{\alpha}_{t,\beta}h_n-c_\alpha h_n)e\,.$$

我们首先证明在一个稠密类上算子范数收敛，并从中选取 x_n。对于误差项，我们使用 (6.17) 找到一个投影 e，使得 $\mathrm{tr}_{\mathcal{D}}(1-e)<\eta$，从而对某个 $n_0\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{t>0}\|e(A^{\alpha}_{t,\beta}h_n-c_\alpha h_n)e\|_{L^\infty(\mathcal{D})}\le 2^{1-n}\qquad (n\ge n_0)\,.$$

令 $V=\mathcal{D}\cap L^p(\mathcal{D})$，其范数为 $\|a\|_V=\max(\|a\|_{L^\infty(\mathcal{D})},\|a\|_{L^p(\mathcal{D})})$。我们通过对 V中元素的轨道进行平滑来构造这个稠密类。对于 $\zeta\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 和 $a\in V$，令 $S_\zeta a=\int_{\mathbb{R}^2}\zeta(y)\,\beta_y a\,dy$，其初始定义为 L^p Bochner 积分。除$\|S_\zeta a\|_{L^p(\mathcal{D})}\le\|\zeta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|a\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 外，我们还有$\|S_\zeta a\|_{L^\infty(\mathcal{D})}\le\|\zeta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|a\|_{L^\infty(\mathcal{D})}$。事实上，黎曼和在 L^p 中收敛，且其算子范数由 $\|a\|_{L^\infty(\mathcal{D})}$ 乘以 $|\zeta|$的标量黎曼和所控制。通过用支撑投影具有有限迹的有界 $d\in\mathcal{D}$ 对这些和进行测试，可得 $S_\zeta a$ 的算子范数上界。我们利用 L^p收敛和 $d\in L^{p'}$取极限，其中 $1/p+1/p'=1$。由此得到的上界为 $|\mathrm{tr}_{\mathcal{D}}(d^*S_\zeta a)|\le\|\zeta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|a\|_{L^\infty(\mathcal{D})}\|d\|_{L^1(\mathcal{D})}$。为恢复算子范数，令 $S_\zeta a=u|S_\zeta a|$，设 $M=\|\zeta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|a\|_{L^\infty(\mathcal{D})}$，并用 $d=ue_\varepsilon$进行测试，其中 $e_\varepsilon=1_{(M+\varepsilon,\infty)}(|S_\zeta a|)$。根据 $|S_\zeta a|$的谱测度所满足的切比雪夫不等式，该谱投影具有有限迹，因此配对上界给出 $(M+\varepsilon)\,\mathrm{tr}_{\mathcal{D}}(e_\varepsilon)\le\mathrm{tr}_{\mathcal{D}}(e_\varepsilon|S_\zeta a|)\le M\mathrm{tr}_{\mathcal{D}}(e_\varepsilon)$。因此，对每个 $\varepsilon>0$，都有 $e_\varepsilon=0$，从而证明$\|S_\zeta a\|_{L^\infty(\mathcal{D})}\le M$。

对于固定的 $a\in V$，取 $L^p(\mathcal{D})$ 和 $L^\infty(\mathcal{D})$ 估计的最大值可得$\|S_\zeta a\|_V\le\|\zeta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|a\|_V$。由稠密性，$\zeta\mapsto S_\zeta a$可延拓为有界线性映射$L^1(\mathbb{R}^2)\to V$。令 $x_0=S_\zeta a$，其中 $\zeta\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$。恒等式 $\beta_z x_0=S_{\zeta(\cdot-z)}a$ 以及 $z\mapsto\zeta(\cdot-z)$ 关于 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 的各阶可微性表明，x_0 的轨道在 V 中是光滑的。此类 x_0 在 $L^p(\mathcal{D})$ 中是稠密的。事实上，根据第 2.1 节，V 是稠密的，并且对于 $\delta>0$，我们可以取 $\rho_\delta(y)=\delta^{-2}\rho(y/\delta)$ 以及积分为一的非负 $\rho\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$。对于 $a\in V$，轨道连续性给出

$$\|S_{\rho_\delta}a-a\|_{L^p(\mathcal{D})}\le\int_{\mathbb{R}^2}\rho(y)\|\beta_{\delta y}a-a\|_{L^p(\mathcal{D})}\,dy\longrightarrow 0\qquad(\delta\downarrow 0)\,.$$

对于这样的 x_0，我们估计 $A^{\alpha}_{t,\beta}x_0-c_\alpha x_0$ 在 V中。公式（6.18）给出了光滑轨道和 K_1^α 的质量

$$A^{\alpha}_{t,\beta}x_0-c_\alpha x_0=\langle K_1^\alpha(y),\beta_{-ty}x_0-x_0\rangle.$$

取值的 V-值配对与由连续嵌入定义的 L^p 配对$V\hookrightarrow L^p$一致。由 (6.16)，取 $K=K_1^\alpha$ 和 $D_0=\{|y|\le 2\}$，只需证明所有

在 V 中，$\beta_{-ty}x_0 - x_0$ 的直到 m 阶导数在 D_0 上一致趋于零。恒等式 $\beta_{-ty}x_0 = S_{\zeta(\cdot+ty)}a$ 给出

$$\sup_{y\in D_0}\|\beta_{-ty}x_0 - x_0\|_V \le \|a\|_V \sup_{y\in D_0}\|\zeta(\cdot+ty)-\zeta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \longrightarrow 0 \qquad (t\downarrow 0)$$

由平移在 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中的连续性，因为 $|ty|\le 2t$ 对于 $y\in D_0$。对于 $1\le|\nu|\le m$，对 $\zeta(\cdot+ty)$ 求导可得

$$\sup_{y\in D_0}\|\partial_y^\nu \beta_{-ty}x_0\|_V \le t^{|\nu|}\|a\|_V\,\|\partial^\nu\zeta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \longrightarrow 0 \qquad (t\downarrow 0)\,.$$

因此 $\|A^\alpha_{t,\beta}x_0 - c_\alpha x_0\|_{L^\infty(\mathcal{D})}\to 0$。

现在我们选取 $x_n = S_{\zeta_n}a_n$，使得 $a_n\in V$ 和 $\zeta_n\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，从而对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$\|h_n\|_{L^p(\mathcal{D})} = \|x-x_n\|_{L^p(\mathcal{D})} \le 2^{-2n}$。对于 $t>0$，记 $Y_{n,t} = A^\alpha_t\beta h_n - c_\alpha h_n$。通过在 (6.3) 中将 $h_n = u_n|h_n|$ 分解为 $(u_n|h_n|^{1/2})\,1\,|h_n|^{1/2}$，并利用单个坐标的范数来证明反向不等式，常值族 $(c_\alpha h_n)_{t>0}$ 的极大范数为 $|c_\alpha|\|h_n\|_{L^p(\mathcal{D})}$。由三角不等式和 (6.17) 可得

$$\|(Y_{n,t})_{t>0}\|_{L^p(\mathcal{D};\ell^\infty)} \le (C_{p,\alpha}+|c_\alpha|)\|h_n\|_{L^p(\mathcal{D})}.$$

在（6.3）中，每个 $t>0$ 都是该族的一个坐标。根据（6.4）之后的序刻画，取 B_n^{Re}、$B_n^{\mathrm{Im}}\in L^p(\mathcal{D})_+$ 使得

$$-B_n^{\mathrm{Re}} \le \operatorname{Re}Y_{n,t} \le B_n^{\mathrm{Re}}, \qquad -B_n^{\mathrm{Im}} \le \operatorname{Im}Y_{n,t} \le B_n^{\mathrm{Im}} \qquad (t>0)\,.$$

我们可以令每个主控函数的范数至多为 $\|(Y_{n,t})_{t>0}\|_{L^p(\mathcal{D};\,\ell^\infty)} + 2^{-2n}$，因为实部和虚部在极大范数下都是压缩的。因此$b_n = B_n^{\mathrm{Re}} + B_n^{\mathrm{Im}}$对每个 $t>0$的实部和虚部的正负两种情形都构成主控函数，并且 $\|b_n\|_{L^p(\mathcal{D})} \le C'_{p,\alpha}2^{-2n}$。

对于 $n\in\mathbb{N}$，令 $e_n = 1_{[0,2^{-n}]}(b_n)$。对于 $n_0\in\mathbb{N}$，令 $e=\bigwedge_{n\ge n_0}e_n$，于是 $1-e=\bigvee_{n\ge n_0}(1-e_n)$。根据投影的并的迹的次可加性以及关于 b_n的谱测度的切比雪夫不等式，

$$\operatorname{tr}_{\mathcal{D}}(1-e) \le \sum_{n\ge n_0}\operatorname{tr}_{\mathcal{D}}(1-e_n) \le \sum_{n\ge n_0}2^{np}\|b_n\|^p_{L^p(\mathcal{D})} \le (C'_{p,\alpha})^p\sum_{n\ge n_0}2^{-np}\,.$$

选择 n_0，使右端小于 η，并固定所得的 e。对于每个 $n\ge n_0$，我们有 $e\le e_n$，从而 $eb_ne = e(e_nb_ne_n)e \le 2^{-n}e$。合并阶不等式可得

$$-2^{-n}e \le e(\operatorname{Re}Y_{n,t})e \le 2^{-n}e\,,$$
$$-2^{-n}e \le e(\operatorname{Im}Y_{n,t})e \le 2^{-n}e \qquad (t>0)\,.$$

两个压缩部分的算子范数均以上界 2^{-n} 为界，因此对于每个 $n\ge n_0$，都有 $\sup_{t>0}\|eY_{n,t}e\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \le 2^{1-n}$。

记 $x = x_n + h_n$，并在三角不等式中使用 $\sup_{t>0}\|eY_{n,t}e\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \le 2^{1-n}$，可得

$$\|e(A^\alpha_{t,\beta}x - c_\alpha x)e\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \le \|A^\alpha_{t,\beta}x_n - c_\alpha x_n\|_{L^\infty(\mathcal{D})} + 2^{1-n} \qquad (t>0,\ n\ge n_0)\,.$$

对于每个 $n\ge n_0$，右侧的第一项随着 $t\downarrow 0$ 趋于零，因为 $x_n = S_{\zeta_n}a_n$属于我们证明了算子范数收敛的函数类。先取 $t\downarrow 0$ 时的上极限，再令 $n\to\infty$ 趋于极限，同时固定 e，即可得到所需的收敛。□

7. Truncated cone multipliers

我们用 $(x,\ t)\ \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ 表示物理变量，用 $(\xi,\ \rho)\ \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ 表示它们的傅里叶变量，相位为 $x\cdot\xi + t\rho$。对于有界可测符号 $m\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$，令 $T_m\colon L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3}) \to L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 为符号为 m的乘子。对于实指数$1 < p < \infty$，设

$$\kappa(p) = \max\{0,\ 2|1/p - 1/2| - 1/2\}.$$

对于实数阶 $\lambda > 0$ 和截断函数 $\chi \in C_c^\infty((0,\infty))$，令 $M_\lambda\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ 在 $\rho \le 0$ 上为零，并定义

$$M_\lambda(\xi,\rho) = \chi(\rho)\left(1 - \frac{|\xi|^2}{\rho^2}\right)_+^\lambda \qquad (\rho > 0). \tag{7.1}$$

在标量理论中，$\mathbb{R}^3$ 上圆锥的尖锐平方函数估计蕴含平面局部平滑，以及圆锥乘子阶数的经典开放值域[8, 第 1 节1]。我们的目标是在 $L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 上为 $\lambda > \kappa(p)$ 建立 T_{M_λ} 的上界，并使其关于系数代数一致（定理 7.2）。在圆锥附近，我们将 M_λ 分解为厚度为 $0 < \delta \le 1/2$ 的壳层。对于光滑的法向轮廓 $a((\rho - |\xi|)/\delta)$，$a \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，对 ρ 作傅里叶反演得到相位 $e^{is|\xi|}$，其权函数为 $\delta\check{}a(\delta s)$，$s \in \mathbb{R}$。对于施瓦茨测试张量 F和支集远离原点的光滑空间截断函数 b，卷积涉及 $U(s)b(D_x)F(\cdot, t-s)$。在时空积分中作变量替换 $u = t - s$ 后，对每个固定的 $u \in \mathbb{R}$，我们可以将引理 5.1 应用于 $b(D_x)F(\cdot,u)$。第 7.2 节对壳层上界作插值，并以权函数 δ^λ 求和。固定的时间频率切片还给出关于 λ的标量必要条件。第 7.3 节将圆锥估计推广到三维量子欧几里得空间。

7.1. **薄圆锥壳层估计。** 我们通过对半波取平均，得到壳层乘子在 $L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 上的界。我们还将壳层划分为角向帽，估计核的 $L^1(\mathbb{R}^3)$ 范数。核估计给出 $L^\infty(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 上的算子界，我们再将其与第 7.2 节中 $L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 上的界进行插值。法向变量中的剖面可以光滑地依赖于 (ξ,ρ)。

命题 7.1. 固定 $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$、$c \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，并令 $L_\delta = 1 + \log(\delta^{-1})$ 表示$0 < \delta \le 1/2$。设 $A_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ 支集于某个固定紧集内，并满足 $\sup_\delta \|A_\delta\|_{C^8} \le 1$。对于

$$m_\delta(\xi,\rho) = b(\xi)c(\rho)A_\delta\big(\xi,\rho,(\rho - |\xi|)/\delta\big)$$

有

$$\|T_{m_\delta}\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})} \le C L_\delta^{1/2}, \qquad \|\check{m}_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \le C\delta^{-1/2}. \tag{7.2}$$

此处及下文中的算子范数均取在 $L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 上。(7.2) 中的常数仅依赖于固定支集和 C^4 范数 b、c，且关于半有限迹代数 $\mathcal{M}$一致。

证明。 为证明（7.2），我们首先通过将圆分解为角向帽来给出 $\|\check{m}_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$ 的上界。对于$\|T_{m_\delta}\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})}$，我们保留整个环带并使用时间平均。

在圆上选取一个光滑的角向分割，包含 $O(\delta^{-1/2})$ 个孔径与 $\delta^{1/2}$ 相当且小于 $\pi/4$的帽。记 $q_{\delta,\,e}\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to [0,1]$ 为以 $e \in \mathbb{S}^1$ 为中心的帽对应的角向截断函数，并令 $m_{\delta,\,e}(\xi,\ \rho) = q_{\delta,\,e}(\xi)m_\delta(\xi,\ \rho)$。这些截断函数

关于缩放角的一致有界导数，因为它们是通过对该变量中的一个固定隆起函数作平移并归一化得到的。取一个与 e垂直的单位向量 $e^{\perp}$，并定义 B_e： $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 如下

$$B_e(u,v,w) = (ue + \delta^{1/2} v e^{\perp},\, u + \delta w) \qquad ((u,v,w) \in \mathbb{R}^3).$$

令 $g_{\delta,\ e} = m_{\delta,\ e} \circ B_{e_0}$ 对于帽中的 ξ，记 θ 为其相对于 e 的有向角。由于 $u = |\xi| \cos\theta$ 且 $v = \delta^{-1/2}|\xi| \sin\theta$，由 b 的支集和孔径上界可得，在 $g_{\delta,\ e}$ 的支集上有 $0 < u_0 \le u \le u_1$ 和 $|v| \le C$，其中 u_0，u_1，C 与 δ，e 无关。此处法向坐标满足

$$\frac{\rho - |\xi|}{\delta} = w - \frac{v^2}{u + \sqrt{u^2 + \delta v^2}}.$$

A_δ 的支集给出 $(\rho - |\xi|)/\delta$ 的上界，因此该公式也给出了 $|w|$ 的上界。于是 $g_{\delta,\ e}$ 支集包含于一个固定盒子中，且 u 与零保持正距离。

在此盒子上，缩放角

$$\delta^{-1/2} \arctan(\delta^{1/2} v/u) = \frac{v}{u} \int_0^1 \frac{d\tau}{1 + \delta \tau^2 (v/u)^2}$$

以及法向坐标直到四阶都具有一致有界导数。后者由 $u + \sqrt{u^2 + \delta v^2} \ge 2u_0$ 得出。对 $q_{\delta,\ e}$、b、c 和 A_δ 应用链式法则，现可一致地给出 C^4 范数 $g_{\delta,\ e}$ 的上界。对于 $X = (x,\ t) \in \mathbb{R}^3$，傅里叶反演给出

$$(1 + |X|^2)^2 |\check{g}_{\delta,e}(X)| \le (2\pi)^{-3} \|(1-\Delta)^2 g_{\delta,e}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \le C.$$

通过 B_e进行频率变量代换，其行列式的绝对值为 $\delta^{3/2}$，得到

$$\check{m}_{\delta,e}(X) = \delta^{3/2} \check{g}_{\delta,e}(B_e^{\mathsf{T}} X), \qquad \|\check{m}_{\delta,e}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \|\check{g}_{\delta,e}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \le C.$$

对帽求和可得 $\|\check{m}_{\delta,\ e}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\ \|\check{m}_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \lesssim \delta^{-1/2}$。

对于 L^4 上界，首先取 $m_\delta(\xi,\ \rho) = b(\xi)c(\rho)a((\rho - |\xi|)/\delta)$，其中 $a \in C_c^\infty(\mathbb{R})$的支集包含在一个固定区间内。因子 $c(\rho)$通过可积核$\check{}c$在 t 上作用为卷积。因此，我们可以省去该因子，代价为 $\|\check{}c\|_{L^1(\mathbb{R})}$，记作 $\widetilde{m}_\delta(\xi,\ \rho) = b(\xi)a((\rho - |\xi|)/\delta)$。固定$\xi \in \mathbb{R}^2$后，作变量代换 $r = (\rho - |\xi|)/\delta$，其中 $d\rho = \delta\, dr$，得到 ρ中的逆变换

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{is\rho} a\big((\rho - |\xi|)/\delta\big)\, d\rho = \delta e^{is|\xi|} \check{a}(\delta s), \qquad \check{a}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{isr} a(r)\, dr.$$

对于 $s \in \mathbb{R}$，将局部化符号 $\xi \mapsto e^{is|\xi|} b(\xi)$ 求导至四阶，并利用 (2.3) 可得

$$\|(e^{is|\cdot|} b)^\vee\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \le C_b (1 + |s|)^4.$$

