arXiv:2611.30529v1 [math-ph] 23 Nov 2026

随机薛定谔算子的态密度与线性相关重尾无序

Margherita Disertori[1],Luca Fresta[2],和 Liza Schonlau[1]

[1]豪斯多夫数学中心，波恩大学，Endenicher Allee 60，53115 Bonn，德国，电子邮件：mdiserto@uni-bonn.de， aschonla@uni-bonn.de[2]罗马第三大学数学系，Largo San Leonardo Murialdo 1，00146 罗马，意大利，电子邮件： luca.fresta@uniroma3.it

2026年11月24日

摘要

我们研究具有线性相关重尾无序的随机 Schr¨odinger 算子的态密度。利用分部积分的超对称表示，我们证明了强无序 regime 下态密度的光滑性和韦格纳估计。我们尤其关注混合符号相关核，因为它们可作为分析格林函数平方的平均时所出现的双曲结构的玩具模型。我们的方法适用于广泛的关联核和无序分布类别，包括 α-稳定律。

目录

1 引言 1 1.1 主要结果 .3

2 态密度的正则性 7 2.1 超对称形式主义的推论 .7 2.2 线性相关无序的可积性界 .9 **3 重尾无序的 SUSY方法** 12 3.1 SUSY 表示与簇展开 .12 3.2 活度估计：命题 2.4 的证明 .15

A 超对称形式主义 17
A.1 格拉斯曼演算 .18 A.2 超对称技巧.19

1 引言

随机薛定谔¨算子由安德森提出 [4] 用于描述晶体结构中的金属—绝缘体转变，其中随机势用于模拟杂质在晶体中的作用。系统的导电性质由

相关哈密顿量的谱性质决定。定义在 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$上的安德森哈密顿量形式为

$$H = -\Delta + \lambda V \,, \tag{1.1}$$

其中， $-\Delta$ 是格点拉普拉斯算子 $(-\Delta u)(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d:\ |y-x|=1} (u(x) - u(y))$， $\lambda \in \mathbb{R}$ 是无序强度， V是随机乘法势 $(Vu)(x) = V_x u(x)$，其中 $(V_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$为独立同分布的中心化随机变量。在绝缘相中，谱为纯点谱，特征函数在空间上局域化。这一机制的严格理解始于基于多尺度分析 [29, 28] 和分数矩方法 [2]的开创性工作。这些技术在后续研究中得到了广泛发展，参见例如[13, 8, 24, 19]。基于超对称性的其他方法也得到了探索，参见 [32, 39, 26]。

相比之下，金属相的理解要少得多。人们预期，在三维或更高维数中，当无序足够弱时，随机薛定谔算子具有与延展态和非平凡输运 [1]相关的绝对连续谱分量。然而，这一方向上的严格结果仅限于有效模型[31, 27]。关于导论，参见 [30] ；关于详细综述，参见 [3]。

除金属-绝缘体转变外，一个核心问题涉及态密度测度（DOS），它描述了无限体积极限下能级的分布。态密度不仅出现在许多平衡量中，而且在输运性质 [28, 33]和谱统计中也发挥着重要作用；在后者中，它决定了热力学极限下特征值的自然局部尺度。全面理解随机 Schr¨odinger 算子的态密度仍然是一个具有挑战性的问题。大多数严格结果都集中于局域化区间，在该区间中，态密度的正则性已得到广泛研究。相比之下，在离域化区间中，目前仅通过对层级模型 [9, 5], 的多尺度分析，或在随机带状矩阵 [42, 25] 和超对称非线性σ模型 [22]等有效模型中建立了部分结果。对于独立同分布的强无序情形，一个基本的正则性结果表明，态密度是绝对连续的 [18], ；一般而言，积分态密度通常仅具有对数-H¨older 连续性 [17], ，因此相应的密度可能无界。经典的韦格纳估计 [41] 表明，在单点密度有界这一附加假设下，密度具有一致界。更高阶的正则性需要对单点分布作出更强的假设。如果单点分布在某个复条带内是解析的，那么在足够大的无序或能量下，态密度是解析的 [16]。这一解析性假设可以放宽为特征函数的指数衰减 [14]。在另一方向上，Bovier–Campanino–Klein–Perez [10] 将超对称表述与簇展开相结合，证明了强无序区间内态密度的光滑性。

尽管大多数研究结果针对独立同分布随机势，但具有物理意义的模型往往表现出空间相关性。然而，对于相关无序，人们所知甚少：相关性可能带来严峻的技术困难，即使在一般情形下，基本的遍历性质也可能变得不平凡 [15]。本文研究一类作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$上的随机薛定谔算子，其线性相关势具有如下形式

$$V_x := \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} T_{xy}\, W_y \,, \tag{1.2}$$

其中，$(W_y)_{y\in\mathbb{Z}^d}$ 是中心化独立同分布随机变量，而 $T = (T_{xy})_{x,\ y\in\mathbb{Z}^d}$ 是编码关联性的对称核。线性关联在独立无序与完全相关无序之间提供了一个自然的中间类别，同时保留了足够的代数结构，使其仍具有解析可处理性。

我们尤其关注混合符号核 T，即其元素具有不定符号的核。我们的动机来自对关联函数的超对称分析，其中，在研究平均平方格林函数时，内部双曲对称性会自然出现，并导致类似于混合符号核的行为。对于超出一维系统、具有双曲结构的关联函数，其控制仍是一个未解决的问题，目前仅有针对有效模型的结果，参见 [32, 22, 21, 6, 37]。尽管本文尚未达到这些问题所预期的不定性程度，但我们认为，研究此类扩展本身已具有独立的技术意义。本文的第二项贡献，是通过在超对称形式主义的早期阶段进行分部积分，得到一种分部积分超对称表示。这避免了对无序分布矩有界性的假设，并给出一种适用于广泛重尾分布的表示，包括 α-稳定分布。尽管相关的分部积分论证已在 [10] 中分析的后期阶段隐含出现，但我们直接在超对称表示层面阐述这一方法，并在全文中始终采用这一一般框架。

1.1 主要结果

令 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ 为一个有限立方体，并令 H_Λ 表示 H 在（1.1）中定义的 V 的限制。取随机势 V，如（1.2）所示，其中 $(W_y)_{y\in\mathbb{Z}^d}$ 为独立同分布，且其特征函数为

$$\nu_0(t) := \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tW_y}\big] , \qquad \forall y \in \mathbb{Z}^d . \tag{1.3}$$

由于关联核 T 不假设具有有限范围，随机变量 $(V_x)_{x\in\Lambda}$ 通常依赖于整个变量族 $(W_y)_{y\in\mathbb{Z}^d}$。因此，在（ V_x（1.2）中定义的级数并非先验地良定义；确保其存在的精确假设将在定理1.1中陈述。

H 的有限体积态密度是与 H_Λ相关联的经验测度

$$\mu_\Lambda := \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{e\in\mathrm{spec}(H_\Lambda)} \delta_e , \tag{1.4}$$

其中 δ_e 表示在 $e \in \mathbb{R}$处的狄拉克点质量，求和遍及 H_Λ的所有特征值，并按重数计数。由遍历性可知， μ_Λ 当$\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ 时弱收敛（依概率）到一个确定性测度 μ，它就是 H [34]的态密度。在我们的设定中，只要 T 是周期性的，即 $Q\mathbb{Z}^d$-平移不变，对某个 $Q \in \mathbb{N}$而言，遍历性便得到保证，这意味着

$$T_{x(y+Qz)} = T_{(x-Qz)y} , \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{Z}^d .$$

我们采用记号 $a \vee b := \max(a,\ b)$ 和 $a \wedge b := \min(a,\ b)$。将 T 分解如下会很方便

$$T = T^+ - T^-, \qquad T^\pm_{xy} := (\pm T_{xy}) \vee 0 , \tag{1.5}$$

并考虑 T 和 $T^\pm$ 在任意子集 $Y \subset \mathbb{Z}^d$ 上的限制。对于 $\alpha > 0$，我们在行向量 $(T_{x\cdot})_{x\in Y}$ 上赋予拟范数 [1]

$$\|T_{x\cdot}\|_{Y,\alpha} := \Big(\sum_{y\in Y} |T_{xy}|^\alpha\Big)^{1/\alpha} , \tag{1.6}$$

对于 $(T^\pm_{x\cdot})_{x\in Y}$，同样如此。我们的主要结果证明了一大类线性相关随机势的态密度具有绝对连续性和光滑性。

[1]当 $\alpha \geq 1$ 时，这是一个范数。

定理 1.1。 设 $T=(T_{xy})_{x,\ y\in\mathbb{Z}^d}$ 为对称周期核。设 $(W_y)_{y\in\mathbb{Z}^d}$ 为具有特征函数 ν_0 的中心化独立同分布随机变量。固定 $\alpha\in(0,2]$ 并假设

$$|1-\nu_0(t)|\lesssim|t|^\alpha\,,\qquad\qquad \sup_{x\in\mathbb{Z}^d}\|T_{x\cdot}\|_{\mathbb{Z}^d,\alpha}<\infty\,. \tag{1.7}$$

那么，随机场

$$V_x:=\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}T_{xy}\,W_y \tag{1.8}$$

是良定义的。此外，假设

$$|\nu_0(t)|\le \mathrm{e}^{-|t|^\alpha}\,, \tag{1.9}$$

并且满足以下条件之一

$$\begin{aligned}&\inf_{Y\subset\mathbb{Z}^d}\Big(\kappa_\alpha\inf_{x\in Y}\|T^+_{x\cdot}\|_{Y,1\vee\alpha}-\sup_{x\in Y}\|T^-_{x\cdot}\|_{Y,1\wedge\alpha}\Big)>0\,,\\ \text{or}\qquad&\inf_{Y\subset\mathbb{Z}^d}\Big(\kappa_\alpha\inf_{x\in Y}\|T^-_{x\cdot}\|_{Y,1\vee\alpha}-\sup_{x\in Y}\|T^+_{x\cdot}\|_{Y,1\wedge\alpha}\Big)>0\,,\end{aligned} \tag{1.10}$$

其中 $\kappa_\alpha:=\mathbf{1}_{0\le\alpha\le1}+\mathbf{1}_{\alpha\ge1}2^{\frac{1}{\alpha}-1}$。那么，存在 $\lambda_0=\lambda_0(T,\alpha)<\infty$，使得对每个$\lambda\ge\lambda_0$，$H=-\Delta+\lambda V$ 的态密度测度都是勒贝格绝对连续的，其 $C^\infty(\mathbb{R})$ 密度 ρ 满足

$$\sup_{E\in\mathbb{R}}\left|\partial_E^k\rho(E)\right|\le\frac{c_k}{\lambda^{k+1}},\qquad\forall k\in\mathbb{N}_0,$$