令 F 为施瓦茨测试张量的有限和。由 ($U(s)b(D_x)$ 的空间核在有界 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 区间上连续变化（见 (2.3)）。结合 F平移切片的范数连续性，可知下方被积函数强可测。对于固定的 δ，$\check{}a(\delta s)$ 的快速衰减以及多项式核界确保在每个 $L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$ 中对 t以及在 $L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 中绝对 Bochner 可积，这里用到了 (2.1) 和时间平移不变性

根据时间平移不变性。同一积分在 $L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 中也存在，这是由普朗歇尔恒等式保证的。对时间作傅里叶反演可得

$$T_{\widetilde{m}_\delta}F(x,t)=\int_{\mathbb{R}}\delta\check{a}(\delta s)\big[U(s)b(D_x)F(\cdot,t-s)\big](x)\,ds.$$

令 $w_\delta(s)=\delta|\check{a}(\delta s)|$，其中 $s\in\mathbb{R}$，$W=\int_{\mathbb{R}}w_\delta(s)\,ds=\|\check{a}\|_{L^1(\mathbb{R})}$，且 $h_u=b(D_x)F(\cdot,u)\in L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$，其中 $u\in\mathbb{R}$。为在固定 h_u 的情况下使用 (5.2)，先在 $L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$ 中应用三角不等式，再结合 $g(s)=\|U(s)h_{t-s}\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$ 使用标量 H¨older 上界 $(\int w_\delta g)^4\le W^3\int w_\delta g^4$。对 t 积分，在固定 s 的情况下作变量代换 $u=t-s$，并应用 Tonelli 定理，得到

$$\begin{aligned}\|T_{\widetilde{m}_\delta}F\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})}^4&\le W^3\int_{\mathbb{R}}w_\delta(s)\int_{\mathbb{R}}\|U(s)h_{t-s}\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^4\,dt\,ds\\&=W^3\int_{\mathbb{R}}I_\delta(u)\,du,\qquad I_\delta(u)=\int_{\mathbb{R}}w_\delta(s)\|U(s)h_u\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^4\,ds.\end{aligned}$$

为了给出上界 $I_\delta(u)$，选取 $0<r_0<r_1<\infty$ 使得每个 h_u 的空间傅里叶变换$\widehat{\ }$支集位于 $r_0\le|\xi|\le r_1$，利用 $\operatorname{supp}h_u\subset\operatorname{supp}b$。由于 $\sigma(4)=0$ 且 $\beta(4)=1/2$，在 5.2 的四次方给出 $S=2^j$

$$\int_{2^j\le|s|\le2^{j+1}}\|U(s)h_u\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^4\,ds\le C2^j(1+j)^2\|h_u\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^4\qquad(j=0,1,2,\dots).$$

对于负区间，变量代换 $r=-s$ 使我们能够将 (5.2) 应用于 $[2^j,2^{j+1}]$ 上的 $U(-r)h_u$。对于 $|s|\le1$，引理 5.1 给出 $\|U(s)h_u\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}\le C\|h_u\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$。两次分部积分，再结合 $\delta s=0$ 附近的直接上界，可得 $w_\delta(s)\lesssim\|a\|_{C^2}\delta(1+\delta|s|)^{-2}$。将每个时间区间上的积分乘以 w_δ 在该区间上的上确界，得到

$$I_\delta(u)\le C\|a\|_{C^2}\|h_u\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^4\left(\delta+\sum_{j\ge0}\delta2^j(1+\delta2^j)^{-2}(1+j)^2\right).$$

取 $J=\lfloor\log_2(\delta^{-1})\rfloor$，则该和的 $0\le j\le J$ 部分至多为 $2\delta2^J(1+J)^2$。对于 $j=J+n$，$n\ge1$，其余部分的和由 $C\sum_{n\ge1}2^{-n}(1+J+n)^2\lesssim(1+J)^2$，控制，因为 $1/2<\delta2^J\le1$。因此 $I_\delta(u)\le C\|a\|_{C^2}L_\delta^2\|h_u\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^4$。

I对权重估计进行积分得到 $W\lesssim\|a\|_{C^2}$。对 $\check{b}$ 进行空间卷积得到

$$\int_{\mathbb{R}}\|h_u\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^4\,du\le\|\check{b}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^4\|F\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})}^4.$$

将 $I_\delta(u)$ 的上界代入 $W^3\int_{\mathbb{R}}I_\delta(u)\,du$ 并取四次方根，得到

S

$$\|T_{\widetilde{m}_\delta}F\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})}\le C\|\check{b}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|a\|_{C^2}L_\delta^{1/2}\|F\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})}.$$

在时间上与 $\check{c}$进行卷积，并利用测试张量的稠密性，得到单个法向剖面的上界

$$\|T_{m_\delta}\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})}\le C\|\check{c}\|_{L^1(\mathbb{R})}\|\check{b}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|a\|_{C^2}L_\delta^{1/2}.$$

为将单剖面界应用于一般振幅 A_δ，我们将其对频率坐标的依赖与对法向变量 r的依赖分离开来。

取三维频率坐标 $z=(\xi,\ \rho)$ 中一个边长为 $D>0$ 的固定盒子 B。其内部包含 A_δ 支集的投影以及 $\operatorname{supp} b\times\operatorname{supp} c$的投影。将 A_δ在 z中的周期延拓展开为 $\sum_{n\in\mathbb{Z}^3} e^{2\pi i n\cdot z/D}a_{\delta,\ n}(r)$，其中系数$a_{\delta,\ n}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 由下式给出

$$a_{\delta,n}(r)=D^{-3}\int_B e^{-2\pi i n\cdot z/D}A_\delta(z,r)\,dz.$$

它们的支集包含在 r 中的同一个紧区间内。对于 $0\le k\le 2$，利用 $(1-\Delta_z)^2$ 分部积分可得

$$\partial_r^k a_{\delta,n}(r)=\frac{D^{-3}}{(1+4\pi^2|n|^2/D^2)^2}\int_B e^{-2\pi i n\cdot z/D}(1-\Delta_z)^2\partial_r^k A_\delta(z,r)\,dz.$$

积分中 A_δ 的导数总阶不超过六。因此，$\|a_{\delta,n}\|_{C^2}\le C(1+|n|)^{-4}$ 关于 δ 一致。

对于 $n\in\mathbb{Z}^3$，令

$$m_{\delta\,n}\quad\rho\qquad c\ \rho\ a_{\delta\,n}\qquad\qquad =,(\xi,)\ =\ b(\xi)\ (\ ),$$

$G\ X+h\qquad L^4\ \mathcal{N}_{\mathbb{R}^3}$
$((\rho-|\xi|)/\delta)$。对于 $h\in\mathbb{R}^3$，令 $\tau_h G(X)\ (\ )$ 在 $(\ )$ 上。符号 $m_{\delta,}$ 乘以 $e^{2\pi i n\cdot z/D}$ 对应于 $\tau_{2\pi n/D}T_{m_{\delta,n}}$。平移是 $L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 上的等距映射，因此单剖面估计给出该算子的范数上界为 $CL_\delta^{1/2}\ (1+|n|)^{-4}$。由此可得

$$T_{m_\delta}=\sum_{n\in\mathbb{Z}^3}\tau_{2\pi n/D}T_{m_{\delta,n}}$$

在 $L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3}$上的算子范数中。事实上，范数估计可求和，且由$\|a_{\delta}$的衰减，部分符号一致收敛到 $m_{\delta\ n}\|_{C^2}$。对于 $F\in L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\cap L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$，普朗歇尔恒等式给出其在 L^2中收敛到 $T_{m_\delta}F$。依测度收敛极限的唯一性表明，这就是 L^4 和。稠密性将其延拓到所有L^4，而范数求和则证明了（7.2）中的 L^4 估计。

□

7.2. **圆锥阶的上界与必要条件。通过插值**（7.2）中的上界，可得 L^p 估计，从而可以对 M_λ 的二进分块求和。

定理 7.2. 对于 $1<p<\infty$ 和 $\lambda>\kappa(p)$，T_{M_λ} 可从 $L^p\cap L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 延拓为 $L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 上的有界算子，其范数至多为 $C_{p,\ \lambda,\ \chi}$，且关于 $\mathcal{M}$ 及其迹一致有界。

证明。 取定 $1<p<\infty$ 和 $\lambda>\kappa(p)$。选取 $0<\rho_-<\rho_+<\infty$，使得 $\operatorname{supp}\chi\subset[\rho_-,\rho_+]$，并取满足 $2^{1-j_0}\le\rho_-/2$的整数 $j_0\ge 1$。取一个非负的 $\varphi\in C_c^\infty((1/2,2))$，使得$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi(2^j u)=1$ 对 $u>0$成立。对于 $(\xi,\rho)\in\mathbb{R}^3$，令 $u=\rho-|\xi|$ 并定义

$$m_j(\xi,\rho)=M_\lambda(\xi,\rho)\varphi(2^j u)\quad(j\ge j_0),\qquad m_{\mathrm{int}}=M_\lambda-\sum_{j\ge j_0}m_j\,.$$

对于每个整数 $J\ge j_0$ 和 $F\in L^2\cap L^p$（$\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3}$），由三角不等式可得

$$\Big\|T_{m_{\mathrm{int}}}F+\sum_{j=j_0}^{J}T_{m_j}F\Big\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})}\le$$

$$\Big(\|T_{m_{\mathrm{int}}}\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})}+\sum_{j=j_0}^{J}\|T_{m_j}\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})}\Big)\|F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})}\,.$$

我们用 $\|\check{m}_{\mathrm{int}}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$ 给出第一个算子范数的上界，并证明 T_{m_j} 的范数可求和。随后我们将算子和等同于 T_{M_λ}。

为证明 $\check{m}_{\mathrm{int}}$ 可积，我们证明 m_{int} 光滑且具有紧支撑。对于 $0 < u < 2^{-j_0}$，分割中所有满足 $j < j_0$ 的项都消失，因此 $\sum_{j\ge j_0} m_j = M_\lambda$ 也在那里消失。当 $u \le 0$ 时，M_λ 和壳层符号都消失。因此，m_{int} 在 $u = 0$ 附近消失。在 $\operatorname{supp}\chi$ 上，当 $|\xi| < \rho_-/2$ 时，所有 m_j 都消失，因为它们的支集要求 $u < 2^{1-j_0}$。在该邻域内，$m_{\mathrm{int}} = M_\lambda$；根据 (7.1)，它关于 ξ 在零点处光滑。远离 $\xi = 0$ 和 $u = 0$ 时，壳层和局部有限且光滑。因此，m_{int} 光滑且具有紧支撑，所以其傅里叶逆变换可积，并通过卷积给出 $\|T_{m_{\mathrm{int}}}\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})}$ 的上界。

我们通过对归一化符号$2^{j\lambda}m_j$应用命题 7.1，来估计环带项。对每个 $j \ge j_0$，令 $\delta = 2^{-j}$，并令 $v = u/\delta$。在 $\operatorname{supp} m_j$ 上，我们有 $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$、$\delta/2 < u < 2\delta$ 和 $\rho_-/2 \le |\xi| \le \rho_+$。选取 $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$，使其在这个固定环域上等于一，并令 $c = \chi$。取 $\widetilde{b} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ 和 $\widetilde{c} \in C_c^\infty((0,\infty))$，使它们分别在 $\operatorname{supp} b$ 和 $\operatorname{supp} c$ 上等于一。定义 A：当 $\rho > 0$、$\xi \ne 0$ 和 $v > 0$ 时，令 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$，其中

$$A(\xi,\rho,v) = \widetilde{b}(\xi)\widetilde{c}(\rho)\varphi(v)v^\lambda \left(\frac{\rho + |\xi|}{\rho^2}\right)^\lambda$$

并在其他地方延拓为零。对于 $\rho > 0$，分解 $1 - |\xi|^2/\rho^2 = u(\rho + |\xi|)/\rho^2$ 给出

$$2^{j\lambda} m_j(\xi,\rho) = b(\xi)c(\rho)A(\xi,\rho,2^j u) \qquad (j \ge j_0)\,.$$

在 A 的固定紧支撑上，两个正底数 v 和 $(\rho + |\xi|)/\rho^2$ 都光滑且有界，并且严格大于零。截断函数 $b(\xi)$、$\widetilde{c}(\rho)$ 和 $\varphi(v)$ 的支集分别避开 $\xi = 0$、$\rho = 0$ 和 $v = 0$。因此，零延拓是光滑的，对乘积求导可得 $\|A\|_{C^8} \le C_{\chi,\lambda}$。将 A 除以一个上界 $C_{\chi,\lambda} \ge 1$，即可得到命题 7.1 中的归一化。

对于命题 7.1中的任意归一化符号 m_δ，普朗歇尔恒等式和与 $\check{m}_\delta$ 的卷积分别给出

$$\|T_{m_\delta}\|_{L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})} \lesssim 1, \qquad \|T_{m_\delta}\|_{L^\infty(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^\infty(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})} \lesssim \delta^{-1/2}.$$

在 $L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 处以权重 $2 - 4/p$ 对 $L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 和 $L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 进行插值，得到 $C_p L_\delta^{1-2/p}$，其中 $2 \le p \le 4$。在 $L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 处以权重 $4/p$ 对 $L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 和 $L^\infty(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 进行插值，得到 $C_p\delta^{-(1/2-2/p)}L_\delta^{2/p}$，其中 $4 \le p < \infty$。

若 $1 < p < 2$，则令 $p' = p/(p-1) > 2$。将刚刚证明的估计应用于 p' 处的 $T_{\overline{m_\delta}}$，其符号具有相同的支集和导数界。在迹配对下，该算子是 L^2上的 T_{m_δ} 的伴随算子，因此其 $L^{p'}$ 界给出了 T_{m_δ}的 L^p 延拓，并且具有相同的上界。对于 $2 \le p < \infty$，插值估计中 δ^{-1} 的幂为 $\kappa(p) = \max\{0, 1/2 - 2/p\}$。由于 $\kappa(p') = \kappa(p)$ 且 $L_\delta^\gamma \le C_{\gamma,\epsilon}\delta^{-\epsilon}$ 对于固定的 $\gamma \ge 0$ 和 $\epsilon > 0$，这就证明了

$$\|T_{m_\delta}\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})} \le C_{p,\epsilon}\delta^{-\kappa(p)-\epsilon} \qquad (1 < p < \infty,\ \epsilon > 0)\,. \tag{7.3}$$

这些常数关于 $\mathcal{M}$ 及其迹是一致的，并且对截断函数的依赖与命题 7.1 中的相同。将（7.3）应用于 $2^{j\lambda}m_j$，并计入 A 的归一化。

取 $\epsilon = (\lambda - \kappa(p))/2$，可得

$$\sum_{j\geq j_0} \|T_{m_j}\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})} \leq C_{p,\lambda,\chi,\epsilon} \sum_{j\geq j_0} 2^{-j(\lambda-\kappa(p)-\epsilon)} < \infty\,.$$

还需将有界算子和的极限与 T_{M_λ} 联系起来。$T_{m_{\mathrm{int}}}$ 的上界以及壳层范数给出 $T_{m_{\mathrm{int}}} + \sum_{j=j_0}^{J} T_{m_j}$ 在 $L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$ 上的算子范数极限，其范数至多为 $C_{p,\lambda,\chi}$。有限符号和一致收敛到 M_λ，因为 $\|m_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \lesssim_{\lambda,\chi} 2^{-j\lambda}$。对于 $F \in L^2 \cap L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})$，普朗歇尔恒等式表明，对 F 应用相同部分和所得的结果在 L^2 中收敛到 $T_{M_\lambda}F$。依测度唯一性表明，L^2 极限与 L^p 极限一致。根据第2节，支撑投影具有有限迹的有界元素在 L^p 中稠密，且属于 $L^2 \cap L^p$。由此得到唯一延拓。□

推论 7.3. 对于 $0 < \lambda \leq 1$，有 $\|T_{M_\lambda}\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})} \leq C_\chi \lambda^{-3/2}$，且对系数代数一致成立。

证明。按定理 7.2 的证明，写作 $M_\lambda = m_{\mathrm{int}} + \sum_{j\geq j_0} m_j$。指标 j_0、$\widetilde{\ }$分割函数 φ以及其中使用的截断函数 b、c、b、$\widetilde{c}$均固定，且与 λ无关。由三角不等式，对于 $0 < \lambda \leq 1$ 只需证明

$$\|\check{m}_{\mathrm{int}}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \sum_{j\geq j_0} \|T_{m_j}\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})} \leq C_\chi \lambda^{-3/2}.$$

在 m_{int} 的支集上，我们有 $u \geq 2^{-j_0}$ 和 $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$，因此

$$1 - \frac{|\xi|^2}{\rho^2} = \frac{u(\rho + |\xi|)}{\rho^2} \geq \frac{2^{-j_0}}{\rho_+}\,.$$

这里，m_{int} 是该底数的 λ 次幂与固定截断函数 $\chi(\rho)[1 - \sum_{j\geq j_0}\varphi(2^j u)]$ 的乘积。该截断函数在 $u = 0$ 附近的内部为零，并在 $\xi = 0$附近等于 $\chi(\rho)$。将正幂写成指数函数，即以 λ 乘以底数的对数作为指数，得到 $\|m_{\mathrm{int}}\|_{C^4} \leq C_\chi$，其中 $0 < \lambda \leq 1$。在傅里叶反演中应用 $(1 - \Delta_{\xi,\ \rho})^2$，可得 $|\check{m}_{\mathrm{int}}(X)|$ 的上界为 $C_\chi(1 + |X|^2)^{-2}$，因此 $\|\check{m}_{\mathrm{int}}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq C_\chi$。

对于 $2^{j\lambda}m_j$ 的振幅 A，v^λ 和 $((\rho + |\xi|)/\rho^2)^\lambda$ 的相同指数函数公式给出了 $0 < \lambda \leq 1$ 的一致上界。将 $\delta = 2^{-j}$ 代入（7.2）得到 $\|T_{m_j}\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})} \leq C_\chi 2^{-j\lambda}(1 + j)^{1/2}$。在单位区间上比较并作代换 $v = \lambda s$，可得

$$\sum_{j\geq j_0} 2^{-j\lambda}(1 + j)^{1/2} \lesssim \int_0^\infty 2^{-\lambda s}(1 + s)^{1/2}\, ds = \lambda^{-3/2} \int_0^\infty 2^{-v}(\lambda + v)^{1/2}\, dv\,.$$

由于 $0 < \lambda \leq 1$，v 中的积分至多为 $\int_0^\infty 2^{-v}(1 + v)^{1/2}\, dv$。加上上界 $\|\check{m}_{\mathrm{int}}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq C_\chi$，得到 $\|T_{M_\lambda}\|_{L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})\to L^4(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3})} \leq C_\chi \lambda^{-3/2}$。□

我们通过取 M_λ 在固定时间频率下的切片，推导出标量有界性的必要条件。固定 $1 < p < \infty$，并假设对于某个 $\rho_0 > 0$，$\chi(\rho_0) \neq 0$。T_{M_λ} 的标量 $L^p(\mathbb{R}^3)$ 有界性要求当 $\lambda > 0$ 时满足 $\lambda > \kappa(p)$，并且在 $\lambda = 0$ 处要求 $p = 2$。对于零次幂，我们使用开锥的示性函数。

设 $\lambda \ge 0$，并假设 T_{M_λ} 在标量 $L^p(\mathbb{R}^3)$ 上有界。为了取时间频率 ρ_0 处的切片，选择 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$、$0 \neq g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，并对 $\epsilon > 0$ 使用 $F_\epsilon(x,\ t) = f(x)\epsilon^{1/p} g(\epsilon t) e^{i\rho_0 t}$。令

$$G_\epsilon(x,s) = \epsilon^{-1/p} e^{-i\rho_0 s/\epsilon} (T_{M_\lambda} F_\epsilon)(x, s/\epsilon) \qquad ((x,s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}).$$

伸缩与调制给出 $\|G_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \le \|T_{M_\lambda}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)\to L^p(\mathbb{R}^3)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}$ 以及

$$\widehat{G_\epsilon}(\xi,\eta) = M_\lambda(\xi, \rho_0 + \epsilon\eta) \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) \qquad ((\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}).$$

对于 $|\xi| \neq \rho_0$，符号收敛于 $M_\lambda(\xi, \rho_0)$。由于它有上界且 $\widehat{f} \otimes \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^3)$，傅里叶反演中的控制收敛给出 $G_\epsilon(x,s) \to g(s) M_\lambda(D_x, \rho_0) f(x)$，其中 $M_\lambda(D_x, \rho_0)$ 是符号为 $M_\lambda(\cdot, \rho_0)$ 的空间乘子。Fatou引理与乘积范数给出

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \|M_\lambda(D_x, \rho_0) f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \le \|T_{M_\lambda}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)\to L^p(\mathbb{R}^3)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

消去 $\|g\|_{L^p(\mathbb{R})} > 0$，除以 $|\chi(\rho_0)|$，并对空间变量进行伸缩，可得符号为 $(1-|\xi|^2)_+^\lambda$、定义在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上的单位圆盘乘子有上界。

由于圆盘符号为实数，对偶性也给出在 $p' = p/(p-1)$ 上的有界性。将该乘子作用于其变换在闭单位圆盘上为 1 的 Schwartz 函数，得到圆盘核 K_λ，因此对于 $q \in \{p, p'\}$，有 $K_\lambda \in L^q(\mathbb{R}^2)$。对于 $r = |x| > 0$，极坐标积分给出

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 J_0(ru)(1-u^2)^\lambda u \, du = c_\lambda r^{-1-\lambda} J_{1+\lambda}(r), \qquad c_\lambda = \frac{2^\lambda \Gamma(1+\lambda)}{2\pi}.$$

对 J_0 的幂级数逐项积分，并利用 $\int_0^1 u^{2k+1}(1-u^2)^\lambda \, du = \Gamma(k+1)\Gamma(1+\lambda)/(2\Gamma(k+2+\lambda))$，可得最后一个等式，其中 $k \ge 0$。固定阶渐近展开 [16, (10.17.3)] 给出

$$K_\lambda(x) = c_\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, r^{-3/2-\lambda} \left[\cos\left(r - \frac{\pi(1+\lambda)}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O_\lambda(r^{-1}) \right] \qquad (r \to \infty).$$

在每个充分大的周期中，都存在一个固定正长度的区间，使得余弦的绝对值至少为 $1/2$，且误差至多为 $1/4$。在第 n 个周期的区间上，$r \asymp n$，因此对 $r\,dr$ 进行径向积分得到

$$\|K_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}^q \gtrsim_{\lambda,q} \sum_{n \ge n_0} n^{1-q(3/2+\lambda)} \qquad (q \in \{p, p'\})$$

对某个整数 n_0。有限性要求 $3/2 + \lambda > 2/p$ 和 $3/2 + \lambda > 2/p'$。结合 $\lambda > 0$，这些不等式等价于 $\lambda > \kappa(p)$。在零阶时，Fefferman 圆盘乘子定理 [5] 排除了所有 $p \neq 2$，而普朗歇尔恒等式表明在 $p = 2$处有界。

7.3. **三维量子欧几里得空间上的锥乘子**。为证明推论 7.4，我们利用量子欧几里得空间上的平移，将定理 7.2 和推论 7.3中的锥乘子界转移过来。

设 Θ 为实斜对称 3×3矩阵。我们采用第 5.4 节中莫亚尔模型的归一化。扭曲群冯·诺依曼代数 $\mathbb{R}^3_\Theta$ 由酉元 $\lambda_\Theta(\zeta)$、$\zeta \in \mathbb{R}^3$ 生成，并满足

$$\lambda_\Theta(\zeta)\lambda_\Theta(\eta) = e^{i\langle \eta, \Theta\zeta\rangle/2} \lambda_\Theta(\zeta+\eta) \qquad (\zeta, \eta \in \mathbb{R}^3).$$

对 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$，通过弱算子积分 $\int_{\mathbb{R}^3} f(\zeta)\lambda_\Theta(\zeta)\, d\zeta$ 定义 $\lambda_\Theta(f) \in \mathbb{R}^3_\Theta$。Plancherel 迹满足 $\mathrm{tr}_\Theta(\lambda_\Theta(f)) = f(0)$，以及 $\|\lambda_\Theta(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^3_\Theta)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$。

对于半有限迹代数 $\mathcal{C}$，令 $\mathcal{D} = \mathcal{C}\bar{\otimes}\mathbb{R}^3_\Theta$ 配备乘积迹。将 Plancherel 同一化与 $L^2(\mathcal{C})$ 上的恒等映射作张量积，可得到一个酉映射

$$\mathcal{F}_\Theta : L^2(\mathcal{D}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3; L^2(\mathcal{C})), \qquad x \longmapsto \widehat{x}_\Theta\,.$$

迹保持的对偶作用 $\beta_z\colon\ \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, $z \in \mathbb{R}^3$ 在 $\mathcal{C}$ 上平凡作用，并将 $\lambda_\Theta(\zeta)$ 映至 $e^{iz\cdot\zeta}\lambda_\Theta(\zeta)$。对于有界可测符号 $m\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$，按下方第二个公式定义 $T_m^\Theta{:}L^2(\mathcal{D}) \to L^2(\mathcal{D})$。对于 $x \in L^2(\mathcal{D})$ 以及几乎处处的 $\zeta \in \mathbb{R}^3$,

$$\widehat{\beta_z x}_\Theta(\zeta) = e^{iz\cdot\zeta}\widehat{x}_\Theta(\zeta), \qquad \widehat{T_m^\Theta x}_\Theta(\zeta) = m(\zeta)\widehat{x}_\Theta(\zeta)\,.$$

迹保持性给出 $\|\beta_z x\|_{L^p(\mathcal{D})} = \|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 对于 $x \in L^p(\mathcal{D})$ 和 $1 \le p \le \infty$。特征标公式给出 $\|\beta_z x - x\|_{L^2(\mathcal{D})} \to 0$，根据控制收敛定理可得 $z \to 0$。对于$x = ab \in L^1(\mathcal{D})$，其中 a, $b \in L^2(\mathcal{D}$如第 5.4 节所述，迹 H¨older 不等式给出

$$\|\beta_z x - x\|_{L^1(\mathcal{D})} \le \|\beta_z a - a\|_{L^2(\mathcal{D})}\|b\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|a\|_{L^2(\mathcal{D})}\|\beta_z b - b\|_{L^2(\mathcal{D})} \longrightarrow 0\,.$$

对于支撑投影具有有限迹的有界 $x \in \mathcal{D}$，记作 $d_z = \beta_z x - x$，可得到插值估计

$$\begin{aligned}
\|d_z\|_{L^p(\mathcal{D})} &\le (2\|x\|_{L^\infty(\mathcal{D})})^{1-2/p}\|d_z\|_{L^2(\mathcal{D})}^{2/p} && (2 < p < \infty)\,,\\
\|d_z\|_{L^p(\mathcal{D})} &\le \|d_z\|_{L^1(\mathcal{D})}^{2/p-1}\|d_z\|_{L^2(\mathcal{D})}^{2-2/p} && (1 < p < 2)\,.
\end{aligned}$$

这些元素在 $L^p(\mathcal{D})$ 中的稠密性以及 L^p 范数的保持性，为每个 $1 \le p < \infty$给出了连续轨道。

推论 7.4。对于 $1 < p < \infty$ 和 $\lambda > \kappa\,(p)$，$T_{M_\lambda}^\Theta$ 可从 $L^2 \cap L^p\,(\mathcal{D})$ 延拓到 $L^p\,(\mathcal{D})$，其范数上界为 $C_{p,\ \lambda,\ \chi}$，且与 Θ、$\mathcal{C}$无关。对于 $p = 4$ 和 $0 < \lambda \le 1$，其范数至多为 $C_\chi \lambda^{-3/2}$。

证明。为估计 $T_{M_\lambda}^\Theta$，使用 $M_\lambda = m_{\mathrm{int}} + \sum_{j \ge j_0} m_j$，它来自定理 7.2的证明。我们首先证明，每个光滑符号都以其半交换 L^p 算子范数传递。然后对传递后的算子求和，并将其极限确定为 $T_{M_\lambda}^\Theta$。

固定 $1 < p < \infty$, $m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 和 $x \in L^p(\mathcal{D})$。定义 $Q_m\colon\ L^p(\mathcal{D}) \to L^p(\mathcal{D})$ 为

$$Q_m x = \int_{\mathbb{R}^3} \check{m}(y)\beta_{-y}x\, dy\,.$$

轨道在 $L^p(\mathcal{D})$ 中范数连续，且被积函数的范数上界为$|\check{m}(y)|\|x\|_{L^p\,(\mathcal{D})}$。由于 $\check{m} \in L^1(\mathbb{R}^3)$，这是一个定义有界算子的 Bochner 积分。对于 $x \in L^2(\mathcal{D})\cap L^p(\mathcal{D})$，轨道在和范数 $\|\cdot\|_{L^2\,(\mathcal{D})} + \|\cdot\|_{L^p\,(\mathcal{D})}$ 下连续，并且同一个积分在该范数下收敛。特别地，它在 L^2 和 L^p 中的积分相同。

要计算此类 $Q_m x$ 的傅里叶系数，在 L^2 的积分号下应用酉 $\mathcal{F}_\Theta$。将结果与任意 $g \in L^2(\mathbb{R}^3; L^2(\mathcal{C}))$ 配对。由 ζ 中的柯西 – 施瓦茨不等式可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\check{m}(y)| \int_{\mathbb{R}^3} \left|\langle g(\zeta), \widehat{x}_\Theta(\zeta)\rangle_{L^2(\mathcal{C})}\right| d\zeta\, dy \le \|\check{m}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3;L^2(\mathcal{C}))}\|x\|_{L^2(\mathcal{D})}\,.$$

因此，由富比尼定理和 $\widehat{\beta_{-y}x_\Theta}$ 的公式可得，对几乎处处的 $\zeta\in\mathbb{R}^3$,

$$\widehat{Q_m x_\Theta}(\zeta)=\left(\int_{\mathbb{R}^3}\check{m}(y)e^{-iy\cdot\zeta}\,dy\right)\widehat{x}_\Theta(\zeta)=m(\zeta)\widehat{x}_\Theta(\zeta)\,.$$

令 C_m 为 T_m 在 $L^p(\mathbb{R}^3;L^p(\mathcal{D}))$ 上的算子范数，其中该空间见 (2.1)，其系数代数为 $\mathcal{D}$。通过比较两个算子在大立方体上的作用，我们证明 $\|Q_m\|_{L^p(\mathcal{D})\to L^p(\mathcal{D})}\le C_m$。对于 $R>0$，设 $B_R=[-R,R]^3$ 和 $w_R=|B_R|^{-1/p}1_{B_R}$。定义 $J_R:\ L^p(\mathcal{D})\to L^p(\mathbb{R}^3;L^p(\mathcal{D}))$，使得 $J_Rx(z)=w_R(z)\beta_z x$ 对于 $z\in\mathbb{R}^3$ 成立。由于 $\|w_R\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}=1$ 且 $\|\beta_z x\|_{L^p(\mathcal{D})}=\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$，我们有 $\|J_Rx\|_{L^p(\mathbb{R}^3;L^p(\mathcal{D}))}=\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$。

由三角不等式，

$$\|Q_mx\|^{L^p(\mathcal{D})}=\|J_RQ_mx\|_{L^p(\mathbb{R}^3;L^p(\mathcal{D}))}\le\|J_RQ_mx-T_mJ_Rx\|_{L^p(\mathbb{R}^3;L^p(\mathcal{D}))}+C_m\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}\,.$$

对于几乎处处的 $z\in\mathbb{R}^3$，$T_m(J_Rx)$ 的卷积公式和群律 $\beta_z\beta_{-y}=\beta_{z-y}$ 给出，

$$(T_mJ_Rx-J_RQ_mx)(z)=\int_{\mathbb{R}^3}\check{m}(y)[w_R(z-y)-w_R(z)]\beta_{z-y}x\,dy\,.$$

由闵可夫斯基积分不等式以及 $L^p(\mathcal{D})$ 范数的保持性可得

$$\|T_mJ_Rx-J_RQ_mx\|_{L^p(\mathbb{R}^3;L^p(\mathcal{D}))}\le\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}\int_{\mathbb{R}^3}|\check{m}(y)|\,\|w_R(\cdot-y)-w_R\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\,dy\,.$$

对于每个固定的 $y=(y_1,\ y_2,\ y_3)\in\mathbb{R}^3$,

$$\|w_R(\cdot-y)-w_R\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}=\frac{|(B_R+y)\triangle B_R|}{|B_R|}=2\left[1-\prod_{k=1}^3\left(1-\frac{|y_k|}{2R}\right)_+\right]\longrightarrow 0\qquad(R\to\infty)\,.$$

该比值至多为二，因此由控制收敛定理，关于 $|\check{m}(y)|\,dy$ 的积分趋于零。令 $R\to\infty$，得到 $\|Q_mx\|_{L^p(\mathcal{D})}\le C_m\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$。

因此，在 $L^p(\mathcal{D})$ 上，$Q_{m_{\rm int}}$ 和 $Q_{m_j},\ j\ge j_0$ 的算子范数分别受定理 7.2 证明中 $L^p(L^\infty(\mathbb{R}^3)\bar{\otimes}\mathcal{D})$ 上 $T_{m_{\rm int}}$ 和 T_{m_j} 的算子范数所界。特别地，$Q_{m_{\rm int}}+\sum_{j\ge j_0}Q_{m_j}$ 在 $L^p(\mathcal{D})$ 上按算子范数收敛，其范数至多为 $C_{p,\ \lambda,\ \chi}$。对于 $x\in L^2(\mathcal{D})\cap L^p(\mathcal{D})$，由普朗歇尔恒等式可得 L^2 误差的上界为

$$\begin{aligned}&\left\|Q_{m_{\rm int}}x+\sum_{j=j_0}^N Q_{m_j}x-T^\Theta_{M_\lambda}x\right\|_{L^2(\mathcal{D})}\\&\quad\le\left\|m_{\rm int}+\sum_{j=j_0}^N m_j-M_\lambda\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|x\|_{L^2(\mathcal{D})}\longrightarrow 0\qquad(N\to\infty)\,.\end{aligned}$$

依测度收敛极限的唯一性表明，在这个稠密交集上，L^p 极限与 $T^\Theta_{M_\lambda}x$ 一致。为了获得 $p=4$ 和 $0<\lambda\le 1$的估计，应用一致

上界于证明推论7.3中对内部项和壳层的处理。这给出

$$\begin{aligned}\|T^{\Theta}_{M_\lambda}\|_{L^4(\mathcal{D})\to L^4(\mathcal{D})} &\le \|Q_{m_{\mathrm{int}}}\|_{L^4(\mathcal{D})\to L^4(\mathcal{D})} + \sum_{j\ge j_0}\|Q_{m_j}\|_{L^4(\mathcal{D})\to L^4(\mathcal{D})}\\ &\le C_\chi\left(1+\sum_{j\ge j_0}2^{-j\lambda}(1+j)^{1/2}\right)\le C'_\chi\lambda^{-3/2}.\end{aligned}$$

□

对于 $\Theta=0$ 和 $\mathcal{C}=\mathbb{C}$，酉元 λ_0(ζ可与经典特征$y\mapsto e^{iy\cdot\zeta}$ 在 $\mathbb{R}^3$上对应。Plancherel 迹对应于关于 $(2\pi)^{-3}\,dy$的积分，而这种测度归一化不会改变乘子范数。对于 $\chi\not\equiv 0$，第7.2 节的标量必要条件因此适用于在 Θ和 $\mathcal{C}$上一致的上界。