其中常数 c_k 取适当值。

注 1.2。 我们简要讨论一下这些假设。

i) 条件（1.7）确保 V的有限维截断收敛。根据 L V évy 连续性定理，随机场 ′的存在性随即得到，见引理 2.6。

ii) 我们所考虑的分布的特征在于，其特征函数至少具有亚指数衰减。这些分布包括 α-稳定分布$\nu_0(t)=\mathrm{e}^{-|t|^\alpha}$。注意，如果我们改为要求 $|\nu_0(t)|=\mathrm{e}^{-c|t|^\alpha}$，对于某个 $c>0$，则通过简单的重标度，后一个常数可以吸收到无序强度 λ中。同样，我们考虑了 $\lambda>0$，因为符号可以吸收到核 T 中。

iii) 证明依赖于 V的有限体积特征函数的矩估计。对 T 的结构条件（1.10）保证了强制性估计

$$|\nu_\Lambda(r)|\le\exp\Big(-C\sum_{x\in\Lambda}r_x^\alpha\Big),\qquad r=(r_x)_{x\in\Lambda}\in\mathbb{R}_+^\Lambda\,,$$

对所有 $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$均成立，其中 ν_Λ 是 V的有限体积特征函数，定义见（1.16）。这对于控制超对称积分至关重要；见定理1.4 和第2.2节。

iv) 可以很容易地举出满足结构条件（ T 1.10）的例子。例如， $T=\mathbb{1}-\delta P$，其中 P 是 $\mathbb{Z}^d$的邻接矩阵。然后可以验证

$$\inf_{x\in Y}\|T^+_{x\cdot}\|_{Y,1\vee\alpha}=1\,,\qquad\sup_{x\in Y}\|T^-_{x\cdot}\|_{Y,1\vee\alpha}\le(2d)^{1/(1\vee\alpha)}\delta\,. \tag{1.11}$$

因此，（1.10）中的第一个条件在 δ 足够小时得到满足。请注意，该例将 [20] 中研究的情形推广到了所有最近邻位点之间均存在负相关的情形。

注记 1.3。 定理1.1 连接并拓展了关于态密度正则性的两条相互独立的研究成果。

i）在独立同分布情形下，Bovier–Campanino–Klein–Perez [10, 定理 1。1] 证明了 C^n在强无序且满足可积性条件时，态密度具有 - 正则性

$$t \mapsto (1+|t|^{d+n})\,\nu_0(t) \in L^1(\mathbb{R}).$$

我们的方法将这一结果推广到了块对角关联核这一特殊情形 T （见注记2.8）。然而，考虑具有无限范围的关联核时，需要对特征函数施加更强的衰减条件，如（1.9）所述。

Disertori–Lager [20] 为线性相关的柯西无序推导出了态密度的精确超对称表示（$\alpha = 1$），其成立依赖于对 T 的结构性限制，该限制只允许存在一对负相关。我们将这一框架推广到更广泛的核类 T，并适用于具有次指数衰减特征函数的一般无序分布。

我们通过有限体积博雷尔–斯蒂尔切斯变换研究态密度，它可以用格林函数表示如下

$$m_\Lambda(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_\Lambda(\mathrm{d}E')}{z-E'} = -\frac{1}{|\Lambda|}\,\mathrm{Tr}\; G_\Lambda(z)\,, \qquad G_\Lambda(z) := (H_\Lambda - z)^{-1}\,, \qquad \mathrm{Im}\, z > 0\,, \tag{1.12}$$

其中 μ_Λ 是式（1.4）中引入的有限体积态密度。测度弱收敛到，意味着其博雷尔–斯蒂尔杰斯变换 () () (d$_{E')\ z-E'}$ 在上半平面内逐点收敛。由遍历性可知， μ 是确定的，因此我们可以写成

$$m(z) = -\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|}\,\mathrm{Tr}\;\mathbb{E}\big[G_\Lambda(z)\big] = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \overline{m}_\Lambda(z)\,, \qquad \mathrm{Im}\, z > 0\,, \tag{1.13}$$

其中，$\overline{m}$ 是平均有限体积测度 $\mathbb{E}\,[\mu_\Lambda]$的博雷尔–斯蒂尔杰斯变换。赫尔格洛茨理论中的标准结果表明， m通过边界值公式确定了μ的绝对连续部分

$$\frac{\mathrm{d}\mu^{\mathrm{ac}}}{\mathrm{d}E}(E) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\, m(E+\mathrm{i}0^+)\,, \tag{1.14}$$

而 μ 的奇异部分支撑在极限为无穷大的集合上。因此，对平均有限体积格林函数的一致估计可推出对态密度的估计。同样的策略也适用于 E中的导数，并可通过对格林函数导数进行相应的一致估计来处理。

为了研究平均格林函数，我们采用 Efetov 等人在 [23]，中提出的超对称（SUSY）方法，该方法建立在 Wegner [41] 的早期工作之上。此方法将格林函数的平均值 $G_\Lambda(z)$、$z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 表示为涉及复变量和 Grassmann 变量的振荡积分。令 $(\xi_x, \xi_x)_{x\in\Lambda}$ 为相互独立的 Grassmann 变量，并令 $(\Phi_x^*, \Phi_x)_{x\in\Lambda}$ 为具有如下形式的超向量: $_\Phi_x^- = (\varphi_x, \xi_x)^t$, $\Phi^* = (\varphi_x,$ $\xi_x)$，其中 φ_x 和 φ_x 为复变量。若 $M \in \mathbb{C}^{\Lambda\times\Lambda}$，我们使用简写

$$\Phi^* M \Phi := \sum_{x,y} M_{xy}\Phi_x^*\Phi_y = \sum_{x,y} M_{xy}\big(\overline{\varphi}_x\varphi_y + \overline{\xi}_x\xi_y\big)\,,$$

详见附录 A 。超对称方法源于以下恒等式

$$\big(G_\Lambda(E+\mathrm{i}\varepsilon)\big)_{xy} = \mathrm{i}\int \mathrm{d}\Phi_\Lambda\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi^*(E+i\varepsilon+\Delta-\lambda V)\Phi}\,\xi_x\overline{\xi}_y\,, \tag{1.15}$$

其中，$\mathrm{d}\Phi_\Lambda$ 表示平坦 Berezin 超积分形式

$$\mathrm{d}\Phi_\Lambda = \prod_{x\in\Lambda} \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}\,\varphi_x \mathrm{d}\,\mathrm{Im}\,\varphi_x}{\pi} \partial_{\bar{\xi}_x}\partial_{\xi_x} \ .$$

(1.15) 中唯一的随机项是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\Phi^* V\Phi}$，因此，假设我们可以将无序平均与超积分交换，便可得到一个带有相互作用 $\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\Phi^* V\Phi}\big]$的有效振荡超对称积分的二点函数。然而，

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\Phi^* V\Phi} = \prod_{x\in\Lambda} \Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda V_x|\varphi_x|^2}(1-\mathrm{i}\lambda V_x\bar{\xi}_x\xi_x)\Big] \ ,$$

因此，要使 $\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\Phi^* V\Phi}\big]$ 有意义，至少需要 $\mathbb{E}[|V_x|]$ 是有限的[2]。为规避这一问题，在 [20] 中，他们引入了到超对称极坐标 $\Phi^* \mapsto \Phi^*_{\mathcal{S}}$和 $\Phi \mapsto \Phi_{\mathcal{S}}$的变量变换，使得 $\Phi^*_{\mathcal{S}}\Phi_{\mathcal{S}} = r^2$，$r\in\mathbb{R}$。因此，

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda V_x\Phi^*_x\Phi_x} \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda V_x r^2},$$

并且，对于任意势，右侧的期望都存在。
另一方面，我们可以通过分部积分消去额外的因子 V_x，因为有

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda V_x|\varphi_x|^2}(1-\mathrm{i}\lambda V_x\bar{\xi}_x\xi_x) = \Big(1+\bar{\xi}_x\xi_x\frac{\partial_{\varphi_x}}{\overline{\varphi}_x}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda V_x|\varphi_x|^2}.$$

经过谨慎的分部积分（这是处理来自 $1/\varphi$ 的表面发散贡献所必需的），可得适用于一般随机薛定谔算子的另一种超对称表示。

定理 1.4（分部积分超对称表示）。设 $V=(V_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ 是一个随机势，其有限体积特征函数为

$$\nu_\Lambda(r) := \mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{x\in\Lambda}V_x r_x}\Big] \ , \qquad r=(r_x)_{x\in\Lambda}\in\mathbb{R}^\Lambda \ , \tag{1.16}$$

并设 H_0 是作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上的实有界自伴算子。那么，对于每个有限的 $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ 和 $\hat{}x, \hat{}y\in\Lambda$ 的平均格林函数 $\mathbb{E}\big[G_\Lambda\big]$ 具有如下表示：对于 $z\in\mathbb{C}$，$\mathrm{Im}\,z>0$

$$\mathbb{E}[(G_\Lambda(z))_{\hat{x}\hat{y}}] = \frac{\mathrm{i}}{\lambda}\int \mathrm{d}\Phi_\Lambda\,\nu_\Lambda(|\varphi|^2)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\varphi^*(z-\mathrm{diag}\,H_0)\varphi}\mathcal{D}_\Lambda\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Phi^*(\mathrm{diag}\,H_0-H_0)\Phi}\right)\xi_{\hat{x}}\bar{\xi}_{\hat{y}},$$

其中 $|\varphi|^2\equiv(|\varphi_x|^2)_{x\in\Lambda}$，并且

$$\mathcal{D}_\Lambda = \prod_{x\in\Lambda}\Big(1-\bar{\xi}_x\xi_x\frac{\partial_{\varphi_x}}{\overline{\varphi}_x}\Big) \ .$$

注 1.5。

i) 定理 1.4 的一个关键特征是，微分算子 $\mathcal{D}_\Lambda$ 不作用于对角贡献

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\varphi^*(z-\mathrm{diag}\,H_0)\varphi} \ .$$

因此，该表示不仅不依赖于对无序分布的矩条件，而且也非常适合推导关于$E=\mathrm{Re}\,z$一致的估计。

ii) 类似地，也可以得到格林函数模平方的平均值，或任意格林函数乘积的平均值的超对称表示。该表示还可推广到具有内部自由度的模型，其中 $\mathcal{D}_\Lambda$ 由相应的高阶导数展开取代。

[2]对于相关势，实际上需要高阶矩有界。

论文结构 在第2节中，我们给出随机算子的态密度的一般性结果，即定理 2.3；该结果基于随机势特征函数满足适当的可积性条件。我们还证明，在定理 1.1的设定下，这些可积性条件均成立。定理 2.3 的证明基于第 3节中证明的格林函数估计。在该节中，我们证明定理 1.4 中的超对称公式，并利用它构造簇展开，从而对格林函数进行估计。在附录 A 中，我们简要介绍格拉斯曼代数和超对称形式主义。

2 态密度的正则性

2.1 SUSY形式主义的推论

在本节中，我们基于定理 1.4 中的超对称表示，提出一个关于态密度正则性的判据。该假设直接以随机势的有限维特征函数的形式给出，并且适用于重尾分布。在第 2.2 节中，我们将验证定理 1.1 所考察的线性相关模型满足这些假设，从而得到我们的主要结果。该判据以下述概念为基础。

定义 2.1 （可积性界）。 设 $V=(V_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ 为随机变量，并记 ν_Λ 为 V的有限体积特征函数，见（1.16）。我们称 V 满足截至 $n\in\mathbb{N}$ 阶的可积性界，如果存在常数 K_n ，使得对所有有限的$\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ 以及所有多重指标 $p=(p_x)_{x\in\Lambda}\in\{0,\dots,n\}^\Lambda$，下列界成立

$$\int_{\mathbb{R}_+^\Lambda} \mathrm{d}r\left|\nu_\Lambda(r^2)\right|\prod_{x\in\Lambda} r_x^{p_x}\le K_n^{|\Lambda|}\,, \tag{2.1}$$