8. Stein row and column square functions

对于标量 Schwartz 函数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$，Stein 平方函数取对 dr/r 积分 $|r\partial_r B_r^\nu f|^2$ 后的平方根，其中 B_r^ν是阶数为 ν、半径为 r 的 Bochner–Riesz 均值。这就是 [6, (1.1)–(1.2)] 中的半径归一化。Carbery 利用平面标量 L^4 平方函数估计来控制极大 Bochner–Riesz 算子 [2]。对于迹系数，需要对两种乘积积分，即 $(D_r^\nu F)^* D_r^\nu F$和 $D_r^\nu F (D_r^\nu F)^*$，其中 $D_r^\nu = r\partial_r B_r^\nu$。定理 8.5 对 L^p 中的这两个积分的平方根给出了上界，其中 $2 \le p < \infty$ 且 $\nu > \max\{1/2, 1 - 2/p\}$。

圆附近的导数符号 $|\xi| = r$ 由 $(1 - |\xi|^2/r^2)^{\nu-1}$ 决定，其中 $|\xi| < r$。在一个半径二进区间上，第8.2 节使用局部平滑来估计圆周附近一个窄环域的贡献，正如 [18, 第 11] 节中的标量归约。在 $p = 4$ 处对各区间求和，会引入不同频率尺度的平方积分乘积的迹。对于相近的尺度，我们用单环带界估计每个平方积分。对于相距较远的尺度，引理8.2估计将低频平方积分的右乘法与高频半波交换时产生的误差。该误差涉及低频平方积分的空间增量。第8.3 节还给出了有限 $q > 2$ 下的正核估计，用于第8.4节中的插值和光滑振幅估计。

8.1. Bochner–Riesz 均值的半径导数。

对于实参数 $\nu > 0$ 和 $r > 0$，令 $B_r^\nu : L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}) \to L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$ 为符号为 $(1 - |\xi|^2/r^2)_+^\nu$ 的空间乘子。在张量 $F = f \otimes a$ 的线性张成空间上，其中 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 且 $a \in \mathcal{M}$ 有界，并具有有限迹的支撑投影，定义 D_r^ν 为由标量符号通过傅里叶反演给出的算子

$$d_r^\nu(\xi) = 2\nu \frac{|\xi|^2}{r^2}(1 - |\xi|^2/r^2)^{\nu-1}\mathbf{1}_{\{|\xi|<r\}}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{8.1}$$

当 $|\xi| \ge r$ 时，该符号为零。幂次 $\nu - 1 > -1$ 保证了边界处的局部可积性，因此 $d_r^\nu \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$。于是，对 $x \in \mathbb{R}^2$，有 $D_r^\nu F(x) = (d_r^\nu \widehat{f})^\vee(x) a$，且该张量张成空间上的线性映射取值于 $C_0(\mathbb{R}^2; \mathcal{M})$。

对于每个 $\xi \in \mathbb{R}^2$，B_r^ν 的符号关于 $r > 0$ 局部绝对连续，其导数为 $d_r^\nu(\xi)/r$，且几乎处处成立。对于 $0 < r_- < r_+ < \infty$，我们有

$$0 \le \int_{r_-}^{r_+} d_r^\nu(\xi)\,\frac{dr}{r} = (1 - |\xi|^2/r_+^2)_+^\nu - (1 - |\xi|^2/r_-^2)_+^\nu \le 1\,.$$

结合 $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$，在对 r 进行测试后，即可在傅里叶公式中应用富比尼定理。对于 $\varphi \in C_c^\infty((0,\infty))$，对 r 进行分部积分可得

$$-\int_0^\infty B_r^\nu F(x)\varphi'(r)\,dr = \int_0^\infty D_r^\nu F(x)\varphi(r)\,\frac{dr}{r}\,.$$

因此，$D_r^\nu F = r\partial_r B_r^\nu F$ 在 r 中作为分布成立。

设 $\mathcal{A}$ 是一个半有限迹代数，且 $2 \le p < \infty$。取测度空间 (S, μ)，其上的可分希尔伯特空间为 $H = L^2(S, \mu)$。对于一个由

$L^p(\mathcal{A})$ 中支集于有限 μ-测度集合上的元素组成的简单族，令

$$\|X\|_{p,c} = \left\| \left(\int_S X_s^* X_s \, d\mu(s) \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathcal{A})}, \qquad \|X\|_{p,r} = \left\| \left(\int_S X_s X_s^* \, d\mu(s) \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathcal{A})}.$$

这些完备化记为 $L^p(\mathcal{A}; H_c)$ 和 $L^p(\mathcal{A}; H_r)$。它们的交集具有范数$\|X\|_{p,\,rc} = \max\{\|X\|_{p,c}, \|X\|_{p,r}\}$，其中各族由 H的同一标准正交基中的系数来标识。

对于矩阵实现，使用 $B(\ell^2(\mathbb{N}))\bar{\otimes}\mathcal{A}$，其乘积由通常的算子迹与 $\mathcal{A}$ 的迹构成。令e_{ij} 为 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上的矩阵单位。对于有限秩族 $X_s = \sum_{i=1}^n h_i(s)x_i$，其中 $h_1, \ldots, h_n$ 是 H 中的实标准正交函数，且 $x_i \in L^p(\mathcal{A})$，记 $C_X = \sum_i e_{i1} \otimes x_i$ 和 $R_X = \sum_i e_{1i} \otimes x_i$。正交性给出

$$C_X^* C_X = e_{11} \otimes \sum_{i=1}^n x_i^* x_i = e_{11} \otimes \int_S X_s^* X_s \, d\mu(s)\,,$$
$$R_X R_X^* = e_{11} \otimes \sum_{i=1}^n x_i x_i^* = e_{11} \otimes \int_S X_s X_s^* \, d\mu(s)\,.$$

因此，C_X 和 R_X 的范数分别为$\|X\|_{p,\,c}$ 和$\|X\|_{p,\,r}$。在固定的实正交归一基下取完备化，可将这两个空间分别识别为第2节中对应的首列子空间和首行子空间 [10, 第2节。1]。

我们使用参数范数对导数族求和。根据下述连续性估计，正平方积分可延拓到 $L^{p/2}(\mathcal{A})$；这些估计先对简单族 X、Y陈述。

$$\begin{aligned} \left\| \int_S (X_s^* X_s - Y_s^* Y_s) \, d\mu(s) \right\|_{L^{p/2}(\mathcal{A})} &\le \|X - Y\|_{p,c} \big(\|X\|_{p,c} + \|Y\|_{p,c} \big), \\ \left\| \int_S (X_s X_s^* - Y_s Y_s^*) \, d\mu(s) \right\|_{L^{p/2}(\mathcal{A})} &\le \|X - Y\|_{p,r} \big(\|X\|_{p,r} + \|Y\|_{p,r} \big). \end{aligned} \tag{8.2}$$

对于列估计，写作 $X_s^* X_s - Y_s^* Y_s = (X_s - Y_s)^* X_s + Y_s^* (X_s - Y_s)$。为控制每个混合乘积，取两个简单族 U、V，并在它们的支集上，将其共同有限划分的归一化示性函数用作参数函数。若 C_U、C_V是它们在此基下的首列矩阵，则

$$C_U^* C_V = e_{11} \otimes \int_S U_s^* V_s \, d\mu(s).$$

对矩阵代数与 $\mathcal{A}$ 的张量积上的迹应用赫尔德不等式，可得积分的$L^{p/2}(\mathcal{A})$范数上界为 $\|C_U\|_{L^p(B(\ell^2(\mathbb{N}))\,\bar{\otimes}\mathcal{A})} \|C_V\|_{L^p(B(\ell^2(\mathbb{N}))\bar{\otimes}\mathcal{A})} = \|U\|_{p,c} \|V\|_{p,c}$。取 $(U, V) = (X - Y, X)$ 和 $(Y, X - Y)$，则这两项分别有上界 $\|X - Y\|_{p,c}\|X\|_{p,c}$和 $\|Y\|_{p,c}\|X - Y\|_{p,c}$。两者之和即得列不等式。将其应用于伴随族 $(X_s^*)_s$、$(Y_s^*)_s$，即可得到行不等式，因为取伴随算子会将行范数变为列范数。因此，任一族范数中的柯西序列都对应着 $L^{p/2}(\mathcal{A})$中正积分的一个柯西序列。由同一估计可知，其极限与所选取的逼近简单族无关，且 (8.2) 可延拓到每个完备化空间。

令半径参数取 $S = (0, \infty)$，$d\mu(r) = dr/r$，并设

$$H = L^2((0, \infty), dr/r), \qquad \mathcal{T}_\nu F = (D_r^\nu F)_{r>0} = (r \partial_r B_r^\nu F)_{r>0}$$

定义在上述张量张成空间上，其中导数在 r 中按分布意义理解。列与行平方函数是正平方根

$$G_c^{\nu}F=\left(\int_0^{\infty}(D_r^{\nu}F)^{*}D_r^{\nu}F\,\frac{dr}{r}\right)^{1/2},\qquad G_r^{\nu}F=\left(\int_0^{\infty}D_r^{\nu}F(D_r^{\nu}F)^{*}\,\frac{dr}{r}\right)^{1/2}$$

只要该族属于相应的参数空间。在这种情况下$\|G_c^{\nu}F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}=\|\mathcal{T}_{\nu}F\|_{p,\,c}$以及$\|G_r^{\nu}F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}=\|\mathcal{T}_{\nu}F\|_{p,\,r}$分别成立。

我们首先通过在每个非零频率 ξ处计算 $\int_0^{\infty}|d_r^{\nu}(\xi)|^2\,dr/r$ 来证明 $p=2$ 处的定理 1.5。对于 $0<\nu<1$ 和固定的 $r>0$，当 $|\xi|\uparrow r$时，符号 $d_r^{\nu}(\xi)$ 无界，因此，在单个半径处的乘子在 $L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$ 上无界。对于 $\nu>1/2$，我们将该族关于半径联合定义为映射 $\mathcal{T}_{\nu}\colon L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})\to L^2((0,\infty)\;dr/r;L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}))$。对于定义域中的 F，取联合函数 $(r,\xi)\mapsto d_r^{\nu}(\xi)\,\widehat{F}(\xi)$ 的空间傅里叶逆变换，所得函数属于测度为 $dr/r\,d\xi$ 且系数取自 $L^2(\mathcal{M})$ 的希尔伯特空间。为检验平方可积性，对于 $\xi\neq 0$，变量代换 $u=|\xi|^2/r^2$ 给出 $dr/r=-du/(2u)$，并且

$$\int_0^{\infty}|d_r^{\nu}(\xi)|^2\,\frac{dr}{r}=2\nu^2\int_0^1 u(1-u)^{2\nu-2}\,du=\frac{\nu}{2\nu-1}. \tag{8.3}$$

为计算（8.3）中的标量积分，令 $w=1-u$。$u(1-u)^{2\nu-2}$的积分为 $1/(2\nu-1)-1/(2\nu)$。零频率的勒贝格测度为零。在任一乘积次序下，平方积分的迹均为 $\int_0^{\infty}\|D_r^{\nu}F\|_{L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^2\,dr/r$，依据 $p=2$矩阵识别。由Tonelli定理和空间变量中的普朗歇尔恒等式可得

$$\begin{aligned}\|G_c^{\nu}F\|_{L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^2&=\|G_r^{\nu}F\|_{L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^2=\|\mathcal{T}_{\nu}F\|_{L^2((0,\infty),dr/r;\,L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}))}^2\\&=\frac{\nu}{2\nu-1}\|F\|_{L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}^2.\end{aligned}$$

因此，希尔伯特空间定义与傅里叶反演在这些初等张量上一致，并确定了导数族（除半径上几乎处处相等外）。对于 $0<\nu\le 1/2$，积分在 $u=1$ 每个非零频率处均发散。对于$p>2$，我们按到边界的距离分解导数 $|\xi|=r$。命题8.4同时给出每个光滑边界部分在所有半径的二进区间上的上界。其对厚度的依赖关系将决定哪些阶数 ν 可以在第8.5节中求和。

8.2. 单个频率环带。记作 $\mathcal{A}=\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}$，并令 Φ 为其乘积迹。在半径为 $r=2^k s$、$k\in\mathbb{Z}$ 和 $1\le s<2$ 的二进区间上，到边界的归一化有向距离为 $s-2^{-k}|\xi|$。固定 $0<c_0<C_0<\infty$ 和剖面 $\psi\in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$。对于$0<\delta\le 1/2$、$k\in\mathbb{Z}$ 和 $s\in\mathbb{R}$，定义空间傅里叶乘子

$$V_{k,s}=\psi\big((s-2^{-k}|D|)/\delta\big),\qquad L_{\delta}=1+\log(1/\delta).$$

每个$V_{k,s}:\ L^2(\mathcal{A})\to L^2(\mathcal{A})$最初由其有界符号定义。我们首先估计$V_{0,s}$ 在参数测度 ds 下的行平方函数和列平方函数。然后对 k 按计数测度求和。对 ψ 的依赖通过 $B_{\psi}=\sup_{v\in\mathbb{R}}(1+|v|)^{12}|\widehat{\psi}(v)|$体现，它被一个常数乘以$\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}+\|\psi^{(12)}\|_{L^1(\mathbb{R})}$所控制。由齐次性，在估计$V_{k,s}$时，我们可以始终取 $B_{\psi}\le 1$。

引理 8.1。 若 $2 \le p < \infty$ 且 $h \in L^p(\mathcal{A})$ 的傅里叶支撑位于 $c_0 \le |\xi| \le C_0$，则

$$\|(V_{0,s}h)_{s\in\mathbb{R}}\|_{p,rc} \lesssim_{p,c_0,C_0} B_\psi\, \delta^{1/2-\sigma(p)} L_\delta^{\beta(p)} \|h\|_{L^p(\mathcal{A})} \tag{8.4}$$

取勒贝格测度 ds。

证明。 我们在 s 中使用普朗歇尔恒等式，将 (8.4) 中的范数表示为时间族 $X_t = w_\delta(t)^{1/2} U(-t)h$，其中

$$w_\delta(t) = \frac{\delta^2}{2\pi} |\widehat{\psi}(\delta t)|^2 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

首先，令 h 为由标量 Schwartz 函数组成的有限和，其具有环形傅里叶支撑，且系数有界、相应的支撑投影具有有限迹。选取 $\chi \in C_c^\infty((0,\infty))$，使其在 $[c_0, C_0]$ 的某个邻域上等于一。由 (2.3)，符号 $e^{-it|\xi|}\chi(|\xi|)$ 的核的 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 范数至多为 $C_\chi(1+|t|)^4$，且关于 t 在 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中连续。由于 $\chi(|D|)h = h$，与这些核卷积后，$t \mapsto U(-t)h$ 范数关于 $L^p(\mathcal{A})$ 连续，因此强可测。$\psi(\delta t)$ 的快速衰减保证了绝对可积性。随后，对剖面变量作傅里叶反演，得到 Bochner 积分

$$V_{0,s}h = \frac{\delta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ist} \widehat{\psi}(\delta t) U(-t)h \, dt .$$

在希尔伯特空间上忠实表示 $\mathcal{M}$。对于每个 $x \in \mathbb{R}^2$ 以及该空间中的向量 v，函数 $t \mapsto \psi(\delta t)(U(-t)h)(x)v$ 根据应用于算子范数的同一核估计是连续且平方可积的。希尔伯特空间值普朗歇尔定理和二次型的相等性给出

$$\int_{\mathbb{R}} |V_{0,s}h|^2 \, ds = \int_{\mathbb{R}} w_\delta(t) |U(-t)h|^2 \, dt . \tag{8.5}$$

将普朗歇尔恒等式应用于 $(V_{0,s}h)(x)^* v$ 会反转傅里叶相位，并给出带权 $w_\delta(t)$ 的相应行恒等式。因此，(8.4) 的左侧等于 $\|(X_t)_{t\in\mathbb{R}}\|_{p,rc}$。

为应用时空估计 (5.2)，我们在二进时间区间 J 上估计 $\|(X_t)_{t\in J}\|_{p,rc}$。对于有限时间区间 $J \subset \mathbb{R}$ 上的 $u \in L^p(J;\, L^p(\mathcal{A}))$，$L^{p/2}(\mathcal{A})$ 中的三角不等式和标量 H¨older 不等式给出

$$\|(u(t))_{t\in J}\|_{p,rc} \le \left(\int_J \|u(t)\|_{L^p(\mathcal{A})}^2 \, dt \right)^{1/2} \le |J|^{1/2-1/p} \left(\int_J \|u(t)\|_{L^p(\mathcal{A})}^p \, dt \right)^{1/p}.$$

对于 $R = 2^n$ 满足 $n \ge 0$ 的情形，令 $J_R^+ = [R, 2R]$ 以及 $J_R^- = [-2R, -R]$。由前述不等式和（5.2）可得，对于 $J = J_R^+$ 或 $J = J_R^-$，

$$\begin{aligned} \|(X_t)_{t\in J}\|_{p,rc} &\le \sup_{t\in J} w_\delta(t)^{1/2}\, R^{1/2-1/p} \|U(-t)h\|_{L^p(J;L^p(\mathcal{A}))} \\ &\lesssim \delta B_\psi (1+\delta R)^{-12} R^{1/2+\sigma(p)} [\log(2+R)]^{\beta(p)} \|h\|_{L^p(\mathcal{A})} . \end{aligned}$$

在 J_R^- 上，变量代换 $s = -t$ 给出了 $U(s)h$ 在 $[R, 2R]$ 上的时空范数。在 $|t| \le 1$ 上，引理 5.1 给出 $\|(X_t)_{|t|\le 1}\|_{p,\,rc} \lesssim \delta B_\psi \|h\|_{L^p(\mathcal{A})}$。

为对时间范数求和，取 $n_0 \in \mathbb{Z}$，使得 $2^{n_0} \le \delta^{-1} < 2^{n_0+1}$，并令 $a = 1/2 + \sigma(p)$。对于 $0 \le n \le n_0$，对数有上界 CL_δ 和 $\sum_{n=0}^{n_0} 2^{na} \lesssim \delta^{-a}$。对于 $n = n_0 + j$、$j \ge 1$，我们有 $2^{na} \le \delta^{-a} 2^{ja}$，$(1+\delta 2^n)^{-12} \lesssim 2^{-12j}$，且 $\log(2+2^n) \lesssim L_\delta(1+j)$。