其中我们使用了简写记号 $r^2\equiv(r_x^2)_{x\in\Lambda}\in\mathbb{R}_+^\Lambda$。如果 V 满足任意阶的可积性界，即满足截至 n 阶的可积性界，我们就称其满足任意阶的可积性界。

注记 2.2。 注意，在 ν_Λ 的（2.1）中，参数具有确定的符号。如果允许该参数属于 $\mathbb{R}^\Lambda$，则会干扰核 T的混合符号结构。

我们的抽象正则性判据如下。

定理 2.3。 设 $H=H_0+\lambda V$ 是作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上的遍历随机 *Schr¨odinger* 算子。假设 H_0 是一个有限程平移不变实自伴算子，并且特别地，

$$\sup_{x\in\mathbb{Z}^d}\left|\left\{y\in\mathbb{Z}^d\setminus\{x\}:(H_0)_{xy}\neq 0\right\}\right|\le A\,. \tag{2.2}$$

此外，假设 V 满足截至 $2(n+A)+1$ 阶的可积性界，其中某个 $n\in\mathbb{N}$。那么，存在 $\lambda_0>1$ ，使得对于每个 $\lambda\ge\lambda_0$ ， H 的态密度测度都绝对连续，其密度为 $\rho\in C^{n-1}(\mathbb{R})$ 。此外，韦格纳型界成立

$$\sup_{E\in\mathbb{R}}\left|\partial_E^k\rho(E)\right|\le\frac{c_k}{\lambda^{k+1}}\,,\qquad \forall 0\le k\le n-1\,,$$

对于适当的常数 $c_k>1$。

证明遵循标准策略：先对有限体积格林函数推导一致估计，然后取无限体积极限。关键的技术要点是以下命题。

命题 2.4。 在定理2.3的假设下，存在 $\lambda_0 > 1$以及一些常数 $c_k = c_k > 1$ 使得对于每个 $\lambda \geq \lambda_0$ 都有

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \left|\partial_E^k \mathbb{E}\big[(G_\Lambda(E+\mathrm{i}\varepsilon))_{\hat{x}\hat{x}}\big]\right| \leq \frac{c_k}{\lambda^{k+1}}$$

对所有 $E \in \mathbb{R}$、 $0 \leq k \leq n$ 以及 $\hat{} x \in \Lambda$，关于 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ 一致成立。

注记 2.5。

为简便起见，对 H_0 施加有限程假设。我们预计，该结果可推广到具有指数衰减核的短程算子。不过，这一推广需要对第 3.2节中的簇展开进行额外估计，而这超出了本文的范围。

利用第 3.1节的 SUSY 表示，实际上可以通过控制收敛以及定义 2.1中的可积性界，证明极限 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \partial_E^k \mathbb{E}\big[(G_\Lambda(E+\mathrm{i}\varepsilon))_{\hat{x}\hat{x}}\big]$ 存在。对第 3.1节中的簇展开作进一步的非平凡处理，还可以证明上述量的无限体积极限也存在，另见 [38]。

按照标准论证（例如参见 [12, 3], ），我们首先说明命题 2.4 如何推出定理 2.3。命题 2.4 的证明高度依赖 SUSY 表示和 SUSY 簇展开，因此推迟到第 3节。

定理 *2.3* 的证明。首先，我们有

$$\frac{1}{|\Lambda|} \operatorname{Tr} \mathbb{E}\big[G_\Lambda(E+\mathrm{i}\varepsilon)\big] = -\overline{m}_\Lambda(E+\mathrm{i}\varepsilon)\,, \tag{2.3}$$

其中 $\overline{m_\Lambda}(z)$ 是与平均经验测度相关联的博雷尔–斯蒂尔杰斯变换μ_Λ ： $= \mathbb{E}\left[\mu_\Lambda\right]$，参见（ 1.13）。由遍历性（$\mu_\Lambda$）$_\Lambda$ 弱收敛到 μ，因此 $m_\Lambda(\overline{z})$ 对 $z \in \mathbb{C}^+$ 逐点收敛于 $m(z)$，后者尤其是 Herglotz 函数。由于根据命题2.4 以及（2.3），函数m_Λ 在上半平面上一致有界，因此极限也具有一致有界性

$$|m(E+\mathrm{i}0^+)| \lesssim \lambda^{-1}\,, \qquad \text{for a.e. } E \in \mathbb{R}\,.$$

因此，根据斯蒂尔切斯反演定理（见 ρ 附录 B [3, ），密度的绝对连续性和有界性]得以成立。

关于导数，命题 2.4中的一致界蕴含了$\partial_z^k m(z)$ 的相同界，且对 $z \in \mathbb{C}^+$一致成立。由法图定理[3]，我们因此得到（$\partial_E^k m$）$(E+\mathrm{i}\varepsilon)$ 当 $\varepsilon \to 0^+$时收敛，对几乎处处的 $E \in \mathbb{R}$成立，并且具有如下界

$$\left|(\partial_E^k m)(E+\mathrm{i}0^+)\right| \leq c_k \lambda^{-k-1}\,, \qquad \forall k \leq n\,.$$

另一方面，对于任意实值测试函数 φ

$$\int \mathrm{d}E\,(\partial_E^k m)(E+\mathrm{i}\varepsilon)\varphi(E) = (-1)^k \int \mathrm{d}E\, m(E+\mathrm{i}\varepsilon)(\partial_E^k \varphi)(E)\,.$$

取虚部，如 $\varepsilon \to 0$ 所示，我们得到等式两边均收敛，并将右端识别为对 ρ 的积分，将左端识别为对 ρ的弱 k 阶导数的积分。特别地，我们有 $\rho \in W^{k,\infty}(\mathbb{R})$，因此 $\rho \in C^{k-1}(\mathbb{R})$。

□

[3]例如参见 [35, 定理 11。32] 关于单位圆盘上解析函数的边界值，该函数可全纯延拓至上半平面。

为证明主定理定理 1.1，我们还需验证式（1.8）中相关随机势的可积性界。这正是下一节的目的。

2.2 线性相关无序的可积性界

现在我们证明 V 的有限体积特征函数所需的可积性界。首先验证 V 是一个定义良好的随机场；由于不假设 T 具有有限范围，这并非显然。

引理 2.6。 设 $T = (T_{xy})_{x,\ y\in\mathbb{Z}^d}$ 为一个对称周期核。设 $(W_y)^{y\in\mathbb{Z}^d}$ 为具有特征函数 ν_0 的中心化独立同分布随机变量，参见 (1.3)。固定 $\alpha \in (0,2]$ 并假设

$$|1-\nu_0(t)| \lesssim |t|^{\alpha}\,, \qquad \sup_{x\in\mathbb{Z}^d} \|T_{x\cdot}\|_{\mathbb{Z}^d,\alpha} < \infty\,. \tag{2.4}$$

那么，对于任意 $x \in \Lambda$，随机变量 $V_x := \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} T_{xy}\ W_y$ 都是定义良好的，其特征函数为

$$\nu_\Lambda(r) = \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_{x\in\Lambda} r_x V_x}\big] = \prod_{y\in\mathbb{Z}^d} \nu_0\Big(\sum_{x\in\Lambda} r_x T_{xy}\Big), \qquad \forall r\in\mathbb{R}^\Lambda\,,$$

其中，无穷乘积理解为有限乘积的极限。

证明。 我们通过对序列 $(V^{(\Lambda')}{}_x)_{\Lambda'}$ 应用 L´evy 连续性定理，证明对每个 $x \in \Lambda$ 都存在 V_x；其中 $V_{(\Lambda')x} := \sum_{y\in\Lambda'} T_{xy}W_y$，且 $\Lambda' \nearrow \mathbb{Z}^d$。因此，我们关注于证明截断有限体积特征函数

$$\nu_{\Lambda,\Lambda'}(r) := \prod_{y\in\Lambda'} \nu_0\Big(\sum_{x\in\Lambda} r_x T_{xy}\Big)$$

当 $\Lambda' \nearrow \mathbb{Z}^d$ 时对所有 $r \in \mathbb{R}^\Lambda$ 均收敛，且该极限在 $r = 0$的某个邻域内是连续函数。首先，固定 $r \in \mathbb{R}^\Lambda$，我们考虑 $\Lambda' \supset \Lambda_r$，其中 Λ_r 可能依赖于 r，并注意到对于某个常数 $C_{\Lambda,\ \alpha} \geq 1$

$$\sum_{y\in\Lambda'\setminus\Lambda_r} \Big|\sum_{x\in\Lambda} r_x T_{xy}\Big|^{\alpha} \leq C_{\Lambda,\alpha}\Big(\sup_{x\in\Lambda}\sum_{y\in\Lambda'\setminus\Lambda_r} |T_{xy}|^{\alpha}\Big)\sum_{x\in\Lambda}|r_x|^{\alpha}\,. \tag{2.5}$$

于是，对所有 $r \in \mathbb{R}^\Lambda$ 的收敛性可由（2.5）得到：取 $\Lambda_r \supset \Lambda$ 足够大（取决于 r），使得 $\sup_{y\in\Lambda'\setminus\Lambda_r}\sum_{x\in\Lambda}\big|r_x T_{xy}\big| \lesssim 1$，再结合以下界即可得到（2.4）

$$\begin{aligned}\big|\ln\nu_{\Lambda,\Lambda'}(r) - \ln\nu_{\Lambda,\Lambda_r}(r)\big| &\leq \sum_{y\in\Lambda'\setminus\Lambda_r}\Big|1-\nu_0\Big(\sum_{x\in\Lambda} r_x T_{xy}\Big)\Big| \\ &\lesssim \sum_{y\in\Lambda'\setminus\Lambda_r}\Big|\sum_{x\in\Lambda} r_x T_{xy}\Big|^{\alpha} \leq C_{\Lambda,\alpha}\Big(\sup_{x\in\Lambda}\sum_{y\in\Lambda'\setminus\Lambda_r}|T_{xy}|^{\alpha}\Big)\sum_{x\in\Lambda}|r_x|^{\alpha}\end{aligned}$$

其中，右端项在 Λ_r 足够大且取决于 r时可以任意小。
为证明原点处的连续性，我们证明收敛在 0 的某个邻域内是一致的。由（2.4），当 r 充分小时，有

$$\sum_{y\in\Lambda'}\Big|\ln\nu_0\Big(\sum_{x\in\Lambda} r_x T_{xy}\Big)\Big| \lesssim \sum_{y\in\Lambda'}\Big|\sum_{x\in\Lambda} r_x T_{xy}\Big|^{\alpha} \leq C_{\Lambda,\alpha}\big(\sup_{x\in\mathbb{Z}^d}\|T_{x\cdot}\|_{\mathbb{Z}^d,\alpha}\big)^{\alpha}\sum_{x\in\Lambda}|r_x|^{\alpha}\,,$$

其中在最后一步，我们使用了界（2.5），并且 $\Lambda_r = \emptyset$。后一个界意味着无穷乘积局部一致收敛，因此，由于 ν_0 在原点连续，该极限在原点也连续。证明至此完成。

□

这也确立了定理 1.1的第一部分。定理1.1 其余结论的证明可由定理2.3以及下文证明的可积性界推出。

命题 2.7 （线性相关势的可积性界）。 在引理*2.6* 的设定下，进一步假设

$$|\nu_0(t)| \le \mathrm{e}^{-|t|^\alpha} , \tag{2.6}$$

并且以下条件之一成立，其中 $\kappa_\alpha = \mathbf{1}_{0\le\alpha\le 1} + \mathbf{1}_{\alpha\ge 1} 2^{\frac{1}{\alpha}-1}$:

$$\begin{aligned} &\inf_{Y\subset\mathbb{Z}^d} \Big(\inf_{x\in Y} \kappa_\alpha \|T^+_{x\cdot}\|_{Y,1\vee\alpha} - \sup_{x\in Y} \|T^-_{x\cdot}\|_{Y,1\wedge\alpha} \Big) > 0 , \\ \text{or} \qquad &\inf_{Y\subset\mathbb{Z}^d} \Big(\inf_{x\in Y} \kappa_\alpha \|T^-_{x\cdot}\|_{Y,1\vee\alpha} - \sup_{x\in Y} \|T^+_{x\cdot}\|_{Y,1\wedge\alpha} \Big) > 0 . \end{aligned} \tag{2.7}$$

则， V 满足所有阶数的可积性界。

证明。 对于任意子集 $Y \subset \mathbb{Z}^d$ 和任意 $r \in \mathbb{R}_+^Y$，我们将证明如下形式的界

$$\big|\nu_Y(r)\big| \le \exp\big(- c \sum_{x\in Y} r_x^\alpha \big) , \tag{2.8}$$

其中某个常数 $c = c(T,\ \alpha) > 0$ 与 Y和 r无关。这样的界蕴含所有阶数的可积性界，因为事实上

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-cx^{2\alpha}} x^n = \frac{1}{2\alpha c^{(n+1)/2\alpha}} \Gamma\Big(\frac{n+1}{2\alpha}\Big) , \qquad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

其中 Γ 是欧拉伽马函数。

为证明界（2.8），由（2.6）可得

$$\big|\nu_Y(r)\big| = \prod_{z\in\mathbb{Z}^d} \big|\nu_0(\sum_{x\in Y} r_x T_{xz})\big| \le \exp\Big(- \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \big|\sum_{x\in Y} r_x T_{xz}\big|^\alpha \Big) \le \exp\Big(- \sum_{z\in Y} \big|\sum_{x\in Y} r_x T_{xz}\big|^\alpha \Big) .$$

因此，我们的目标是证明

$$\sum_{z\in Y} \big|\sum_{x\in Y} r_x T_{xz}\big|^\alpha \ge c \sum_{x\in Y} r_x^\alpha , \tag{2.9}$$

其中 $c = c\,(T,\ \alpha)$ 与 Y以及 r无关。我们将在（2.7）中的第一个条件成立的假设下进行讨论。将 T^+ 和 T^- 互换的情形，只需在（ 2.9 ）中用 T 替换 $-T$ 即可得到。我们区分 $0 < \alpha \le 1$ 和 $1 < \alpha \le 2$两种情形。

情形 $0 < \alpha \le 1$。不等式（2.9）的证明基于映射 $t \mapsto t^\alpha$的凹性/次可加性。次可加性意味着，对任意非负的 $(b_x)_x$

$$\sum_x b_x^\alpha \ge \Big(\sum_x b_x \Big)^\alpha , \tag{2.10}$$

而凹性詹森不等式给出，对于非负的 $(\theta_x)_x$，满足 $\sum_x \theta_x = 1$

$$\Big(\sum_x \theta_x b_x \Big)^\alpha \ge \sum_x \theta_x b_x^\alpha . \tag{2.11}$$

首先，我们利用次可加性将 T^+ 和 T^- 的贡献拆分开来，

$$\Big|\sum_{x\in Y} r_x T_{xz}\Big|^\alpha \geq \Big(\sum_{x\in Y} r_x T^+_{xz}\Big)^\alpha - \Big(\sum_{x\in Y} r_x T^-_{xz}\Big)^\alpha .$$

我们通过 T^- 和（2.10）控制其贡献

$$\sum_{z\in Y}\Big(\sum_{x\in Y} r_x T^-_{xz}\Big)^\alpha \leq \sum_{z\in Y}\sum_{x\in Y} r_x^\alpha (T^-_{xz})^\alpha = \sum_{x\in Y} r_x^\alpha \|T^-_{x\cdot}\|^\alpha_{Y,1\wedge\alpha} \leq \Big(\sup_{x\in Y}\|T^-_{x\cdot}\|_{Y,1\wedge\alpha}\Big)^\alpha \sum_{x\in Y} r_x^\alpha .$$

另一方面，我们利用其逐项非负性以及（2.11）控制 T^+ 所产生的贡献

$$\Big(\sum_{x\in Y} r_x \frac{T^+_{xz}}{\sum_{x\in Y} T^+_{xz}}\Big)^\alpha \geq \sum_{x\in Y} r_x^\alpha \frac{T^+_{xz}}{\sum_{x\in Y} T^+_{xz}} ,$$

或者，等价地，进一步利用 T^+ 具有对称性

$$\Big(\sum_{x\in Y} r_x T^+_{xz}\Big)^\alpha \geq \|T^+_{z\cdot}\|^{\alpha-1}_{Y,1} \sum_{x\in Y} r_x^\alpha T^+_{xz} .$$

因此，

$$\begin{aligned}\sum_{z\in Y}\Big(\sum_{x\in Y} r_x T^+_{xz}\Big)^\alpha &\geq \Big(\inf_{z\in Y}\|T^+_{z\cdot}\|^{\alpha-1}_{Y,1}\Big)\sum_{z\in Y}\sum_{x\in Y} r_x^\alpha T^+_{xz} \\ &= \Big(\inf_{z\in Y}\|T^+_{z\cdot}\|_{Y,1\vee\alpha}\Big)^{\alpha-1}\sum_{x\in Y} r_x^\alpha \|T^+_{x\cdot}\|_{Y,1\vee\alpha} \geq \Big(\inf_{z\in Y}\|T^+_{z\cdot}\|_{Y,1\vee\alpha}\Big)^\alpha \sum_{x\in Y} r_x^\alpha .\end{aligned}$$

总之，利用的单调性，我们得到（2.9），其中

$$c = \inf_Y\left[\Big(\inf_{x\in Y}\|T^+_{x\cdot}\|_{Y,1\vee\alpha}\Big)^\alpha - \Big(\sup_{x\in Y}\|T^-_{x\cdot}\|_{Y,1\wedge\alpha}\Big)^\alpha\right] ,$$

根据对 T的假设，该量为正，见（2.7）。

情形 $1<\alpha\leq 2$。证明基于映射 $t\mapsto t^\alpha$ 的凸性/超可加性。超可加性意味着，对于任意非负的 (b_x)，有以下界x

$$\sum_x b_x^\alpha \leq \Big(\sum_x b_x\Big)^\alpha , \tag{2.12}$$

而凸性詹森不等式给出，对于满足 $\sum_x \theta_x = 1$ 的非负 $(\theta_x)_x$

$$\Big(\sum_x \theta_x b_x\Big)^\alpha \leq \sum_x \theta_x b_x^\alpha . \tag{2.13}$$

我们像之前一样，分离 T 的正贡献和负贡献

$$\Big|\sum_{x\in Y} r_x T_{xz}\Big|^\alpha \geq 2^{1-\alpha}\Big(\sum_{x\in Y} r_x T^+_{xz}\Big)^\alpha - \Big(\sum_{x\in Y} r_x T^-_{xz}\Big)^\alpha ,$$

这里我们额外乘了一个因子，因为 $\alpha\geq 1$ 不满足严格的次可加性。我们利用（ T^+ ，根据（2.12）来控制其贡献

$$\sum_{z\in Y}\Big(\sum_{x\in Y} r_x T^+_{xz}\Big)^\alpha \geq \sum_{z\in Y}\sum_{x\in Y} r_x^\alpha (T^+_{xz})^\alpha \geq \Big(\inf_{x\in Y}\|T^+_{x\cdot}\|_{Y,1\vee\alpha}\Big)^\alpha \sum_{x\in Y} r_x^\alpha ,$$

最后一步中，我们还利用了 T^{+} 是一个对称核。我们利用（ T^{-} ，根据（2.13）来控制其贡献。照前面的步骤继续推导，可得

$$\sum_{z\in Y}\Big(\sum_{x\in Y} r_x T^{-}_{xz}\Big)^{\alpha} \le \Big(\sup_{x\in Y}\|T^{-}_{x\cdot}\|_{Y,1\wedge\alpha}\Big)^{\alpha}\sum_{z\in Y} r_x^{\alpha}\,,$$

这里我们还用到了 T^{-} 是一个对称核。总之，我们有

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}\Big|\sum_{x\in Y} r_x T_{xz}\Big|^{\alpha} \ge \Big[\Big(2^{\frac{1}{\alpha}-1}\inf_{x\in Y}\|T^{+}_{x\cdot}\|_{Y,1\vee\alpha}\Big)^{\alpha} - \Big(\sup_{x\in Y}\|T^{-}_{x\cdot}\|_{Y,1\wedge\alpha}\Big)^{\alpha}\Big]\sum_{x\in Y} r_x^{\alpha}\,,$$

从而得到 (2.8)，与之前一样。证明至此完成。 □

注记 2.8。 由三角不等式可得粗略界

$$\sum_{z\in Y}\Big\|\sum_{x\in Y} r_x T_{xz}\Big\| \ge \Big\|\sum_{x\in Y} r_x \sum_{z\in Y} T_{xz}\Big\|\,, \tag{2.14}$$

这里我们使用了记号 $\|a\| := \mathrm{d}(0,\ a)$，其中 $\mathrm{d}(\cdot,\ \cdot)$ 是 $\mathbb{R}$上的某个度量。一个有趣的度量例子是 $\mathrm{d}(a,\ b) := \ell\log(1+|a-b|)$，其中 $\ell\in\mathbb{N}$。事实上，如果 $|\nu_0(t)|\le(1+|t|)^{-\ell}$且 $\sum_{z\in Y}T_{xz}=c\neq 0$，(2.14) 可用于推导出关于 $r\in\mathbb{R}_{+}^{Y}$

$$|\nu_Y(r)| \le \exp\Big(-\sum_{z\in Y}\Big\|\sum_{x\in Y} r_x T_{xz}\Big\|\Big) \le \Big(\frac{1}{1+c\sum_{x\in Y} r_x}\Big)^{\ell} \lesssim_Y \prod_{x\in Y}\frac{1}{1+c r_x^{\ell/|Y|}}\,.$$

这在一般情况下没有用，因为 Y 可以任意大。不过，如果 T 是由大小为 Q的块构成的分块对角矩阵， ν_Y 便可按块分解，因此上述不等式在 ℓ/Q足够大时可给出某个幂次范围内的可积性界。