将每个时间区间上的函数延拓为零，再应用三角不等式，便得到

$$\|(X_t)_{t\in\mathbb{R}}\|_{p,rc} \lesssim B_\psi \|h\|_{L^p(\mathcal{A})}\, \delta^{1-a} L_\delta^{\beta(p)} \left(1 + \sum_{j\geq 1} 2^{-j(12-a)}(1+j)^{\beta(p)}\right).$$

这里 $1/2 \leq a \leq 1$，因此级数收敛，并且 $1-a = 1/2 - \sigma(p)$ 给出张量核上的 8.4）。

对于一般的 h，取张量逼近项 $h_n \to h$，其中 $L^p(\mathcal{A})$ 如（2.4）所示，其傅里叶支撑位于一个固定的略大的环带内。选择 χ 以重现该环带。对于固定的 δ，符号 $\chi(|\xi|)\psi((s-|\xi|)/\delta)$ 的核作为 s 中的 $L^1(\mathbb{R}^2)$，由（2.3）知是连续的，并且在一个公共的紧 s-区间之外为零。因此，$(V_{0,s}h_n)_s$ 收敛到 $(V_{0,s}h)_s$，其中 $L^2(ds; L^p(\mathcal{A}))$，从而在两种参数范数中均收敛。对于时间变量，将（2.3）应用于 $e^{-it|\xi|}\chi(|\xi|)$ 并与 $h_n - h$ 做卷积。这给出

$$\|w_\delta^{1/2} U(-\cdot)(h_n - h)\|_{L^2(dt;L^p(\mathcal{A}))} \leq C_\chi \left(\int_{\mathbb{R}} w_\delta(t)(1+|t|)^8\, dt\right)^{1/2} \|h_n - h\|_{L^p(\mathcal{A})}.$$

对于每个固定的 δ 由于 ψ的快速衰减，积分是有限的，因此加权族在两种参数范数下也都收敛。将（8.2）应用于这些极限，便在 $L^{p/2}$（$\mathcal{A}$）中得到两个平方恒等式，并将（8.4）扩展到 h。□

8.3. **跨频率尺度的平方函数估计**。 在单个尺度上，引理8.1给出因子 $\delta^{1/2}L_\delta^{1/2}$ 在 $p=4$ 处。在由有限个二进尺度 $E \subset \mathbb{Z}$ 组成的有限集上，下面的估计具有因子 $\delta^{1/2}L_\delta^{3/4}$，且关于 E一致。

引理 8.2。 设 $E \subset \mathbb{Z}$ 为有限集，并设 $F_k \in L^4$（$\mathcal{A}$）对于每个 $k \in E$在 $c_0 2^k \leq |\xi| \leq C_0 2^k$ 中具有傅里叶支撑。则对于 $d \in \{\mathrm{c}, \mathrm{r}\}$,

$$\|(V_{k,s}F_k)_{k\in E, s\in\mathbb{R}}\|_{4,d} \lesssim_{c_0,C_0} B_\psi\, \delta^{1/2} L_\delta^{3/4} \|(F_k)_{k\in E}\|_{4,d}. \tag{8.6}$$

证明。 只需估计环带张量核上的列范数，然后将该估计应用于（F_k^*）$_{k\in E}$，其剖面为 ψ。令 $B_\psi \leq 1$，置

$$H_k = \int_{\mathbb{R}} |V_{k,s}F_k|^2\, ds, \quad a_k = \|F_k\|_{L^4(\mathcal{A})}^2, \quad Y = \Big\| \sum_{k\in E} H_k \Big\|_{L^2(\mathcal{A})}, \quad W = \|(F_k)_{k\in E}\|_{4,c}.$$

目标是 $Y^2 \lesssim \delta^2 L_\delta^3 W^4$。对于正的 A, $B \in L^2(\mathcal{A})$, $\Phi(AB) = \Phi(B^{1/2}AB^{1/2}) \geq 0$。记作 $A_k = |F_k|^2$。利用迹展开两个平方的 $L^2(\mathcal{A})$ 范数，得到

$$Y^2 = \sum_{k,\ell\in E} \Phi(H_k H_\ell), \qquad W^4 = \sum_{k,\ell\in E} \Phi(A_k A_\ell) \geq \sum_{k\in E} \Phi(A_k^2) = \sum_{k\in E} a_k^2.$$

这些和中的每个迹都是非负的。根据迹的循环性，对于任意正整数 L, Y^2 的展开式变为

$$Y^2 = \sum_{\substack{k,\ell\in E \\ |k-\ell|\leq L}} \Phi(H_k H_\ell) + 2 \sum_{\substack{k,\ell\in E \\ k<\ell-L}} \Phi(H_k H_\ell).$$

只有在估计完这两个和之后，我们才选择 L 。对于第一个和，单环带估计就足够了。对于第二个和，我们在迹内将 H_ℓ 与 $\delta\|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}A_\ell$ 进行比较，利用 H_k 和 F_ℓ之间的频率分离。

对于具有 $|k-\ell|\le L$ 的配对，我们对每个 H_k 使用引理 8.1 中的上界。对于$h(x) = F_k(2^{-k}x)$， h 的径向傅里叶支撑包含于 $[c_0, C_0]$ 且$V_{0,s}h(x) = (V_{k,s}F_k)(2^{-k}x)$。在$\|h\|_{L^4(\mathcal{A})}$和 $\|(V_{0,s}h)_{s\in\mathbb{R}}\|_4$中约去公因子 $2^{k/2}$ ，再将 (8.4) 中的c平方后得到$\|H_k\|_{L^2(\mathcal{A})} \lesssim \delta L_\delta a_k$。将 a_k 在 E 外延拓为零。先对迹、再对 k 中的和应用柯西 – 施瓦茨不等式，得到

$$\sum_{|k-\ell|\le L}\Phi(H_kH_\ell)\lesssim\delta^2L_\delta^2\sum_{|n|\le L}\sum_k a_ka_{k+n}\lesssim(2L+1)\delta^2L_\delta^2\sum_k a_k^2. \tag{8.7}$$

对于间隔更大的尺度，我们用较高频率处的半波来表示 $\Phi(H_kH_\ell)$。对于 k, $\ell\in E$，其中有 $k<\ell-L$ 和 $t\in\mathbb{R}$，令$U_{\ell,\,t} = U(-2^{-\ell}t)$，它是作用于 $L^2(\mathcal{A})$ 上的酉算子。重新缩放 (8.5) 得到 $H_\ell = \int_{\mathbb{R}} w_\delta(t)|U_{\ell,\,t}F_\ell|^2\,dt$。归一化尺度下的多项式核界给出 $\int_{\mathbb{R}} w_\delta(t)\|U_{\ell,\,t}F_\ell\|^2_{L^4(\mathcal{A})}dt<\infty$，因此连续泛函 $X\mapsto\Phi(H_kX)$ 可在 $L^2(\mathcal{A})$ 上移入该积分号内。由标量普朗歇尔定理，利用$\int_{\mathbb{R}} w_\delta(t)dt = \delta\|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$，我们得到

$$\Phi(H_kH_\ell) = \delta\|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\Phi(H_kA_\ell)+e_{k,\ell}\,,$$
$$e_{k,\ell} = \int_{\mathbb{R}} w_\delta(t)\big[\Phi(H_k|U_{\ell,t}F_\ell|^2)-\Phi(H_kA_\ell)\big]\,dt\,.$$

我们利用 H_k的空间增量来估计$e_{k,\,\ell}$。$|V_k$的傅里叶支撑位于$|\xi|\le 2C_02^k$，这是由反射环带与环带卷积得到的，而对 s 积分会保留该支撑。因此，由空间变量上的普朗歇尔定理可得$\|\nabla H_k\|_{L^2(\mathcal{A})^2}\le 2C_02^k\|H_k\|_{L^2(\mathcal{A})}$。乘积 $F_\ell H_k$ 的傅里叶支撑位于径向区间

$$[c_02^\ell-2C_02^k,\,C_02^\ell+2C_02^k]\subset[(c_0/2)2^\ell,\,2C_02^\ell]\,,$$

满足 $L\ge L_0$，其中 L_0 是满足 $2C_02^{-L_0}<c_0/2$的正整数。因此，取一个在 $[c_0/2, 2C_0]$ 上等于一的固定实值$\kappa\in C_c^\infty((0,\ \infty))$，便可使 $\kappa(2^{-\ell}|D|)$同时重现F_ℓ 和 $F_\ell H_k$。在 $L^2(\mathcal{A})$上的酉性给出

$$\Phi\big(H_k|U_{\ell,t}F_\ell|^2\big)-\Phi\big(H_k|F_\ell|^2\big) = \big\langle U_{\ell,t}F_\ell,\,(U_{\ell,t}F_\ell)H_k-U_{\ell,t}(F_\ell H_k)\big\rangle.$$

事实上，对于迹内积 $\langle X,\ Y\rangle = \Phi(X^*Y)$，由循环性可得$\langle U_{\ell,\,t}F_\ell,\ (U_{\ell,\,t}F_\ell)H_k\rangle = \Phi(H_k|U_{\ell,\,t}F_\ell|^2)$。由酉性，另一个内积等于 $\langle F_\ell,\ F_\ell H_k\rangle = \Phi(H_k|F_\ell|^2)$。 F_ℓ 和 $F_\ell H_k$ 都属于有界张量核上的 $L^2(\mathcal{A})$。

我们将$U_{\ell,t}F_\ell$ 与 $L^4(\mathcal{A})$ 中的 $(U_{\ell,t}F_\ell)H_k-U_{\ell,t}(F_\ell H_k)$ 配对。令 $K_t = (e^{-it|\cdot|}\kappa(|\cdot|))^\vee$ 和 $K_{\ell,t}(y) = 2^{2\ell}K_t(2^\ell y)$。在固定环域上对 $1-\Delta_\xi$ 进行三次积分，得到 $|K_t(y)|\lesssim(1+|t|)^6(1+|y|)^{-6}$。特别是

$$\|K_{\ell,t}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}+2^\ell\int_{\mathbb{R}^2}|y|\,|K_{\ell,t}(y)|\,dy\lesssim(1+|t|)^6.$$

核公式给出

$$\big[(U_{\ell,t}F_\ell)H_k-U_{\ell,t}(F_\ell H_k)\big](x) = \int_{\mathbb{R}^2}K_{\ell,t}(y)F_\ell(x-y)\big[H_k(x)-H_k(x-y)\big]\,dy\,.$$

沿着从 $x-y$ 到 x 的线段对 ∇H_k 积分，可得 $\|H_k - H_k(\cdot - y)\|_{L^2(\mathcal{A})}$ 的上界为 $|y|\|\nabla H_k\|_{L^2(\mathcal{A})^2}$。对 $F_\ell(\cdot - y)$与此增量的乘积应用 H¨older 不等式，便得到

$$\begin{aligned}\|(U_{\ell,t}F_\ell)H_k - U_{\ell,t}(F_\ell H_k)\|_{L^{4/3}(\mathcal{A})} &\le \|F_\ell\|_{L^4(\mathcal{A})}\|\nabla H_k\|_{L^2(\mathcal{A})^2}\int_{\mathbb{R}^2}|y|\,|K_{\ell,t}(y)|\,dy\\ &\lesssim 2^{k-\ell}(1+|t|)^6\|F_\ell\|_{L^4(\mathcal{A})}\|H_k\|_{L^2(\mathcal{A})}.\end{aligned}$$

由于 $\|K_{\ell,t}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \lesssim (1+|t|)^6$, 卷积给出 $\|U_{\ell,t}F_\ell\|_{L^4(\mathcal{A})} \le C(1+|t|)^6\|F_\ell\|_{L^4(\mathcal{A})}$。迹 H¨older 上界 $|\Phi(H_k|U_{\ell,t}F_\ell|^2) - \Phi(H_kA_\ell)|$ 由 $C2^{k-\ell}(1+|t|)^{12}\|H_k\|_{L^2(\mathcal{A})}a_\ell$给出。为了将此上界对 $w_\delta(t)$ 积分，令 $v=\delta t$。由于 $1+|v|/\delta \le (1+|v|)/\delta$ 且 $B_\psi \le 1$，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}} w_\delta(t)(1+|t|)^{12}\,dt \le \frac{\delta^{-11}B_\psi^2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(1+|v|)^{-12}\,dv \lesssim \delta^{-11}.$$

由此可得

$$|e_{k,\ell}| \lesssim 2^{k-\ell}\delta^{-11}\|H_k\|_{L^2(\mathcal{A})}a_\ell\,. \tag{8.8}$$

为了给出 $\Phi(H_kA_\ell)$ 在 $k<\ell-L$ 上求和的上界，我们利用正性将 $E\times E$ 中的所有配对都纳入。然后对迹应用 H¨older 不等式，得到

$$\sum_{k<\ell-L}\Phi(H_kA_\ell) \le \Phi\Big(\Big(\sum_{k\in E}H_k\Big)\Big(\sum_{\ell\in E}A_\ell\Big)\Big) \le Y\Big\|\sum_{\ell\in E}A_\ell\Big\|_{L^2(\mathcal{A})} = YW^2.$$

对于误差项，先按每个位移求和 $n=\ell-k$。利用 $\|H_k\|_{L^2(\mathcal{A})} \lesssim \delta L_\delta a_k$中的（8.8）以及 $\sum_k a_ka_{k+n} \le \sum_k a_k^2 \le W^4$，我们得到

$$\sum_{k<\ell-L}|e_{k,\ell}| \lesssim \delta^{-10}L_\delta\sum_{n>L}2^{-n}\sum_k a_ka_{k+n} \lesssim \delta^{-10}L_\delta 2^{-L}W^4.$$

取 $L = L_0 + \lceil 14\log_2(2/\delta)\rceil$。于是 $2L+1 \lesssim_{c_0,C_0} L_\delta$ 在 (8.7) 中，且 $2^{-L} \le (\delta/2)^{14}$给出 $\delta^{-10}L_\delta 2^{-L} \lesssim \delta^2$。将邻近的上界和分离项之和代入 Y^2 的展开式，得到

$$Y^2 \le C\delta YW^2 + C\delta^2L_\delta^3W^4 \le \tfrac12 Y^2 + \tfrac12 C^2\delta^2W^4 + C\delta^2L_\delta^3W^4.$$

I首先得到 $Y \lesssim \delta L_\delta^{3/2}W^2$，然后得到 $\|(V_{k,s}F_k)_{k,s}\|_{4,c} = Y^{1/2} \lesssim \delta^{1/2}L_\delta^{3/4}W$.⌢ ⌢
对于行范数，使用 $F_k^*(\xi) = F_k(-\xi)^*$ 和 $|-\xi| = |\xi|$。由此得到

$$(V_{k,s}F_k)^* = \overline{\psi}\big((s-2^{-k}|D|)/\delta\big)F_k^*.$$

⌢ ≍剖面 ψ 具有相同的 B_ψ，因为 $\psi(\overline{v}) = \psi(-v)$。对 $(F_k^*)_{k\in E}$应用带有 ψ 的列估计，根据 $\|X^*\|_{4,c} = \|X\|_{4,r}$，对 $X=(F_k)_{k\in E}$和$X=(V_{k,s}F_k)_{k\in E,s\in\mathbb{R}}$可得行估计。

为去掉张量假设，在每个 F_k 上使用 (2.4)，并以相同的相对幅度扩张其环带。对于每个 $d\in\{\mathrm{c},\mathrm{r}\}$，平方和的三角不等式给出 $\|(F_k^{(n)}-F_k)_{k\in E}\|_{4,d}$ 的上界为 $(\sum_{k\in E}\|F_k^{(n)}-F_k\|_{L^4(\mathcal{A})}^2)^{1/2}$，由于 E 是有限集，该上界趋于零。根据引理 8.1 中的固定尺度近似，族 $(V_{k,s}F_k^{(n)})_{k\in E,s\in\mathbb{R}}$ 在 $\|\cdot\|_{4,d}$ 中收敛到 $(V_{k,s}F_k)_{k\in E,s\in\mathbb{R}}$。这就证明了 (8.6)。□

我们还需要一个对每个 $2 < q < \infty$ 的有限尺度集一致的上界。对于$b > 0$，定义正标量核 $R_b\colon \mathbb{R}^2 \to (0,\ \infty)$，使其满足 $R_b(y) = b^2(1+b|y|)^{-4}$。我们将列平方积分 $\int_{\mathbb{R}} |V_{k,\ s}F_k|^2\, ds$ 的上界估计为 $R_{\delta 2^k} * |F_k|^2$ 的一个倍数，并通过对偶性对这些主控函数求和。

引理 8.3. 对于 $2 < q < \infty$，$d \in \{\mathrm{c},\ \mathrm{r}\}$，以及有限环带族 $F_k \in L^q(\mathcal{A})$ 其支集满足引理 8.2，

$$\|(V_{k,s}F_k)_{k\in E, s\in\mathbb{R}}\|_{q,d} \lesssim_{q,c_0,C_0} B_\psi\, \|(F_k)_{k\in E}\|_{q,d}. \tag{8.9}$$

证明。 由 $H_k = \int_{\mathbb{R}} |V_{k,\ s}F_k|^2\, ds$ 和 $B_\psi \le 1$，列估计可由以下两个不等式推出

$$H_k \lesssim R_{\delta 2^k} * |F_k|^2, \qquad \Big\| \sum_{k\in E} R_{\delta 2^k} * |F_k|^2 \Big\|_{L^{q/2}(\mathcal{A})} \lesssim_q \Big\| \sum_{k\in E} |F_k|^2 \Big\|_{L^{q/2}(\mathcal{A})}.$$

我们先在张量核上建立逐点算子不等式。对于 $K_t = (e^{-it|\cdot|}\kappa(|\cdot|))^\vee$，即引理 8.2 证明中的环带核，我们需要对每个整数$m \ge 1$,

$$|K_t(y)| \lesssim_m (1+|y|)^{-1/2}(1+\big||t|-|y|\big|)^{-m}, \qquad \|K_t\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \lesssim (1+|t|)^{1/2}. \tag{8.10}$$

令 $u = |y|$。极坐标下的角向积分为 $2\pi J_0(u\rho)$，因此由我们的傅里叶约定可得

$$K_t(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-it\rho} J_0(u\rho)\kappa(\rho)\rho\, d\rho.$$