3 重尾无序的 SUSY方法

3.1 SUSY 表示与簇展开

在本节中，我们证明定理 1.4 ，并给出一个适用于重尾无序的平均格林函数的簇展开公式。在本节余下部分中，我们采用超对称形式主义；详细内容请参阅附录 A 。

定理 *1.4* 的证明。 我们将格林函数写成

$$G_\Lambda(E+\mathrm{i}\varepsilon) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda}\left(\frac{\varepsilon+\mathrm{i}(H_0)_\Lambda-\mathrm{i}E}{\lambda}+\mathrm{i}V\right)^{-1}\,,$$

因此，根据引理 A.2 ，对于任意 $\hat{}x,\ \hat{}y\in\Lambda$，我们得到积分表示式

$$\big(G_\Lambda(E+\mathrm{i}\varepsilon)\big)_{\hat{x}\hat{y}} = \frac{\mathrm{i}}{\lambda}\int \mathrm{d}\Phi_\Lambda\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Phi^{*}(E+\mathrm{i}\varepsilon-H_0-\lambda V)\Phi}\xi_{\hat{x}}\overline{\xi}_{\hat{y}}\,. \tag{3.1}$$

接下来，我们希望对表达式（3.1）取期望。如第 1.1 节所述，只有当 V 具有足够多的矩时，才能将期望移入积分。为绕过这一问题，我们采用分部积分。首先，记

$$\zeta := E+\mathrm{i}\varepsilon-\operatorname{diag}H_0\,,\qquad P := \operatorname{diag}H_0 - H_0\,. \tag{3.2}$$

因此，展开指数函数可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Phi^*(E+\mathrm{i}\varepsilon-H_0-\lambda V)\Phi} &= \left(\prod_{x\in\Lambda}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\lambda}(\zeta_{xx}-\lambda V_x)\overline{\xi}_x\xi_x\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}(\zeta_{xx}-\lambda V_x)\overline{\varphi}_x\varphi_x}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Phi^*P\Phi} \\
&= \left(\prod_{x\in\Lambda}\left(1+\overline{\xi}_x\xi_x\frac{\partial_{\varphi_x}}{\overline{\varphi}_x}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}(\zeta_{xx}-\lambda V_x)\overline{\varphi}_x\varphi_x}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Phi^*P\Phi} \\
&= \mathcal{D}^*_\Lambda(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\varphi^*(\zeta-\lambda V)\varphi})\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Phi^*P\Phi}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

其中

$$
\mathcal{D}^*_\Lambda=\prod_{x\in\Lambda}\left(1+\overline{\xi}_x\xi_x\frac{\partial_{\varphi_x}}{\overline{\varphi}_x}\right).
$$

因此，注意到 $1/\varphi_x$ 由于对 $\mathrm{d}\varphi_x=\mathrm{dRe}\varphi_x\mathrm{dIm}_\pi$ φ_x积分而不会导致发散，并进行分部积分，我们得到

$$
\int \mathrm{d}\Phi_\Lambda\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Phi^*(E+\mathrm{i}\varepsilon-H_0-\lambda V)\Phi}\xi_{\hat{x}}\overline{\xi}_{\hat{y}}=\int \mathrm{d}\Phi_\Lambda\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\varphi^*(\zeta-\lambda V)\varphi}\mathcal{D}_\Lambda(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Phi^*P\Phi})\xi_{\hat{x}}\overline{\xi}_{\hat{y}}\,,
\tag{3.4}
$$

其中

$$
\mathcal{D}_\Lambda=\prod_{x\in\Lambda}\left(1-\overline{\xi}_x\xi_x\frac{\partial_{\varphi_x}}{\overline{\varphi}_x}\right),
$$

是 $\mathcal{D}^*_\Lambda$ 的伴随算子，并且边界项为零，因为 $(\mathrm{Re}\ \varphi,\ \mathrm{Im}\,\varphi)\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi^*\zeta\varphi}$是一个施瓦茨函数。

根据 Fubini 定理，我们将期望移入右端（r.h.s.）中，从而得到（3.4）。这是合理的，因为 $\|\mathcal{D}^*_\Lambda\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Phi^*P\Phi}\|$关于 φ 至多呈多项式增长（其阶数可能取决于Λ），范数的定义见附录 A，且 $|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\varphi^*(\zeta-\lambda V)\varphi}|\le\prod_{x\in\Lambda}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{\lambda}|\varphi_x|^2}$，因此

$$
(\mathrm{Re}\,\varphi,\mathrm{Im}\,\varphi)\mapsto\sup_V\left|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\varphi^*(\zeta-\lambda V)\varphi}\right|\left\|\mathcal{D}^*_\Lambda\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Phi^*P\Phi}\right\|\in L^1(\mathbb{R}^{2|\Lambda|})\,.
$$

□

证明命题 2.4的主要要素是将簇展开应用于定理 1.4中平均格林函数的 SUSY 表示。我们采用 Battle–Brydges–Federbush 簇展开 [11, 定理 3.1]，，为方便读者，下面简要回顾其内容。对于一个子集 $X\subset\Lambda$，设 $\mathcal{V}_X:=\frac{1}{2}\sum_{x,\ y\in X}v_{xy}$ 为二体势，其中$v_{xy}=v_{yx}$、 $v_{xx}=0$ 是格拉斯曼代数中的偶元素。可以将 $\exp(\mathcal{V}_X)$ 展开为连通分量

$$
\mathrm{e}^{\mathcal{V}_X}=\sum_{\Pi\in\mathrm{Part}(X)}\prod_{Y\in\Pi}\left(\mathrm{e}^{\mathcal{V}_Y}\right)_{\mathrm{conn}},
$$

其中，$\mathrm{Part}(X)$ 表示 X 的划分，$\left(\mathrm{e}^{\mathcal{V}_Y}\right)_{\mathrm{conn}}$ 表示连通部分，其定义采用递归方式。递归定义在应用中难以使用，因此下面给出一种更便于使用的表示方式。

定理 3.1 ([11, 定理 3.1])。 以下恒等式成立

$$
\left(\mathrm{e}^{\mathcal{V}_Y}\right)_{\mathrm{conn}}=\sum_{T\text{ on }Y}\left(\prod_{(x,y)\in T}v_{xy}\right)\int \mathrm{d}\rho_T(s)\,\mathrm{e}^{\mathcal{V}_Y(s)}\,.
$$

这里，对树 Ton Y 求和，$\mathrm{d}\rho_T$是一个支撑在 $[0,1]^{P(Y)}$上的概率测度，其中 $P(Y)$ 是 Y 中的无序对集合，并且

$$\mathcal{V}_Y(s) := \frac{1}{2}\sum_{x,y\in Y} s_{xy}v_{xy}, \qquad s=(s_{xy})\in[0,1]^{P(Y)},$$

是 $\mathcal{V}_Y$ 的一种凸解耦，即 $\mathcal{V}_Y(s)$ 可以写成如下形式各项的凸线性组合：$\sum_{Y'\in\Pi}\mathcal{V}_{Y'}$，其中 Π 是 Y 的一个划分。

该结果针对复值二体势 [11, 定理 3.1] 中给出，$\mathcal{V}_X$但其表述实际上适用于交换巴拿赫代数，尤其适用于偶格拉斯曼代数，参见 [26]。

命题 3.2 (分部积分 SUSY 簇展开)。 在定理 *1.4* 的假设下，令 ζ 和 P 如 (3.2) 所示，并设

$$\mathcal{V}_Y := \frac{1}{2}\sum_{x,y\in Y} v_{xy}\ , \qquad v_{xy} := \Phi_x^* P_{xy}\Phi_y + \Phi_y^* P_{yx}\Phi_x\ .$$

那么，对于任意 $\varepsilon>0$、$n\geq 0$ 和 $\hat{}x\in\Lambda$，恒等式成立：

$$\partial_E^n\mathbb{E}[(G_\Lambda(E+\mathrm{i}\varepsilon))_{\hat{x}\hat{x}}] = 2\sum_{\substack{Y\subset\Lambda:\\ Y\ni\hat{x}}}\left(\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\right)^{|Y|+n}\sum_{T\text{ on }Y}\mathcal{K}_{T,n}(Y), \tag{3.5}$$

其中

$$\mathcal{K}_{T,n}(Y) = \int \mathrm{d}\rho_T(s)\int \mathrm{d}\Phi_Y\,\nu_Y(|\varphi|^2)\Big(\sum_{x\in Y}|\varphi_x|^2\Big)^n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}(\varphi^*\zeta\varphi)_Y}\mathcal{D}_Y\left(\prod_{(x,y)\in T} v_{xy}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\mathcal{V}_Y(s)}\right)\xi_{\hat{x}}\overline{\xi}_{\hat{x}}\ .$$

这里使用了简写 $(\varphi^*\zeta\varphi)_Y=\sum_{x\in Y}\zeta_x|\varphi_x|^2$。

证明。 证明应用了定理3.1 以及超对称局部化定理，参见定理 A.4。我们的出发点是超对称表示（3.1），在取无序平均之前进行。这是因为无序期望会引入相关性，使得追踪所需的超对称抵消更加困难。

定义对角矩阵 $\tilde{\zeta}:=\zeta-\lambda V$并将吉布斯因子 $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\lambda^{\Phi^*P\Phi}}$在（3.1）中按连通分量展开，按照定理 3.1

$$\begin{aligned}
&(G_\Lambda(E+\mathrm{i}\varepsilon))_{\hat{x}\hat{x}}\\
&= \frac{\mathrm{i}}{\lambda}\int \mathrm{d}\Phi_\Lambda\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Phi^*\tilde{\zeta}\Phi}\xi_{\hat{x}}\overline{\xi}_{\hat{x}}\left[\sum_{\Pi\in\mathrm{Part}(\Lambda)}\prod_{Y\in\Pi}\sum_{T\text{ on }Y}\int \mathrm{d}\rho_T(s)\left(\prod_{(x,y)\in T}\frac{\mathrm{i}v_{xy}}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\mathcal{V}_Y(s)}\right]\\
&= \frac{\mathrm{i}}{\lambda}\sum_{\Pi\in\mathrm{Part}(\Lambda)}\prod_{Y\in\Pi}\sum_{T\text{ on }Y}\int \mathrm{d}\rho_T(s)\int \mathrm{d}\Phi_Y\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}(\Phi^*\tilde{\zeta}\Phi)_Y}(\xi_{\hat{x}}\overline{\xi}_{\hat{x}})^{\mathbf{1}_{\hat{x}\in Y}}\left(\prod_{(x,y)\in T}\frac{\mathrm{i}v_{xy}}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\mathcal{V}_Y(s)}\ ,
\end{aligned}$$

其中我们将关于 Φ_Λ 的积分分解开来，取项 $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\lambda^{\Phi^*\tilde{\zeta}\Phi}}=\prod_Y \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\left(\Phi^*\tilde{\zeta}\Phi\right)_Y}$，并利用 Fubini 定理交换积分次序；请参见定理 1.4 的证明。若 $\hat{}x\notin Y$，则

被积函数是超对称的，并且几乎必然随无穷远处的 $\mathbb{P}$ 扰动而衰减。在这种情况下，根据定理 A.4，该积分的值为

$$\int \mathrm{d}\Phi_Y \, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\left(\Phi^*\tilde{\zeta}\Phi\right)_Y} \left(\prod_{(x,y)\in T} \frac{\mathrm{i}v_{xy}}{\lambda} \right) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\mathcal{V}_Y(s)} = \begin{cases} 0 & \text{if } |Y| > 0 \\ 1 & \text{if } |Y| = 0. \end{cases}$$

因此，关于 $Y \in \Pi$ 的乘积在存在集合 $Y \in \Pi$ 使得 $\hat{}x \notin Y$ 且$|Y| > 1$时为零。换言之，能够给出非零贡献的划分只有以下形式：$\Pi = \{Y, \{x_1\}, \ldots, \{x_N\}\}$，其中 $Y \subset \Lambda$使得 $\hat{}x \in Y$且 $\{x_1, \ldots, x_N\} = \Lambda \setminus Y$。最后，为了得到 3.5 式（对于 $n = 0$），我们进行分部积分，并像定理 1.4 的证明中那样，将无序平均移入积分号内。对于 $n > 0$ 的恒等式，则通过控制收敛将导数移入积分号内得到，因为 $\varepsilon > 0$。 □

3.2 活度估计：命题 2.4 的证明

命题 3.2 的簇展开将平均格林函数表示为对由树 T 的分支连接起来的簇求和。因此，该展开的收敛性可由对簇活度 $\mathcal{K}_{T,\,n}(Y)$ 的适当估计推出。我们首先对固定的树 T 推导这样的界，并明确保留其对跃迁振幅以及 V 的特征函数矩的依赖。

命题 3.3。 在定理 *2.3*的假设下，进一步假设 $\lambda \geq 1$。那么，存在常数 $C > 1$，仅依赖于 H_0，使得对于任意 $Y \subset \mathbb{Z}^d$ 有限的、 T 在Y，以及 $n \in \mathbb{N}_0$

$$|\mathcal{K}_{T,n}(Y)| \leq C^{|Y|} \left(\prod_{(x,y)\in T} |P_{xy}| \right) \int_{\mathbb{R}_+^Y} \mathrm{d}r \, \left|\nu_Y(r^2)\right| \Big(\sum_{x\in Y} r_x^2 \Big)^n \prod_{x\in Y} \left(1 + r_x^{2A+1}\right).$$

证明。 我们用 C 表示仅依赖于 H_0的通用正常数，其取值可能随行而变化。由引理（A.5），我们得到以下界

$$|\mathcal{K}_{T,n}(Y)| \leq \int \mathrm{d}\rho_T(s) \int \mathrm{d}\varphi_Y \, \left|\nu_Y(|\varphi|^2)\right| \Big(\sum_{x\in Y} |\varphi_x|^2 \Big)^n \left\| \mathcal{D}_Y \left(\prod_{(x,y)\in T} v_{xy} \, \mathrm{e}^{\mathcal{V}_Y(s)} \right) \xi_{\hat{x}} \overline{\xi}_{\hat{x}} \right\| . \tag{3.6}$$

为估计格拉斯曼范数，我们引入如下简写记号

$$h_T(\Phi) := \prod_{(x,y)\in T} \left(\Phi_x^* P_{xy} \Phi_y + \Phi_y^* P_{yx} \Phi_x \right), \qquad f_T(\varphi) := \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2\lambda} \sum_{x,y\in Y} s_{xy} \left(\overline{\varphi}_x P_{xy} \varphi_y + \overline{\varphi}_y P_{yx} \varphi_x \right)},$$

并展开微分算子

$$\mathcal{D}_Y = \prod_{x\in Y} \left(1 - \overline{\xi}_x \xi_x \frac{\partial_{\varphi_x}}{\overline{\varphi}_x} \right) = \sum_{\beta\in\{0,1\}^Y} (-1)^{|\beta|} \prod_{x\in Y} \frac{(\overline{\xi}_x \xi_x)^{\beta_x}}{\overline{\varphi}_x^{\beta_x}} \partial_\varphi^\beta .$$

利用范数的次乘性性质，见（A.1），可得

$$\left\| \mathcal{D}_Y \left(\ldots \right) \xi_{\hat{x}} \overline{\xi}_{\hat{x}} \right\| \leq \sum_{\beta\in\{0,1\}^Y} \frac{1}{\prod_{x\in Y} |\varphi_x|^{\beta_x}} \left\| \partial_\varphi^\beta \left(h_T(\Phi) f_T(\varphi) \right) \right\| \tag{3.7}$$

$$\times \left\| \prod_{x\in\Lambda} (\overline{\xi}_x \xi_x)^{\beta_x} \xi_{\hat{x}} \overline{\xi}_{\hat{x}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2\lambda} \sum_{x,y\in Y} s_{xy} \left(\overline{\xi}_x P_{xy} \xi_x + \overline{\xi}_y P_{yx} \xi_x \right)} \right\| .$$

纯 Grassmann 项通过反复应用次乘性性质，并利用对于任意 x， $\|\xi_x\| = \|\xi_x\| = 1$ 得到估计

$$\begin{aligned} &\left\| \prod_{x\in Y} (\bar{\xi}_x \xi_x)^{\beta_x} \xi_{\hat{x}} \bar{\xi}_{\hat{x}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2\lambda} \sum_{x,y\in Y} s_{xy} \left(\bar{\xi}_x P_{xy} \xi_y + \bar{\xi}_y P_{yx} \xi_x\right)} \right\| \\ &\qquad \leq \left\| \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2\lambda} \sum_{x,y\in Y} s_{xy} \left(\bar{\xi}_x P_{xy} \xi_y + \bar{\xi}_y P_{yx} \xi_x\right)} \right\| \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda} \sum_{x,y\in Y} |P_{xy}|} \leq C^{|Y|} , \end{aligned} \tag{3.8}$$

这里还用到了 $s_{xy} \leq 1$，并且对于有界有限程算子 $\sum_{x,\ y\in Y} |P_{xy}| \leq C|Y|$。另一方面，根据导数的莱布尼茨法则

$$\left\| \partial_\varphi^\beta \left(h_T(\Phi) f_T(\varphi) \right) \right\| \leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \left\| \partial_\varphi^\gamma h_T(\Phi) \right\| \left| \partial_\varphi^{\beta-\gamma} f_T(\varphi) \right| .$$

对于多重指标 γ， $\beta \in \{0,1\}^Y$，我们引入二项式系数

$$\binom{\beta}{\gamma} := \prod_x \binom{\beta_x}{\gamma_x} = 1 ,$$

并且记号 $\gamma \leq \beta$ 表示对所有 $x \in Y$， $\gamma_x \leq \beta_x$。直接计算可得

$$|\partial_\varphi^{\beta-\gamma} f_T(\varphi)| = \left| \prod_{x\in Y} \left(\frac{\mathrm{i}}{\lambda} \sum_{y\in Y} s_{xy} \overline{\varphi}_y P_{yx} \right)^{\beta_x - \gamma_x} f_T(\varphi) \right| = \prod_{x\in Y} \left| \frac{1}{\lambda} \sum_{y\in Y} s_{xy} \overline{\varphi}_y P_{yx} \right|^{\beta_x - \gamma_x} ,$$

因此，利用 H_0的有限程性质（见2.2），我们得到

$$|\partial_\varphi^{\beta-\gamma} f_T(\varphi)| \leq C^{|Y|} \lambda^{-|\beta-\gamma|} \prod_{x\in Y} (|\varphi_x|^A \vee 1) \leq C^{|Y|} \prod_{x\in Y} (|\varphi_x|^A \vee 1)$$

对于某个常数 C，它依赖于 H_0；这里我们使用了记号 $|\beta - \gamma| = \sum_x (\beta_x - \gamma_x)$。为了界定由 $h_T(\Phi)$ 导致的贡献，我们注意到，由于 H_0满足有限程假设，因此 P也满足该假设，树中的每个顶点最多有 A 个相邻顶点。再次利用 Grassmann 变量的范数为一这一点，我们有

$$\left\| \partial_\varphi^\gamma h_T(\Phi) \right\| \leq C^{|Y|} \left(\prod_{(x,y)\in T} |P_{xy}| \right) A^{|\gamma|} \prod_{x\in Y} (|\varphi_x|^A \vee 1).$$

因此，利用 $|\beta| \leq |Y|$

$$\left\| \partial_\varphi^\beta \left(h_T(\Phi) f_T(\varphi) \right) \right\| \leq C^{|Y|} \left(\prod_{(x,y)\in T} |P_{xy}| \right) \prod_{x\in Y} (|\varphi_x|^{2A} \vee 1). \tag{3.9}$$

其中某个常数取决于 H_0。结合式（3.6）、（3.7）、（3.8）和（3.9），并重新整理关于 β 的求和，可得

$$|\mathcal{K}_{T,n}(Y)| \leq C^{|Y|} \left(\prod_{(x,y)\in T} |P_{xy}| \right) \int \mathrm{d}\varphi_Y \, |\nu_Y(|\varphi|^2)| \Big(\sum_{x\in Y} |\varphi_x|^2 \Big)^n \prod_{x\in Y} \left(1 + \frac{1}{|\varphi_x|} \right) (|\varphi_x|^{2A} \vee 1)$$

我们用极坐标表示积分 $r_x = |\varphi_x|$，并利用 $\left(1 + \frac{1}{|\varphi_x|}\right)(|\varphi_x|^{2A} \vee 1) \lesssim |\varphi_x|^{2A} + \frac{1}{|\varphi_x|}$ 得到所需结论。 □

现在我们利用 2.4 关于 的特征函数的矩估计 V和标准树剥离估计来证明命题。

Pr命题 *2.4* 的证明。 我们通过如下方式改写命题3.2中的展开式：

$$\sum_{\substack{Y\subset\Lambda:\\ Y\ni\hat{x}}}\sum_{T\text{ on }Y}\mathcal{K}_{T,n}(Y)=\sum_{N=0}^{|\Lambda'|}\frac{1}{N!}\sum_{\substack{y_1,\dots,y_N\in\Lambda'\\ \text{distinct}}}\sum_{T\text{ on }\{1,\dots,N+1\}}\mathcal{K}_{T,n}(\{y_1,\dots,y_{N+1}\}),$$

其中我们令 $\Lambda'=\Lambda\setminus\{\hat{x}\}$ 和 $y_{N+1}=\hat{x}$。因子 $1/N!$ 确保每个构型只被计数一次。

因此，结合命题 3.3，我们得到如下界：

$$\begin{aligned}&|\partial_E^n\mathbb{E}[(G_\Lambda(E+\mathrm{i}\varepsilon))_{\hat{x}\hat{x}}]| \qquad (3.10)\\ &\le\frac{C}{\lambda^{n+1}}\sum_{N=0}^{|\Lambda'|}\frac{1}{N!}\left(\frac{C}{2\lambda}\right)^N\left(\sup_{\substack{Y\subset\Lambda:\\ |Y|=N+1}}\int_{R_+^Y}\mathrm{d}r\,|\nu_Y(r^2)|\Big(\sum_{y\in Y}r_y^2\Big)^n\prod_{x\in Y}\left(1+r_x^{2A+1}\right)\right)\\ &\qquad\times\sum_{\substack{y_1,\dots,y_N\in\Lambda'\\ \text{distinct}}}\sum_{T\text{ on }\{1,\dots,N+1\}}\left(\prod_{(m,n)\in T}P_{y_my_n}\right).\end{aligned}$$