当 u 有界时，对 ρ 分部积分可得 $O_m((1+|t|)^{-m})$，因为 $J_0(u\rho)$ 的所有径向导数在 $\operatorname{supp}\kappa$ 上一致有界。当 u 足够大时，$u\rho \ge 1$ 在 κ 的支集上。由零阶的 (6.10)，$J_0(u\rho)$ 是 $e^{\pm iu\rho}$ 乘以若干振幅之和，这些振幅的 ρ-阶导数直到 m 阶在此支集上均为 $O_m(u^{-1/2})$。现在分部积分可得衰减 $(1+|t\mp u|)^{-m}$。

为估计上界 $\|K_t\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ 在 (8.10) 中，取 $m = 2$。在径向积分中，使用 $u(1+u)^{-1/2} \le (1+u)^{1/2}$ 以及 $1+u \le (1+|t|)(1+|u-|t||)$。由此得到

$$\|K_t\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \lesssim (1+|t|)^{1/2}\int_0^\infty (1+|u-|t||)^{-3/2}\, du \lesssim (1+|t|)^{1/2}.$$

利用 (8.5) 对 进行上界估计，我们证明加权核估计

$$\delta^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\delta t)|^2 \|K_t\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} |K_t(y)|\, dt \lesssim B_\psi^2 \delta^2 (1+\delta|y|)^{-4}. \tag{8.11}$$

为证明 (8.11)，写作 $v = \big||t|-|y|\big|$。于是 $1+\delta|y| \le (1+\delta|t|)(1+v)$ 和 $(1+|t|)/(1+|y|) \le 1+v$。在 (8.10) 中取 $m = 8$，得到

$$|\widehat{\psi}(\delta t)|^2 \|K_t\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} |K_t(y)| \lesssim B_\psi^2 (1+\delta|t|)^{-2} (1+v)^{-8+1/2} \le B_\psi^2 (1+\delta|y|)^{-4}(1+v)^{-8+4+1/2}.$$

$(1+\big||t|-|y|\big|)$ 在 $-7/2$ 中的积分 $t \in \mathbb{R}$ 与 y无关，且有上界。乘以 δ^2 并积分即可证明（8.11）。

对于标量核 $K \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 和有界测试张量和 G，算子不等式 $|K*G|^2 \le \|K\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}(|K|*|G|^2)$ 可通过将柯西–施瓦茨不等式应用于作用在希尔伯特空间向量上的 $(K*G)(x)$ 得到。将其应用于 $K = K_{k,\ t}$,

乘以 (8.5) 中的时间权重，并将 (8.11) 与 y 替换为 $2^k y$一起使用。空间的重新缩放产生因子 2^{2k}，从而得到 $H_k \lesssim (\delta 2^k)^2 (1+\delta 2^k|\cdot|)^{-4} * |F_k|^2$。

为对 H_k的上界求和，我们允许任意尺度 $b_k > 0$， $k \in E$。这一形式的估计也将处理命题 8.4中的光滑振幅。对于 $1 < v < \infty$，非负的 $A_k \in L^v(\mathcal{A})$以及任意的 $b_k > 0$，

$$\Big\| \sum_{k\in E} R_{b_k} * A_k \Big\|_{L^v(\mathcal{A})} \lesssim_v \Big\| \sum_{k\in E} A_k \Big\|_{L^v(\mathcal{A})}. \tag{8.12}$$

与单位范数的正 $Z \in L^{v'}(\mathcal{A})$ 配对，其中 $v' = v/(v-1) > 1$。对于 $R > 0$，记 $B_R Z = |B(0,R)|^{-1} \int_{|y|\le R} Z(\cdot - y)\, dy$ 为中心球平均。在 $|y| \le b^{-1}$上，核的上界为 b^2。在 $2^{n-1} < b|y| \le 2^n$, $n \ge 1$上，其上界为 $Cb^2 2^{-4n}$。乘以 $B(0, 2^n/b)$ 的面积，得到该平均的权重 $C2^{-2n}$ 。在 $\mathbb{R}^2$中针对球的非交换 Hardy–Littlewood 极大不等式，用于（6.7）中的低频平均以及 [10, 引理 3.2], 的证明，为所有 $R > 0$提供一个单一的正 $Z_0 \in L^{v'}(\mathcal{A})$，满足 $\|Z_0\|_{L^{v'}(\mathcal{A})} \lesssim_{v'} 1$ 和 $B_R Z \le Z_0$ 。因此

$$R_b * Z \lesssim \sum_{n\ge 0} 2^{-2n} B_{2^n/b} Z \lesssim Z_0 \qquad (b > 0).$$

由 R_b 的偶性以及迹的 H¨older 不等式，

$$\sum_k \Phi((R_{b_k} * A_k) Z) = \sum_k \Phi(A_k (R_{b_k} * Z)) \lesssim \Phi\big((\textstyle\sum_k A_k) Z_0\big) \lesssim_{v'} \Big\| \textstyle\sum_k A_k \Big\|_{L^v(\mathcal{A})}.$$

取上确界即可证明 (8.12)。更一般地，若 $0 \le X \le Y$ 是正的 L^v 元素，则对每个正对偶测试 Z，都有 $\Phi(XZ) \le \Phi(YZ)$，因为 $\Phi((Y-X)Z) \ge 0$。因此，由相同的正对偶性可得 $\|X\|_{L^v(\mathcal{A})} \le \|Y\|_{L^v(\mathcal{A})}$。对于 $2 < q < \infty$，取 $v = q/2$ 可得 $v' = q/(q-2) > 1$。对 $\sum_k H_k \lesssim \sum_k R_{\delta 2^k} * |F_k|^2$ 应用范数不等式，并利用 (8.12)，再取平方根，即得 (8.9) 中的列估计。将相同的估计应用于 F_k^* 和 ψ ，即可证明行估计。环状逼近 (2.4) 将这两个估计推广到满足引理 8.3 假设的每个族 $(F_k)_{k\in E}$ 。□

8.4. **带光滑振幅的平方函数估计。** 圆盘边界附近的导数符号是薄壳轮廓与归一化半径和频率中的光滑振幅之积。对于壳层族，当 L^2时，我们将8.5式的上界与 L^4 估计式 8.6）进行插值。当 $2 < p < 4$时 $p > 4$，我们将8.6式与 L^q 估计式8.9）在充分大的有限 $q > p$处进行插值。随后，我们将振幅展开为傅里叶级数。式8.12的核估计对 $p > 2$ 以及空间变量中的普朗歇尔恒等式对 $p = 2$ 进行控制，从而在二进尺度上对级数的频率因子给出一致控制。

令 $I = [1,2]$，并取一个振幅 $A \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$，其支集包含于一个固定的紧矩形中。

命题 8.4。 对于 $2 \le p < \infty$， $\varepsilon > 0$，以及 $0 < \delta \le 1/2$，令

$$b_{p,\varepsilon}(\delta) = \begin{cases} \delta^{1/2} L_\delta^{3/2-3/p}, & 2 \le p \le 4, \\ \delta^{2/p-\varepsilon}, & 4 < p < \infty. \end{cases}$$

对于每个 $F \in L^p(\mathcal{A})$ 和每个有限的 $E \subset \mathbb{Z}$,

$$\big\| \big(A(s, 2^{-k}|D|)V_{k,s}F\big)_{k\in E, s\in I} \big\|_{p,rc} \lesssim_{p,\varepsilon} \|A\|_{C^{10}} B_\psi \, b_{p,\varepsilon}(\delta) \|F\|_{L^p(\mathcal{A})}, \tag{8.13}$$

$$\big\| \big(A(s, 2^{-k}|D|)F\big)_{k\in E, s\in I} \big\|_{p,rc} \lesssim_{p} \|A\|_{C^{10}} \|F\|_{L^p(\mathcal{A})}. \tag{8.14}$$

常数可以依赖于固定的矩形。两个上界对于 E 上的计数测度以及 I 上的 ds 或 ds/s 均成立。

证明。由齐次性，不妨设 $B_\psi \le 1$。取 $P_k = P(2^{-k}|D|)$，使得 $P \in C_c^\infty((0,\infty))$ 为实数，且在 A的径向支集上恒等于一。取引理 $[c_0, C_0]$中的环带 8.2 和 8.3，使其包含 supp P。我们首先给映射取上界

$$T : F \longmapsto (V_{k,s}P_kF)_{k\in E, s\in\mathbb{R}}$$

从 $L^p(\mathcal{A})$ 到 $L^p(\mathcal{A}; L^2(E\times\mathbb{R})_d)$，其中 $d \in \{\mathrm{c}, \mathrm{r}\}$， E 上取计数测度， $\mathbb{R}$ 上取勒贝格测度。对于每个指数，我们都从第2节中施瓦茨测试张量有限和上的同一公式出发。为了在 $F_k = P_kF$ 下应用 (8.6) 和 (8.9)，我们首先给 $(P_kF)_{k\in E}$ 的行范数与列范数取上界。对于独立对称符号 ϵ_k，记 $S_\epsilon = \sum_{k\in E} \epsilon_k P_k$。环带重叠使 S_ϵ 的符号一致有界。在原点之外，对缩放后的施瓦茨核及其梯度求和，分别得到上界 $C|x|^{-2}$ 和 $C|x|^{-3}$; 即使 k 遍历所有整数，这些上界仍然成立。按照第 5.2 节中的方法应用 Parcet 的标量核 Calder´on–Zygmund 定理，可得 $L^p(\mathcal{A})$ 上 S_ϵ 的一致上界。由于 $\mathbb{E}|S_\epsilon F|^2 = \sum_{k\in E} |P_kF|^2$， $L^{p/2}(\mathcal{A})$ 中的三角不等式给出

$$\|(P_kF)_k\|_{p,c}^2 \le \mathbb{E}\|S_\epsilon F\|_{L^p(\mathcal{A})}^2 \lesssim_p \|F\|_{L^p(\mathcal{A})}^2. \tag{8.15}$$

将同一不等式应用于 F^*，即可得到列上界，因为 P 为实值且径向，所以 $P_k(F^*) = (P_kF)^*$。这就是针对所选截断函数 P 的 [10,引理 2.6] 的环带 Littlewood–Paley 上界估计。

对于 $p = 2$，(8.5) 及酉性给出 $\delta^{1/2}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}(\sum_{k\in E}\|P_kF\|_{L^2(\mathcal{A})}^2)^{1/2}$，其中 $\|TF\|_{2,d}$、$d \in \{\mathrm{c}、\mathrm{r}\}$。标量普朗歇尔定理以及 B_ψ 的定义给出 $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \lesssim B_\psi \le 1$。在 $p = 4$ 处，将 (8.6) 应用于 $F_k = P_kF$ 并利用 (8.15)，得到算子范数上界 $C\delta^{1/2}L_\delta^{3/4}$。对于有限的 $q > 4$，将 (8.9) 和 (8.15) 应用于 $(P_kF)_{k\in E}$，得到上界 C_q。对所有指数固定 $L^2(E\times\mathbb{R})$ 的一个实正交归一基。在该基下，对于 $d = \mathrm{c}、\mathrm{r}$，空间$L^p(\mathcal{A}; L^2(E\times\mathbb{R})_d)$ 分别实现为同一迹矩阵代数的首列子空间和首行子空间，如第 8 节所示。因此， [10, 引理 2.4] 中的插值恒等式对每个 $d \in \{\mathrm{c}、\mathrm{r}\}$ 均适用。对于 $2 < p < 4$，解 $1/p = (1-\theta)/2 + \theta/4$，得到 $\theta = 2 - 4/p$。插值得到

$$\|T\|_{p\to(p,d)} \lesssim_p (\delta^{1/2})^{1-\theta}(\delta^{1/2}L_\delta^{3/4})^\theta = \delta^{1/2}L_\delta^{3/2-3/p}.$$

这里 $\|T\|_{p\to(p,d)}$ 表示参数范数为 $\|\cdot\|_{p\text{时的算子范数},\ d}$ 在值域上。当 $p = 2$时，上界由（8.5）得到；当 $p = 4$ 时，则由（8.6）和（8.15）得到。当 $4 < p < q < \infty$时，记 $1/p = \theta/4 + (1-\theta)/q$。现在同一个映射满足

$$\theta = \frac{1/p - 1/q}{1/4 - 1/q}, \qquad \|T\|_{p\to(p,d)} \lesssim_{p,q} (\delta^{1/2}L_\delta^{3/4})^\theta \cdot 1^{1-\theta}.$$

由于 $2/p-\theta/2=2(p-4)/(p(q-4))$，取一个足够大的有限 $q>p$，使该差小于 $\varepsilon/2$。于是对于 $0<\delta\le 1/2$，有 $\delta^{\theta/2}\le\delta^{2/p-\varepsilon/2}$，且有 $L_\delta^{3\theta/4}\lesssim_\varepsilon \delta^{-\varepsilon/2}$。这些上界给出 $\|T\|_{p\to(p,d)}\lesssim_{p,\,\varepsilon} b_{p,\,\varepsilon}(\delta)$，在 E 中一致。

的傅里叶级数 A 引入频率因子$M_{k,\,b}=e^{ib2^{-k}|D|}$，$b\in\mathbb{R}$，位于引理8.2的环带上。插入固定的再生截断函数 $\kappa(2^{-k}|D|)$。在固定环域上对傅里叶反演应用$1-\Delta_\xi)^2$，得到

$$|K_{k,-b}(y)|\lesssim(1+|b|)^4R_{2^k}(y),\qquad \|K_{k,-b}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\lesssim(1+|b|)^4,$$

因为$\|R_{2^k}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}=\|R_1\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$。在引理 8.3 中，取 $K=K_{k,\,-b}$ 和 $G=F_k$，应用卷积不等式 $|K*G|^2\le\|K\|_{L^1}(|K|*|G|^2)$。由于$\kappa(2^{-k}|D|)F_k=F_k$，可得

$$|M_{k,b}F_k|^2\lesssim(1+|b|)^8R_{2^k}*|F_k|^2.$$

当 $p>2$ 时，在 $v=p/2$ 处使用 (8.12)；当 $p=2$ 时，对每个 k 分别在空间变量中应用普朗歇尔恒等式。对于行，使用带相位 $-b$ 的 F_k^* 的列上界，因为 $(M_{k,\,b}F_k)^*=M_{k,\,-b}(F_k^*)$。因此 $\|(M_{k,\,b}F_k)_k\|_{p,\,d}\lesssim_p(1+|b|)^4\|(F_k)_k\|_{p,\,d}$对于 $d\in\{\mathrm{c},\,\mathrm{r}\}$。

将 A 在一个矩形上作周期延拓，该矩形的内部包含 $I\times\operatorname{supp}P$ 和 $\operatorname{supp}A$。其傅里叶系数 c_{mn}，$m,\ n\in\mathbb{Z}$ 满足 $|c_{mn}|\lesssim\|A\|_{C^{10}}(1+|m|+|n|)^{-10}$，这是由分部积分得到的；相应的频率 a_m，b_n 分别是 m，n 的固定倍数。由于在 A 的径向支集上 $P(\rho)=1$，对矩形作傅里叶反演可得，对于 $s\in I$ 及所有 $\rho>0$，

$$A(s,\rho)=P(\rho)\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}c_{mn}e^{ia_ms}e^{ib_n\rho}.$$

在 $\operatorname{supp}P$之外，两边都为零。对每个 $m,\ n\in\mathbb{Z}$，在乘以 8.13 中相应的族之前，它是 c_{mn}:

$$(e^{ia_ms}V_{k,s}M_{k,b_n}P_kF)_{k\in E,s\in I}.$$

乘以 e^{ia_ms} 在任一参数范数下都是等距映射。由于 M_{k,b_n} 保持傅里叶支撑不变，端点估计对每个 $k\in E$ 均可应用，并取 $F_k=M_{k,b_n}P_kF$。对 M_{k,b_n} 的序列估计和 (8.15) 在每个端点处给出因子 $(1+|b_n|)^4$。对 $F\mapsto(V_{k,s}M_{k,b_n}P_kF)_{k,s}$ 作插值，在 p 处得到相同的因子，因此该族的范数至多为 $C_{p,\varepsilon}(1+|b_n|)^4b_{p,\varepsilon}(\delta)\|F\|_{L^p(\mathcal{A})}$。省略 $V_{k,s}$ 后，对 s 的平方积分给出因子 $\|e^{ia_ms}\|_{L^2(I)}=1$，而序列估计给出 $C_p(1+|b_n|)^4\|F\|_{L^p(\mathcal{A})}$。因此，(8.13) 和 (8.14) 中各族的傅里叶展开在行范数与列范数下都绝对收敛，因为 $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}|c_{mn}|(1+|b_n|)^4\lesssim\|A\|_{C^{10}}$。

为将这些和与所述乘子族对应起来，取 $F\in L^2(\mathcal{A})\cap L^p(\mathcal{A})$。将 $A_N(s,\rho)$ 表示为乘以$P(\rho)$的、带有 $|m|,|n|\le N$，$N\in\mathbb{N}$ 的有限傅里叶和。利用 $\operatorname{supp}P$ 上的系数衰减以及其他地方的零延拓，它一致收敛到 $A(s,\rho)$，其中 $s\in I$和 $\rho\ge0$。对于固定的有限 E，由普朗歇尔定理可得，例如，

$$\begin{aligned}&\big\|\big((A_N-A)(s,2^{-k}|D|)V_{k,s}F\big)_{k\in E,s\in I}\big\|_{2,c}\\&\quad\le(|E||I|)^{1/2}\|A_N-A\|_{L^\infty(I\times[0,\infty))}\|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|F\|_{L^2(\mathcal{A})}\longrightarrow0.\end{aligned}$$

L^2 列范数和行范数与联合希尔伯特空间范数一致。省略V_k和$_s$ 后，可得到相同的收敛性，只是因子$\|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ 替换为 1。在每个矩阵实现中，依测度收敛极限的唯一性将 L^p 和分别与（8.13）和（8.14）中的乘子族对应起来。 $L^2(\mathcal{A}) \cap L^p(\mathcal{A})$的稠密性以及 B_ψ 的恢复给出（8.13）和（8.14）。最后，在 I 上有 $ds/s \le ds$ ，因此相对于 ds/s 的每个正平方积分，都受相对于 ds的同一个有序积分所控制。 $L^{p/2}$ 范数的单调性给出带有 ds/s的（8.13）和（8.14）。□