对某个仅依赖于 H_0 的常数 C。
利用 V 满足直到阶数 $2(A+n)+1$ 的可积界，存在某个还依赖于 A 的常数 K_n，使得

$$\int_{\mathbb{R}_+^Y}\mathrm{d}r\,\nu_Y(r^2)\Big(\sum_{y\in Y}r_y^2\Big)^n\prod_{x\in Y}\left(1+r_x^{2A+1}\right)\le K_n^{|Y|}. \qquad (3.11)$$

此外，标准树剥离估计（例如参见 [11],）给出对固定的 T

$$\sum_{\substack{y_1,\dots,y_N\in\Lambda'\\ \text{distinct}}}\prod_{(m,m')\in T}|P_{y_my_{m'}}|\le\Big(\sup_x\sum_y|P_{xy}|\Big)^N\le C^N. \qquad (3.12)$$

因此，由凯莱定理，具有 $N+1$ 个无标号顶点的树的数量为（$N+1^{N-1}\le N!\ \mathrm{e}^{N+1}$，将（3.11）和（3.12）代入（3.10）可得

$$|\partial_E^n\mathbb{E}[(G_\Lambda(E+\mathrm{i}\varepsilon))_{\hat{x}\hat{x}}]|\le\frac{C_n'}{\lambda^{n+1}}\sum_{N=0}^{|\Lambda'|}\left(\frac{C_n}{\lambda}\right)^N.$$

对于足够大的 λ，且其大小取决于 H_0 以及由（ K_n 3.11）中的常数。

□

超对称形式主义

本附录总结了全文所使用的超对称形式主义的相关要素。标准参考文献包括 [7, 40]。

A.1 格拉斯曼演算

格拉斯曼代数是一个生成元满足反对易关系的复幺代数。我们令

$$\mathcal{A}_\Lambda = \mathcal{A}[(\xi_x, \bar{\xi}_x)_{x\in\Lambda}]$$

$\bar{}$表示由（ξ_x， ξ_x）$_{x\in\Lambda}$生成的格拉斯曼代数，其中 Λ是某个有限集合。反交换生成元满足以下关系：

$$\{\xi_x, \xi_y\} = \{\xi_x, \bar{\xi}_y\} = \{\bar{\xi}_x, \bar{\xi}_y\} = 0 \qquad \forall x, y \in \Lambda \ ,$$

其中， $\{\cdot,\cdot\}$ 表示反对易子。每个元素 $a \in \mathcal{A}_\Lambda$ 都可唯一展开为

$$a = \sum_{I,I'} a_{I,I'}\, \xi_I \bar{\xi}_{I'},$$

$\bar{}$其中， I 和 I' 遍历 Λ中的有序多重指标， $a_{I,\ I'} \in \mathbb{C}$，而 ξ_I 和 $\xi_{I'}$ 表示相应的有序单项式，约定 $\xi_\emptyset = \xi_\emptyset = 1$。

$\bar{}$奇偶自同构 $\mathscr{P}\ (\xi_i) = -\xi_i$， $\mathscr{P}\ (\xi_i) = -\xi_i$，诱导出如下分解：

$$\mathcal{A}_\Lambda = \mathcal{A}^0_\Lambda \oplus \mathcal{A}^1_\Lambda$$

分解为偶元素和奇元素。注意， $\mathcal{A}^0_\Lambda$ 中的元素彼此对易，而 $\mathcal{A}^1_\Lambda$ 中的元素彼此反对易。记

$$a = b_a + n_a,$$

其中， $b_a := a_\emptyset \in \mathbb{C}$ 是 a的体，而 n_a 是其幂零部分。
若 $a \in (\mathcal{A}^0_\Lambda)^k$，则 $a = b_a + n_a$，其中 $b_a \in \mathbb{R}^k$ 和 n_a 是幂零的。因此，对于任意满足 $m \geq |\Lambda|$的 $f \in C^m(\mathbb{R}^k)$，我们可以定义

$$f(a) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^k} \frac{\partial^\alpha f(b_a)}{\alpha!}\, n_a^\alpha \ . \tag{A.1}$$

由于 n_a 是幂零的，上述泰勒展开是有限的，因此定义良好
为格拉斯曼代数配备一种 ℓ^1型范数会很方便。对于任意 $a \in \mathcal{A}_\Lambda$、$\bar{}$，其分解为$a = \dot{\sum}_{I,\ I'} a_{I,\ I'}\, \xi_I \xi_{I'}$，我们定义

$$\|a\| := \sum_{I,I'} |a_{I,I'}| \ . \tag{A.2}$$

容易验证

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \ , \qquad \forall a, b \in \mathcal{A} \ ,$$

并且 $\|1\| = 1$，因此（$\mathcal{A}_\Lambda$， $\|\cdot\|$）是一个赋范代数，详见 [26, 引理 2。4]。
现在回顾 Grassmann 导数。对于给定的 $x \in \Lambda$，任意 $a \in \mathcal{A}_\Lambda$ 都有唯一的分解

$$a = a_1 + \xi_x a_2$$

对于某个 a_1， $a_2 \in \mathcal{A}_\Lambda$ ，其与 ξ_x 无关。我们将（左）导数定义为

$$\partial_{\xi_x} a := a_2 \ .$$

对于 $\partial_{\bar{\xi}_x}$，也有类似的定义。可以看出

$$\{\partial_{\xi_x}, \partial_{\xi_y}\} = \{\partial_{\xi_x}, \partial_{\bar{\xi}_y}\} = \{\partial_{\bar{\xi}_x}, \partial_{\bar{\xi}_y}\} = 0 \ , \qquad \forall x, y \in \Lambda$$

此外，可以证明一个乘积法则：

$$\partial_{\xi_x}(ab) = (\partial_{\xi_x} a)\, b + \mathscr{P}(a)\,(\partial_{\xi_x} b) \ , \tag{A.3}$$

其中，$\mathscr{P}$ 是上文引入的奇偶自同构。Grassmann 积分与导数相同；平坦的 Berezin 积分形式为

$$\int \mathrm{d}\xi_\Lambda a(\xi) = \Big[\prod_{x\in\Lambda} \partial_{\bar{\xi}_x} \partial_{\xi_x} \Big] a(\xi) \ ,$$

其中，配对 $\partial_{\bar{\xi}_x} \partial_{\xi_x}$ 的顺序无关紧要，因为它们彼此可交换。上文引入的范数通过以下关系控制 Berezin 积分

$$\left| \int \mathrm{d}\xi_\Lambda a(\xi) \right| \leq \|a\| \ . \tag{A.4}$$

由于 Grassmann 变量的二次表达式是偶的且幂零，指数函数 $\mathrm{e}^{-\sum_{x,\ y\in\Lambda} \bar{\xi}_x M_{xy} \xi_y}$ 是有限多项式，因此定义良好。
这使得我们可以仿照普通高斯积分，定义 Grassmann 高斯积分。然而，由于 Grassmann 变量的反交换性，所得恒等式有显著差异。

命题 A.1 (Grassmann 变量上的高斯积分)。考虑格拉斯曼代数 $\mathcal{A}_\Lambda$。对于任意矩阵 $M \in \mathbb{C}^{\Lambda\times\Lambda}$，有

$$\int \mathrm{d}\xi_\Lambda \, \mathrm{e}^{-\sum_{x,y\in\Lambda} \bar{\xi}_x M_{xy} \xi_y} = \det M \ .$$

此外，若 M 可逆，则对于任意$a \in \mathcal{A}_\Lambda$，以下分部积分公式成立

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}\xi_\Lambda \, \mathrm{e}^{-\sum_{x,y\in\Lambda} \bar{\xi}_x M_{xy} \xi_y} \xi_x a &= \int \mathrm{d}\xi_\Lambda \, \mathrm{e}^{-\sum_{x,y\in\Lambda} \bar{\xi}_x M_{xy} \xi_y} \sum_{y\in\Lambda} M^{-1}_{xy} \partial_{\bar{\xi}_y} a \\ \int \mathrm{d}\xi_\Lambda \, \mathrm{e}^{-\sum_{x,y\in\Lambda} \bar{\xi}_x M_{xy} \xi_y} \bar{\xi}_x a &= -\int \mathrm{d}\xi_\Lambda \, \mathrm{e}^{-\sum_{x,y\in\Lambda} \bar{\xi}_x M_{xy} \xi_y} \sum_{y\in\Lambda} M^{-1}_{xy} \partial_{\xi_y} a \end{aligned} \tag{A.5}$$

证明是组合性的，可参见 [40, 第 3 节3]。命题 A.1 中出现的行列式正是 Grassmann 变量在随机算子研究中发挥作用的关键特征。结合普通高斯积分，它可以实现行列式与逆行列式之间的精确抵消，而这正是超对称技巧的核心。

A.2 超对称技巧

我们引入如下形式的超向量

$$\Phi_x = (\varphi_x, \xi_x)^t \ , \qquad \Phi^*_x = (\overline{\varphi}_x, \overline{\xi}_x) \ ,$$

其中 $\cdot^t$ 表示转置，由复变量 $\varphi_x \in \mathbb{C}$、$\bar{\varphi}_x$ （¯复共轭）以及 Grassmann 变量 ξ_x，$\xi_x \in \mathcal{A}_\Lambda$组成。我们记 $\Phi = (\Phi_x)_{x\in\Lambda}$ 和$\Phi^* = (\Phi^*_x)_{x\in\Lambda}$，并采用以下约定

$$\Phi^*_x \Phi_y = \bar{\varphi}_x \varphi_y + \bar{\xi}_x \xi_y \ , \qquad \forall x, y \in \Lambda$$

以及

$$\Phi^*\Phi = \sum_{x\in\Lambda} \Phi_x^*\Phi_x \qquad \Phi^*M\Phi := \sum_{x,y\in\Lambda} M_{xy}\Phi_x^*\Phi_y, \qquad M \in \mathbb{C}^{\Lambda\times\Lambda}\,.$$

我们还引入超积分形式

$$\mathrm{d}\Phi_x \;= \frac{\mathrm{dRe}\varphi_x\,\mathrm{dIm}\varphi_x}{\pi}\partial_{\bar\xi_x}\partial_{\xi_x}\,, \qquad \mathrm{d}\Phi_\Lambda := \prod_{x\in\Lambda}\mathrm{d}\Phi_x\;.$$

标准积分与 Grassmann 积分产生的行列式相互抵消，从而得到以下表示公式，这也是超对称方法的出发点。

引理 A.2. 对于任意具有正定实部的复对称矩阵 $M \in \mathbb{C}^{\Lambda\times\Lambda}$，我们有

$$1 = \int \mathrm{d}\Phi_\Lambda\; \mathrm{e}^{-\Phi^*M\Phi}\,, \qquad M^{-1}_{xy} = \int \mathrm{d}\Phi_\Lambda\, \xi_x\bar\xi_y\, \mathrm{e}^{-\Phi^*M\Phi}\,. \tag{A.6}$$

这是命题 A.1与标准高斯积分直接得出的结果。(A.6) 中的第一个恒等式就是超对称抵消的一个例子。为了更一般地描述这些抵消，我们引入作用于超向量 Φ函数的超对称生成元。该超对称生成元是以下奇微分算子

$$Q_\Phi = \sum_{x\in\Lambda}\Big[\bar\xi_x\partial_{\bar\varphi_x} - \bar\varphi_x\partial_{\bar\xi_x} + \xi_x\partial_{\varphi_x} + \varphi_x\partial_{\xi_x}\Big]\,.$$

函数 f 若是 Q-闭的，则称其为超对称函数；也就是说，它可微且

$$Q_\Phi f(\Phi) = 0.$$

例如，以下函数类是超对称的。

引理 A.3. 设 $\mathcal{P}_\Lambda$ 为 Λ 中的无序对集合，且 $f\colon\ \mathbb{R}^{\mathcal{P}_\Lambda} \to \mathbb{C}$ 为光滑函数。那么

$$f(\{\Phi_x^*\Phi_y + \Phi_y^*\Phi_x\}_{(xy)\in\mathcal{P}_\Lambda})$$

这是一个定义良好的超对称函数。

证明. 稍微滥用一下记号，我们简记 $f(\Phi) \equiv f(\{\Phi_x^*\Phi_y + \Phi_y^*\Phi_x\}_{(xy)\in\mathcal{P}_\Lambda})$。首先注意，$\Phi_x^*\Phi_y + \Phi_y^*\Phi_x$ 的体为实数，因此 $f(\Phi)$ 由（A.1）可知有意义。由（A.1）可知链式法则成立，并结合（A.3）可得

$$\frac{\partial}{\partial\xi_x}f(\Phi) = \sum_{(yy')\in\mathcal{P}_\Lambda}\partial_{(yy')}f(\Phi)\partial_{\xi_x}(\Phi_y^*\Phi_{y'} + \Phi_{y'}^*\Phi_y) = -\sum_y \bar\xi_y\partial_{(yx)}f(\Phi)\,,$$

其中 $\partial_{(yy')}$ 表示关于与无序对 (yy') 相关联的坐标的导数。类似地，我们可以计算关于 ξ_j, $\bar\varphi_j$ 和 φ_j的导数。利用这些计算可知

$$Q_\Phi f(\Phi) = \sum_{(xy)\in\mathcal{P}_\Lambda}\big(Q_\Phi(\Phi_x^*\Phi_y) + Q_\Phi(\Phi_y^*\Phi_x)\big)\partial_{(yx)}f(\Phi) = 0$$

其中我们利用了 $Q_\Phi(\Phi_x^*\Phi_y) = \xi_x\bar\varphi_y - \varphi_x\bar\xi_y + \xi_x\varphi_y - \varphi_x\xi_y$。 □

超对称方法中使用的大多数抵消机制最终都源自以下重要恒等式。

定理 A.4 （SUSY 局部化公式）。 设 f 为超对称 *Schwartz* 函数，则

$$\int \mathrm{d}\Phi_\Lambda \, f(\Phi) = f(0).$$

证明见 [22, 附录 C]。关于超流形上积分的局部化结果的概述见 [36]。SUSY 局部化公式的一个简单推论是恒等式

$$\int \mathrm{d}\Phi_\Lambda \, \xi_x \overline{\xi}_y \, \mathrm{e}^{-\Phi^* M \Phi} = \int \mathrm{d}\Phi_\Lambda \, \varphi_x \overline{\varphi}_y \, \mathrm{e}^{-\Phi^* M \Phi} \, .$$

这说明了超对称性所生成的复关联函数与 Grassmann 关联函数之间的对应关系。

本节最后给出一个在全文中反复使用的估计。

引理 A.5。 对于任意超函数 f（Φ），有如下界

$$\left| \int \mathrm{d}\Phi_\Lambda \; f(\Phi) \right| \leq \int \mathrm{d}\varphi_\Lambda \, \| f(\Phi) \| \, .$$

这是（A.4）的直接推论。

致谢 波恩大学的研究工作得到了德国研究基金会（DFG）通过德国卓越战略资助，项目编号为 GZ 2047/1 - 390685813；同时也得到了德国科学基金会（DFG，德国研究基金会）资助，项目编号为 CRC 1720 - 539309657。L. F. 感谢欧盟地平线 2020 研究与创新计划通过玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号 101154394）提供的部分资助。

人工智能声明 本文的数学内容是在没有人工智能协助的情况下完成的。作者部分使用了免费的人工智能工具辅助处理英语语法。作者对稿件内容承担全部责任。

参考文献

[1] E. Abrahams、P. W. Anderson、D.C. Licciardello 和 T.V. Ramakrishnan。《局域化标度理论：二维中的无量子扩散》 *Phys. Rev. Lett.*，42:673，1979年3月。[2] M. Aizenman 和 S. Molchanov。《大无序和极端能量下的局域化：一种初等推导》 *Commun. Math. Phys.*，157:245–278，1993年。[3] M. Aizenman 和 S. Warzel。《 *Random Operators: Disorder Effects on Quantum Spectra and Dynamics*》。数学研究生教材。美国数学学会，2015年。[4] P. W. Anderson。《某些随机晶格中的无扩散》 *Physical Review*，109(5):1492–1505，1958年3月。[5] G. Antinucci、L. Fresta 和 M. Porta。《弱无序三维半金属的超对称分层模型》 *Ann. Henri Poincaré*，21(11):3499–3574，2020年。[6] Z. Bao 和 E. Erd

″ *Probab. Theory Relat.* os。

Fields 167 673 776, 2018
《一类随机分块带状矩阵的离域化》.，：–。[7] F.A. Berezin。《 *Introduction to Superanalysis*》。数理物理与应用数学。Springer，1987年。

[8] J. Bourgain 和 C.E. Kenig。《高维连续安德森-伯努利模型中的局域化》 *Invent. Math.*，161(2):389–426，2005年。[9] A. Bovier。《弱无序安德森模型的态密度：层次模型的重整化群分析》 *Journal of Statistical Physics*，59(3–4):745–779，1990年5月。[10] A. Bovier、A. Campanino、A. Klein 和 J. F. Perez。《强无序安德森模型态密度的光滑性》 *Communications in Mathematical Physics*，114(3):439–461，1988年9月。[11] David C. Brydges。《簇展开简明教程》。Les Houches，第XLIII届会议，《临界现象、随机系统、规范理论》，1984年。[12] M. Campanino 和 A. Klein。《超对称转移矩阵与一维安德森模型态密度的可微性》 *Commun. Math. Phys.*，104:227–241，1986年。[13] R. Carmona、A. Klein 和 F. Martinelli。《伯努利势及其他奇异势下的安德森局域化》 *Commun. Math. Phys.*，108(3):41–66，1987年。[14] R. Carmona 和 J. Lacroix。《 *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*》。Birkh¨auser Boston，1990年。[15] J. M. Combes、P. D. Hislop 和 E. Mourre。《随机薛定谔算子的相关Wegner不等式》 *n: Advances in Differential Equations and Mathematical Physics*，第191–203页，1998年。[16] F. Constantinescu、J. Fr¨ohlich 和 T. Spencer。《晶格上随机薛定谔算子的态密度解析性与复制方法》 *J. Stat. Phys.*，34(3–4):571–596，1984年2月。[17] W. Craig 和 B. Simon。《随机雅可比矩阵积分态密度的对数H¨连续性》 *Commun.Math. Phys.*，90(2):207–218，1983年。[18] F. Delyon 和 B. Souillard。《关于遍历有限差分算子态密度连续性的注记》 *Commun.Math. Phys.*，94(2):289–291，1984年6月。[19] J. Ding 和 C. K. Smart。《二维晶格安德森-伯努利模型边缘附近的局域化》 *Invent. math.*，219:467–506，2020年。[20] M. Disertori 和 M. Lager。《超对称极坐标及其在Lloyd模型中的应用》*Mathematical Physics Analysis and Geometry*，23(1)，2020年1月。[21] M. Disertori 和 T. Spencer。《超对称σ模型的安德森局域化》 *Commun.Math. Phys.* 300 3 659 671, 2010 ( ): – 。[22] M. Disertori、T. Spencer 和 M. R. Zirnbauer。《三维超对称双曲σ模型中的准扩散》 *Commun.Math. Phys.*，300(2):435–486，2010年8月。[23] K. Efetov、A.I. Larkin 和 D.E. Khmelnitskii。《局域化理论中的扩散模相互作用》*Journal of experimental and theoretical physics*，52:568–574，1980年。[24] A. Elgart。《三维安德森模型中的Lifshitz尾与局域化》 *Duke Math. J.*，146 331 360，2009 : – 。[25] L. Erd ″ *Preprint* 2506 06441, os 2025 和 V. Riabov。《随机带状矩阵的之字形策略》.，arXiv: 。[26] L. Fresta。《超对称簇展开及其在随机薛定谔算子中的应用》.，，( )，。[27] R. Froese、D. Hasler 和 W. Spitzer。《树上安德森模型的绝对连续谱：Klein定理的几何证明》 *Commun. Math. Phys.*，269(1):239–257，2007年。[28] J. Fr¨ohlich、F. Martinelli、E. Scoppola 和 T. Spencer。《安德森紧束缚模型中局域化的构造性证明》 *Commun. Math. Phys.*，101:21–46，1985年。[29] J. Fr¨ohlich 和 T. Spencer。《大无序或低能量下安德森紧束缚模型中的无扩散》 *Commun. Math. Phys.*，88:151–184，1983年。[30] W. Kirsch。《随机薛定谔算子入门》，2007年。[31] A. Klein。《Bethe晶格安德森模型中的绝对连续谱》 *Math. Res. Lett.*，1 399: –407，1994年。[32] A. Klein、F. Martinelli 和 J.F. Perez。《一维安德森局域化的严格复制技巧方法》 *Commun. Math. Phys.*，106:623–633，1986年。[33] F. Klopp。《弱无序局域化与Lifshitz尾》 *Commun. Math. Phys.*，232:125–155，2002年。

[34] L. Pastur 和 A. Figotin。 *Spectra of Random and Almost-Periodic Operators*。施普林格出版社，柏林、海德堡，1992 年。[35] W. Rudin。 *Real and Complex Analysis*。麦格劳-希尔，1987 年。[36] A. Schwarz 和 O. Zaboronsky。超对称性与局域化。 *Communications in Mathematical Physics* 183 2 463 476, 1997 ,

（）：–1 月。[37] M. Shcherbina 和 T. Shcherbina。一维随机带状矩阵的普适性。 *Commun. Math. Phys.*, 385 667 716，2021：–。[38] J Sjostrand 和 W Wang。复数域中的超对称测度与最大值原理。格林函数的指数衰减。 *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*，32 3 347 414，1999（）：–5 月。[39] W.-M. Wang。弱无序下多维安德森模型的局域化与泊松统计的普适性。 *Invent. math.*，146:365–398，2001。[40] F. Wegner。 *Supermathematics and its Applications in Statistical Physics*。施普林格出版社，柏林、海德堡，2016 年。[41] F.J. Wegner。迁移率边问题：连续对称性与一个猜想。*Zeitschrift für Physik B Condensed Matter and Quanta* 35 3 207 210, 1979 ,

（）：–9 月。[42] H.-T. Yau 和 J. Yin。一维随机带状矩阵的离域化。 *Preprint*，2025。