8.5. **全半径平方函数估计**。 现在，我们通过将内部和边界部分的估计相加，完成定理 1.5 的证明，针对 D_r^ν 的行范数与列范数。

因子 $(1-|\xi|^2/r^2)^{\nu-1}$ 在 (8.1) 中，在相对厚度为 $\delta^{\nu-1}$ 的边界部分上，其大小为 δ。将此权重乘以$b_{p,\ \varepsilon}(\delta)$，由命题 8.4 可得下述定理中的可求和条件。

定理 8.5。 设 $2 \le p < \infty$，令 $\nu > \nu_*(p) := \max\{1/2, 1-2/p\}$ 为实数，并取$H = L^2((0,\infty), dr/r)$。希尔伯特空间算子 $\mathcal{T}_\nu$ 在 $L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}) \cap L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$ 上的限制唯一地延拓为一个有界线性映射

$$\mathcal{T}_\nu : L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}; H_c) \cap L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}; H_r).$$

在交集上取最大范数时，该估计等价于

$$\|\mathcal{T}_\nu F\|_{p,rc} = \max\{\|G_c^\nu F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}, \|G_r^\nu F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}\} \le C_{p,\nu}\|F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})} \qquad (F \in L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})).$$

该常数对所有半有限迹系数代数 $\mathcal{M}$ 一致。

证明。 固定 $F \in L^2(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}) \cap L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})$。为估计 $\|\mathcal{T}_\nu F\|_{p,\ rc}$，我们先在有限个半径构成的二进区间上估计有限乘子和。内部符号在原点处二次消失，因此可以将其在收缩至零的环带上的各部分求和。边界项按其与 $|\xi| = r$ 的距离编号，并由命题 8.4估计。随后我们在 $\mathcal{T}_\nu F$ 中恢复 L^2 ，并利用一致有界性推广到所有半径。

记 $r = 2^k s$, $k \in \mathbb{Z}$, $1 \le s < 2$，并令 $\rho = 2^{-k}|\xi|$。在区间 $[2^k, 2^{k+1})$ 上，变量替换 $r = 2^k s$ 得到 $dr = 2^k ds$，因此对任意非负可测函数$h : (0, \infty) \to [0,\infty]$

$$\int_0^\infty h(r)\,\frac{dr}{r} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_1^2 h(2^k s)\,\frac{ds}{s}.$$

取 $h = |g|^2$ 作为 $g \in H$ ，可将参数希尔伯特空间等距地识别为若干个 $L^2([1,2),\ ds/s$的副本的平方和。固定一个有限集 $E \subset \mathbb{Z}$并令 $S_E = \bigcup_{k\in E}[2^k, 2^{k+1}$。记 $v = s - \rho$。在 $v > 0$ 上，将 $|\xi|/r = \rho/s$ 代入（8.1）并提出公因子 $1 - \rho^2/s^2 = (s+\rho)v/s^2$ ，得到归一化符号

$$d(s,\rho) = A_\nu(s,\rho)v^{\nu-1}, \qquad A_\nu(s,\rho) = 2\nu\rho^2 s^{-2\nu}(s+\rho)^{\nu-1}.$$

令 $d(s,\rho) = 0$对于 $v \le 0$，于是 $d_r^\nu(\xi) = d(s,\rho)$ 在 $r = 2^k s$, $\rho = 2^{-k}|\xi|$ 处。选取定义在 $[0,\infty)$ 上的非负递减光滑截断函数 χ ，其在 $[0,1]$ 上等于 1，在 $[2,\infty)$ 上等于 0。令 $\eta(w) = \chi(w) - \chi(2w)$ 对于 $w > 0$ ，并在 $w \le 0$ 上将 η 延拓为 0。其支集包含于 $[1/2, 2]$ 中。对于 $v > 0$ 以及任意整数 $J \ge 3$，和式 $\sum_{j=3}^J \eta(2^j v) =$

$\chi(8v)-\chi(2^{J+1}v)$ 递增至 $\chi(8v)$。内部符号为 $b_\nu(s,\rho)=(1-\chi(8v))d(s,\rho)$ 对于 $v>0$，并在 $v\le 0$ 上为 0。

b_ν 的支集可以延伸至 $\rho=0$，因此我们使用二进分割，使每个内部振幅在其重标度径向变量上都远离零。取一个非负的$\zeta\in C_c^\infty((1/2,\ 2))$，使得 $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\zeta(2^{-\ell}\rho)=1$对于 $\rho>0$成立。由于当 $s\in[1,2$时，$b_\nu(s,\ \rho)$在 $\rho\ge 2$处为零，因此只会出现 $\ell\le 1$。对于整数 $L\le 1$ 和 $J\ge 3$，以及 $r=2^k s\in S_E$，令

$$m_{r,L,J}(\xi)=b_\nu(s,\rho)\sum_{\ell=L}^{1}\zeta(2^{-\ell}\rho)+d(s,\rho)\sum_{j=3}^{J}\eta(2^j v).$$

记$I_{\ell,\ E}F$为符号为 $b_\nu(s,\ \rho)\zeta(2^{-\ell}\rho)$的族，记$S_{j,\ E}F$为符号为 $d(s,\ \rho)\eta(2^j v)$的族，其指标为$(k,\ s)\ \in\ E\times[1,2)$。由有限和的三角不等式可得

$$\|(m_{r,L,J}(D)F)_{r\in S_E}\|_{p,rc}\le\sum_{\ell=L}^{1}\|I_{\ell,E}F\|_{p,rc}+\sum_{j=3}^{J}\|S_{j,E}F\|_{p,rc}. \tag{8.16}$$

这里，对该族的两种描述都在每个二进区间上使用测度 $dr/r\ =\ ds/s$ 。我们将证明右侧两个范数级数关于 E 一致可求和。

我们首先估计 (8.16) 中的内部项。对于 $\ell\le 1$ 和 $w>0$，通过定义提取因子$2^{2\ell}$

$$b_{\nu,\ell}(s,w)=2^{-2\ell}b_\nu(s,2^\ell w)\zeta(w).$$

为验证提取 $2^{2\ell}$ 后的上界，令 $q_\nu(s,\ \rho)\ =\ b_\nu(s,\ \rho)/\rho^2$，其中 $\rho\ >\ 0$。在 $s-\rho>0$ 上，这个商等于

$$[1-\chi(8(s-\rho))]\,2\nu s^{-2}(1-\rho^2/s^2)^{\nu-1}.$$

它可光滑延拓至 $\rho=0$。因子 $1-\chi(8(s-\rho))$ 在 $0<s-\rho\le 1/8$ 时为零。在剩余区域 $s-\rho>1/8$ 上，对于固定邻域 $[1,2]$ 中的 s，底数 $1-\rho^2/s^2$ 与零保持正距离。跨过 $s=\rho$ 的零延拓是光滑的。因此 $b_{\nu,\ \ell}(s,\ \ w)\ =w^2q_\nu(s,\ \ 2^\ell w)\zeta(w)$。对 q_ν 的第二个变量求导，每次都会产生因子 $2^\ell\le 2$，而 w 始终位于 ζ 的固定支集中。按照相同公式，将 s-振幅向 $[1,2]$ 外侧延拓一小段距离，并乘以一个在 $[1,2]$ 上恒等于一的固定光滑截断函数。这给出一致的 C^{10} 上界，且支集位于 $\mathbb{R}\times(0,\ \infty)$ 中的一个固定紧矩形内。

由于 $2^{-\ell}\rho\ =\ 2^{-(k+\ell)}|\xi|$，对频率尺度的有限集 $E+\ell$ 应用（8.14）。将该集合重新标记为 E 保持参数范数不变，并得到

$$\|I_{\ell,E}F\|_{p,rc}=2^{2\ell}\|(b_{\nu,\ell}(s,2^{-k-\ell}|D|)F)_{k\in E,s}\|_{p,rc}\le C_{p,\nu}2^{2\ell}\|F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}.$$

对 $\ell\le 1$ 求和即可控制（8.16）中的整个内部级数。

对于 (8.16) 中的边界项，我们将其归约到命题 8.4 的薄环带。由于 $\eta(2^j v)\ \neq\ 0$ with $j\ \ge\ 3$ implies $0\ <\ v\ \le\ 1/4,\ \ s\ \in\ [1,2]$ 的每个边界部分的支集都包含在固定的闭矩形 $[1,2]\times[3/4,2]$ 中。选取 $\theta\in C_c^\infty((0,\infty)^2)$，使其在该矩形上恒等于 1，并在边界符号中用 θA_ν 替换 A_ν。对于 $j\ge 3$，令 $\delta=2^{-j}$，并令 $\psi_\nu(w)\ =\ w^{\nu-1}\eta(w)$ for $w\ >\ 0$，再延拓为

零。支撑条件 $\operatorname{supp}\,\eta\subset[1/2,2]$ 使 ψ_ν 成为一个光滑紧支撑函数，其中 B_{ψ_ν} 与 j 无关。$S_{j,\,E}$ 的符号为

$$\delta^{\nu-1}A_\nu(s,\rho)\psi_\nu((s-\rho)/\delta).$$

对以 为索引的族应用（8.13），并取 $\psi=\psi_\nu$ 和 $\delta=2^{-j}$。对于 $2\le p\le 4$，对 j 求和得到 $\sum_{j\ge3}\|S_{j,\,E}F\|_{p,\,rc}$ 的上界为

$$C_{p,\nu}\|F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}\sum_{j\ge3}2^{-j(\nu-1/2)}(1+j)^{3/2-3/p}.$$

对于 $p>4$，取 $0<\varepsilon<\nu-1+2/p$。此时，第 j 个估计中的两个因子分别是边界权重 $\delta^{\nu-1}$ 和平方函数增益 $\delta^{2/p-\varepsilon}$，因此

$$\sum_{j\ge3}\|S_{j,E}F\|_{p,rc}\le C_{p,\nu,\varepsilon}\|F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}\sum_{j\ge3}2^{-j(\nu-1+2/p-\varepsilon)}.$$

指数 $\nu-1+2/p-\varepsilon$ 为正。对于 $p\le4$，正指数 $\nu-1/2$ 同样带来几何衰减，即使再乘以 $(1+j)^{3/2-3/p}$ 也不例外。结合内部估计和边界估计，可知（8.16）右侧的上界为 $C_{p,\,\nu}\|F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$，且与 E，L，J 无关。对于每个有限的 $E\subset\mathbb{Z}$，$\sum_{\ell\le1}I_{\ell,\,E}F$ 和 $\sum_{j\ge3}S_{j,\,E}F$ 在列范数和行范数中都绝对收敛。

式（8.16）中两个级数的可求和上界使我们能够恢复族 $(D_r^\nu F)_{\,r>0}$。固定 E。对于 $v=s-\rho>0$，径向分割和望远镜恒等式给出：对于整数 $L\le1$ 和 $J\ge3$，

$$0\le(1-\chi(8v))\sum_{\ell=L}^{1}\zeta(2^{-\ell}\rho)\le1-\chi(8v),$$

$$0\le\sum_{j=3}^{J}\eta(2^jv)=\chi(8v)-\chi(2^{J+1}v)\le\chi(8v)\,.$$

因此 $0\le m_{r,\,L,\,J}(\xi)\le d_r^\nu(\xi)$。当 $v\le0$ 或 $\rho=0$ 时，两边均为零。对于 $\rho>0$ 和 $v>0$，径向分割给出：在 b_ν 的支集上，$\sum_{\ell=L}^{1}\zeta(2^{-\ell}\rho)\to1$，其中 $L\to-\infty$；而望远镜恒等式给出 $\sum_{j=3}^{J}\eta(2^jv)\to\chi(8v)$，其中 $J\to\infty$。由此得到 $m_{r,\,L,\,J}(\xi)\to d_r^\nu(\xi)$。在 S_E 上的联合希尔伯特空间中，平方误差是以下积分

$$(2\pi)^{-2}|m_{r,L,J}(\xi)-d_r^\nu(\xi)|^2\,\|\widehat{F}(\xi)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2\quad\text{over }\mathbb{R}^2\times S_E\text{ against }d\xi\,dr/r.$$

由于 $|m_{r,\,L,\,J}(\xi)-d_r^\nu(\xi)|\le d_r^\nu(\xi)$，方程 (8.3) 给出了一个可积主控函数。因此，由控制收敛定理可知，平方误差趋于零。在参数族的任一矩阵实现中，族 $(m_{r,\,L,\,J}(D)F)_{r\in S_E}$ 当 $L\to-\infty$ 和 $J\to\infty$ 时，既有一个 L^2 极限，也有一个 L^p 极限。任一迹范数下的收敛都蕴含依测度收敛，而依测度收敛的极限唯一。因此，S_E 上的行和列的和都表示 $(D_r^\nu F)_{r\in S_E}$，其范数上界为 $C_{p,\,\nu}\|F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$。

为消除对半径的限制，令 $E_n=\{-n,\dots,n\}$ for $n\ge1$，并通过零延拓将 S_{E_n} 上的每个导数族视为 $(0,\ \infty)$ 上的导数族。由 (8.3)，这些导数族依 L^2 收敛到完整导数族。在两种矩阵实现中，它们的范数均不超过 $C_{p,\,\nu}\|F\|_{L^p(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2})}$，且关于 n 一致。在任一种实现中，迹收敛

L^2 意味着依测度收敛，因此由 Fatou不等式可得相同的 L^p 极限上界 [4, 引理 3.4(i)]。因此，该估计对每个 $F \in L^2 \cap L^p$ 的希尔伯特空间导数均成立。此交集在 L^p 中的稠密性给出了关于列范数与行范数最大值的唯一延拓。 □

注记 8.6。 当 $p = 4$ 时，可以取 $C_{4,\ 1/2+\varepsilon} \lesssim \varepsilon^{-7/4}$ 对于 $0 < \varepsilon \le 1/2$。事实上，对于$\nu \in [1/2, 1]$，在 $\operatorname{supp} \eta$ 上，经过求导的因子 $w^{\nu-1}$，以及在 $\operatorname{supp} \theta$ 上的 $s^{-2\nu}$（$s + \rho$）$^{\nu-1}$，还有在 b_ν 的支集上对于 $1 \le s \le 2$ 的（$1 - \rho^2/s^2$）$^{\nu-1}$，其任意固定阶数的导数均一致有界。这是因为在底数具有正下界的紧集上对幂进行求导即可得到。因而，在 $p = 4$ 处关于 $I_{\ell,\ E}F$ 和 $S_{j,\ E}F$ 的估计中的常数关于 ν 是一致的。对于剩余的壳层和，在单位区间上进行比较并作变量代换 $u = \varepsilon t$ 可得

$$\sum_{j\ge 3} 2^{-j\varepsilon}(1+j)^{3/4} \lesssim \int_0^\infty 2^{-\varepsilon t}(1+t)^{3/4}\,dt = \varepsilon^{-7/4}\int_0^\infty 2^{-u}(\varepsilon+u)^{3/4}\,du.$$

最后一个积分关于 $0 < \varepsilon \le 1/2$ 一致有界。

8.6. **量子环面与莫亚尔平面。** 定理8.5的证明对迹系数代数上的半径导数的每个光滑部分给出一致上界。我们利用这些上界作用于第5.4 节中的平移轨道，以估计量子导数。回忆一下， $\mathcal{D} = \mathcal{C}\bar{\otimes}\mathcal{Q}_\Theta$ 具有乘积迹，而 $\beta_z = \mathrm{id}_\mathcal{C} \otimes \gamma_z$对于 $z \in \mathbb{R}^2$，其中 $\mathcal{C}$ 是一个半有限迹冯诺依曼代数。

令 $(\Lambda_\Theta, \mu_\Theta)$ 表示在环面上取计数测度的 $\mathbb{Z}^2$ 以及在平面上取勒贝格测度的 $\mathbb{R}^2$ 。对于实数 $\nu > 1/2$ 和 $x \in L^2(\mathcal{D})$，令$\mathcal{T}_{\nu,\Theta}x = (D^\nu_{r,\Theta}x)_{r>0}$表示在 ξ中对 $(r,\xi) \mapsto d_r^\nu(\xi)\widehat{x}_\Theta(\xi)$ 的逆量子傅里叶变换，其中 $(r,\xi) \in (0,\infty) \times \Lambda_\Theta$，而 d_r^ν由（8.1）给出。由（8.3）以及 $d_r^\nu(0) = 0$可知，这定义了一个从 $L^2(\mathcal{D})$ 到 $L^2((0,\infty)\ dr/r; L^2(\mathcal{D}))$ 的线性映射。

推论 8.7。 对于任一量子模型，令 $2 \le p < \infty$ 且令 $\nu > \nu_*(p)$ 为实数。给定 $H = L^2((0,\ \infty)\ dr/r)$，将 $\mathcal{T}_{\nu,\Theta}$ 限制在 $L^2(\mathcal{D}) \cap L^p(\mathcal{D})$ 上可唯一延拓为一个有界线性映射

$$\mathcal{T}_{\nu,\Theta} : L^p(\mathcal{D}) \longrightarrow L^p(\mathcal{D}; H_c) \cap L^p(\mathcal{D}; H_r).$$

记 $G^\nu_{c,\Theta}x$ 和 $G^\nu_{r,\Theta}x$ 分别为该族的列积分和行积分的正平方根。对于每个 $x \in L^p(\mathcal{D})$，

$$\|\mathcal{T}_{\nu,\Theta}x\|_{p,rc} = \max\{\|G^\nu_{c,\Theta}x\|_{L^p(\mathcal{D})}, \|G^\nu_{r,\Theta}x\|_{L^p(\mathcal{D})}\} \le C_{p,\nu}\|x\|_{L^p(\mathcal{D})},$$

其中 $C_{p,\nu}$ 与 Θ 和 $\mathcal{C}$ 无关，并满足备注 8.6 中在 $p = 4$处的上界。对于每个 $x \in L^2(\mathcal{D})$，平方范数为

$$\|G^\nu_{c,\Theta}x\|^2_{L^2(\mathcal{D})} = \|G^\nu_{r,\Theta}x\|^2_{L^2(\mathcal{D})} = \frac{\nu}{2\nu-1}\begin{cases}\|x - \mathbb{E}_0 x\|^2_{L^2(\mathcal{D})}, & \mathcal{Q}_\Theta = \mathbb{T}^2_\Theta,\\ \|x\|^2_{L^2(\mathcal{D})}, & \mathcal{Q}_\Theta = \mathbb{R}^2_\Theta.\end{cases}$$

这里， $\mathbb{E}_0 = \mathrm{id}_\mathcal{C} \otimes \mathrm{tr}_\Theta$ 是作用到 $\mathcal{C} \otimes 1$ 上的环面期望，它提取 $n = 0$处的傅里叶系数。

证明。 我们首先计算 L^2 范数。随后，我们将在有限个半径为二进区间的区间上，将$m_{r,\ L,\ J}$ 中的光滑符号的上界转移，并将它们的和识别为$\mathcal{T}_{\nu,\ \Theta}x$ 在 $L^2(\mathcal{D}) \cap L^p(\mathcal{D})$上的结果。

a^*a 的迹等于 aa^* 的迹，对于 $a \in L^2(\mathcal{D})$而言，因此在 $p = 2$处的两个平方范数都等于联合平方范数

$$\int_0^\infty \|D^\nu_{r,\Theta} x\|^2_{L^2(\mathcal{D})} \frac{dr}{r} = \int_{\Lambda_\Theta} \|\widehat{x}_\Theta(\xi)\|^2_{L^2(\mathcal{C})} \left(\int_0^\infty |d^\nu_r(\xi)|^2 \frac{dr}{r} \right) d\mu_\Theta(\xi)$$

由普朗歇尔恒等式和Tonelli定理可知。内积分为 $\nu/(2\nu-1)$，对每个$\xi \neq 0$ 由(8.3)可得，而在 $\xi = 0$处为零。在环面上， $n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ 上的傅里叶系数平方和为$\|x - \mathbb{E}_0 x\|^2_{L^2(\mathcal{D})}$。在平面上， $\{0\}$ 的勒贝格测度为零，且系数平方的积分为$\|x\|^2_{L^2(\mathcal{D})}$。

固定 $2 < p < \infty$、有限集 $E \subset \mathbb{Z}$和 $S_E = \bigcup_{k\in E} [2^k, 2^{k+1})$。令 $d\mu(r) = dr/r$且 $H_E = L^2(S_E, d\mu)$。固定一个内部指标 $\ell \leq 1$ 或一个边界指标 $j \geq 3$，并对 $r \in S_E$，令 $m_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 分别为(8.16)中的$I_{\ell,E}$ 或$S_{j,E}$ 的符号。置$K_r = m_r^\vee$，并用核 K_r通过(5.6)定义 $Q_r : L^p(\mathcal{D}) \to L^p(\mathcal{D})$。令 $\mathcal{S}_\mathcal{D} = L^\infty(\mathbb{R}^2)\bar{\otimes}\mathcal{D}$，并赋予其乘积迹。对于半有限迹代数 $\mathcal{A}$，记$\|\cdot\|_{p,d;\mathcal{A}}$为类型 $d \in \{\mathsf{c}, \mathsf{r}\}$ 在 $\mathcal{A}$上的半径参数范数。令 C_m 为具有符号 m_r, $r \in S_E$的这组算子的欧氏列范数与行范数中较大者。因此

$$\|(K_r * F)_{r\in S_E}\|_{p,d;\mathcal{S}_\mathcal{D}} \leq C_m \|F\|_{L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})} \qquad (F \in L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})).$$

定理$I_{\ell、E}$ 和$S_{j、E}$ 的证明中对8.5 的估计给出

$$C_m \leq \begin{cases} C_{p,\nu} 2^{2\ell}, & m_r \text{ the symbol of } I_{\ell,E}, \quad \ell \leq 1, \\ C_{p,\nu,\varepsilon} 2^{-j(\nu-1)} b_{p,\varepsilon}(2^{-j}), & m_r \text{ the symbol of } S_{j,E}, \quad j \geq 3. \end{cases} \tag{8.17}$$

对于 $p > 4$，取 $0 < \varepsilon < \nu - 1 + 2/p$。对于 $p \leq 4$， $b_{p,\ \varepsilon}$与 ε无关。两个上界均与 E 及系数代数无关。

对于固定选取的 E 和项，符号 m_r 具有共同的紧支撑，且直至四阶的频率导数一致有界。分部积分给出 $|K_r(y)| \leq C(1 + |y|)^{-4}$，其中 $y \in \mathbb{R}^2$ 和 $r \in S_E$成立。 m_r 对 r 的依赖在每个二进区间上都是光滑的，因此这些核是联合可测的。由于$\mu(S_E) < \infty$，根据控制收敛定理，映射 $y \mapsto K_\cdot(y)$连续映入 H_E，并且

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|K_\cdot(y)\|_{H_E}\, dy < \infty.$$

对于 $h \in H_E$和 $a \in L^p(\mathcal{A})$，初等族$(h(r)a)_{r\in S_E}$在两种乘积次序下的范数均为 $\|h\|_{H_E}\|a\|_{L^p(\mathcal{A})}$：首先由简单族公式得到，再由 H_E中的稠密性推出。更一般地， $L^2(S_E, d\mu; L^p(\mathcal{A}))$连续映入两个参数完备化，因为 $L^{p/2}(\mathcal{A})$中的三角不等式表明，简单族U的任一平方范数都由$\int_{S_E} \|U_r\|^2_{L^p(\mathcal{A})}\, d\mu(r)$所控制。固定 $x \in L^p(\mathcal{D})$。族$(K_r(y)\beta_{-y}x)_{r\in S_E}$在 Bochner 空间以及两个参数完备化中连续取值，这是由 $K_\cdot(y)$的连续性以及 $L^p(\mathcal{D})$轨道的连续性得出的。根据上界$\|K_\cdot(y)\|_{H_E}\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$，它在 y 中的积分存在于 Bochner 空间中。博赫纳-富比尼定理将其识别为$(Q_r x)_{r\in S_E}$，而映入行空间和列空间的连续映射则将其映为这两个空间中相同初等族的积分。

为了比较 Q_r 与 K_r*，选取 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，其中$\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = 1$。对于 $T > 0$，令$\varphi_T(z) = T^{-2/p}\varphi(z/T)$，并定义 J_T: $L^p(\mathcal{D}) \to L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})$，使得 $(J_T x)(z) = \varphi_T(z)\beta_z x$。它是

一个等距映射，因为 β_z 保持 $\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 且 $\int_{\mathbb{R}^2}|\varphi_T(z)|^p\,dz=1$。对于简单族 $X=(X_r)_{r\in S_E}$，

$$\int_{S_E}(J_TX_r)(z)^*(J_TX_r)(z)\,d\mu(r)=|\varphi_T(z)|^2\beta_z\left(\int_{S_E}X_r^*X_r\,d\mu(r)\right),$$
$$\int_{S_E}(J_TX_r)(z)(J_TX_r)(z)^*\,d\mu(r)=|\varphi_T(z)|^2\beta_z\left(\int_{S_E}X_rX_r^*\,d\mu(r)\right).$$

取平方根与 β_z 可交换。因此，J_T 也保持两个参数范数，并等距延拓到两个完备化。在 $L^2(S_E,\ d\mu;\ L^p(\mathcal{D}))$ 中的 Bochner 族上，通过初等族逼近，该延拓与 $r\mapsto J_TX_r$ 一致。

令 $\mathcal{E}_{T,\ r}=K_r*J_Tx-J_T(Q_rx)$ 表示 $r\in S_E$。由三角不等式和欧几里得估计，

$$\|(Q_rx)_{r\in S_E}\|_{p,d;\mathcal{D}}=\|(J_T(Q_rx))_{r\in S_E}\|_{p,d;\mathcal{S}_\mathcal{D}}\le C_m\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}+\|(\mathcal{E}_{T,r})_{r\in S_E}\|_{p,d;\mathcal{S}_\mathcal{D}}.$$

作用律给出

$$\mathcal{E}_{T,r}(z)=\int_{\mathbb{R}^2}K_r(y)a_{T,y}(z)\,dy,\qquad a_{T,y}(z)=[\varphi_T(z-y)-\varphi_T(z)]\beta_{z-y}x.$$

映射 $y\mapsto a_{T,\ y}$ 在 $L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})$ 中连续，因为 $a_{T,\ y}=(J_Tx)(\cdot-y)\ -J_T(\beta_{-y}x)$，并且平移与 β-轨道在范数意义下均连续。由于 β_{z-y} 保持迹，

$$\|a_{T,y}\|_{L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})}=\|\varphi(\cdot-y/T)-\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}.$$

因此，初等族 $(K_r(y)a_{T,\ y})_{r\in S_E}$ 在列空间和行空间中以及在 y（$L^2,\ d\mu;\ L^p(\mathcal{S}_\mathcal{D})$）中关于 y 连续。至于 Q_rx，在 Bochner 空间中对这些族积分可得 $(\mathcal{E}_{T,\ r})_{r\in S_E}$。各参数空间中的三角不等式给出

$$\|(\mathcal{E}_{T,r})_{r\in S_E}\|_{p,d;\mathcal{S}_\mathcal{D}}\le\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}\int_{\mathbb{R}^2}\|K_\cdot(y)\|_{H_E}\|\varphi(\cdot-y/T)-\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\,dy.$$

对于每个 y，当 $T\to\infty$ 时最后一个因子趋于零，并且对所有 y，T，它都以上界 2 为界。控制收敛定理现证明了对每个 $d\in\{\mathrm{c},\ \mathrm{r}\}$，$\|(Q_rx)_{r\in S_E}\|_{p,\ d;\mathcal{D}}\le C_m\|x\|_{L^p(\mathcal{D})}$。

令 $Q_{r、\ L、\ J}$ 表示式 (5.6) 中核为 $m_{r、\ L、\ J}^\vee$ 的算子。分别对 $I_{\ell、\ E}$ 在 $L\le\ell\le1$ 下的符号，以及 $S_{j、\ E}$ 在 $3\le j\le J$ 下的符号应用 $(Q_rx)_{r\in S_E}$ 的估计。由于 (8.17) 中的常数在 $\ell\le1$ 和 $j\ge3$ 上可求和，族 $(Q_{r、\ L、\ J}x)_{r\in S_E}$ 在 $L\to-\infty$ 和 $J\to\infty$ 时关于列范数和行范数收敛。两个极限的上界关于 E 是一致的，并且在 $p=4$ 处具有备注 8.6 中关于 ν 的依赖关系。

对于 $x\in L^2(\mathcal{D})\cap L^p(\mathcal{D})$，第 5.5 节给出的公式为 $\widehat{Q_{r、\ L、\ J}x}_\Theta(\xi)=m_{r、\ L、\ J}(\xi)\widehat{x}_\Theta(\xi)$。在 L^2 和 L^p 中定义 $Q_{r、\ L、\ J}x$ 的积分，通过在交集上取范数为 $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{D})}+\|\cdot\|_{L^p(\mathcal{D})}$ 的积分可知二者一致。这也给出了 $L^2(S_{E、}\ d\mu;\ L^2(\mathcal{D})\cap L^p(\mathcal{D}))$ 中的共同简单族逼近元。在联合希尔伯特空间中，$(Q_{r、\ L、\ J}x)_{r\in S_E}$ 作为 $(D^\nu_{r、\ \Theta}x)_{r\in S_E}$ 的逼近时的平方误差为

$$\int_{S_E}\int_{\Lambda_\Theta}|m_{r,L,J}(\xi)-d_r^\nu(\xi)|^2\|\widehat{x}_\Theta(\xi)\|^2_{L^2(\mathcal{C})}\,d\mu_\Theta(\xi)\,\frac{dr}{r}.$$

此处 $0\le m_{r,\ L,\ J}(\xi)\le d_r^\nu(\xi)$，且这些符号逐点收敛到 $d_r^\nu(\xi)$，当 $L\to-\infty$ 和 $J\to\infty$ 时。方程（8.3）给出了主控函数 $|d_r^\nu(\xi)|^2\|\widehat{x}_\Theta(\xi)\|^2_{L^2(\mathcal{C})}$ 的积分上界，

因此平方误差趋于零。在参数空间的每个矩阵实现中，相同的部分和在 L^2 和 L^p中均收敛。两者都蕴含依测度收敛。根据依测度收敛极限的唯一性， L^p 极限是$(D^{\nu}_{r,\ \Theta}x)_{r\in S_E}$的行实现和列实现。

最后，对于每个 $n \geq 1$取 $E_n = \{-n, \ldots, n\}$ 并将 $(D^{\nu}_{r,\Theta}x)_{r\in S_{E_n}}$ 通过补零延拓到所有半径。这些族在联合希尔伯特空间中收敛到 $\mathcal{T}_{\nu,\Theta}x$ 因为其平方范数关于 r可积。关于 S_{E_n} 的一致有界性，以及依测度收敛时迹的 Fatou引理，给出了所需的 L^p 上界，且在两种矩阵实现中均成立[4]。 $L^2(\mathcal{D}) \cap L^p(\mathcal{D})$ 在 $L^p(\mathcal{D})$ 中的稠密性，给出了关于行范数与列范数最大值的唯一延拓。 □

AI 声明。作者使用 ChatGPT 进行语言润色、LaTeX 编辑以及探索性的数学讨论。GPT-6-Astra 提供了一些新方法和证明，并改进了我们的原始结果。作者核查了所建议的思路，并对本文的结论承担全部责任。

References

[1] Lawrence G. Brown 和 Hideki Kosaki. 半有限冯诺依曼代数中的詹森不等式. *J. Operator Theory*, 23 1 3 19, 1990 10 ( ): – . Anthony Carbery. 极大 Bochner–Riesz 算子在 $L^4(\mathbb{R}^2)$ 上的有界性. [2] *Duke Math. J.* 50 409 416, 1983 , : – . 7, 93

[3] Zeqian Chen、Quanhua Xu 和 Zhi Yin. 量子环面上的调和分析. *Comm. Math. Phys.*, 322 755 805, 2013 5, 59 : – . [4] Thierry Fack 和 Hideki Kosaki. -可测算子的广义 s τ *Pacific J.* -数. , : – . *Math.* 123 269 300, 1986 9, 107, 110

[5] Charles Fefferman. 球的乘子问题. *Ann. of Math. (2)*, 94 330 336, 1971 89 : – . Shengwen Gan、[6] Changkeun Oh 和 Shukun Wu. 高维中 Stein 平方函数的新上界. *Adv. Math.*, 475 110342, 2025 7, 93 : . David Gilbarg 和 Neil S. Trudinger. [7] *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 施普林格，柏林，2001 1998 32 . 该版本的重印本。Larry Guth、Hong Wang 和 Ruixiang Zhang. $\mathbb{R}^3$ [8] 中圆锥的尖锐平方函数估计. *Ann. of Math. (2)*, 192 551 581, 2020 3, 83 : – . Guixiang Hong、[9] Xudong Lai 和 Liang Wang. 量子欧几里得空间上的傅里叶限制估计. *Adv. Math.*, 430 109232, 2023 5, 59 : . Guixiang Hong、Xudong Lai 和 Liang Wang. 广义莫亚尔平面上的非交换布 [10] 尔甘圆形极大定理与局部平滑估计，2025. arXiv:2501.08832v2, 2025年3月。Xudong Lai. 二维量子环面上非交换 Bochner–Riesz 均值的尖锐估计. *Comm. Math. Phys.*, 390 193 230, 2022 5 : – . Xudong Lai 和 SIYU [12] LIU. 子流形与可变超曲面上的非交换极大平均，2026年。arXiv:2609.34906v2. 76, 80[13] Christian Le Merdy、 ´Eric Ricard 和 Jean Roydor. Schatten 空间的完全 1- 补子空间 . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361 2 849 887, 2009 9 ( ): – . Naijia Liu、Minxing Shen、Liang Song 和 [14] Lixin Yan. 斯坦球面极大算子的上界. *Math. Ann.*, 390 5235 5255, 2024 L^p 2024 5257 5258 6, 74 : – . 更正， *ibid.* **390** ( ), – . [15] Gerd Mockenhaupt、Andreas Seeger 和 Christopher D. Sogge. 波前集、局部平滑与布尔甘圆形极大定理. *Ann. of Math. (2)*, 136 207 218, 1992 6 : – . 美国国家标准与技术研究院。NIST [16] 数学函数数字图书馆。第 10 17, 57, 70, 89 节。大自变量下的渐近展开。[17] Adam Nowak、Luz Roncal 和 Tomasz Z. Szarek. 广义球面极大算子作用于径向函数时的端点估计与最优性. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 22:2233– 2277, 2023 74, 76 . OpenAI. 欧几里得波动方程的局部平滑，2026年。预印本，2026 [18] 年10月25日，OpenAI 数学发布。[19] 4, 5, 8, 17, 18, 29, 56, 57, 93 Javier Parcet. 奇异积分的伪局部化与非交换 Calder´on–Zygmund 理论. *J. Funct. Anal.*, 256 509 593, 2009 9, 55 : – . Gilles Pisier 和 [20] Quanhua Xu. 非交换 L^p-空间。载于 William B. Johnson 和 Joram Lindenstrauss（编），*Handbook of the Geometry of Banach Spaces*，第2卷，第1459–1517页。North-Holland，阿姆斯特丹，2003 9, 51, 55 。Andreas Seeger、Christopher D. Sogge 和 Elias M. Stein. 傅里叶积分算子的 [21] 正则性. *Ann. of Math. (2)*, 134 231 251, 1991 3 : – . Christopher D. Sogge. 平面上的奇性传播与极大函数. [22] *Invent. Math.* 104 349 376, 1991 3 , : – .

Xudong Lai: Institute for Advanced Study in Mathematics, Harbin Institute of Tech-nology, Harbin 150001, China; Zhengzhou Advanced Research Institute, Harbin Instituteof Technology, Zhengzhou 450000, China
Email address: xudonglai@hit.edu.cn xudonglai@mail.bnu.edu.cn

Siyu Liu: Institute for Advanced Study in Mathematics, Harbin Institute of Technol-ogy, Harbin 150001, China*Email address*: syliu@stu.hit.edu.cn siyulliu@icloud.com